Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Сорокина, Оценка параметров многомерных возможностных распределений в случае Архимедовой t -нормы, *Нечеткие системы и мягкие вычисления*, 2018, том 13, выпуск 1, 45–57

DOI: <https://doi.org/10.26456/fssc40>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 12:46:48

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ МНОГОМЕРНЫХ ВОЗМОЖНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В СЛУЧАЕ АРХИМЕДОВОЙ Т-НОРМЫ

Сорокина И.В.

Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила 14.11.2017, после переработки 28.12.2017.

Представлен метод нахождения оценки центра многомерного возможностного распределения в случае Архимедовой t-нормы. Предложенный метод основан на использовании непрерывного аддитивного генератора, позволяющего упростить и свести вычисление t-нормы (как многомерной функции) к вычислению значения одномерного генератора.

Ключевые слова: возможностное распределение, оценка параметров, Архимедова t-норма.

Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2018. Т. 13, № 1. С. 45–57.
<https://doi.org/10.26456/fssc40>

Введение

В [1–3] предлагаются различные варианты методов оценивания параметров одномерных возможностных распределений.

Cai Kai-Yuan разработал метод нахождения оценки параметров нормальных возможностных распределений [2]. В своей работе он рассмотрел методы точечного оценивания и максимального правдоподобия для нахождения значения параметра a при известном b , где a представляет собой модальное значение, а b – коэффициент нечеткости. Также им была получена оценка параметра b при известном a с использованием метода интервального оценивания и оценка a и b в случае, когда оба параметра неизвестны. Dug Hun Hong обобщил результаты Cai и в [3] представил методы оценивания параметров взаимно Т-связанных нечетких величин.

Wang Xizhao и Ha Minghu [1], опираясь на статьи [4–6], разработали метод нахождения μ/E оценки параметров возможностных распределений.

Ранее [7, 8] нами было предложено обобщение метода Wang Xizhao и Ha Minghu на случай многомерного распределения возможностей. Этот метод опирается на максимизацию отношения μ/E , где μ – совместное распределение возможностей наблюдения значений выборки, E – мера нечеткости распределения.

Также в [9] был обобщен метод оценивания параметров взаимно минисвязанных нечетких величин, распространяющий подход Dug Hun Hong [3] на многомерный случай. Этот метод основан на минимизации доверительного интервала при заданном уровне риска.

В данной статье предлагается подход с использованием аддитивного генератора, на основе которого можно получить оценку для центра распределения.

1. Основные понятия

В соответствии с [10, 11] Γ есть множество элементов, обозначаемых через $\gamma \in \Gamma$, $P(\Gamma)$ — множество всех подмножеств Γ . Через Π обозначим возможность меру, определенную на $P(\Gamma)$, триплет $(\Gamma, P(\Gamma), \Pi)$ будем называть возможным пространством.

Определение 1. *Отображение $\xi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^1$ называется нечеткой (возможностной) величиной с функцией распределения, обозначаемой μ_ξ и определяемой следующим образом:*

$$\mu_\xi(x) = \Pi\{\gamma \in \Gamma \mid \xi(\gamma) = x\}, x \in \mathbb{R}^1.$$

Определение 2. *Точка $a \in \mathbb{R}^1$ называется модальным значением возможностной величины ξ , если $\mu_\xi(a) = 1$.*

Определение 3. *α -уровневым множеством возможностной величины ξ называется множество*

$$\xi_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^1 \mid \mu_\xi(x) \geq \alpha\}.$$

Обозначим через ξ_α^- левую границу α -уровневого множества, через ξ_α^+ правую границу α -уровневого множества.

Согласно [12] введем понятие совместной функции распределения.

