Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Язенин, И. С. Солдатенко, Исследование портфеля минимального риска в условиях гибридной неопределенности при слабейшей t -норме, *Нечеткие системы и мягкие вычисления*, 2018, том 13, выпуск 2, 101–112

DOI: <https://doi.org/10.26456/fssc45>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 15:55:51

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОРТФЕЛЯ МИНИМАЛЬНОГО РИСКА В УСЛОВИЯХ ГИБРИДНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРИ СЛАБЕЙШЕЙ Т-НОРМЕ

Язенин А.В., Солдатенко И.С.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 14.08.2018, после переработки 03.12.2018.

Разработана и исследована модель портфеля минимального риска в условиях гибридной неопределенности возможно-вероятностного типа. Особенностью рассматриваемой модели является то, что взаимодействие нечетких параметров в ней описывается слабой t -нормой. Получена формула для дисперсии портфеля, позволяющая оценивать его риск. Модель допустимых портфелей основана на принципе ожидаемой возможности. Его применение приводит к снятию неопределенности возможно-вероятностного типа путем наложения требований по возможности/необходимости выполнения требований инвестора на приемлемый уровень доходности портфеля. Построен эквивалентный детерминированный аналог модели. Полученные результаты демонстрируются на числовом примере. Они позволяют строить обобщенные модели портфельного анализа, ориентированные на обработку гибридного (комбинированного) вида неопределенности.

Ключевые слова: портфель минимального риска, гибридная неопределенность, слабая t -норма, возможность/необходимость, риск, доходность.

Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2018. Т. 13, № 2. С. 101–112.
<https://doi.org/10.26456/fssc45>

Введение

В статье представлена модель и методы решения задач оптимизации портфеля в условиях гибридной неопределенности возможно-вероятностного типа, дополняющие ранее полученные авторами результаты в этом научном направлении [1–3]. Отличительной особенностью этих результатов является то, что мы исследуем ситуацию, когда взаимодействие нечетких факторов модели описывается слабой t -нормой. Это позволяет в конечном итоге оценить диапазон изменения риска и поведение множества допустимых портфелей, то есть управлять нечеткостью при принятии инвестиционных решений.

Для снятия неопределенности вероятностного типа при принятии решений используется принцип, основанный на ожидаемой возможности. В результате его применения мы имеем возможностную функцию, представляющую доходность портфеля. Неопределенность возможно-вероятностного (нечеткого) типа снимается путем

наложения требований по возможности/необходимости выполнения ограничений инвестора на приемлемый уровень доходности портфеля. Данные результаты являются оригинальными. В ряде релевантных работ, посвященных проблеме выбора портфеля и оптимизации в условиях гибридной неопределенности, как правило, исследуется лишь ситуация, когда взаимодействие нечетких факторов описывается сильнейшей t -нормой (см., например, [4]).

1. Необходимые понятия и обозначения

В контексте работ [5-7] введем ряд определений и понятий из теории возможностей. Пусть далее $(\Gamma, P(\Gamma), \tau)$ и (Ω, B, P) есть возможностное и вероятностное пространства, соответственно, в которых Ω – пространство элементарных событий $\omega \in \Omega$, Γ – модельное пространство с элементами $\gamma \in \Gamma$, B – σ -алгебра событий, $P(\Gamma)$ – множество всех подмножеств Γ , $\tau \in \{\pi, \nu\}$, π и ν – меры возможности и необходимости, соответственно, а P – мера вероятности, E^1 – числовая прямая.

Дадим определение нечеткой случайной (возможностно-вероятностной) величины и ее распределения [6, 7].

Определение 1. *Нечеткая случайная величина $Y(\omega, \gamma)$ есть вещественная функция $Y : \Omega \times \Gamma \rightarrow E^1$ σ -измеримая для каждого фиксированного γ , а функция*

$$\mu_Y(\omega, t) = \pi\{\gamma \in \Gamma : Y(\omega, \gamma) = t\}, \quad \forall t \in E^1$$

называется ее функцией распределения.

Из определения 1 следует, что функция распределения нечеткой случайной величины зависит от случайного параметра, т.е. является случайной функцией.

