Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Е. Егорова, О свойствах параметров возможностного распределения математического ожидания взвешенной суммы нечетких случайных величин, *Нечеткие системы и мягкие вычисления*, 2018, том 13, выпуск 1, 81–93

DOI: <https://doi.org/10.26456/fssc42>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 09:05:57

**О СВОЙСТВАХ ПАРАМЕТРОВ ВОЗМОЖНОСТНОГО
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ
ВЗВЕШЕННОЙ СУММЫ НЕЧЕТКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН**

Егорова Ю.Е.

Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила 15.05.2018, после переработки 20.06.2018.

В статье исследуются свойства функций, представляющих собой параметры возможностного распределения ожидаемого значения линейной возможно-вероятностной функции в случае, когда взаимодействие ее нечетких компонент описывается слабой t -нормой. Приведены условия, при которых функции, представляющие коэффициенты нечеткости, существуют и являются непрерывными.

Ключевые слова: нечеткая случайная величина, математическое ожидание нечеткой случайной величины, слабая t -норма, взвешенная сумма нечетких случайных величин, возможно-вероятностная оптимизация.

Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2018. Т. 13, № 1. С. 81–93.
<https://doi.org/10.26456/fssc42>

1. Введение

В задачах возможно-вероятностной оптимизации [1–3] одним из принципов принятия решений, который используется для снятия неопределенности вероятностного типа, является принцип ожидаемой возможности. При сильнейшей t -норме, описывающей взаимодействие нечетких составляющих гибридной модели неопределенности возможно-вероятностного типа, идентификация параметров ожидаемого значения взвешенной суммы нечетких случайных величин не вызывает затруднений. Однако, в том случае, когда взаимодействие нечетких факторов модели описывается слабой t -нормой, идентификация функций, представляющих коэффициенты нечеткости возможностного распределения результата, является затруднительной. В работах [1, 2] для равномерного, показательного и нормального распределений случайных компонент получены функции коэффициентов нечеткости в явном виде. По отношению к этим работам в данной статье более глубоко исследуется вопрос идентификации этих функций. Доказан ряд утверждений, в которых получены условия их существования и непрерывности.

2. Необходимые понятия и обозначения

В контексте работ [4–6] введем ряд определений и понятий из теории возможностей. Пусть $(\Gamma, \mathfrak{P}(\Gamma), \pi)$ и $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ есть возможностное и вероятностное

пространства, в которых Ω — пространство элементарных событий $\omega \in \Omega$, Γ — модельное пространство с элементами $\gamma \in \Gamma$, $\mathcal{B}$ — σ -алгебра событий, $\mathfrak{P}(\Gamma)$ — множество всех подмножеств Γ , π — мера возможности, а P — мера вероятности; E^1 — числовая прямая.

Дадим определение нечеткой случайной (возможностно-вероятностной) величины и ее распределения [5, 6].

Определение 1. *Нечеткая случайная величина Y есть вещественная функция $Y : \Omega \times \Gamma \rightarrow E^1$, σ -измеримая для каждого фиксированного γ , а функция*

$$\mu_Y(\omega, t) = \pi\{\gamma \in \Gamma : Y(\omega, \gamma) = t\}$$

называется ее функцией распределения.

Из определения 1 следует, что функция распределения нечеткой случайной величины зависит от случайного параметра, т. е. является случайной функцией.

Определение 2. *Пусть $Y(\omega, \gamma)$ — нечеткая случайная величина. Ее ожидаемым значением $E[Y]$ [5, 6] называется нечеткая величина, имеющая функцию распределения возможностей*

$$\mu_{E[Y]}(t) = \pi\{\gamma \in \Gamma : EY(\omega, \gamma) = t\},$$

где E есть оператор взятия математического ожидания

$$E[Y(\omega, \gamma)] = \int_{\Omega} Y(\omega, \gamma) P d\omega.$$

В данном случае функция распределения ожидаемого значения нечеткой случайной величины уже не зависит от случайного параметра и является детерминированной.

Определяемое в соответствии с рассматриваемым подходом математическое ожидание случайных величин наследует основные свойства вещественных случайных величин.

Интересным для приложений является сдвиг-масштабное представление [7] нечетких случайных величин:

$$Y(\omega, \gamma) = a(\omega) + \sigma(\omega)Z(\gamma),$$

где $a(\omega)$ и $\sigma(\omega)$ — случайные величины, определенные на $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, а $Z(\gamma)$ есть нечеткая величина, определенная на $(\Gamma, P(\Gamma), \pi)$. В данном случае, $a(\omega)$ и $\sigma(\omega)$ обозначают соответственно параметры сдвига и масштаба.

Для моделирования нечетких величин часто используется распределение LR-типа [8].

