Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Молодцов, Начала рационального анализа - производные и интегралы,
Нечеткие системы и мягкие вычисления, 2020, том 15, выпуск 1, 5–25

DOI: <https://doi.org/10.26456/fssc70>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 15:57:34

НАЧАЛА РАЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА – ПРОИЗВОДНЫЕ И ИНТЕГРАЛЫ

Молодцов Д.А.

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук
Федерального исследовательского центра «Информатика и управление»
Российской академии наук, г. Москва

Поступила в редакцию 26.11.2019, после переработки 16.12.2019.

Продолжается построение основ рационального анализа. Предлагаются два понятия мягкой производной. Доказан аналог теоремы Ферма. Для обоих вариантов мягкой производной построены обратные операции мягкого интегрирования. Доказаны теоремы существования и аналоги свойств дифференцируемости классического интеграла по верхнему пределу.

Ключевые слова: рациональный анализ, мягкие производные рациональной функции, мягкий интеграл рациональной функции.

Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2020. Т. 15, № 1. С. 5–25.
<https://doi.org/10.26456/fssc70>

Введение

В работе [1] были изложены мотивы, вызвавшие изучение проблемы построения анализа на множестве рациональных чисел. Там был введен аппарат для работы с подмножествами рациональных чисел, построены понятия мягкого предела и мягкой непрерывности для рациональных функций. Настоящая работа является непосредственным продолжением работы [1] и поэтому здесь без дополнительного дублирования будут использоваться все обозначения, понятия и результаты работы [1]. Таким образом знакомство с работой [1] является необходимым для чтения настоящей работы. Здесь будет продолжено построение базовых понятий рационального анализа и основное внимание будет уделено построению аналогов классической производной и интеграла.

1. Мягкая производная рациональной функции

Одними из наиболее часто используемыми подходами для определения понятия «близкого» к производной являются подходы, основанные на рассмотрении двух конструкций. Первая конструкция – это разностное отношение для функции f в виде $\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$, вторая конструкция – это линейная функция $f(x) + u(z-x)$. Здесь также будут использоваться эти конструкции. Итак, пусть имеется рациональная функция $f \in \Phi$, выбрана некоторая точка $x \in Dom(f)$ и заданы отображение близости $\tau : \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ и мягкое отображение близости $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}$, напомним,

что $\mathbb{R}$ – это множество рациональных чисел, а $\mathbb{P}$ – это множество отображений близости производной.

Первый способ построения мягкой производной исходит из того, что производная функции f в точке x должна характеризовать скорость изменения функции на множестве $\tau(x)$. Таким образом приходим к тому, что производная u должна быть близка к функции $\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$.

Вторая идея построения производной заключается в том, что производная является угловым коэффициентом линейной функции, приближающей исходную функцию, то есть значение производной u должно обеспечивать близость функций $f(z)$ и $f(x) + u(z-x)$.

Второй подход допускает различные вариации. Некоторые члены двух функций, используемых в этом подходе, можно перебрасывать в другую функцию.

Итак, приведем некоторые варианты определения мягкой производной.

Напомним $\tau^0(x) = \tau(x) \setminus \{x\}$.

Определение 1.1.

1. Предположим $\tau^0(x) \neq \emptyset$. Число $u \in \mathbb{R}$ называется (τ, μ) -производной функции f в точке $x \in \text{Dom}(f)$, если для любых $z \in \tau^0(x)$ справедливо включение

$$u \in \mu[x] \left(\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \right).$$

2. Число $u \in \mathbb{R}$ называется (τ, μ) -дифференциалом функции f в точке $x \in \text{Dom}(f)$, если для любых $z \in \tau(x)$ справедливо включение

$$u(z-x) \in \mu[x](f(z) - f(x)). \quad (1.1)$$

Замечание 1. Вместо условия (1.1) можно было бы использовать, например, следующие условия

$$f(x) + u(z-x) \in \mu[x](f(z))$$

$$f(z) - u(z-x) \in \mu[x](f(x))$$

$$f(z) - uz \in \mu[x](f(x) - ux)$$

$$f(z) - f(x) + u(x-z) \in \mu[x](0).$$

Выбор условия (1.1) в определении 1.1. обусловлен тем, что для него легче строится обратная операция – процесс интегрирования. Впрочем, также просто строится обратная операция для последнего из приведенных вариантов условий.

Множество мягких (τ, μ) -производных обозначим символом $\mathcal{D}(f, x, \tau, \mu)$, а мягких (τ, μ) -дифференциалов обозначим $\mathbb{D}(f, x, \tau, \mu)$.

Здесь приведена только часть возможных определений мягкой производной. Формализация понятия производной и в классическом анализе возможна различными способами. В негладком анализе предложено большое число различных обобщений классической производной. В [2] можно найти подробную библиографию по этой тематике. Основным отличием предлагаемого подхода от указанных работ является построение аналогов производной без использования предела и на неполном пространстве (множество рациональных чисел). Наиболее близким по духу к определениям мягких производных, которое и послужило мотивом к введению таких мягких производных, является определение из работы [3].

Приведем некоторые простейшие свойства мягких производных.

Утверждение 1.1. *Предположим, что для отображений близости τ, μ и для мягких отображений близости θ, ϑ справедливы отношения $\tau \subseteq \theta, \mu[x] \subseteq \vartheta[x]$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Тогда справедливы включения*

$$\mathcal{D}(f, x, \tau, \mu) \supseteq \mathcal{D}(f, x, \theta, \mu),$$

$$\mathbb{D}(f, x, \tau, \mu) \subseteq \mathbb{D}(f, x, \tau, \vartheta).$$

Утверждение 1.2. *Предположим $\tau^0(x) \neq \emptyset$. Тогда*

$$\mathcal{D}(f, x, \tau, \mu) = \bigcap_{z \in \tau^0(x)} \mu[x] \left(\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \right),$$

$$\mathbb{D}(f, x, \tau, \mu) = \bigcap_{z \in \tau^0(x)} \frac{\mu[x] (f(z) - f(x))}{z - x}.$$

Вычислим множества производных для некоторых типов производных при конкретизации отображения близости μ . Напомним обозначения

$$\omega_{abs}[\varepsilon](x) = [x - \varepsilon(x), x + \varepsilon(x)] \subseteq \mathbb{R}, \quad \varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\omega_{rel}[\varepsilon](x) = [x - \varepsilon|x|, x + \varepsilon|x|] \subseteq \mathbb{R}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^+.$$

Утверждение 1.3. *Пусть $\varepsilon, \alpha \in \mathbb{R}^+, \tau^0(x) \neq \emptyset$ и функция $\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ ограничена на множестве $\tau^0(x)$. Тогда*

$$0. \mathcal{D}(f, x, \tau, \omega_{abs}[\varepsilon]) =$$

$$= \left\{ u \in \mathbb{R} \mid \sup_{z \in \tau^0(x)} [\omega_{abs}[\alpha]] \left(\frac{f(z)-f(x)}{z-x} - \varepsilon \right) \ll u \ll \inf_{z \in \tau^0(x)} [\omega_{abs}[\alpha]] \left(\frac{f(z)-f(x)}{z-x} + \varepsilon \right) \right\}.$$

$$1. \mathbb{D}(f, x, \tau, \omega_{abs}[\varepsilon]) = \left\{ u \in \mathbb{R} \mid \sup_{z \in \tau^0(x)} [\omega_{abs}[\alpha]] \left(\frac{f(z)-f(x)}{z-x} - \frac{\varepsilon}{|z-x|} \right) \ll u \ll \inf_{z \in \tau^0(x)} [\omega_{abs}[\alpha]] \left(\frac{f(z)-f(x)}{z-x} + \frac{\varepsilon}{|z-x|} \right) \right\}.$$