Определение 4. *Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — нечеткие величины. Совместная функция распределения $\mu_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n)$ нечетких величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ определяется следующим образом:*

$$\begin{aligned} \mu_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) &= \Pi\{\gamma \in \Gamma : \xi_1(\gamma) = x_1, \dots, \xi_n(\gamma) = x_n\} = \\ &= \Pi\{\xi_1^{-1}(x_1) \cap \dots \cap \xi_n^{-1}(x_n)\}, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Возможностные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ называют взаимно-минисвязанными, если для любого подмножества $\{i_1, \dots, i_k\}$ множества $\{1, 2, \dots, n\}$

$$\mu_{\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}}(x_1, \dots, x_k) = \min\{\mu_{\xi_{i_1}}(x_1), \dots, \mu_{\xi_{i_k}}(x_k)\}.$$

Определение 5. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — n взаимно-минисвязанных, одинаково распределенных нечетких величин, тогда $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ называют выборкой семейства, а $x_1, x_2, \dots, x_n$ — наблюдаемыми значениями выборки $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$.*

Определение 6. *Любая функция от выборки $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, которая не включает неизвестные параметры, называется статистикой.*

Заметим, что статистика является нечеткой величиной.

Определение 7. *Под семейством распределений будем понимать множество распределений, зависящих от вектора параметров θ :*

$$\{\mu_\xi(x, \theta) \mid \theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \in \Theta\},$$

где Θ — пространство параметров распределения ($\Theta \subseteq \mathbb{R}^m$).

Задача оценивания параметров возможностного распределения состоит в том, чтобы найти вектор параметров θ на основе значений $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ выборки $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ после проведения n наблюдений.

Агрегирование нечеткой информации в данной статье основывается на использовании треугольных норм (t -норм) [13,14]. Данный математический инструмент позволяет обобщить понятие t -связанности на совокупность возможностей величин. Рассмотрим основные понятия, связанные с t -нормами [15].

Определение 8. *Отображение $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ называется треугольной нормой (или t -нормой), если для любого $x \in [0, 1]$ оно обладает следующими свойствами:*

1. *ограниченность:* $T(1, x) = x$;
2. *симметричность:* $T(x, y) = T(y, x)$;
3. *ассоциативность:* $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$;
4. *монотонность:* $T(w, y) \leq T(x, z)$, если $w \leq x, y \leq z$.

Среди часто используемых t -норм отметим следующие:

1. операция взятия минимума: $T_M(x, y) = \min\{x, y\}$. Данную t -норму также называют сильнейшей;
2. алгебраическое произведение: $T_P(x, y) = xy$;
3. T -норма Лукасевича: $T_L(x, y) = \max\{x + y - 1, 0\}$;
4. слабейшая t -норма: $T_W(x, y) = \begin{cases} \min\{x, y\}, & \text{если } \max\{x, y\} = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

Для приведенных t -норм справедливо следующее соотношение:

$$T_W(x, y) \leq T_L(x, y) \leq T_P(x, y) \leq T_M(x, y).$$

Определение 9. t -норма T называется строгой, если она непрерывна и строго монотонна на $(0, 1] \times (0, 1]$, т.е. $T(t, u) < T(t, v)$ когда $t > 0$ и $u < v$. t -норма T называется нульпотентной, если она непрерывна и существует $n \in \{1, 2, \dots\}$ такое, что $T(\underbrace{a, \dots, a}_n) = 0$ для любых $a \in (0, 1)$.

В данной статье разбирается вариант оценки параметров в случае Архимедовой t -нормы. Рассмотрим это понятие [13,15].

Определение 10. t -норма T называется Архимедовой, если для каждой пары $(a, b) \in [0, 1] \times [0, 1]$ выполняется: $T(\underbrace{a, \dots, a}_n) < b$ при $n \in \{1, 2, \dots\}$.

Существует и другое, эквивалентное определение.

Определение 11. t -норма T называется Архимедовой, если $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\underbrace{t, \dots, t}_n) = 0$ при $t \in (0, 1)$.

Большинство Архимедовых t -норм являются непрерывными. Существует всего несколько примеров, когда это свойство не выполняется. В дальнейшем будем рассматривать только непрерывные Архимедовы t -нормы.

Теорема 1. *Непрерывная t -норма T является Архимедовой тогда и только тогда, когда она строго возрастает на подмножестве $\{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid T(x, y) > 0\}$.*

Данное свойство называют свойством условного сокращения в [13]: $\forall x, y, z$ $T(x, y) = T(x, z) > 0$ при $y = z$.