Определение 2. *Пусть $Y(\omega, \gamma)$ – нечеткая случайная величина. Ее ожидаемым значением $E[Y]$ называется нечеткая величина, имеющая функцию распределения возможностей*

$$\mu_{E[Y]}(t) = \pi\{\gamma \in \Gamma : E[Y(\omega, \gamma)] = t\}, \quad \forall t \in E^1,$$

где E – оператор взятия математического ожидания и

$$E[Y(\omega, \gamma)] = \int_{\Omega} Y(\omega, \gamma) P(d\omega).$$

Функция распределения ожидаемого значения нечеткой случайной величины уже не зависит от случайного параметра и является нечеткой величиной.

Определим, следуя [8], моменты второго порядка. Пусть X и Y – нечеткие случайные величины.

Определение 3. *Ковариация нечетких случайных величин X и Y определяется следующим образом:*

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\text{cov}(X_{\omega}^{-}(\alpha), Y_{\omega}^{-}(\alpha)) + \text{cov}(X_{\omega}^{+}(\alpha), Y_{\omega}^{+}(\alpha))) d\alpha, \quad (1)$$

где $X_{\omega}^{-}(\alpha)$, $Y_{\omega}^{-}(\alpha)$, $X_{\omega}^{+}(\alpha)$, $Y_{\omega}^{+}(\alpha)$ – суть границы α -уровневых множеств нечетких величин X_{ω} , Y_{ω} , соответственно.

Определение 4. Дисперсия нечеткой случайной величины Y есть

$$D[Y] = \text{cov}(Y, Y).$$

Определяемые в соответствии с рассматриваемым подходом математическое ожидание, дисперсия и ковариация нечетких случайных величин наследуют основные свойства аналогичных характеристик вещественных случайных величин.

Для моделирования нечетких величин часто используется распределение LR-типа [9]. В этом случае нечеткая величина Y записывается, как правило, в виде $Y = [\underline{m}, \bar{m}, \underline{d}, \bar{d}]_{LR}$. В данном представлении $\underline{m}$, $\bar{m}$ есть левая и правая границы интервала толерантности, $\underline{d}$, $\bar{d}$ – коэффициенты нечеткости, при этом $\underline{m} \leq \bar{m}$ и $\underline{d} > 0$, $\bar{d} > 0$, а $L(t)$ и $R(t)$ – функции представления левой и правой форм, соответственно.

Для агрегирования нечеткой информации будем использовать t -нормы и t -конормы, которые расширяют операции типа $\min$ и $\max$, заложенные в действиях над нечеткими множествами и нечеткими величинами [10].

Особый интерес представляют t -нормы

$$T_M(x, y) = \min\{x, y\} \text{ и } T_W(x, y) = \begin{cases} \min\{x, y\}, & \text{если } \max\{x, y\} = 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

которые являются экстремальными.

T_M называется сильнейшей, а T_W – слабейшей t -нормой, так как для любой произвольной t -нормы T и $\forall x, y \in [0, 1]$ справедливо неравенство (см., например, [10]):

$$T_W(x, y) \leq T(x, y) \leq T_M(x, y).$$

2. Математическая модель портфеля минимального риска в условиях гибридной неопределенности

В условиях гибридной неопределенности возможно-вероятностного типа доходность инвестиционного портфеля может быть представлена нечеткой случайной функцией

$$R_P(w, \omega, \gamma) = \sum_{i=1}^n R_i(\omega, \gamma) w_i, \quad (2)$$

то есть является линейной функцией долей капитала w в портфеле. Здесь $R_i(\omega, \gamma)$ – нечеткие случайные величины, моделирующие доходности отдельных финансовых активов и имеющие сдвиг-масштабное представление [11]:

$$R_i(\omega, \gamma) = a_i(\omega) + \sigma_i(\omega) Z_i(\gamma). \quad (3)$$

Всюду далее мы предполагаем, что в представлении (3) нечеткие величины $Z_i(\gamma) = [\underline{m}_i, \bar{m}_i, \underline{d}_i, \bar{d}_i]_{LR}$ взаимно T_W -связанные [12], а случайные величины $a_i(\omega)$, $\sigma_i(\omega)$ есть коэффициенты сдвига и масштаба – случайные величины, определенные на вероятностном пространстве (Ω, B, P) .

Для лучшего интуитивного понимания такой модели нечеткой случайной величины представим себе ситуацию, когда некоторому финансовому эксперту

предложено оценить предполагаемую доходность некоторого финансового актива. Как сама эта доходность, так и ее оценка экспертом являются неопределенными величинами. Будем предполагать, что неопределенность, определяемая рыночными условиями, имеет вероятностный характер. Неопределенность оценки эксперта, в свою очередь, описывается некоторым возможным распределением. Если предположить, что степень нечеткости эксперта зависит в основном не от истинного значения оцениваемой величины, а от масштаба ее изменчивости, то данная модель представляется довольно правдоподобной.