2. Если $0 \leq \varepsilon < 1$ и $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \geq 0$ для любых $z \in \tau^0(x)$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(f, x, \tau, \omega_{rel}[\varepsilon]) &= \left\{ u \in \mathbb{R} \mid \sup_{z \in \tau^0(x)} [\omega_{abs}[\alpha]] \left((1 - \varepsilon) \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \right) \ll u \ll \right. \\ &\quad \left. \ll \inf_{z \in \tau^0(x)} [\omega_{abs}[\alpha]] \left((1 + \varepsilon) \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \right) \right\}. \end{aligned}$$

3. Если $0 \leq \varepsilon < 1$ и $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} < 0$ для любых $z \in \tau^0(x)$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(f, x, \tau, \omega_{rel}[\varepsilon]) &= \left\{ u \in \mathbb{R} \mid \sup_{z \in \tau^0(x)} [\omega_{abs}[\alpha]] \left((1 + \varepsilon) \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \right) \ll u \ll \right. \\ &\quad \left. \ll \inf_{z \in \tau^0(x)} [\omega_{abs}[\alpha]] \left((1 - \varepsilon) \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \right) \right\}. \end{aligned}$$

4. Если существуют точки $a, b \in \tau^0(x)$ такие, что $\frac{f(a)-f(x)}{a-x} > 0, \frac{f(b)-f(x)}{b-x} < 0$, то

$$\mathcal{D}(f, x, \tau, \omega_{rel}[\varepsilon]) = \emptyset.$$

$$5. \mathbb{D}(f, x, \tau, \omega_{rel}[\varepsilon]) = \left\{ u \in \mathbb{R} \mid \sup_{z \in \tau^0(x)} [\omega_{abs}[\alpha]] \left(\frac{f(z)-f(x)}{z-x} - \frac{\varepsilon|f(z)-f(x)|}{|z-x|} \right) \ll u \ll \right. \\ \left. \ll \inf_{z \in \tau^0(x)} [\omega_{abs}[\alpha]] \left(\frac{f(z)-f(x)}{z-x} + \frac{\varepsilon|f(z)-f(x)|}{|z-x|} \right) \right\}.$$

Сделаем одно замечание относительно определения (τ, μ) -производных. На первый взгляд может показаться странным условие $u \in \mu[x] \left(\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \right)$. Не проще ли было, как например это делается в [2] при определении частных субдифференциалов, в множество мягких производных включить все значения разностного отношения $\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$.

Однако в этом случае в множество производных могут попасть значения, сильно отличающиеся друг от друга. Приведенное здесь определение только тогда считает существующей мягкой производную, когда все значения разностного отношения цепляются друг за друга окрестностью, задаваемой отображением μ . Эта особенность определения существенно влияет и на свойства мягких производных. Продемонстрируем это на примере мягкой производной суммы двух функций.

Утверждение 1.4. Пусть τ, μ, ϑ — отображения близости, $\mathcal{D}(f, x, \tau, \mu) \neq \emptyset, \mathcal{D}(g, x, \tau, \vartheta) \neq \emptyset$ и

$$Im[f, \tau](x) = \left\{ u \in \mathbb{R} \mid \exists z \in \tau^0(x) : u = \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \right\}, \\ \sigma = con[Im[f, \tau], Im[g, \tau], \mu, \vartheta].$$

Тогда справедливо включение

$$\mathcal{D}(f, x, \tau, \mu) + \mathcal{D}(g, x, \tau, \vartheta) \subseteq \mathcal{D}(f + g, x, \tau, \sigma).$$

Доказательство. Пусть $a \in \mathcal{D}(f, x, \tau, \mu)$, $b \in \mathcal{D}(g, x, \tau, \vartheta)$. Тогда для любых $z \in \tau^0(x)$ выполнены включения

$$a \in \mu \left(\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \right), \quad b \in \vartheta \left(\frac{g(z) - g(x)}{z - x} \right).$$

Отсюда следует справедливость включений

$$a + b \in \mu \left(\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \right) + \vartheta \left(\frac{g(z) - g(x)}{z - x} \right) \subseteq \sigma \left(\frac{f(z) + g(z) - f(x) - g(x)}{z - x} \right).$$

Это означает, что $a + b \in \mathcal{D}(f + g, x, \tau, \sigma)$. Утверждение доказано. $\square$

После введения мягких производных и дифференциалов естественно возникает вопрос о том, сохраняются ли свойства классических дифференцируемых функций.

Рассмотрим теорему Ферма. Эта теорема утверждает, что если функция, определенная и дифференцируемая на некотором промежутке, достигает во внутренней точке промежутка своего наибольшего (наименьшего) значения, то производная в этой точке равна нулю.

Утверждение 1.5. Пусть $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}^+$, функция $f \in \Phi$ определена на множестве $\omega_{abs}[\delta](x)$ и принимает в точке x наибольшее (наименьшее) значение на множестве $\omega_{abs}[\delta](x)$.

- 1) Если $\mathcal{D}(f, x, \omega_{abs}[\delta], \omega_{abs}[\varepsilon]) \neq \emptyset$, то $\mathcal{D}(f, x, \omega_{abs}[\delta], \omega_{abs}[\varepsilon]) \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$.
- 2) Если $\mathbb{D}(f, x, \omega_{abs}[\delta], \omega_{abs}[\varepsilon]) \neq \emptyset$, то $\mathbb{D}(f, x, \omega_{abs}[\delta], \omega_{abs}[\varepsilon]) \subseteq \left[-\frac{\varepsilon}{\delta}, \frac{\varepsilon}{\delta}\right]$.

Доказательство. Докажем только второй пункт. Для определенности считаем точку x точкой достижения наибольшего значения. Возьмем произвольную точку $u \in \mathbb{D}(f, x, \omega_{abs}[\delta], \omega_{abs}[\varepsilon])$.

Из определения 1.1. следует справедливость неравенств

$$f(z) - f(x) - \varepsilon \leq u(z - x) \leq f(z) - f(x) + \varepsilon$$

для любых $z \in [x - \delta, x + \delta]$.