Определение 3. *Нечеткая величина Z называется величиной LR-типа, если ее функция распределения возможностей имеет вид*

$$\mu_Z(t) = \begin{cases} L\left(\frac{\underline{m}-t}{\underline{d}}\right), & t < \underline{m}, \\ 1, & \underline{m} \leq t \leq \overline{m}, \\ R\left(\frac{t-\overline{m}}{\overline{d}}\right), & t > \overline{m}, \end{cases}$$

где $L(t)$ и $R(t)$ — функции представления формы. В этом случае величина Z записывается, как правило, в виде $Z = [\underline{m}, \overline{m}, \underline{d}, \overline{d}]_{LR}$.

В данном представлении, $\underline{m}$ и $\overline{m}$ есть левая и правая границы интервала толерантности, а $\underline{d}$, $\overline{d}$ — коэффициенты нечеткости; при этом $\underline{m} \leq \overline{m}$ и $\underline{d} > 0, \overline{d} > 0$.

Для агрегирования нечеткой информации будем использовать t-нормы и t-конормы, которые расширяют операции типа $\min$ и $\max$, заложенные в действиях над нечеткими множествами и нечеткими величинами [9].

Особый интерес представляют t-нормы

$$T_M(x, y) = \min\{x, y\} \text{ и } T_W(x, y) = \begin{cases} \min\{x, y\}, & \text{if } \max\{x, y\} = 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

которые являются экстремальными.

Сильнейшей t-нормой называется t-норма T_M , а T_W — слабойшей t-нормой, так как для любой произвольной t-нормы T и $\forall x, y \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$T_W(x, y) \leq T(x, y) \leq T_M(x, y).$$

Опираясь на результаты работы [10], обобщим понятие несвязанности нечетких величин, введенное в [4], на случай произвольной t-нормы.

Определение 4. Множества $A_1, \dots, A_n \in P(\Gamma)$ называются взаимно T связанными, если для любого индексного множества $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$, $1 \leq k \leq n$ справедливо

$$\pi(X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_k}) = T(\pi(X_{i_1}), \dots, \pi(X_{i_k})),$$

где

$$T(\pi(A_{i_1}), \dots, \pi(A_{i_k})) = T(T(\dots T(T(\pi(A_{i_1}), \pi(A_{i_2})), \pi(A_{i_3})), \dots, \pi(A_{i_{k-1}})), \pi(A_{i_k})).$$

Пусть $Z_1, \dots, Z_n$ есть нечеткие величины, определенные на возможностном пространстве $(\Gamma, P(\Gamma), \pi)$. Перенесем понятие взаимной T-связанности множеств (событий) на нечеткие величины.

Определение 5. Нечеткие величины $Z_1, \dots, Z_n$ называются взаимно T связанными, если для любого индексного множества $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$, $1 \leq k \leq n$ справедливо

$$\begin{aligned} \mu_{Z_{i_1}, \dots, Z_{i_k}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) &= \pi\{\gamma \in \Gamma : Z_{i_1}(\gamma) = x_{i_1}, \dots, Z_{i_k}(\gamma) = x_{i_k}\} = \\ &= \pi\{Z_{i_1}^{-1}\{x_{i_1}\} \cap \dots \cap Z_{i_k}^{-1}\{x_{i_k}\}\} = \\ &= T(\pi(Z_{i_1}^{-1}\{x_{i_1}\}), \dots, \pi(Z_{i_k}^{-1}\{x_{i_k}\})), \quad x_{i_j} \in E^1. \end{aligned}$$

3. Математическое ожидание взвешенной суммы нечетких случайных величин

Рассмотрим возможно-вероятностную функцию

$$f(x, \omega, \gamma) = \sum_{i=1}^n b_i(\omega, \gamma) x_i - b(\omega, \gamma),$$

являющуюся линейной по x . Здесь $x \in E_+^n = \{x \in E^n : x \geq 0\}$, нечеткие случайные величины $b_i(\omega, \gamma)$, $b(\omega, \gamma)$ имеют сдвиг-масштабное представление:

$$\begin{aligned} b_i(\omega, \gamma) &= a_i(\omega) + \sigma_i(\omega)Z_i(\gamma), \\ b(\omega, \gamma) &= a(\omega) + \sigma(\omega)Z(\gamma). \end{aligned}$$

Случайные величины $a_i(\omega)$, $\sigma_i(\omega)$ и $a(\omega)$, $\sigma(\omega)$ независимы, при этом $\sigma_i(\omega) \geq 0$ и $\sigma(\omega) \geq 0$. Нечеткие величины $Z_i(\gamma) = [\underline{m}_i, \overline{m}_i, \underline{d}_i, \overline{d}_i]_{LR}$ и $Z(\gamma) = [\underline{m}, \overline{m}, \underline{d}, \overline{d}]_{LR}$ — взаимно T_W -связанны, и для любого i функции представления формы L, R являются идентичными.