При сделанных предположениях возможностное распределение доходности портфеля (2) принимает вид

$$R_p(w, \omega, \gamma) = \left[\underline{m}_{R_p}(w, \omega), \overline{m}_{R_p}(w, \omega), \underline{d}_{R_p}(w, \omega), \overline{d}_{R_p}(w, \omega) \right]_{LR}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \underline{m}_{R_p}(w, \omega) &= \sum_{i=1}^n (a_i(\omega) + \sigma_i(\omega) \underline{m}_i) w_i, & \overline{m}_{R_p}(w, \omega) &= \sum_{i=1}^n (a_i(\omega) + \sigma_i(\omega) \overline{m}_i) w_i, \\ \underline{d}_{R_p}(w, \omega) &= \max_{i=1 \dots n} \{ \sigma_i(\omega) \underline{d}_i w_i \}, & \overline{d}_{R_p}(w, \omega) &= \max_{i=1 \dots n} \{ \sigma_i(\omega) \overline{d}_i w_i \}. \end{aligned}$$

Для снятия неопределенности вероятностного типа в соответствии с развиваемым нами подходом [1-3] необходимо идентифицировать возможностное распределение математического ожидания функции $R_p(w, \omega, \gamma)$, то есть вычислить его параметры. Ожидаемая доходность портфеля в моделях портфельного анализа является, при фиксированном w , нечеткой величиной. Об этом говорит результат следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (2)-(4), тогда ожидаемая доходность портфеля характеризуется следующим возможностным распределением

$$\begin{aligned} \hat{R}_p(w, \gamma) &= ER_p(w, \omega, \gamma) = \\ &= \left[E \underline{m}_{R_p}(w, \omega), E \overline{m}_{R_p}(w, \omega), E \underline{d}_{R_p}(w, \omega), E \overline{d}_{R_p}(w, \omega) \right]_{LR} = \\ &= \left[\underline{m}_{\hat{R}_p}(w), \overline{m}_{\hat{R}_p}(w), \underline{d}_{\hat{R}_p}(w), \overline{d}_{\hat{R}_p}(w) \right]_{LR}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \underline{m}_{\hat{R}_p}(w) &= \sum_{i=1}^n (\hat{a}_i + \hat{\sigma}_i \underline{m}_i) w_i, & \overline{m}_{\hat{R}_p}(w) &= \sum_{i=1}^n (\hat{a}_i + \hat{\sigma}_i \overline{m}_i) w_i, \\ \underline{d}_{\hat{R}_p}(w) &= E \left[\max_{i=1, \dots, n} \{ \sigma_i(\omega) \underline{d}_i w_i \} \right], & \overline{d}_{\hat{R}_p}(w) &= E \left[\max_{i=1, \dots, n} \{ \sigma_i(\omega) \overline{d}_i w_i \} \right]. \end{aligned}$$

Заметим, что функции $\underline{d}_{\hat{R}_p}(w)$ и $\overline{d}_{\hat{R}_p}(w)$ могут быть вычислены в явном виде только для простых вероятностных распределений случайных составляющих $a_i(\omega)$, $\sigma_i(\omega)$ [1,2] и это связано с большим объемом вычислений. Чтобы уменьшить объем вычислений, для решения задач такого типа можно воспользоваться методами стохастического программирования, в частности методом стохастического квазиградиента [13, 14].

В соответствии с классическим подходом Марковица [15,16] мы можем построить функцию риска для портфеля, основываясь на результатах [8], а ожидаемую доходность включить в систему ограничений. Так как ожидаемая доходность портфеля в случае нечетких случайных данных есть нечеткая величина, то для снятия неопределенности возможностного типа в систему ограничений, определяющей множество допустимых портфелей, можно ввести ограничение по мере

возможности/необходимости на приемлемый для инвестора уровень ожидаемой доходности, который в общем случае может быть нечетким. Тогда модель допустимых портфелей по Марковицу в случае гибридной неопределенности может быть представлена в виде

$$F_p(w) = \begin{cases} \tau \left\{ \hat{R}_p(w, \gamma) \ R \ m_d \right\} \geq \alpha, \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1, \\ w \in E_+^n, \end{cases}$$

где $E_+^n = \{x \in E^n : x \geq 0\}$; $\hat{R}_p(w, \gamma)$ – ожидаемая доходность, R – четкое отношение $\{\geq, =\}$; $\alpha \in (0, 1]$, m_d – уровень доходности, приемлемый для инвестора.