Положим $z = x + \delta$, тогда имеем

$$-\varepsilon \leq f(x + \delta) - f(x) - u\delta \leq \varepsilon.$$

Делим на δ и получаем неравенства

$$\frac{f(x + \delta) - f(x)}{\delta} - \frac{\varepsilon}{\delta} \leq u \leq \frac{f(x + \delta) - f(x)}{\delta} + \frac{\varepsilon}{\delta} \leq \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Положим $z = x - \delta$, тогда имеем

$$-\varepsilon \leq f(x - \delta) - f(x) + u\delta \leq \varepsilon.$$

Делим на δ и получаем неравенства

$$-\frac{\varepsilon}{\delta} \leq \frac{f(x) - f(x - \delta)}{\delta} - \frac{\varepsilon}{\delta} \leq u \leq \frac{f(x) - f(x - \delta)}{\delta} + \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Утверждение доказано. $\square$

Как видим, вместо равенства производной нулю в точке достижения максимума (минимума), мягкая производная и мягкий дифференциал принимают «малые» значения.

Отметим, что для точек, близких к точкам, где достигаются наибольшие и наименьшие значения, теорема Ферма места не имеет, то есть в этих точках производная не обязана быть равной нулю. Таким образом, теорема Ферма не обладает свойством устойчивости к возмущениям. Однако для мягкого аналога теоремы Ферма – утверждения 1.5, устойчивость имеет место.

Возьмем $\beta \in \mathbb{R}_+$. Напомним, что множество $\sup_{x \in X} [\omega_{abs}[\beta]]f(x)$ можно представить в следующем виде

$$\sup_{x \in X} [\omega_{abs}[\beta]]f(x) = \{y \in f(X) \mid y + \beta \gg f(X)\}.$$

Нам потребуется мягкая внутренность множества $X \subseteq \mathbb{R}$, (τ – отображение близости),

$$Int[\tau](X) = \{x \in X \mid \tau(x) \subseteq X\}.$$

Утверждение 1.6. Пусть $\varepsilon, \delta, \beta \in \mathbb{R}^+$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, функция $f \in \Phi$ определена на множестве $[a, b]$.

1. Предположим для любых $x \in Int[\omega_{abs}[\delta]]([a, b])$ выполнено $\mathcal{D}(f, x, \omega_{abs}[\delta], \omega_{abs}[\varepsilon]) \neq \emptyset$. Тогда для любого числа $x \in Int[\omega_{abs}[\delta]]([a, b]) \cap f^{-1}\{y \in f([a, b]) \mid y + \beta \gg f([a, b])\}$ выполнено включение

$$\mathcal{D}(f, x, \omega_{abs}[\delta], \omega_{abs}[\varepsilon]) \subseteq \left[-\varepsilon - \frac{\beta}{\delta}, \varepsilon + \frac{\beta}{\delta}\right].$$

2. Предположим для любых $x \in \text{Int}[\omega_{abs}[\delta]]([a, b])$ выполнено $\mathbb{D}(f, x, \omega_{abs}[\delta], \omega_{abs}[\varepsilon]) \neq \emptyset$. Тогда для любого числа $x \in \text{Int}[\omega_{abs}[\delta]]([a, b]) \cap f^{-1}\{y \in f([a, b]) \mid y + \beta \gg f([a, b])\}$ выполнено включение

$$\mathbb{D}(f, x, \omega_{abs}[\delta], \omega_{abs}[\varepsilon]) \subseteq \left[-\frac{\varepsilon + \beta}{\delta}, \frac{\varepsilon + \beta}{\delta} \right].$$

Доказательство. Пункт 1. Возьмем произвольную точку

$$x \in \text{Int}[\omega_{abs}[\delta]]([a, b]) \cap f^{-1}\{y \in f([a, b]) \mid y + \beta \gg f([a, b])\}$$

и произвольное число $u \in \mathcal{D}(f, x, \omega_{abs}[\delta], \omega_{abs}[\varepsilon])$. Тогда для любого $z \in [x - \delta, x + \delta]$ выполнены неравенства

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} - \varepsilon \leq u \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} + \varepsilon.$$

Положим $z = x + \delta$, тогда, учитывая неравенство $f(z) - f(x) \leq \beta$, имеем

$$u \leq \frac{\beta}{\delta} + \varepsilon.$$

Положим $z = x - \delta$, тогда, опять учитывая неравенство $f(z) - f(x) \leq \beta$, имеем

$$-\frac{\beta}{\delta} - \varepsilon \leq u.$$

Пункт 2. Возьмем произвольную точку

$$x \in \text{Int}[\omega_{abs}[\delta]]([a, b]) \cap f^{-1}\{y \in f([a, b]) \mid y + \beta \gg f([a, b])\}$$

и произвольное число $u \in \mathbb{D}(f, x, \omega_{abs}[\delta], \omega_{abs}[\varepsilon])$. Тогда для любого $z \in [x - \delta, x + \delta]$ выполнены неравенства

$$-\varepsilon \leq f(z) - f(x) - u(z - x) \leq \varepsilon.$$

Положим $z = x + \delta$, тогда имеем

$$-\varepsilon \leq f(x + \delta) - f(x) - u\delta \leq \varepsilon.$$

Учитывая неравенство $f(x + \delta) - f(x) \leq \beta$, имеем

$$u \leq \frac{\varepsilon + \beta}{\delta}.$$

Положим $z = x - \delta$ и аналогично получим остальную часть доказательства. Утверждение доказано. $\square$

2. Обратные задачи – интегрирование

Сначала выясним, на каком множестве имеет смысл рассматривать задачу интегрирования. Знание значения мягкой (τ, μ) – производной (или (τ, μ) – дифференциала) функции f в точке x накладывает ограничения на значения функции f на множестве $\tau(x)$. Если известны значения мягкой производной на множестве $\tau(x)$, то это накладывает ограничения на значения функции f на множестве $\tau(\tau(x)) = \tau^2(x)$, и так далее. В итоге мы приходим к множеству

$$\text{Pro}(x, \tau) = \bigcup_{n \geq 1} \tau^n(x).$$

Это множество можно описать на языке теории графов. Каждое число считается вершиной. Ребром считается пара чисел x, y , если $y \in \tau(x)$. Множество рациональных чисел с отображением близости τ задают упорядоченный граф. Множество $Pro(x, \tau)$ это просто множество вершин y , для которых существует путь с началом в точке x и с концом в вершине y . Другими словами, $Pro(x, \tau)$ — это связная компонента, порожденная точкой x . Поэтому ставить задачу интегрирования естественно на множестве $Pro(x, \tau)$. Поскольку использовался термин «путь», приведем его определение.

Определение 2.1. *Последовательность чисел $x = (x_1, \dots, x_n), n > 1$, называется τ -путем, если для любых $i = 1, \dots, n-1$ выполнено $x_{i+1} \in \tau(x_i)$.*

Множество τ -путей с начальной точкой x и конечной точкой y обозначим $Path(x, y, \tau)$.

Начнем с (τ, μ) -производной.

2.1 Мягкий интеграл

Пусть τ — отображение близости, а μ — мягкое отображение близости $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}$. Если для функции f на множестве $Pro(x, \tau)$ существует (τ, μ) -производная, то выбрав по одной точке из множества $\mathcal{D}(f, y, \tau, \mu)$ можно построить функцию φ , для которой справедливы включения $\varphi(y) \in \mathcal{D}(f, y, \tau, \mu)$ для любых $y \in Pro(x, \tau)$.