При сделанных предположениях возможностное распределение $f(x, \omega, \gamma)$ принимает вид [11]

$$f(x, \omega, \gamma) = [\underline{m}_f(x, \omega), \overline{m}_f(x, \omega), \underline{d}_f(x, \omega), \overline{d}_f(x, \omega)]_{LR},$$

где

$$\begin{aligned} \underline{m}_f(x, \omega) &= \sum_{i=1}^n (a_i(\omega) + \sigma_i(\omega)\underline{m}_i) x_i - (a(\omega) + \sigma(\omega)\underline{m}), \\ \overline{m}_f(x, \omega) &= \sum_{i=1}^n (a_i(\omega) + \sigma_i(\omega)\overline{m}_i) x_i - (a(\omega) + \sigma(\omega)\overline{m}), \\ \underline{d}_f(x, \omega) &= \max \{ \sigma_1(\omega)\underline{d}_1 x_1, \dots, \sigma_n(\omega)\underline{d}_n x_n, \sigma(\omega)\underline{d} \}, \\ \overline{d}_f(x, \omega) &= \max \{ \sigma_1(\omega)\overline{d}_1 x_1, \dots, \sigma_n(\omega)\overline{d}_n x_n, \sigma(\omega)\overline{d} \}. \end{aligned}$$

В задачах возможно-вероятностной оптимизации для снятия неопределенности вероятностного типа в соответствии с подходом [1, 2] необходимо идентифицировать возможностное распределение математического ожидания функции $f(x, \omega, \gamma)$ и его параметры.

Пусть

$$\overline{a}_i = E[a_i(\omega)], \quad \overline{\sigma}_i = E[\sigma_i(\omega)], \quad \overline{a} = E[a(\omega)], \quad \overline{\sigma} = E[\sigma(\omega)],$$

тогда возможностное распределение математического ожидания $E[f(x, \omega, \gamma)]$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} E[f(x, \omega, \gamma)] &= [E[\underline{m}_f(x, \omega)], E[\overline{m}_f(x, \omega)], E[\underline{d}_f(x, \omega)], E[\overline{d}_f(x, \omega)]]_{LR} = \\ &= [\underline{m}_{Ef}(x), \overline{m}_{Ef}(x), \underline{d}_{Ef}(x), \overline{d}_{Ef}(x)]_{LR}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \underline{m}_{Ef}(x) &= \sum_{i=1}^n (\overline{a}_i + \overline{\sigma}_i \underline{m}_i) x_i - (\overline{a} + \overline{\sigma} \underline{m}), \\ \overline{m}_{Ef}(x) &= \sum_{i=1}^n (\overline{a}_i + \overline{\sigma}_i \overline{m}_i) x_i - (\overline{a} + \overline{\sigma} \overline{m}), \\ \underline{d}_{Ef}(x) &= E[\max \{ \sigma_1(\omega)\underline{d}_1 x_1, \dots, \sigma_n(\omega)\underline{d}_n x_n, \sigma(\omega)\underline{d} \}], \\ \overline{d}_{Ef}(x) &= E[\max \{ \sigma_1(\omega)\overline{d}_1 x_1, \dots, \sigma_n(\omega)\overline{d}_n x_n, \sigma(\omega)\overline{d} \}]. \end{aligned}$$

Свойства параметров возможностного распределения математического ожидания $Ef(x, \omega, \gamma)$ играют важную роль в задачах возможно-вероятностной оптимизации и определяют возможные методы их решения.

Очевидно, что функции $\underline{m}_{Ef}(x)$ и $\overline{m}_{Ef}(x)$, представляющие границы модальных значений, являются линейными по x . С другой стороны, функции $\underline{d}_{Ef_i}(x)$ и $\overline{d}_{Ef_i}(x)$ могут быть вычислены в явном виде только для простых распределений случайных компонент $\sigma_i(\omega)$ и $\sigma(\omega)$ [1, 2]. Однако, можно определить условия, при которых эти функции существуют и являются непрерывными, чему посвящен следующий раздел статьи.