Уровень ожидаемой доходности портфеля характеризует следующая теорема, позволяющая построить эквивалентный детерминированный аналог модели допустимых портфелей.

Теорема 2. Пусть в модели ограничений $F_p(w)$ $\tau = \pi$, $\mathcal{R} = '\geq'$. Тогда:

$$F_p(w) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n (\hat{a}_i + \hat{\sigma}_i \bar{m}_i) w_i + E \left[\max_{i=1 \dots n} \{ \sigma_i(\omega) \bar{d}_i w_i \} \right] \cdot R^{-1}(\alpha) \geq m_d, \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad w \in E_+^n. \end{cases}$$

Обозначим дисперсию доходности портфеля как

$$D_p(w) = D[R_p(w, \omega, \gamma)].$$

Тогда модель портфеля минимального риска может быть записана в виде:

$$D_p(w) \rightarrow \min, \quad (5)$$

$$w \in F_p(w). \quad (6)$$

3. Оценка риска портфеля в условиях гибридной неопределенности

В соответствии с обозначенным подходом к определению моментов второго порядка мы можем определить дисперсию портфеля для оценки его риска. Определим дисперсию для t -нормы T_W , описывающей взаимодействие нечетких факторов. Для этого воспользуемся формулой (1) для нахождения ковариации двух нечетких случайных величин. Для нахождения дисперсии она принимает вид:

$$D_p(w) = \frac{1}{2} \int_0^1 (D[R_p^-(w, \omega, \alpha)] + D[R_p^+(w, \omega, \alpha)]) d\alpha, \quad (7)$$

где $R_p^-(w, \omega, \alpha)$ и $R_p^+(w, \omega, \alpha)$, соответственно, левая и правая границы α -уровневого множества доходности портфеля – нечеткой случайной величины $R_p(w, \omega, \gamma)$:

$$R_p^-(w, \omega, \alpha) = \sum_{i=1}^n (a_i(\omega) + \sigma_i(\omega) \underline{m}_i) w_i - \max_{i=1 \dots n} \{ \sigma_i(\omega) \underline{d}_i w_i \} \cdot L^{-1}(\alpha),$$

$$R_p^+(w, \omega, \alpha) = \sum_{i=1}^n (a_i(\omega) + \sigma_i(\omega) \bar{m}_i) w_i + \max_{i=1 \dots n} \{ \sigma_i(\omega) \bar{d}_i w_i \} \cdot R^{-1}(\alpha).$$

После соответствующих преобразований окончательная формула для дисперсии, позволяющая определить риск портфеля, имеет вид:

$$\begin{aligned}
D_p(w) = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i^2 (D[a_i(\omega) + \sigma_i(\omega) \underline{m}_i] + D[a_i(\omega) + \sigma_i(\omega) \overline{m}_i]) + \\
& + \frac{1}{2} D \left[\max_{j=1 \dots n} \{ \sigma_j(\omega) \overline{d}_j w_j \} \right] \int_0^1 (R^{-1}(\alpha))^2 d\alpha + \\
& + \frac{1}{2} D \left[\max_{j=1 \dots n} \{ \sigma_j(\omega) \underline{d}_j w_j \} \right] \int_0^1 (L^{-1}(\alpha))^2 d\alpha + \\
& + \sum_{1 \leq i < j \leq n} w_i w_j (cov((a_i(\omega) + \sigma_i(\omega) \underline{m}_i), (a_j(\omega) + \sigma_j(\omega) \underline{m}_j)) + \\
& + cov((a_i(\omega) + \sigma_i(\omega) \overline{m}_i), (a_j(\omega) + \sigma_j(\omega) \overline{m}_j))) + \\
& + \sum_{i=1}^n w_i \left(\int_0^1 R^{-1}(\alpha) d\alpha cov \left((a_i(\omega) + \sigma_i(\omega) \overline{m}_i), \max_{j=1 \dots n} \{ \sigma_j(\omega) \overline{d}_j w_j \} \right) - \right. \\
& \left. - \int_0^1 L^{-1}(\alpha) d\alpha cov \left((a_i(\omega) + \sigma_i(\omega) \underline{m}_i), \max_{j=1 \dots n} \{ \sigma_j(\omega) \underline{d}_j w_j \} \right) \right).
\end{aligned}$$