Замечание 2. Треугольные нормы T_P и T_L являются Архимедовыми t -нормами.

Одним из полезных свойств Архимедовых t -норм является то, что они могут быть представлены с помощью непрерывных аддитивных генераторов, использование которых позволяет упростить и свести вычисление t -нормы (как многомерной функции) к вычислению значения одномерного генератора.

Рассмотрим непрерывную строго убывающую функцию $g : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ с $g(1) = 0$. Обозначим через g^{-1} функцию, обратную к g . Заметим, что при $0 < a < \infty$ область допустимых значений $g^{-1} = [0, a]$ (Рис. 1). Для того, чтобы g^{-1} можно было подавать на вход любой неотрицательный аргумент, введем псевдообратную функцию $g^{[-1]}$:

$$g^{[-1]}(t) = \begin{cases} g^{-1}(t), & \text{если } t \in [0, a], a \in \mathbb{R}^1 \text{ и } g(0) = a, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1)$$

Замечание 3. Псевдообратную функцию также можно определить следующим образом:

$$g^{[-1]}(t) = \sup\{z \in [0, 1] \mid g(z) > t\} \text{ для всех } t \in [0, \infty].$$

Данный вид позволяет включить оба случая: $a < \infty$ и $a = \infty$.

Рис. 1: Пример аддитивного генератора нульпотентной t -нормы (слева) и ее псевдообратной функции (справа)

Причина рассмотрения именно такой функции состоит в том, что любая непрерывная Архимедова t -норма может быть представлена с помощью непрерывного аддитивного генератора (Рис. 2).

Теорема 2. Пусть T – непрерывная Архимедова t -норма. Тогда она может быть представлена в следующем виде:

$$T(x, y) = g^{[-1]}(g(x) + g(y)),$$

где $g : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$, $g(1) = 0$ является непрерывной строго убывающей функцией, называемой аддитивным генератором для T [15].

Заметим, что данное утверждение работает в две стороны – если t -норму можно представить через аддитивный генератор, то она является Архимедовой.

Замечание 4. В случае большего числа аргументов (> 2) имеем:

$$T(\mathbf{x}) = g^{[-1]}(g(x_1) + g(x_2) + \dots + g(x_n)),$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

Рис. 2: Построение строгой (слева) и нульпотентной (справа) t -норм с использованием аддитивного генератора

Замечание 5. Некоторые t -нормы можно представить с помощью следующих аддитивных генераторов:

1. для t -нормы Лукасевича $g(t) = 1 - t$;
2. для t -нормы произведения $g(t) = -\ln(t)$.

Заметим также, что t -норма минимум не имеет аддитивного генератора (она не является Архимедовой).

Теорема 3. Если $g(t)$ – аддитивный генератор для T , то $cg(t)$, $c > 0$ – также является аддитивным генератором для T .

Таким образом, одна t -норма может быть выражена через несколько аддитивных генераторов. Например, с помощью $g(t) = -2\ln(t) = -\ln(t^2)$ и $g(t) = -\ln(t)$ можно представить t -норму произведения.

2. Нахождение оценки параметров в одномерном случае

Подход, представленный в работах Cai Kai-Yuan [2] и Dug Hun Hong [3], предполагает нахождение оценки параметров распределения одномерных возможных переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$ в том числе в случае Архимедовой t-нормы.