4. Свойства коэффициентов нечеткости возможностного распределения математического ожидания взвешенной суммы нечетких случайных величин

Определим функцию $d_f(x, \omega)$ в следующем виде

$$d_f(x, \omega) = \begin{cases} d_{I_k}(x, \omega), & \text{если } x \in X_{I_k}, \\ d_{I_0}(x, \omega), & \text{если } x \in X_{I_0}, \end{cases} \quad (1)$$

для множества индексов $I_k = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, $k = \overline{1, n}$, где функции $d_{I_k}(x, \omega)$ и $d_{I_0}(x, \omega)$ имеют вид

$$d_{I_k}(x, \omega) = \max\{\sigma_{i_1}(\omega)d_{i_1}x_{i_1}, \dots, \sigma_{i_k}(\omega)d_{i_k}x_{i_k}, \sigma(\omega)d\},$$

$$d_{I_0}(x, \omega) = \sigma(\omega)d,$$

а множества X_{I_k} и X_{I_0} определены следующим образом

$$X_{I_k} = \{x \in E_+^n : x_i \neq 0, \forall i \in I_k\},$$

$$X_{I_0} = \{x \in E_+^n : x_i = 0, \forall i = \overline{1, n}\}.$$

Обозначим

$$d_{EI_k}(x) = E[d_{I_k}(x, \omega)], \quad d_{EI_0}(x) = E[d_{I_0}(x, \omega)],$$

тогда математическое ожидание $d_{Ef}(x)$ примет вид:

$$d_{Ef}(x) = \begin{cases} d_{EI_k}(x), & \text{если } x \in X_{I_k}, \\ d_{EI_0}(x), & \text{если } x \in X_{I_0}. \end{cases} \quad (2)$$

Предположим, что случайные величины $\sigma_i(\omega)$, $\forall i = \overline{1, n}$ и $\sigma(\omega)$ абсолютно непрерывны, при этом $F_{\sigma_i}(y)$, $F_{\sigma}(y)$ и $f_{\sigma_i}(y)$, $f_{\sigma}(y)$ есть их функции распределения и плотности, соответственно. Тогда распределение и плотность случайных величин $\sigma_i(\omega)d_ix_i$ и $\sigma(\omega)d$ для $x_i \neq 0$ будут иметь вид

$$F_{\sigma_id_ix_i}(y, x) = F_{\sigma_i}\left(\frac{y}{d_ix_i}\right), \quad F_{\sigma d}(y, x) = F_{\sigma_i}\left(\frac{y}{d_i}\right),$$

$$f_{\sigma_id_ix_i}(y, x) = \frac{1}{d_ix_i}f_{\sigma_i}\left(\frac{y}{d_ix_i}\right), \quad f_{\sigma d}(y, x) = \frac{1}{d}f_{\sigma_i}\left(\frac{y}{d}\right).$$

Согласно [11], распределения функций $d_{I_k}(x, \omega)$ можно найти следующим образом

$$F_{d_{I_k}}(y, x) = F_{\sigma d}(y, x) \prod_{i \in I_k} F_{\sigma_id_ix_i}(y, x) = F_{\sigma}\left(\frac{y}{d}\right) \prod_{i \in I_k} F_{\sigma_i}\left(\frac{y}{d_ix_i}\right),$$

а плотность в виде

$$\begin{aligned} f_{d_{I_k}}(y, x) &= \sum_{i \in I_k} \left[f_{\sigma_i d_i x_i}(y, x) F_{\sigma d}(y, x) \prod_{\substack{j \in I_k, \\ j \neq i}} F_{\sigma_j d_j x_j}(y, x) \right] + f_{\sigma d}(y, x) \prod_{i \in I_k} F_{\sigma_i d_i x_i}(y, x) = \\ &= \sum_{i \in I_k} \left[\frac{1}{d_i x_i} f_{\sigma_i} \left(\frac{y}{d_i x_i} \right) F_{\sigma} \left(\frac{y}{d} \right) \prod_{\substack{j \in I_k, \\ j \neq i}} F_{\sigma_j} \left(\frac{y}{d_j x_j} \right) \right] + \frac{1}{d} f_{\sigma} \left(\frac{y}{d} \right) \prod_{i \in I_k} F_{\sigma_i} \left(\frac{y}{d_i x_i} \right). \end{aligned}$$

Вычислив математическое ожидание этой функции, получаем

$$\begin{aligned} d_{E_{I_k}}(x) &= \sum_{i \in I_k} \int_0^{+\infty} y \frac{1}{d_i x_i} f_{\sigma_i} \left(\frac{y}{d_i x_i} \right) F_{\sigma} \left(\frac{y}{d} \right) \prod_{\substack{j \in I_k, \\ j \neq i}} F_{\sigma_j} \left(\frac{y}{d_j x_j} \right) dy + \\ &\quad + \int_0^{+\infty} y \frac{1}{d} f_{\sigma} \left(\frac{y}{d} \right) \prod_{i \in I_k} F_{\sigma_i} \left(\frac{y}{d_i x_i} \right) dy. \end{aligned}$$

4.1 Существование

Так как функция $d_{E_f}(x)$ представляет собой несобственный интеграл, то возникает вопрос – при каких условиях полученный выше интеграл существует для всех точек $x \in E_+^n$.