Если все случайные параметры распределений независимы, то:

$$\begin{aligned}
D_p(w) = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i^2 (2D[a_i(\omega)] + D[\sigma_i(\omega)] (\underline{m}_i^2 + \overline{m}_i^2)) + \\
& + \frac{1}{2} D \left[\max_{j=1 \dots n} \{ \sigma_j(\omega) \overline{d}_j w_j \} \right] \int_0^1 (R^{-1}(\alpha))^2 d\alpha + \\
& + \frac{1}{2} D \left[\max_{j=1 \dots n} \{ \sigma_j(\omega) \underline{d}_j w_j \} \right] \int_0^1 (L^{-1}(\alpha))^2 d\alpha + \\
& + \sum_{i=1}^n w_i \left(\int_0^1 R^{-1}(\alpha) d\alpha cov \left((a_i(\omega) + \sigma_i(\omega) \overline{m}_i), \max_{j=1 \dots n} \{ \sigma_j(\omega) \overline{d}_j w_j \} \right) - \right. \\
& \left. - \int_0^1 L^{-1}(\alpha) d\alpha cov \left((a_i(\omega) + \sigma_i(\omega) \underline{m}_i), \max_{j=1 \dots n} \{ \sigma_j(\omega) \underline{d}_j w_j \} \right) \right).
\end{aligned}$$

Заметим, что если в нечетких случайных величинах нечеткая компонента задается нечеткими числами LR-типа с одинаковыми левой и правой функциями представления формы и коэффициентами нечеткости, т.е. $L(\alpha) = R(\alpha) = S(\alpha)$, $\forall \alpha$ и $\overline{m}_i = \underline{m}_i = m_i$, $\overline{d}_i = \underline{d}_i = d_i$, $i = 1, \dots, n$, то слагаемые с ковариацией взаимовычитаются и формула дисперсии принимает более простой вид:

$$\begin{aligned}
D_p(w) = & \sum_{i=1}^n w_i^2 (D[a_i(\omega)] + D[\sigma_i(\omega)] m_i^2) + \\
& + D \left[\max_{j=1 \dots n} \{ \sigma_j(\omega) d_j w_j \} \right] \int_0^1 (S^{-1}(\alpha))^2 d\alpha.
\end{aligned} \tag{8}$$

Легко получить формулу для дисперсии, когда коэффициенты сдвига и масштаба $a_i(\omega)$, $\sigma_j(\omega)$ являются равномерно распределенными на отрезке $[0,1]$ и независимыми. Тогда:

$$\begin{aligned} D_p(w) = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i^2 \left(\frac{1}{12} (\underline{m}_i^2 + \overline{m}_i^2) + \frac{1}{6} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(EMax2(\overline{dw}) - (EMax(\overline{dw}))^2 \right) \int_0^1 (R^{-1}(\alpha))^2 d\alpha + \\ & + \frac{1}{2} \left(EMax2(\underline{dw}) - (EMax(\underline{dw}))^2 \right) \int_0^1 (L^{-1}(\alpha))^2 d\alpha + \\ & + \sum_{i=1}^n w_i \left(\int_0^1 R^{-1}(\alpha) d\alpha \overline{m}_i \left(E \left[\sigma_i(\omega) \max_{j=1, \dots, n} \{ \sigma_j(\omega) \overline{d}_j w_j \} \right] - \frac{1}{2} EMax(\overline{dw}) \right) - \right. \\ & \left. - \int_0^1 L^{-1}(\alpha) d\alpha \underline{m}_i \left(E \left[\sigma_i(\omega) \max_{j=1, \dots, n} \{ \sigma_j(\omega) \underline{d}_j w_j \} \right] - \frac{1}{2} EMax(\underline{dw}) \right) \right), \end{aligned}$$

а формула (8) при соответствующих ей предположениях:

$$D_p(w) = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n w_i^2 (m_i^2 + 1) + \left(EMax2(dw) - (EMax(dw))^2 \right) \int_0^1 (S^{-1}(\alpha))^2 d\alpha,$$