Рассмотрим теперь обратную задачу: на множестве $Pro(x, \tau)$ задана функция φ и ищется функция f для которой для любых $y \in Pro(x, \tau)$ справедливы включения $\varphi(y) \in \mathcal{D}(f, y, \tau, \mu)$.

Предположим, решение существует. Возьмем произвольную точку $y \in Pro(x, \tau)$ произвольный τ -путь $z = (z_1, \dots, z_n) \in Path(x, y, \tau)$. Тогда для любого $i = 1, \dots, n-1$ выполнено

$$\frac{f(z_{i+1}) - f(z_i)}{z_{i+1} - z_i} \in \mu^{\leftarrow}[z_i](\varphi(z_i)).$$

Напомним $\mu^{\leftarrow}\mu[t](y) = \{x \in \mathbb{R} \mid y \in \mu[t](x)\}$.

Отсюда получаем

$$f(z_{i+1}) - f(z_i) \in (z_{i+1} - z_i) \mu^{\leftarrow}[z_i](\varphi(z_i)).$$

Суммируя, получаем

$$f(y) - f(x) \in \sum_{i=1}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) \mu^{\leftarrow}[z_i](\varphi(z_i)).$$

Учитывая, что τ -путь z был произвольным, получаем

$$f(y) - f(x) \in \bigcap_{z \in Path(x, y, \tau)} \sum_{i=1}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) \mu^{\leftarrow}[z_i](\varphi(z_i)).$$

Определение 2.1. *Множество*

$$\mathcal{I}_x^y[\varphi, \tau, \mu] = \bigcap_{z \in Path(x, y, \tau)} \sum_{i=1}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) \mu^{\leftarrow}[z_i](\varphi(z_i))$$

называется (τ, μ) –интегралом функции φ от x до y .

Итак, доказано утверждение.

Утверждение 2.1. Пусть на множестве $Pro(x, \tau) \cup \{x\}$ заданы функция φ и функция f , для которой для любых $y \in Pro(x, \tau)$ справедливы включения $\varphi(y) \in \mathcal{D}(f, y, \tau, \mu)$. Тогда для любого рационального числа $y \in Pro(x, \tau)$ выполнено включение

$$f(y) - f(x) \in \mathcal{I}_x^y[\varphi, \tau, \mu].$$

Приведем некоторые простейшие свойства (τ, μ) –интеграла. Нам потребуются операция соединения τ –путей. Пусть $u = (u_1, \dots, u_n) \in Path(x, y, \tau)$ и $w = (w_1, \dots, w_m) \in Path(y, z, \tau)$. Соединением двух путей u и w называется следующий путь

$$u \oplus w = (u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m) \in Path(x, z, \tau).$$

Легко видеть, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.2.

1. Пусть $Path(x, y, \tau) \neq \emptyset$ и $Path(y, z, \tau) \neq \emptyset$. Тогда справедливы соотношения

$$Path(x, y, \tau) \oplus Path(y, z, \tau) \subseteq Path(x, z, \tau).$$

2. Пусть $z \in Pro(x, \tau) \setminus \tau(x)$. Тогда

$$Path(x, z, \tau) = \bigcup_{y \in Pro(x, \tau) \cap Pro(z, \tau^{\leftarrow})} \{Path(x, y, \tau) \oplus Path(y, z, \tau)\}.$$

Известно, что классический интеграл Римана является аддитивным функционалом относительно отрезка интегрирования. Выясним, сохраняются ли аналогичные свойства для (τ, μ) –интеграла.

Утверждение 2.3. Пусть $z \in Pro(x, \tau) \setminus \tau(x)$. Тогда

$$\mathcal{I}_x^z[\varphi, \tau, \mu] \supseteq \bigcap_{y \in Pro(x, \tau) \cap Pro(z, \tau^{\leftarrow})} \{\mathcal{I}_x^y[\varphi, \tau, \mu] + \mathcal{I}_y^z[\varphi, \tau, \mu]\}.$$

Доказательство. Из определения 2.1. и утверждения 2.2. следует равенство

$$\mathcal{I}_x^z[\varphi, \tau, \mu] = \bigcap_{y \in Pro(x, \tau) \cap Pro(z, \tau^{\leftarrow})} \bigcap_{q \in Path(x, y, \tau) \oplus Path(y, z, \tau)} \sum_{i=1}^{n-1} (q_{i+1} - q_i) \mu^{\leftarrow}[q_i](\varphi(q_i)).$$

Отсюда получаем

$$\mathcal{I}_x^z[\varphi, \tau, \mu] \supseteq \bigcap_{y \in Pro(x, \tau) \cap Pro(z, \tau^{\leftarrow})} \{\mathcal{I}_x^y[\varphi, \tau, \mu] + \mathcal{I}_y^z[\varphi, \tau, \mu]\}.$$

□

Приведем еще одно очевидное свойство (τ, μ) –интеграла.

Утверждение 2.4. Пусть $x \in \tau(x)$ и $\mathcal{I}_x^x[\varphi, \tau, \mu] \neq \emptyset$. Тогда $\mathcal{I}_x^x[\varphi, \tau, \mu, 0] = \{0\}$.

Рассмотрим теперь аналог свойства дифференцируемости интеграла по верхнему пределу. Поскольку (τ, μ) –интеграл уже не число, а множество, то есть два пути. Первый – это ввести определение мягкой производной для точечно-множественных отображений и применить его к (τ, μ) –интегралу. Второй

путь – это взять функцию, значения которой в каждой точке принадлежат (τ, μ) – интегралу, а затем вычислять ее мягкую производную. Выберем пока второй путь.

Утверждение 2.5.

1. Пусть задана точка x и отображение близости τ , для которых выполнены условия:

- $\tau^0(x) \neq \emptyset$.
- На множестве $\tau^0(x) \cup \{x\}$ задана функция φ и для любой точки $y \in \tau^0(x) \cup \{x\}$ выполнено $\mathcal{I}_x^y[\varphi, \tau, \mu] \neq \emptyset$.

2. Функция F , заданная на множестве $\tau^0(x) \cup \{x\}$, удовлетворяет условиям:

- $F(x) = 0$;
- $F(y) \in \mathcal{I}_x^y[\varphi, \tau, \mu]$, для $y \in \tau^0(x) \setminus \{x\}$.

Тогда $\varphi(x) \in \mathcal{D}(F, x, \tau, \mu)$.

Доказательство. Используя утверждение 1.2, имеем

$$\mathcal{D}(F, x, \tau, \mu) = \bigcap_{z \in \tau^0(x)} \mu[x] \left(\frac{F(z)}{z-x} \right).$$

Из определения мягкого интеграла $\mathcal{I}_x^z[\varphi, \tau, \mu]$ следует, что для любой точки $z \in \tau^0(x)$ справедливо включение $F(z) \in (z-x) \mu^{\leftarrow}[x](\varphi(x))$, откуда следует $\frac{F(z)}{z-x} \in \mu^{\leftarrow}[x](\varphi(x))$, что эквивалентно включению $\varphi(x) \in \mu[x] \left(\frac{F(z)}{z-x} \right)$. Следовательно, $\varphi(x) \in \mathcal{D}(F, x, \tau, \mu)$. Утверждение доказано. $\square$

В действительности доказана принадлежность функции φ к мягкой производной только в точке x , которая является начальной точкой интегрирования. Таким образом доказанное утверждение дает не полный аналог теоремы о дифференцируемости классического интеграла Римана по верхнему пределу.