Теорема 1. Если случайные величины $\sigma_i(\omega)$, $\sigma(\omega)$ имеют конечные математические ожидания

$$E\sigma_i(\omega) < \infty \quad \text{и} \quad E\sigma(\omega) < \infty,$$

$\forall i = \overline{1, n}$, то функция $d_{E_f}(x)$ определена для всех $x \in E_+^n$.

Доказательство. Принимая во внимание представление (2) функции $d_{E_f}(x)$, достаточно изучить вопрос существования функций $d_{E_{I_k}}(x)$ в области X_k для всех индексных множеств I_k .

Очевидно, что функция $d_{E_{I_0}}(x)$ определена для всех $x \in X_{I_0}$. Далее, для множества индексов I_k и для любого $i \in I_k$, в силу свойств функции распределения, имеем

$$y \frac{1}{d_i x_i} f_{\sigma_i} \left(\frac{y}{d_i x_i} \right) F_{\sigma} \left(\frac{y}{d} \right) \prod_{\substack{j \in I_k, \\ j \neq i}} F_{\sigma_j} \left(\frac{y}{d_j x_j} \right) \leq y \frac{1}{d_i x_i} f_{\sigma_i} \left(\frac{y}{d_i x_i} \right),$$

$$y \frac{1}{d} f_{\sigma} \left(\frac{y}{d} \right) \prod_{i \in I_k} F_{\sigma_i} \left(\frac{y}{d_i x_i} \right) \leq y \frac{1}{d} f_{\sigma} \left(\frac{y}{d} \right),$$

а значит

$$y f_{d_{I_k}}(y, x) \leq \sum_{i \in I_k} y \frac{1}{d_i x_i} f_{\sigma_i} \left(\frac{y}{d_i x_i} \right) + y \frac{1}{d} f_{\sigma} \left(\frac{y}{d} \right).$$

С другой стороны, так как математические ожидания случайных величин $\sigma_i(\omega)$ и $\sigma(\omega)$ конечны, то для всех $x \in X_k$

$$\int_0^\infty y \frac{1}{d_i x_i} f_{\sigma_i} \left(\frac{y}{d_i x_i} \right) dy < \infty \quad \text{и} \quad \int_0^\infty y \frac{1}{d} f_\sigma \left(\frac{y}{d} \right) dy < \infty,$$

что влечет сходимость суммы

$$\sum_{i \in I_k} \int_0^\infty y \frac{1}{d_i x_i} f_{\sigma_i} \left(\frac{y}{d_i x_i} \right) dy + \int_0^\infty y \frac{1}{d} f_\sigma \left(\frac{y}{d} \right) dy < \infty.$$

Из этого непосредственно следует, что

$$d_{E_{I_k}}(x) = \int_0^\infty y f_{d_{I_k}}(y, x) dy < \infty.$$

□

4.2 Непрерывность

В данном разделе изучим вопрос, касающийся условий непрерывности функции $d_{E_f}(x)$ для всех $x \in E_+^n$.

Так как функция $d_{E_f}(x)$ является кусочной (2), то для того, чтобы она была непрерывной в области E_+^n при некоторых условиях, необходимо и достаточно чтобы при этих условиях для всех множеств индексов I_k :

1. функции $d_{E_{I_k}}(x)$ являются непрерывными в области X_{I_k} ;
2. для всех подмножеств $I_l \subset I_k$ и всех точек $\bar{x} \in X_{I_l}$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} d_{E_{I_k}}(x) = d_{E_{I_l}}(\bar{x});$$

3. для всех точек $\bar{x} \in X_{I_0}$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} d_{E_{I_k}}(x) = d_{E_{I_0}}(\bar{x}).$$

Введем следующие обозначения

$$d_{I_k}^i(x) = y \frac{1}{d_i x_i} f_{\sigma_i} \left(\frac{y}{d_i x_i} \right) F_\sigma \left(\frac{y}{d} \right) \prod_{\substack{j \in I_k, \\ j \neq i}} F_{\sigma_j} \left(\frac{y}{d_j x_j} \right),$$

$$d_{I_k}^0(x) = y \frac{1}{d} f_\sigma \left(\frac{y}{d} \right) \prod_{i \in I_k} F_{\sigma_i} \left(\frac{y}{d_i x_i} \right),$$

тогда

$$d_{E_{I_k}}(x) = \sum_{i \in I_k} \int_0^{+\infty} d_{I_k}^i(x) dy + \int_0^{+\infty} d_{I_k}^0(x) dy.$$

Лемма 1. Пусть $E\sigma(\omega) < \infty$, $\forall i \in I_k$ функции плотности $f_{\sigma_i}(y)$ непрерывны по y и существуют интегрируемые функции $\phi_i(y)$

$$\int_0^{+\infty} \phi_i(y) dy < \infty,$$

такие что для всех $y \in E^1$ и $x \in E_+^n$ выполняется

$$y \frac{1}{d_i x_i} f_{\sigma_i} \left(\frac{y}{d_i x_i} \right) \leq \phi_i(y).$$

Тогда функция $d_{E I_k}(x)$ непрерывна в области X_{I_k} .