где

$$\begin{aligned} EMax(\overline{dw}) &:= E \left[\max_{j=1 \dots n} \{ \sigma_j(\omega) \overline{d}_j w_j \} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{(\overline{dw})_{(i)}^{n-i+1}}{(n-i+1)(n-i+2)(\overline{dw})_{(i+1)} \dots (\overline{dw})_{(n)}}, \\ EMax2(\overline{dw}) &:= E \left[\left(\max_{j=1 \dots n} \{ \sigma_j(\omega) \overline{d}_j w_j \} \right)^2 \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{2(\overline{dw})_{(i)}^{n-i+2}}{(n-i+2)(n-i+3)(\overline{dw})_{(i+1)} \dots (\overline{dw})_{(n)}}, \end{aligned}$$

а $(\overline{dw})_{(1)}, (\overline{dw})_{(2)}, \dots, (\overline{dw})_{(n)}$ есть упорядоченная по возрастанию перестановка элементов $\{\overline{d}_1 w_1, \overline{d}_2 w_2, \dots, \overline{d}_n w_n\}$.

4. Портфель минимального риска в условиях гибридной неопределенности и модельные расчеты

Проведем модельные расчеты и сравнительное изучение моделей портфеля минимального риска в случае меры возможности и меры необходимости. При сделанных ранее предположениях относительно элементов задачи эквивалентный детерминированный аналог портфеля минимального риска (5)-(6) при $\tau = \pi$ принимает вид:

$$\frac{1}{12} \sum_{i=1}^n w_i^2 (m_i^2 + 1) + \left(EMax2(dw) - (EMax(dw))^2 \right) \int_0^1 (S^{-1}(\alpha))^2 d\alpha \rightarrow \min, \quad (8)$$

$$F_p = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\overline{m}_i + 1) w_i + EMax(\overline{dw}) \cdot R^{-1}(\alpha) \geq m_d, \\ \sum w_i = 1, \\ w \in E_+^n, \end{cases} \quad (9)$$

а при $\tau = \nu'$:

$$\frac{1}{12} \sum_{i=1}^n w_i^2 (m_i^2 + 1) + \left(EMax(dw) - (EMax(dw))^2 \right) \int_0^1 (S^{-1}(\alpha))^2 d\alpha \rightarrow \min, \quad (10)$$

$$F_p = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\underline{m}_i + 1) w_i - EMax(dw) \cdot L^{-1}(1 - \alpha) \geq m_d, \\ \sum w_i = 1, \\ w \in E_+^n. \end{cases} \quad (11)$$

Установим связь между множествами допустимых портфелей, определенных ограничениями.

Обозначим через X^π – множество допустимых портфелей при ограничении по возможности, а через X^ν – множество допустимых портфелей при ограничении по необходимости. Тогда при сделанных предположениях может быть доказана следующая теорема.

Теорема 3. $X^\nu \subseteq X^\pi$.

Рассмотрим модельный пример при $n = 2$. Пусть $Z_1 = [2.2; 2.2; 0.3; 0.3]_{LR}$, $Z_2 = [1.2; 1.2; 0.4; 0.4]_{LR}$, $L(t) = R(t) = \max\{0, 1 - t\}$, $\alpha = 0.75$. Напомним, что все $a_i(\omega)$, $\sigma_i(\omega)$ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с равномерным на отрезке $[0, 1]$ распределением. Множество квазиэффективных инвестиционных возможностей представлено на Рис. 1. Правая кривая на Рис. 1 изображает решение задачи (8)-(9), а левая кривая – решение задачи (10)-(11). На рисунке по оси абсцисс задается уровень ожидаемой доходности (m_d), а по оси ординат – риск портфеля (D). Как видно из рисунка, полученные результаты согласуются как с классическим подходом Марковица, так и с выводами теоремы 3.

Рис. 1: Множество квазиэффективных инвестиционных возможностей

Заключение

Так как исследуемая задача может быть отнесена к классу задач возможно-вероятностного программирования [1-3], то нами были получены следующие результаты, развивающие и дополняющие их: построена математическая модель портфеля минимального риска в условиях гибридной неопределенности возможно-вероятностного типа в возможно-необходимостном контексте, получена формула для оценки риска портфеля. С этой целью нами на основании подхода Фэнга получена формула для дисперсии портфеля при слабой t -норме, описывающей взаимодействие нечетких факторов. Построен эквивалентный детерминированный аналог модели минимального риска. Возможности подхода демонстрируются на модельном примере для случая, когда вероятностные параметры модели распределены по равномерному закону.