Утверждение 2.6. Пусть c – константа, а μ – отображение близости (не мягкое отображение близости). Тогда $\mathcal{I}_x^y[c, \tau, \mu] \supseteq \mu^{\leftarrow}(c)(y-x)$

Доказательство следует из цепочки соотношений

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_x^y[c, \tau, \mu] &= \bigcap_{z \in \text{Path}(x, y, \tau)} \sum_{i=1}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) \mu^{\leftarrow}(c) \supseteq \\ &\supseteq \bigcap_{z \in \text{Path}(x, y, \tau)} \mu^{\leftarrow}(c) \sum_{i=1}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) = \mu^{\leftarrow}(c)(y-x). \end{aligned}$$

Посмотрим, какой вид принимает мягкий интеграл $\mathcal{I}_x^y[f, \tau, \omega_{abs}[\beta]]$.

Утверждение 2.7. Для любых $\beta, \varepsilon > 0$ выполнены равенства

$$\begin{aligned} &\mathcal{I}_x^y[f, \tau, \omega_{abs}[\beta]] = \\ &= \bigcap_{z \in \text{Path}(x, y, \tau)} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \{(z_{i+1} - z_i) f(z_i) - \beta |z_{i+1} - z_i|\} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n-1} \{(z_{i+1} - z_i) f(z_i) + \beta |z_{i+1} - z_i|\} = \\
& = \left[\sup_{x \in Path(x, y, \tau)} [\omega_{abs}[\varepsilon]] \left(\sum_{i=1}^{n-1} \{(z_{i+1} - z_i) f(z_i) - \beta |z_{i+1} - z_i|\} \right), \right. \\
& \quad \left. \inf_{x \in Path(x, y, \tau)} [\omega_{abs}[\varepsilon]] \left(\sum_{i=1}^{n-1} \{(z_{i+1} - z_i) f(z_i) + \beta |z_{i+1} - z_i|\} \right) \right].
\end{aligned}$$

Доказательство. Отметим, что $\omega_{abs}^{\leftarrow}[\beta](x) = [x - \beta, x + \beta]$. По определению мягкого интеграла имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_x^y[f, \tau, \omega_{abs}[\beta]] &= \bigcap_{z \in Path(x, y, \tau)} \sum_{i=1}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) \omega_{abs}^{\leftarrow}[\beta](f(z_i)) = \\
&= \bigcap_{z \in Path(x, y, \tau)} \sum_{i=1}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) [f(z_i) - \beta, f(z_i) + \beta] = \\
&= \bigcap_{z \in Path(x, y, \tau)} \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ z_{i+1} - z_i \geq 0}}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) [f(z_i) - \beta, f(z_i) + \beta] + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\substack{i=1 \\ z_{i+1} - z_i < 0}}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) [f(z_i) - \beta, f(z_i) + \beta] \right\} = \\
&= \bigcap_{z \in Path(x, y, \tau)} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \{(z_{i+1} - z_i) f(z_i) - \beta |z_{i+1} - z_i|\}, \right. \\
&\quad \left. \sum_{i=1}^{n-1} \{(z_{i+1} - z_i) f(z_i) + \beta |z_{i+1} - z_i|\} \right].
\end{aligned}$$

Второе равенство следует из следствия 2.1. [1]. Утверждение доказано. $\square$

Усилим утверждение 2.5. для мягкого интеграла $\mathcal{I}_x^y[\varphi, \tau, \omega_{abs}[\beta]]$.

Утверждение 2.8.

1. Пусть $\varepsilon, \gamma > 0$ и τ — отображение близости, для которого выполнены условия:

- Для любых $y \in Pro(x, \tau) \cup \{x\}$ выполнено $\tau^0(y) \neq \emptyset$.
- Для любых $y \in Pro(x, \tau) \cup \{x\}$ и любого числа $v \in \tau^0(y)$ выполнено $|v - y| \geq \gamma$.

2. На множестве $Pro(x, \tau) \cup \{x\}$ задана рациональная функция φ такая, что для любой точки $y \in Pro(x, \tau) \cup \{x\}$ выполнено $\mathcal{I}_x^y[\varphi, \tau, \omega_{abs}[\beta]] \neq \emptyset$.

3. Рациональная функция F , заданная на множестве $Pro(x, \tau) \cup \{x\}$, удовлетворяет условиям:

- $F(x) = 0$;
- $F(y) \in \mathcal{I}_x^y[\varphi, \tau, \omega_{abs}[\beta]]$, для $y \in Pro(x, \tau) \setminus \{x\}$ и $\beta > 0$.

4. Задано отображение $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для которого выполняется неравенство

$$\delta(y) \geq \beta + \frac{2\beta \inf_{z \in Path(x, y, \tau)} [\omega_{abs}[\varepsilon]] \left(\sum_{i=1}^{n-1} |z_{i+1} - z_i| \right)}{\gamma}.$$

5. Мягкое отображение близости $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}$ задано формулой

$$\rho[y](z) = \{x \in \mathbb{R} \mid |z - x| \leq \delta(y)\}.$$

Тогда $\varphi(y) \in \mathcal{D}(F, y, \tau, \rho)$ для любой точки $y \in Pro(x, \tau) \cup \{x\}$.

Доказательство. Для точки $y = x$ утверждение доказано, так как $\delta(y) \geq \beta$. Пусть $y \in Pro(x, \tau) \setminus \{x\}$. По условию утверждения имеем для $y \in Pro(x, \tau) \setminus \{x\}$ и $u \in \tau^0(y)$

$$\sup_{x \in Path(x, y, \tau)} [\omega_{abs}[\varepsilon]] \left(\sum_{i=1}^{n-1} \{(z_{i+1} - z_i) \varphi(z_i) - \beta |z_{i+1} - z_i|\} \right) \leq F(y),$$

$$F(y) \leq \inf_{x \in Path(x, y, \tau)} [\omega_{abs}[\varepsilon]] \left(\sum_{i=1}^{n-1} \{(z_{i+1} - z_i) \varphi(z_i) + \beta |z_{i+1} - z_i|\} \right),$$

$$\sup_{x \in Path(x, u, \tau)} [\omega_{abs}[\varepsilon]] \left(\sum_{i=1}^{n-1} \{(z_{i+1} - z_i) \varphi(z_i) - \beta |z_{i+1} - z_i|\} \right) \leq F(u),$$

$$F(u) \leq \inf_{x \in Path(x, u, \tau)} [\omega_{abs}[\varepsilon]] \left(\sum_{i=1}^{n-1} \{(z_{i+1} - z_i) \varphi(z_i) + \beta |z_{i+1} - z_i|\} \right).$$