Доказательство. В силу непрерывности по y функций $f_{\sigma_i}(y)$ и $F_{\sigma_i}(y)$, непрерывными в области X_{I_k} являются и функции $d_{I_k}^i(x)$ и $d_{I_k}^0(x)$. А значит для всех точек $\bar{x} \in X_{I_k}$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} d_{I_k}^i(x) = d_{I_k}^i(\bar{x}) \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}} d_{I_k}^0(x) = d_{I_k}^0(\bar{x}).$$

Далее, так как $F_{\sigma_i}(y) \leq 1$ для всех $i = \overline{1, n}$, то

$$d_{I_k}^i(x) \leq \phi_i(y) \quad \text{и} \quad d_{I_k}^0(x) \leq y \frac{1}{d} f_{\sigma} \left(\frac{y}{d} \right),$$

при этом в силу конечности математического ожидания случайной величины $\sigma(\omega)$

$$\int_0^{\infty} y \frac{1}{d} f_{\sigma} \left(\frac{y}{d} \right) dy < \infty.$$

Тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости [12] для всех $x \in X_{I_k}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \bar{x}} d_{E I_k}(x) &= \sum_{i \in I_k} \int_0^{+\infty} \left[\lim_{x \rightarrow \bar{x}} d_{I_k}^i(x) \right] dy + \int_0^{+\infty} \left[\lim_{x \rightarrow \bar{x}} d_{I_k}^0(x) \right] dy = \\ &= \sum_{i \in I_k} \int_0^{+\infty} d_{I_k}^i(\bar{x}) dy + \int_0^{+\infty} d_{I_k}^0(\bar{x}) dy = d_{E I_k}(\bar{x}), \end{aligned}$$

из чего следует непрерывность функции $d_{E I_k}(x)$ в области X_{I_k} . $\square$

Лемма 2. Пусть $I_l \subset I_k$ и выполняются условия леммы 1 для функции $d_{E I_k}(x)$, $\forall i \in I_k$ при $y \rightarrow \infty$, $f_{\sigma_i}(y) \rightarrow 0$. Тогда для всех точек $\bar{x} \in X_{I_l}$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} d_{E I_k}(x) = d_{E I_l}(\bar{x}).$$

Доказательство. Для всех $i \in I_k$ когда $x_i \rightarrow 0$, $y/d_i x_i \rightarrow \infty$, а следовательно

$$f_{\sigma_i} \left(\frac{y}{d_i x_i} \right) \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad F_{\sigma_i} \left(\frac{y}{d_i x_i} \right) \rightarrow 1.$$

Тогда для $i \in I_l$ координата $\bar{x}_i \neq 0$ и получим, что

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} d_{I_k}^i(x) = y \frac{1}{d_i \bar{x}_i} f_{\sigma_i} \left(\frac{y}{d_i \bar{x}_i} \right) F_{\sigma} \left(\frac{y}{d} \right) \prod_{\substack{j \in I_l, \\ j \neq i}} F_{\sigma_j} \left(\frac{y}{d_j \bar{x}_j} \right) = d_{I_l}^i(\bar{x}),$$

а для $i \notin I_l$ координата $\bar{x}_i = 0$ и

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} d_{I_k}^i(x) = 0.$$

С другой стороны

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} d_{I_k}^0(x) = y \frac{1}{d} f_{\sigma} \left(\frac{y}{d} \right) \prod_{i \in I_l} F_{\sigma_i} \left(\frac{y}{d_i \bar{x}_i} \right) = d_{I_l}^0(\bar{x}).$$

Таким образом, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости получим, что для всех $x \in X_{I_l}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \bar{x}} d_{E_{I_k}}(x) &= \sum_{i \in I_k} \int_0^{+\infty} \left[\lim_{x \rightarrow \bar{x}} d_{I_k}^i(x) \right] dy + \int_0^{+\infty} \left[\lim_{x \rightarrow \bar{x}} d_{I_k}^0(x) \right] dy = \\ &= \sum_{i \in I_k} \int_0^{+\infty} d_{I_l}^i(\bar{x}) dy + \int_0^{+\infty} d_{I_l}^0(\bar{x}) dy = d_{E_{I_l}}(\bar{x}). \end{aligned}$$