Список литературы

- [1] Язенин А.В., Егорова Ю.Е. О методах решения задач возможно-вероятностного программирования // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2013. № 4 (31). С. 85–103.
- [2] Егорова Ю.Е., Язенин А.В. Идентификация параметров возможностного распределения ожидаемого значения Тw-суммы нечетких случайных величин // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 2. С. 81–93.
- [3] Егорова Ю.Е., Язенин А.В. Стохастический квазиградиентный метод решения задач возможно-вероятностной оптимизации одного класса // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 4. С. 57–70.
- [4] Luhandjula M.K. Optimisation under hybrid uncertainty // Fuzzy Sets and Systems. 2004. Vol. 146, № 2. Pp. 187–203. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2004.01.002>
- [5] Nahmias S. Fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems. 1978. Vol. 1, № 2. Pp. 97–110. [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(78\)90011-8](https://doi.org/10.1016/0165-0114(78)90011-8)
- [6] Nahmias S. Fuzzy variables in a random environment // Advances in Fuzzy Set Theory and Applications. Eds. by M.M. Gupta, R.K. Ragade, R.R. Yager. Amsterdam: North-Holland, 1979. Pp. 165–180.
- [7] Язенин А.В. Основные понятия теории возможностей. Математический аппарат для принятия решений в условиях гибридной неопределенности. М.: Физматлит, 2016. 144 с.
- [8] Feng Y., Hu L., Shu H. The variance and covariance of fuzzy random variables and their applications // Fuzzy Sets and Systems. 2001. Vol. 120, № 3. Pp. 487–497. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(99\)00060-3](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(99)00060-3)
- [9] Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. М.: Радио и связь, 1990.
- [10] Nguyen H.T., Walker E.A. A First Course in Fuzzy Logic. Boca Raton: CRC Press, 1997.

- [11] Хохлов М.Ю., Язенин А.В. Расчет числовых характеристик нечетких случайных величин // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2003. № 1. С. 39–43.
- [12] Hong D.H. Parameter estimations of mutually t-related fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems. 2001. Vol. 123, № 1. Pp. 63–71. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(00\)00113-5](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(00)00113-5)
- [13] Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. М.: Наука, 1976.
- [14] Урясьев С.П. Адаптивные алгоритмы стохастической оптимизации и теории игр. М.: Наука, 1990.
- [15] Markowitz H. Portfolio Selection // The Journal of Finance. 1952. Vol. 7, № 1. Pp. 77–91. <https://doi.org/10.2307/2975974>
- [16] Yazenin A.V. Possibilistic–Probabilistic Models and Methods of Portfolio Optimization // Perception-based Data Mining and Decision Making in Economics and Finance. Eds. by I. Batyrshin, J. Kacprzyk, L. Sheremetov, L.A. Zadeh. Series: Studies in Computational Intelligence. Vol. 36. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. Pp. 241–259. https://doi.org/10.1007/978-3-540-36247-0_9

Образец цитирования

Язенин А.В., Солдатенко И.С. Исследование портфеля минимального риска в условиях гибридной неопределенности при слабейшей t-норме // Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2018. Т. 13, № 2. С. 101–112. <https://doi.org/10.26456/fssc45>

Сведения об авторах

1. Язенин Александр Васильевич

декан факультета прикладной математики и кибернетики Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

E-mail: Yazenin.AV@tversu.ru

2. Солдатенко Илья Сергеевич

доцент кафедры информационных технологий Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ. E-mail: soldis@tversu.ru

INVESTIGATION OF THE MINIMUM RISK PORTFOLIO UNDER CONDITIONS OF HYBRID UNCERTAINTY BASED ON THE WEAKEST T-NORM

Yazenin Alexander Vasilyevich

Dean of Applied Mathematics and Cybernetics faculty, Tver State University
Russia, 170100, Tver, Zhelyabova str., 33, TverSU.
E-mail: Yazenin.AV@tversu.ru

Soldatenko Ilia Sergeyevech

Associate professor at Information Technologies department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, Zhelyabova str., 33, TverSU.
E-mail: soldis@tversu.ru

Received 14.08.2018, revised 03.12.2018.