Отсюда, используя утверждение 2.7. [1], получаем два неравенства

$$\begin{aligned} & F(u) - F(y) \leq \\ & \leq \inf_{x \in Path(x, u, \tau)} [\omega_{abs}[\varepsilon]] \left(\sum_{i=1}^{n-1} \{(z_{i+1} - z_i) \varphi(z_i) + \beta |z_{i+1} - z_i|\} \right) + \\ & + \inf_{x \in Path(x, y, \tau)} [\omega_{abs}[\varepsilon]] \left(- \sum_{i=1}^{n-1} \{(z_{i+1} - z_i) \varphi(z_i) - \beta |z_{i+1} - z_i|\} \right), \\ & F(u) - F(y) \geq \\ & \geq \sup_{x \in Path(x, u, \tau)} [\omega_{abs}[\varepsilon]] \left(\sum_{i=1}^{n-1} \{(z_{i+1} - z_i) \varphi(z_i) - \beta |z_{i+1} - z_i|\} \right) + \\ & + \sup_{x \in Path(x, y, \tau)} [\omega_{abs}[\varepsilon]] \left(- \sum_{i=1}^{n-1} \{(z_{i+1} - z_i) \varphi(z_i) + \beta |z_{i+1} - z_i|\} \right). \end{aligned}$$

Выберем произвольный путь $z \in Path(x, y, \tau)$. Тогда $(z_1, \dots, z_{n-1}, y, u) \in Path(x, u, \tau)$ и справедливы неравенства

$$F(u) - F(y) \leq (u - y) \varphi(y) + 2\beta \sum_{i=1}^{n-1} |z_{i+1} - z_i| + \beta |u - y|,$$

$$F(u) - F(y) \geq (u - y) \varphi(y) - 2\beta \sum_{i=1}^{n-1} |z_{i+1} - z_i| - \beta |u - y|.$$

Поскольку путь $z \in Path(x, y, \tau)$ был произвольный, то справедливы оценки

$$F(u) - F(y) \leq (u - y) \varphi(y) + 2\beta \inf_{x \in Path(x, y, \tau)} [\omega_{abs}[\varepsilon]] \left(\sum_{i=1}^{n-1} |z_{i+1} - z_i| \right) + \beta |u - y|,$$

$$F(u) - F(y) \geq (u - y) \varphi(y) - 2\beta \inf_{x \in Path(x, y, \tau)} [\omega_{abs}[\varepsilon]] \left(\sum_{i=1}^{n-1} |z_{i+1} - z_i| \right) - \beta |u - y|.$$

Отсюда получаем

$$\left| \frac{F(u) - F(y)}{(u - y)} - \varphi(y) \right| \leq \beta + \frac{2\beta \inf_{x \in Path(x, y, \tau)} [\omega_{abs}[\varepsilon]] \left(\sum_{i=1}^{n-1} |z_{i+1} - z_i| \right)}{|u - y|} \leq \delta(y).$$

Это означает, что $\varphi(y) \in \mathcal{D}(F, y, \tau, \rho)$. Утверждение доказано. $\square$

Один из важнейших вопросов, который возникает при введении любого нового понятия, это вопрос о его существовании. В данном случае вопрос о непустоте множества $\mathcal{I}_x^y[\varphi, \tau, \mu]$. К сожалению, пока в общем виде нетривиальных условий для существования интеграла найти не удалось. Приведем достаточные условия существования для специфически заданных отображений близости.

Положим

$$\omega_{sep}[\varepsilon, \delta](x) = [x - \varepsilon - \delta, x - \varepsilon] \cup [x + \varepsilon, x + \varepsilon + \delta] \subseteq \mathbb{R}, \quad \varepsilon, \delta \in \mathbb{R}_+.$$

Хотя формально $\omega_{sep}[\varepsilon, \delta]$ является мягким отображением близости, но при фиксированных параметрах ε, δ это просто отображение близости.

Утверждение 2.8. Если $\delta \geq \varepsilon$, то $Pro(x, \omega_{sep}^+[\varepsilon, \delta]) = [x + \varepsilon, +\infty)$.

Лемма 2.1. Дано семейство непустых рациональных отрезков $[A(\theta), B(\theta)]$, $A(\theta), B(\theta) \in \mathbb{R}$, где $\theta \in \Theta$. Если для любых $\theta, \zeta \in \Theta$ выполнены неравенства $B(\theta) - A(\zeta) \geq \sigma > 0$, то пересечение отрезков не пусто, то есть

$$\bigcap_{\theta \in \Theta} [A(\theta), B(\theta)] \neq \emptyset.$$

Доказательство. Из утверждения 2.3.[1] следует, что $\inf_{\theta \in \Theta} [\omega_{abs}^-\left[\frac{\sigma}{3}\right]](B(\theta)) \neq \emptyset$.

Пусть $w \in \inf_{\theta \in \Theta} [\omega_{abs}^-\left[\frac{\sigma}{3}\right]](B(\theta))$. Это означает, что существует $\theta \in \Theta$ такая, что $w = B(\theta)$ и $w - \frac{\sigma}{3} \in Down(B(\theta))$. Если $w - \frac{\sigma}{3} \in Up(A(\theta))$, то все доказано. Если $w - \frac{\sigma}{3} \notin Up(A(\theta))$, то существует $\zeta \in \Theta$ такая, что $A(\zeta) > w - \frac{\sigma}{3} = B(\theta) - \frac{\sigma}{3}$, то есть получили неравенство $B(\theta) - A(\zeta) < \frac{\sigma}{3}$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Замечание 2. Нетрудно видеть, что условие $B(\theta) - A(\zeta) > 0$ для любых $\theta, \zeta \in \Theta$, не гарантирует существование непустого пересечения отрезков $[A(\theta), B(\theta)]$.

Приведем достаточные условия существования мягкого интеграла $\mathcal{I}_x^y[f, \omega_{sep}^+[\varepsilon, \delta], \omega_{abs}[\beta]]$.

Утверждение 2.9. Пусть выполнены следующие условия:

1. $\varepsilon, \delta, \sigma, \beta \in \mathbb{R}^+$.
2. Выбраны число $x \in \mathbb{R}$ и число $y \in [x + \varepsilon, +\infty)$.
3. Функция $f \in \Phi$ является $(\omega_{sep}^+[\varepsilon, \delta], \omega_{abs}[\alpha])$ -непрерывной на множестве $[x + \varepsilon, y)$.
4. Выполнены неравенства

$$\delta \geq \varepsilon,$$

$$\beta \geq \frac{\sigma}{2(y-x)} + \frac{2\alpha \max\{|x|, |y|\}}{(y-x)} + \frac{\alpha}{\varepsilon} \max\{|x|, |y|\}.$$

Тогда существует $(\omega_{sep}^+[\varepsilon, \delta], \omega_{abs}[\beta])$ -интеграл от x до y от функции f , то есть

$$\mathcal{I}_x^y[f, \omega_{sep}^+[\varepsilon, \delta], \omega_{abs}[\beta]] \neq \emptyset.$$

Доказательство. Из утверждения 2.7. имеем

$$\begin{aligned} & \mathcal{I}_x^y[f, \omega_{sep}^+[\varepsilon, \delta], \omega_{abs}[\beta]] = \\ & = \bigcap_{z \in Path(x, y, \omega_{sep}^+[\varepsilon, \delta])} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) f(z_i) + \beta(y-x)[-1, 1] \right\}. \end{aligned}$$