Для Архимедовой t-нормы и аддитивного генератора f Dug Hun Hong получил следующие результаты [3]:

$$\hat{b} = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} x_i - \min_{1 \leq i \leq n} x_i}{H_+^{-1}(f^{[-1]}f(\alpha)/n) - H_-^{-1}(f^{[-1]}f(\alpha)/n)}, \quad (2)$$

$$\hat{a} = \frac{1}{2} \left(\max_{1 \leq i \leq n} x_i + \min_{1 \leq i \leq n} x_i \right) + \frac{\hat{b}}{2} (H_-^{-1}(f^{[-1]}f(\alpha)/n) + H_+^{-1}(f^{[-1]}f(\alpha)/n)), \quad (3)$$

где $H(x)$ – функция представления формы, такая что для нечеткой величиной ξ типа H функция распределения $\mu_\xi(x) = H(\frac{x-a}{b})$, $H(H_-^{-1}(\alpha)) = \alpha = H(H_+^{-1}(\alpha))$, $H : \mathbb{R}^1 \rightarrow [0, 1]$ непрерывна, строго возрастает на $\{H > 0\} \cap (-\infty, 0)$ и строго убывает на $\{H > 0\} \cap (0, \infty)$, $H(0) = 1$, $H(x) \neq 1$ для $\forall x \neq 0$ и $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} H(x) = 0$, $a, b \in \mathbb{R}^1$, $b > 0$. $f^{[-1]}(t)$ – псевдообратная функция для f .

3. Метод нахождения оценки параметров многомерных возможных распределений

Рассмотрим многомерную нечеткую величину, то есть нечеткий вектор O , имеющий симметричную, строго убывающую при увеличении расстояния от нуля функцию распределения μ_O :

$$\mu_O(\mathbf{x}) = \bar{f}(\|\mathbf{x}\|) = \max\{0, f(\|\mathbf{x}\|)\}, \quad (4)$$

где $x \in \mathbb{R}^m$, f – строго убывающая на луче $[0, +\infty)$ функция представления формы, $f(0) = 1$, $\|\mathbf{x}\|$ – норма вектора x .

Рассмотрим Q – семейство многомерных возможных распределений, которые могут быть получены из данной нечеткой величины с помощью аффинных преобразований. Функции распределения, входящие в это семейство, могут быть представлены в виде

$$\mu_\xi(\mathbf{x}, \mathbf{c}, A) = \max\{0, f(\sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{c})^T A (\mathbf{x} - \mathbf{c})})\}, \quad (5)$$

где $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$, A – положительно определенная симметричная матрица $m \times m$. Параметр $\mathbf{c}$ есть модальное значение многомерной нечеткой величины, то есть $\mu_\xi(\mathbf{c}, \mathbf{c}, A) = 1$, и задает сдвиг функции распределения μ_O . Поворот и масштабирование задается матрицей A , при этом ориентация собственных векторов матрицы A задает углы поворота распределения, а изменение масштаба вдоль осей обратно пропорционально квадратным корням из ее собственных чисел.

Как уже было отмечено выше, любая непрерывная Архимедова t-норма может быть представлена с помощью непрерывного аддитивного генератора g :

$$T(\mu_1, \dots, \mu_n) = g^{[-1]}(g(\mu_1) + \dots + g(\mu_n)),$$

где $g : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$, $g(1) = 0$, g непрерывная, строго убывающая функция.

Используя данное представление, найдем оценку параметра $\mathbf{c}$ в случае Архимедовой t-нормы.

Теорема 4. Пусть:

1. $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ — строго убывающая на луче $[0, +\infty)$ функция, $f(0) = 1$.
2. $Q = \{\mu_{\xi}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, A)\}$ — семейство распределений, где $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$, A — положительно определенная симметричная матрица $m \times m$, $\mu_{\xi}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, A) = \bar{f}(\sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{c})^T A (\mathbf{x} - \mathbf{c})}) = \max \{0, f(\sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{c})^T A (\mathbf{x} - \mathbf{c})})\}$.
3. $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ — наблюдаемые значения выборки $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ t -связанных возможностей величин, принадлежащих семейству распределений Q , где t -Архимедова t -норма, $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^m, i = 1, \dots, n$.
4. $\exists i, j: \mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j$.

Тогда оценкой параметра $\mathbf{c}$ является $\mathbf{c} = \bar{\mathbf{x}}$, где $\bar{\mathbf{x}} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i}{n}$.