A model of a minimum risk portfolio under conditions of a hybrid uncertainty of a possibilistic-probabilistic type was developed and investigated. The peculiarity of the model is that interaction of fuzzy parameters in it is described by the weakest triangular norm (t-norm). A formula for the portfolio variance is obtained, which allows to estimate its risk. The model of feasible portfolios is based on the principle of expected possibility. Its application leads to the removal of possibilistic uncertainty by imposing requirements on the possibility / necessity of meeting the investor's requirements for an acceptable level of portfolio return. An equivalent crisp analog of the model is constructed and demonstrated on a numerical example. Obtained results allow us to build generalized models of portfolio optimization problems with prime objective on processing a hybrid (combined) type of uncertainty.

Keywords: minimum risk portfolio, hybrid uncertainty, weakest t-norm, possibility, necessity, risk, profitability.

Citation

Yazenin A.V., Soldatenko I.S., "Investigation of the minimum risk portfolio under conditions of hybrid uncertainty based on the weakest t-norm", *Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya [Fuzzy Systems and Soft Computing]*, **13**:2 (2018), 101–112 (in Russian). <https://doi.org/10.26456/fssc45>

References

- [1] Yazenin A.V., Egorova Yu.E., "On solution methods for tasks of possibilistic-probabilistic optimization", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2013, № 4 (31), 85–103 (in Russian).
- [2] Egorova Yu.E., Yazenin A.V., "Parameter identification for possibilistic distribution of expected values of fuzzy random variables Tw-sums", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2014, № 2, 81–93 (in Russian).

- [3] Egorova Yu.E., Yazenin A.V., “Stochastic quasi-gradient method for solving possibilistic-probabilistic optimization task of one class”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2014, № 4, 57–70 (in Russian).
- [4] Luhandjula M.K., “Optimisation under hybrid uncertainty”, *Fuzzy Sets and Systems*, **146**:2 (2004), 187–203, <https://doi.org/10.1016/j.fss.2004.01.002>.
- [5] Nahmias S., “Fuzzy variables”, *Fuzzy Sets and Systems*, **1**:2 (1978), 97–110, [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(78\)90011-8](https://doi.org/10.1016/0165-0114(78)90011-8).
- [6] Nahmias S., “Fuzzy variables in a random environment”, *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*, eds. M.M. Gupta, R.K. Ragade, R.R. Yager, North-Holland, Amsterdam, 1979, 165–180.
- [7] Yazenin A.V., *Osnovnye ponyatiya teorii vozmozhnostej. Matematicheskij apparat dlya prinyatiya reshenij v usloviyakh gibridnoj neopredelennosti [Basic concepts of the theory of possibilities. Mathematical decision-making apparatus in a hybrid uncertainty]*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2016 (in Russian), 144 pp.
- [8] Feng Y., Hu L., Shu H., “The variance and covariance of fuzzy random variables and their applications”, *Fuzzy Sets and Systems*, **120**:3 (2001), 487–497, [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(99\)00060-3](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(99)00060-3).
- [9] Dubois D., Prade H., *Theorie des Possibilites, Application a la Representation des Connaissances en Informatique*, Masson, Paris, 1988.
- [10] Nguyen H.T., Walker E.A., *A First Course in Fuzzy Logic*, CRC Press, Boca Raton, 1997.
- [11] Khokhlov M.Yu., Yazenin A.V., “Calculation of numerical characteristics of fuzzy random variables”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2003, № 1, 39–43 (in Russian).
- [12] Hong D.H., “Parameter estimations of mutually t-related fuzzy variables”, *Fuzzy Sets and Systems*, **123**:1 (2001), 63–71, [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(00\)00113-5](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(00)00113-5).
- [13] Ermolev Yu.M., *Metody stokhasticheskogo programmirovaniya [Stochastic programming methods]*, Nauka Publ., Moscow, 1976 (in Russian).
- [14] Uryasev S.P., *Adaptivnye algoritmy stokhasticheskoy optimizatsii i teorii igr [Adaptive algorithms for stochastic optimization and game theory]*, Nauka Publ., Moscow, 1990 (in Russian).
- [15] Markowitz H., “Portfolio Selection”, *The Journal of Finance*, **7**:1 (1952), 77–91, <https://doi.org/10.2307/2975974>.
- [16] Yazenin A.V., “Possibilistic–Probabilistic Models and Methods of Portfolio Optimization”, *Perception-based Data Mining and Decision Making in Economics and Finance*. V. 36, Studies in Computational Intelligence, eds. I. Batyrshin, J. Kacprzyk, L. Sheremetov, L.A. Zadeh, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007, 241–259, https://doi.org/10.1007/978-3-540-36247-0_9.