Для того, чтобы применить Лемму 2.1, преобразуем одну часть в полученном представлении мягкого интеграла:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) f(z_i) &= \sum_{i=1}^{n-1} z_{i+1} f(z_i) - \sum_{i=1}^{n-1} z_i f(z_i) = \sum_{i=2}^n z_i f(z_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n-1} z_i f(z_i) = \\ &= \sum_{i=2}^{n-1} z_i [f(z_{i-1}) - f(z_i)] + y f(z_{n-1}) - x f(x). \end{aligned}$$

Оценим сверху количество шагов n в каждом пути $z \in Path(x, y, \omega_{sep}^+[\varepsilon, \delta])$. Очевидно, выполнены неравенства $\varepsilon \leq z_{i+1} - z_i \leq \varepsilon + \delta, i = 1, \dots, n-1$. Складывая все эти неравенства, получаем неравенства $(n-1)\varepsilon \leq y-x \leq (n-1)(\varepsilon + \delta)$. Отсюда получаем $\frac{y-x}{\varepsilon + \delta} + 1 \leq n \leq \frac{y-x}{\varepsilon} + 1$.

Возьмем теперь два произвольных пути $u, v \in Path(x, y, \omega_{sep}^+[\varepsilon, \delta])$ и оценим разность $G(u) - H(v)$, где

$$\begin{aligned} G(u) &= \sum_{i=1}^{n-1} (u_{i+1} - u_i) f(u_i) + \beta(y-x), \\ H(v) &= \sum_{i=1}^{m-1} (v_{i+1} - v_i) f(v_i) - \beta(y-x). \end{aligned}$$

Имеем следующую цепочку

$$\begin{aligned}
G(u) - H(v) &= 2\beta(y-x) + \sum_{i=1}^{n-1} (u_{i+1} - u_i) f(u_i) - \sum_{i=1}^{m-1} (v_{i+1} - v_i) f(v_i) = \\
&= 2\beta(y-x) + \sum_{i=2}^{n-1} u_i [f(u_{i-1}) - f(u_i)] + yf(u_{n-1}) - xf(x) - \\
&\quad - \sum_{i=2}^{m-1} v_i [f(v_{i-1}) - f(v_i)] - yf(v_{m-1}) + xf(x) = \\
&= 2\beta(y-x) + \sum_{i=2}^{n-1} u_i [f(u_{i-1}) - f(u_i)] - \\
&\quad - \sum_{i=2}^{m-1} v_i [f(v_{i-1}) - f(v_i)] + y[f(u_{n-1}) - f(v_{m-1})] \geq \\
&\geq 2\beta(y-x) - \left| \sum_{i=2}^{m-1} v_i [f(v_{i-1}) - f(v_i)] \right| - \\
&\quad - \left| \sum_{i=2}^{n-1} u_i [f(u_{i-1}) - f(u_i)] \right| - |y[f(u_{n-1}) - f(v_{m-1})]|.
\end{aligned}$$

Поскольку функция f является $(\omega_{\text{sep}}^+[\varepsilon, \delta], \omega_{\text{abs}}[\alpha])$ -непрерывной на множестве $[x+\varepsilon, y]$, то справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
-\alpha &\leq f(u_{i-1}) - f(u_i) \leq \alpha, \\
-\alpha &\leq f(v_{i-1}) - f(v_i) \leq \alpha, \\
|f(u_{n-1}) - f(v_{m-1})| &= |f(u_{n-1}) - f(y) + f(y) - f(v_{m-1})| \leq 2\alpha, \\
-\left| \sum_{i=2}^{m-1} v_i [f(v_{i-1}) - f(v_i)] \right| &\geq -\alpha \max\{|x|, |y|\} \left(\frac{y-x}{\varepsilon} + 1 \right), \\
-\left| \sum_{i=2}^{n-1} u_i [f(u_{i-1}) - f(u_i)] \right| &\geq -\alpha \max\{|x|, |y|\} \left(\frac{y-x}{\varepsilon} + 1 \right).
\end{aligned}$$

Используя эти оценки и условия утверждения, получаем

$$\begin{aligned}
G(u) - H(v) &\geq 2\beta(y-x) - 2\alpha \max\{|x|, |y|\} \left(\frac{y-x}{\varepsilon} + 1 \right) - 2\alpha|y| \geq \\
&\geq 2\beta(y-x) - 2\alpha \max\{|x|, |y|\} \left(\frac{y-x}{\varepsilon} + 2 \right) \geq \\
&\geq 2(y-x) \left(\beta - \frac{\alpha}{\varepsilon} \max\{|x|, |y|\} \right) - 4\alpha \max\{|x|, |y|\} \geq \sigma.
\end{aligned}$$

Условия леммы 2.1. выполнены и, следовательно, пересечение не пусто. Утверждение доказано. $\square$

2.2 Мягкий интегратор

Термин интегратор здесь выбран для того, чтобы отличать обратные операции к мягкой производной и к мягкому дифференциалу. Рассмотрим задачу: на множестве $Pro(x, \tau)$ задана функция φ и ищется функция f для которой для любых $y \in Pro(x, \tau)$ справедливы включения $\varphi(y) \in \mathbb{D}(f, y, \tau, \mu)$.

Предположим, решение существует. Возьмем произвольную точку $y \in Pro(x, \tau)$ произвольный τ -путь $z = (z_1, \dots, z_n) \in Path(x, y, \tau)$. Тогда для любого $i = 1, \dots, n-1$ выполнено

$$\varphi(z_i)(z_{i+1} - z_i) \in \mu[z_i](f(z_{i+1}) - f(z_i)),$$

или в эквивалентном виде

$$f(z_{i+1}) - f(z_i) \in \mu^{\leftarrow}[z_i](\varphi(z_i)(z_{i+1} - z_i)).$$

Суммируем и получаем

$$f(y) - f(x) \in \sum_{i=1}^{n-1} \mu^{\leftarrow}[z_i](\varphi(z_i)(z_{i+1} - z_i)).$$

Определение 2.2. *Множество*

$$\mathbb{I}_x^y[\varphi, \tau, \mu] = \bigcap_{z \in Path(x, y, \tau)} \sum_{i=1}^{n-1} \mu^{\leftarrow}[z_i](\varphi(z_i)(z_{i+1} - z_i))$$

называется (τ, μ) -интегратором функции φ от x до y .

Итак, доказано утверждение.

Утверждение 2.10. Пусть на множестве $Pro(x, \tau) \cup \{x\}$ заданы функция φ и функция f , для которой для любых $y \in Pro(x, \tau)$ справедливы включения $\varphi(y) \in \mathbb{D}(f, y, \tau, \mu)$. Тогда для любого рационального числа $y \in Pro(x, \tau)$ выполнено включение

$$f(y) - f(x) \in \mathbb{I}_x^y[\varphi, \tau, \mu].$$

Аналогично утверждению 2.3 доказывается следующее утверждение.