Доказательство. Применим аддитивный генератор к функции совместного распределения возможностей наблюдения значений $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$, где каждая функция распределения имеет вид (5). Получаем:

$$\mu((\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n), \boldsymbol{\theta}) = g^{[-1]} \left(\sum_{i=1}^n g(\bar{f}(\sqrt{(\mathbf{x}_i - \mathbf{c})^T A (\mathbf{x}_i - \mathbf{c})})) \right).$$

Тогда функция $L(\boldsymbol{\theta})$ примет вид:

$$L(\boldsymbol{\theta}) = g^{[-1]} \left(\sum_{i=1}^n g(\bar{f}(\sqrt{(\mathbf{x}_i - \mathbf{c})^T A (\mathbf{x}_i - \mathbf{c})})) \right) / E(\mu_{\xi}), \quad (6)$$

где $E(\mu_{\xi}) = \int \dots \int_R \mu_{\xi}(t^1, \dots, t^m, \boldsymbol{\theta}) dt^1 \dots dt^m$ — мера нечеткости распределения μ_{ξ} .

Найдем максимум функции $L(\boldsymbol{\theta})$ для определения оценки параметра $\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{c}, A)$:

$$\frac{g^{[-1]} \left(\sum_{i=1}^n g(\bar{f}(\sqrt{(\mathbf{x}_i - \mathbf{c})^T A (\mathbf{x}_i - \mathbf{c})})) \right)}{Ib^1 \cdot \dots \cdot b^m} \rightarrow \max_{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m}. \quad (7)$$

Сделаем замену: $\mathbf{d} = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{c}$. При этом $\mathbf{x}_i - \mathbf{c} = \mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{c} = \mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{d}$. И $(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{d})^T A (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{d}) = (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T A (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{d}^T A \mathbf{d}$.

Получаем задачу следующего вида:

$$\frac{g^{[-1]} \left(\sum_{i=1}^n g(\bar{f}(\sqrt{(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T A (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{d}^T A \mathbf{d}})) \right)}{Ib^1 \cdot \dots \cdot b^m} \rightarrow \max_{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m}. \quad (8)$$

Выражение $Ib^1 \cdot \dots \cdot b^m$ не зависит от $\mathbf{d}$, поэтому (8) можно упростить следующим образом:

$$g^{[-1]} \left(\sum_{i=1}^n g(\bar{f}(\sqrt{(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T A (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{d}^T A \mathbf{d}})) \right) \rightarrow \max_{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m}. \quad (9)$$

Функция $g^{[-1]}(t)$ является псевдообратной функцией для $g(t)$ и согласно (1) строго убывает при $t \in [0, a], a \in \mathbb{R}^1$ и $g(0) = a$ и принимает значение 0 при $t > a$.

Рассмотрим случай $t > a$. Если

$$\sum_{i=1}^n g(\bar{f}(\sqrt{(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T A (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{d}^T A \mathbf{d}})) > a,$$

то $\mu((\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n), \boldsymbol{\theta}) = 0$. Тогда $L(\boldsymbol{\theta}) = 0$ и на луче $t > a$ точки максимума функции $L(\boldsymbol{\theta})$ отсутствуют.

Таким образом, следует рассматривать только случай, когда $t \in [0, a]$. На этом интервале $g^{[-1]}$ строго убывает и задача (9) эквивалентна задаче

$$\sum_{i=1}^n g(\bar{f}(\sqrt{(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T A(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{d}^T A \mathbf{d}})) \rightarrow \min_{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m}.$$

Для нахождения значения $\mathbf{d}$, при котором достигается максимум, найдем производную и приравняем к нулю полученное выражение:

$$\sum_{i=1}^n \left[g'_f(\bar{f}(\sqrt{(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T A(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{d}^T A \mathbf{d}})) \cdot \bar{f}'_d(\sqrt{(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T A(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{d}^T A \mathbf{d}}) \cdot \left(\sqrt{(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T A(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{d}^T A \mathbf{d}} \right)'_d \right] = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \left[g'_f(\bar{f}(\sqrt{(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T A(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{d}^T A \mathbf{d}})) \cdot \bar{f}'_d(\sqrt{(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T A(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{d}^T A \mathbf{d}}) \cdot ((\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T A(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{d}^T A \mathbf{d})'_d \cdot ((\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T A(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{d}^T A \mathbf{d})^{-\frac{1}{2}} \right] = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \left[g'_f(\bar{f}(\sqrt{(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T A(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{d}^T A \mathbf{d}})) \cdot \bar{f}'_d(\sqrt{(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{d})^T A(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{d})}) \cdot (\mathbf{d}^T (A^T + A)) \cdot ((\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T A(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{d}^T A \mathbf{d})^{-\frac{1}{2}} \right] = 0.$$