□

Лемма 3. Пусть выполняются условия леммы 1 для функции $d_{E_{I_k}}(x)$, $\forall i \in I_k$ при $y \rightarrow \infty$, $f_{\sigma_i}(y) \rightarrow 0$. Тогда для всех $\bar{x} \in X_{I_0}$

$$\lim_{x_i \rightarrow \bar{x}} d_{E_{I_k}}(x) = d_{E_{I_0}}(\bar{x}).$$

Доказательство. Для всех $i \in I_k$ при $x_i \rightarrow 0$ функции $y/d_i x_i \rightarrow \infty$, поэтому

$$f_{\sigma_i} \left(\frac{y}{d_i x_i} \right) \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad F_{\sigma_i} \left(\frac{y}{d_i x_i} \right) \rightarrow 1,$$

из чего следует, что для $x \in X_{I_0}$ и $i \in I_k$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} d_{I_k}^i(x) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}} d_{I_k}^0(x) = y \frac{1}{d} f_{\sigma} \left(\frac{y}{d} \right).$$

Используя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, в итоге получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \bar{x}} d_{E_{I_k}}(x) &= \sum_{i \in I_k} \int_0^{+\infty} \left[\lim_{x \rightarrow \bar{x}} d_{I_k}^i(x) \right] dy + \int_0^{+\infty} \left[\lim_{x \rightarrow \bar{x}} d_{I_k}^0(x) \right] dy = \\ &= \int_0^{\infty} y \frac{1}{d} f_{\sigma} \left(\frac{y}{d} \right) dy = d_{I_0}(x). \end{aligned}$$

□

Теорема 2. Пусть выполняются следующие условия:

1. случайные величины $\sigma_i(\omega)$ и $\sigma(\omega)$ имеют конечные математические ожидания $\forall i = \overline{1, n}$;
2. функции плотности $f_{\sigma_i}(y)$ непрерывны по $y \in E^1$ и $f_{\sigma_i}(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$;
3. для всех $i = \overline{1, n}$ существуют интегрируемые функции $\phi_i(y)$

$$\int_0^{+\infty} \phi_i(y) dy < \infty,$$

такие что для всех $y \in E^1$ и $x \in E_+^n$ выполняется

$$y \frac{1}{d_i x_i} f_{\sigma_i} \left(\frac{y}{d_i x_i} \right) \leq \phi_i(y).$$

Тогда функция $d_{Ef}(x)$ непрерывна в области E_+^n .

Доказательство. Доказательство следует из Лемм 1, 2 и 3. □

Заключение

В статье доказаны теоремы, в которых получены условия существования и непрерывности функций, представляющих коэффициенты нечеткости возможностного распределения ожидаемого значения взвешенной суммы нечетких случайных величин. В дальнейшем эти результаты могут найти применение в стохастических квазиградиентных методах решения задач возможно-вероятностной оптимизации [13], в частности при решении задач портфельного анализа в условиях гибридной неопределенности [14, 15].

Список литературы

- [1] Язенин А.В., Егорова Ю.Е. О методах решения задач возможно-вероятностного программирования // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2013. № 4 (31). С. 85–103.
- [2] Егорова Ю.Е., Язенин А.В. Идентификация параметров возможностного распределения ожидаемого значения T_W -суммы нечетких случайных величин // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 2. С. 81–93.
- [3] Егорова Ю.Е., Язенин А.В. Стохастический квазиградиентный метод решения задач возможно-вероятностной оптимизации одного класса // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 4. С. 57–70.
- [4] Nahmias S. Fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems. 1978. № 1. Pp. 97–110.
- [5] Nahmias S. Fuzzy variables in a random environment // In: Advances in Fuzzy Sets Theory / Ed. M.M. Gupta. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1979. Pp. 165–168.

- [6] Yazenin A., Wagenknecht M. Possibilistic Optimization. Cottbus, Germany: Brandenburgische Technische Universitat, 1996.
- [7] Хохлов М.Ю., Язенин А.В. Расчет числовых характеристик нечетких случайных величин // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2003. № 1. С. 39–43.
- [8] Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. М.: Радио и связь, 1990.
- [9] Nguyen H.T., Walker E.A. A First Course in Fuzzy Logic. Boca Raton: CRC Press, 1997.
- [10] Hong D.H. Parameter estimations of mutually T-related fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems. 2001. Т. 123, № 1. Pp. 63–71. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(00\)00113-5](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(00)00113-5)
- [11] Язенин А.В. Основные понятия теории возможностей: математический аппарат для принятия решений в условиях гибридной неопределенности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016.
- [12] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
- [13] Егорова Ю.Е., Язенин А.В. К проблеме возможно-вероятностной оптимизации // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2017. №4. С. 104-120.
- [14] Yazenin A.V. Possibilistic-probabilistic models and methods of portfolio optimization // Studies in Computational Intelligence. 2007. Vol. 36. Pp. 241–259.
- [15] Egorova Yu.E., Yazenin A.V. A method for minimum risk portfolio optimization under hybrid uncertainty // International Journal of Modern Physics: Conference Series. 2018. Vol. 973. 012033. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/973/1/012033>