Заметим, что выражение $\mathbf{d}^T (A^T + A)$ не зависит от $\mathbf{x}$, его можно вынести за знак суммы:

$$(\mathbf{d}^T (A^T + A)) \cdot \sum_{i=1}^n \left[g'_f(\bar{f}(\sqrt{(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T A(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{d}^T A \mathbf{d}})) \cdot \bar{f}'_d(\sqrt{(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{d})^T A(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{d})}) \cdot ((\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T A(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{d}^T A \mathbf{d})^{-\frac{1}{2}} \right] = 0.$$

Данное выражение содержит несколько сомножителей. Убедимся, что максимум функции $L(\boldsymbol{\theta})$ достигается только в случае, когда $\mathbf{d}^T (A^T + A) = 0$.

Рассмотрим выражение

$$\sum_{i=1}^n \left[g'_f(\bar{f}(\sqrt{(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T A(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{d}^T A \mathbf{d}})) \cdot \bar{f}'_d(\sqrt{(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{d})^T A(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{d})}) \cdot ((\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T A(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{d}^T A \mathbf{d})^{-\frac{1}{2}} \right]. \quad (10)$$

В силу строгой монотонности $g'_f(t) \neq 0$ и $\bar{f}'_d(t) \neq 0$.

Матрица A является положительно определенной, следовательно, $(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T A(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{d}^T A \mathbf{d} = 0$ только в случае, когда $\mathbf{x}_i = \bar{\mathbf{x}}$. Однако, по

условию 4 должно существовать хотя бы одно $i : \mathbf{x}_i \neq \bar{\mathbf{x}}$. Следовательно, рассматриваемая сумма (10) должна быть строго положительной.

Тогда можно утверждать, что

$$\mathbf{d}^T(A^T + A) = 0.$$

Так как A – положительно определенная матрица, то $(A^T + A) \neq 0$, тогда $\mathbf{d}^T = 0$ и $\mathbf{c} = \bar{\mathbf{x}}$. $\square$

Заметим, что в случае Архимедовой t -нормы центр распределения находится через среднее арифметическое наблюдаемых значений выборки, а при t -норме минимум – как центр эллипсоида минимального объема, описанного вокруг наблюдаемых значений [7]. То есть центры совпадут только при симметричном распределении наблюдаемых значений выборки.

Пример 1. Рассмотрим пример нахождения оценки параметра центра распределения семейства $Q_\mu(\mathbf{c}, A)$ в двумерном случае для выборки на основе нормального распределения (Рис. 3). Произведем оценку для случая t -нормы минимум и t -нормы произведение.

Рис. 3: Двумерное нормальное распределение

В случае сильнейшей t -нормы согласно [7] требуется найти эллипс минимальной площади (в двумерном пространстве), описанный вокруг точек распределения. Для t -нормы произведения будем пользоваться тем, что она входит в класс Архимедовых t -норм, следовательно, можем применить доказанную ранее теорему 4. Рис. 4 демонстрирует полученный результат, где $\star$ – центр распределения при t -норме минимум, $\blacktriangle$ – центр при t -норме произведение.

Как можно видеть из Рис. 4, оценки центров распределений не совпадают. Это является следствием различия применяемых t -норм и демонстрирует важность выбора типа t -нормы под конкретные данные для получения результата, наилучшим образом отражающего действительность.

Рис. 4: Восстановление параметров двумерного нормального распределения

Заключение

Результаты работы позволяют оценить параметры многомерных возможных распределений по наблюдаемым значениям выборки.