Образец цитирования

Егорова Ю.Е. О свойствах параметров возможностного распределения математического ожидания взвешенной суммы нечетких случайных величин // Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2018. Т. 13, № 1. С. 81–93. <https://doi.org/10.26456/fssc42>

Сведения об авторах

1. Егорова Юлия Евгеньевна

ассистент кафедры информационных технологий Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

E-mail: j.e.egorova@gmail.com

**PROPERTIES OF THE POSSIBILITY DISTRIBUTION
PARAMETERS OF THE EXPECTED VALUE OF A WEIGHTED
SUM OF FUZZY RANDOM VARIABLES**

Egorova Yuliya Evgenyevna

Assistant at Information Technologies department,

Tver State University

Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU.

E-mail: j.e.egorova@gmail.com

Received 15.05.2018, revised 20.06.2018.

The paper studies properties of the parameters of the possibility distribution of the expected value of a linear function of fuzzy random variables in the case when fuzzy parameters are related by the weakset (drastic) t-norm. Criteria of existence and continuity of coefficients of fuzziness are presented.

Keywords: fuzzy random variable, the expected value of fuzzy random variable, the weakest t-norm, weighted sum of fuzzy random variables, possibilistic-probabilistic optimization.

Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya [Fuzzy Systems and Soft Computing], 2018, vol. 13(1), pp. 81–93. <https://doi.org/10.26456/fssc42>

References

- [1] Yazenin A.V., Egorova Yu.E. On solution methods for tasks of possibilistic-probabilistic optimization. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2013, no. 4 (31), pp. 85–103. (in Russian)
- [2] Egorova Yu.E., Yazenin A.V. Parameter identification for possibilistic distribution of expected values of fuzzy random variables T_W -sums. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 2, pp. 81–93. (in Russian)
- [3] Egorova Yu.E., Yazenin A.V. Stochastic quasi-gradient method for solving possibilistic-probabilistic optimization task of one class. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 4, pp. 57–70. (in Russian)
- [4] Nahmias S. Fuzzy variables. *Fuzzy Sets and Systems*, 1978, vol. 1, pp. 97–110.
- [5] Nahmias S. Fuzzy variables in a random environment. In: *Advances in Fuzzy Sets Theory*. Ed. by M.M. Gupta. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1979. Pp. 165–168.

- [6] Yazenin A., Wagenknecht M. *Possibilistic Optimization*. Brandenburgische Technische Universität, Cottbus, Germany, 1996.
- [7] Khokhlov M.Yu., Yazenin A.V. Calculation of the numerical characteristics of fuzzy random variables. *Vestnik TvgU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2003, no. 1, pp. 39–43. (in Russian)
- [8] Dubois D., Prade H. *Teoriya Vozmozhnostej* [Theory of Possibilities]. Radio i svyaz' Publ., Moscow, 1990. (in Russian)
- [9] Nguyen H.T., Walker E.A. *A First Course in Fuzzy Logic*. CRC Press, Boca Raton, 1997.
- [10] Hong D.H. Parameter estimations of mutually T-related fuzzy variables. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, vol. 123(1), pp. 63–71. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(00\)00113-5](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(00)00113-5)
- [11] Yazenin A.V. *Osnovnye Ponyatiya Teorii Vozmozhnostej: Matematicheskij Apparat dlya Prinyatiya Reshenij v Usloviyakh Gibridnoj Neopredelennosti* [Basic Concepts of the Theory of Possibilities: a Mathematical Apparatus for Decision-Making under Conditions of Hybrid Uncertainty]. Fizmatlit Publ., Moscow, 2016. 144 p. (in Russian)
- [12] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy Teorii Funktsij i Funktsional'nogo Analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis]. Nauka Publ., Moscow, 1976. (in Russian)
- [13] Egorova Y.E., Yazenin A.V. The problem of possibilistic-probabilistic optimization. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2017, vol. 56(4) pp. 652–667.
- [14] Yazenin A.V. Possibilistic-probabilistic models and methods of portfolio optimization. *Studies in Computational Intelligence*, 2007, vol. 36, pp. 241–259.
- [15] Egorova Yu.E., Yazenin A.V. A method for minimum risk portfolio optimization under hybrid uncertainty. *International Journal of Modern Physics: Conference Series*, 2018, vol. 973, 012033. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/973/1/012033>

Citation

Egorova Yu.E. Properties of the possibility distribution parameters of the expected value of a weighted sum of fuzzy random variables. *Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya* [Fuzzy Systems and Soft Computing], 2018, vol. 13(1), pp. 81–93. (in Russian) <https://doi.org/10.26456/fssc42>