На основании результатов работы возможно создание методов предварительной обработки данных в информационных системах, позволяющих представить множество исходных данных в виде возможностного распределения. Подобные методы могут быть использованы при автоматическом проектировании нечетких контроллеров, решении задач нечеткой кластеризации и прогнозирования, решении других прикладных задач методами интеллектуального анализа данных.

В плане дальнейшего развития предполагается изучить свойства полученной оценки.

Список литературы

- [1] Xizhao W., Minghu H. Note on maxmin μ/E estimation // Fuzzy Sets and Systems. 1998. Vol. 94. Pp. 71–75.
- [2] Kai-Yuan C. Parameter estimations of normal fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems. 1993. Vol. 55. Pp. 179–185.
- [3] Hong D.H. Parameter estimations of mutually T-related fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems. 2001. Vol. 123. Pp. 63–71.
- [4] Näther W. On possibilistic inference // Fuzzy Sets and Systems. 1990. Vol. 36. Pp. 327–337.
- [5] Xizhao W., Minghu H. Fuzzy linear regression analysis // Fuzzy Sets and Systems. 1992. Vol. 52. Pp. 179–188.

- [6] Zhenyuan W., Shoumei L. Fuzzy linear regression analysis of fuzzy-valued variables // Fuzzy Sets and Systems. 1990. Vol. 36. Pp. 125–136.
- [7] Сорокина И.В., Сорокин С.В. К задаче оценки параметров многомерных возможностей распределений // Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2013. Т. 8, № 2. С. 101–113.
- [8] Sorokina I., Sorokin S., Yazenin A. Parameter estimation of multidimensional possibility distributions // International Journal of Mathematical, Computational, Natural and Physical Engineering. 2015. Vol. 9, № 2. Pp. 71–74.
- [9] Сорокина И.В., Сорокин С.В. Оценка параметров многомерных возможностей распределений при заданном уровне риске // Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2015. Т. 10, № 2. С. 181–193.
- [10] Nahmias S. Fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems. 1978. Vol. 1. Pp. 97–110.
- [11] Язенин А.В. Основные понятия теории возможностей: математический аппарат для принятия решений в условиях гибридной неопределенности. М: Физматлит, 2016. 144 с.
- [12] Rao M.B., Rashed A. Some comments on fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems. 1981. Vol. 6. Pp. 285–292.
- [13] Klement E.P., Mesiar R., Pap E. Triangular norms. I. Basic analytical and algebraic properties // Fuzzy Sets and Systems. 2004. Vol. 143. Pp. 5–26.
- [14] Klement E.P., Mesiar R., Pap E. Triangular norms. Position paper II: general constructions and parameterized families // Fuzzy Sets and Systems. 2004. Vol. 145. Pp. 411–438.
- [15] Beliakov G., Pradera A., Calvo T. Aggregation Functions: A Guide for Practitioners. Series: Studies in Fuzziness and Soft Computing. Vol. 221. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. <https://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-73721-6>
- [16] Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Учеб. для вузов. В 3 т. / Под ред. В.А. Садовниченко. Т. 2: Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Дрофа, 2004. 512 с.

Образец цитирования

Сорокина И.В. Оценка параметров многомерных возможностей распределений в случае Архимедовой t-нормы // Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2018. Т. 13, № 1. С. 45–57. <https://doi.org/10.26456/fssc40>

Сведения об авторах

1. Сорокина Ирина Владимировна

ассистент кафедры информационных технологий Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

E-mail: sorokinairinavl@gmail.com

**ESTIMATION OF THE MULTIDIMENSIONAL POSSIBILITY
DISTRIBUTIONS PARAMETERS
IN THE CASE OF AN ARCHIMEDEAN T-NORM**

Sorokina Irina Vladimirovna

Assistant at Information Technologies department,
Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU.
E-mail: sorokinairinavl@gmail.com

Received 14.11.2017, revised 28.12.2017.

We present a solution to parameters estimation problem of fuzzy distributions in m-dimensional case for Archimedean t-norm. Our method is based on continuous additive generator, which makes it possible to simplify and reduce the calculation of the t-norm (as a multidimensional function) to the calculation of the value of a one-dimensional generator.

Keywords: fuzzy distribution, parameter estimation, Archimedean t-norm.

Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya [Fuzzy Systems and Soft Computing], 2018, vol. 13(1), pp. 45–57. <https://doi.org/10.26456/fssc40>

References

- [1] Xizhao W., Minghu H. Note on maxmin μ/E estimation. *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, vol. 94, pp. 71–75.
- [2] Kai-Yuan C. Parameter estimations of normal fuzzy variables. *Fuzzy Sets and Systems*, 1993, vol. 55, pp. 179–185.
- [3] Hong D.H. Parameter estimations of mutually T-related fuzzy variables. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, vol. 123, pp. 63–71.
- [4] Näther W. On possibilistic inference. *Fuzzy Sets and Systems*, 1990, vol. 36, pp. 327–337.
- [5] Xizhao W., Minghu H. Fuzzy linear regression analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, vol. 52, pp. 179–188.
- [6] Zhenyuan W., Shoumei L. Fuzzy linear regression analysis of fuzzy-valued variables. *Fuzzy Sets and Systems*, 1990, vol. 36, pp. 125–136.
- [7] Sorokina I.V., Sorokin S.V. On parameters estimation for multidimensional possibility distributions. *Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya [Fuzzy Systems and Soft Computing]*, 2013, vol. 8(2), pp. 101–113. (in Russian)

- [8] Sorokina I., Sorokin S., Yazenin A. Parameter estimation of multidimensional possibility distributions. *International Journal of Mathematical, Computational, Natural and Physical Engineering*, 2015, vol. 9(2), pp. 71–74.
- [9] Sorokina I.V., Sorokin S.V. Parameter estimation of multidimensional possibilistic distributions for a given risk level. *Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya* [Fuzzy Systems and Soft Computing], 2015, vol. 10(2), pp. 101–113. (in Russian)
- [10] Nahmias S. Fuzzy variables. *Fuzzy Sets and Systems*, 1978, vol. 1, pp. 97–110.
- [11] Yazenin A.V. *Osnovnye Ponyatiya Teorii Vozmozhnostej: Matematicheskij Apparat dlya Prinyatiya Reshenij v Usloviyakh Gibridnoj Neopredelennosti* [Basic Concepts of the Theory of Possibilities: a Mathematical Apparatus for Decision-Making under Conditions of Hybrid Uncertainty]. Fizmatlit Publ., Moscow, 2016. 144 p. (in Russian)
- [12] Rao M.B., Rashed A. Some comments on fuzzy variables. *Fuzzy Sets and Systems*, 1981, vol. 6, pp. 285–292.
- [13] Klement E.P., Mesiar R., Pap E. Triangular norms. I. Basic analytical and algebraic properties. *Fuzzy Sets and Systems*, 2004, vol. 143, pp. 5–26.
- [14] Klement E.P., Mesiar R., Pap E. Triangular norms. Position paper II: general constructions and parameterized families. *Fuzzy Sets and Systems*, 2004, vol. 145, pp. 411–438.
- [15] Beliakov G., Pradera A., Calvo T. *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners*. Series: Studies in Fuzziness and Soft Computing. Vol. 221. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. <https://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-73721-6>
- [16] Bugrov Ya.S., Nikol'skij S.M. *Vyshshaya Matematika: Ucheb. dlya Vuzov* [Higher Mathematics: Textbook for Universities]. In 3 volumes. Ed. by V.A. Sadovnichiy. Vol. 2: Differentsial'noe i Integral'noe Ischislenie [Differential and Integral Calculus]. Drofa Publ., Moscow, 2004. 512 p. (in Russian)

Citation

Sorokina I.V. Estimation of the multidimensional possibility distributions parameters in the case of an Archimedean t-norm. *Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya* [Fuzzy Systems and Soft Computing], 2018, vol. 13(1), pp. 45–57. (in Russian) <https://doi.org/10.26456/fssc40>