Утверждение 2.11. Пусть $z \in Pro(x, \tau) \setminus \tau(x)$. Тогда

$$\mathbb{I}_x^z[\varphi, \tau, \mu] \supseteq \bigcap_{y \in Pro(x, \tau) \cap Pro(z, \tau^{\leftarrow})} \{\mathbb{I}_x^y[\varphi, \tau, \mu] + \mathbb{I}_y^z[\varphi, \tau, \mu]\}.$$

Утверждение 2.12. Пусть $x \in \tau(x)$ и $\mathbb{I}_x^x[\varphi, \tau, \mu] \neq \emptyset$. Тогда $\mathbb{I}_x^x[\varphi, \tau, \mu, 0] \subseteq \mu^{\leftarrow}[x](0)$.

Посмотрим, какой вид принимает мягкий интегратор $\mathbb{I}_x^y[c, \tau, \omega_{abs}[\beta]]$.

Утверждение 2.13. Для любых $\beta, \varepsilon > 0$ выполнены равенства

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_x^y[f, \tau, \omega_{abs}[\beta]] &= \bigcap_{z \in Path(x, y, \tau)} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) f(z_i) + \beta(n-1)[-1, 1] \right\} = \\ &= \left[\sup_{z \in Path(x, y, \tau)} [\omega_{abs}[\varepsilon]] \left(\sum_{i=1}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) f(z_i) - \beta(n-1) \right), \right. \\ &\quad \left. \inf_{z \in Path(x, y, \tau)} [\omega_{abs}[\varepsilon]] \left(\sum_{i=1}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) f(z_i) + \beta(n-1) \right) \right]. \end{aligned}$$

Доказательство. По определению интегратора имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_x^y[f, \tau, \omega_{abs}[\beta]] &= \bigcap_{z \in Path(x, y, \tau)} \sum_{i=1}^{n-1} [f(z_i)(z_{i+1} - z_i) - \beta, f(z_i)(z_{i+1} - z_i) + \beta] = \\ &= \bigcap_{z \in Path(x, y, \tau)} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) f(z_i) + \beta(n-1)[-1, 1] \right\}. \end{aligned}$$

Второе равенство получаем из следствия 2.1. [1]. $\square$

Докажем теперь аналог утверждения 2.5.

Утверждение 2.14.

1. Пусть задана точка x и отображение близости τ , для которых выполнены условия:

- $\tau^0(x) \neq \emptyset$.
- На множестве $\tau^0(x) \cup \{x\}$ задана функция φ и для любой точки $y \in \tau^0(x) \cup \{x\}$ выполнено $\mathbb{I}_x^y[\varphi, \tau, \mu] \neq \emptyset$.

2. Функция F , заданная на множестве $\tau^0(x) \cup \{x\}$, удовлетворяет условиям:

- $F(x) = 0$;
- $F(y) \in \mathbb{I}_x^y[\varphi, \tau, \mu]$, для $y \in \tau^0(x) \setminus \{x\}$.

Тогда $\varphi(x) \in \mathbb{D}(F, x, \tau, \mu)$.

Доказательство. Используя утверждение 1.3., имеем

$$\mathbb{D}(F, x, \tau, \mu) = \bigcap_{z \in \tau^0(x)} \frac{\mu[x](F(z))}{z - x}.$$

Из определения мягкого интегратора $\mathbb{I}_x^y[\varphi, \tau, \mu]$ следует, что для любой точки $z \in \tau^0(x)$ справедливо включение $F(z) \in \mu^{\leftarrow}[x]((z - x)\varphi(x))$ откуда следует $(z - x)\varphi(x) \in \mu[x](F(z))$, что эквивалентно включению $\varphi(x) \in \frac{\mu[x](F(z))}{(z - x)}$. Следовательно, $\varphi(x) \in \mathbb{D}(F, x, \tau, \mu)$. Утверждение доказано. $\square$

Приведем и более сильное утверждение, аналогичное утверждению 2.8.

Утверждение 2.15.

1. Пусть $\beta > 0$ τ - отображение близости, для которого для любых $y \in Pro(x, \tau) \cup \{x\}$ выполнено $\tau^0(y) \neq \emptyset$.
2. На множестве $Pro(x, \tau) \cup \{x\}$ задана рациональная функция φ такая, что для любой точки $y \in Pro(x, \tau) \cup \{x\}$ выполнено $\mathbb{I}_x^y[\varphi, \tau, \omega_{abs}[\beta]] \neq \emptyset$.
3. Рациональная функция F , заданная на множестве $Pro(x, \tau) \cup \{x\}$, удовлетворяет условиям:

- $F(x) = 0$;
- $F(y) \in \mathbb{I}_x^y[\varphi, \tau, \omega_{abs}[\beta]]$, для $y \in Pro(x, \tau) \setminus \{x\}$;

4. Задано отображение $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ для которого выполняется неравенство

$$\delta(y) \geq \beta \min_{z \in Path(x, y, \tau)} (2n - 1),$$

где n – это число точек в пути $z \in Path(x, y, \tau)$, а $y \in Pro(x, \tau) \setminus \{x\}$.

5. Мягкое отображение близости $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}$ задано формулой

$$\rho[y](z) = \{x \in \mathbb{R} \mid |z - x| \leq \delta(y)\}.$$

Тогда $\varphi(y) \in \mathbb{D}(F, y, \tau, \rho)$ для любой точки $y \in Pro(x, \tau) \setminus \{x\}$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $y \in Pro(x, \tau) \setminus \{x\}$. По условию утверждения имеем для $y \in Pro(x, \tau) \setminus \{x\}$ и $u \in \tau^0(y)$

$$\sup_{z \in Path(x, y, \tau)} [\omega_{abs}[\varepsilon]] \left(\sum_{i=1}^{n-1} \{(z_{i+1} - z_i) \varphi(z_i) - \beta(n-1)\} \right) \leq F(y),$$

$$F(y) \leq \inf_{z \in Path(x, y, \tau)} [\omega_{abs}[\varepsilon]] \left(\sum_{i=1}^{n-1} \{(z_{i+1} - z_i) \varphi(z_i) + \beta(n-1)\} \right),$$

$$\sup_{z \in Path(x, u, \tau)} [\omega_{abs}[\varepsilon]] \left(\sum_{i=1}^{n-1} \{(z_{i+1} - z_i) \varphi(z_i) - \beta(n-1)\} \right) \leq F(u),$$

$$F(u) \leq \inf_{z \in Path(x, u, \tau)} [\omega_{abs}[\varepsilon]] \left(\sum_{i=1}^{n-1} \{(z_{i+1} - z_i) \varphi(z_i) + \beta(n-1)\} \right).$$

Отсюда, используя утверждение 2.7. [1], получаем два неравенства

$$\begin{aligned} & F(u) - F(y) \leq \\ & \leq \inf_{z \in Path(x, u, \tau)} [\omega_{abs}[\varepsilon]] \left(\sum_{i=1}^{n-1} \{(z_{i+1} - z_i) \varphi(z_i) + \beta(n-1)\} \right) + \\ & + \inf_{z \in Path(x, y, \tau)} [\omega_{abs}[\varepsilon]] \left(- \sum_{i=1}^{n-1} \{(z_{i+1} - z_i) \varphi(z_i) - \beta(n-1)\} \right), \\ & F(u) - F(y) \geq \\ & \geq \sup_{z \in Path(x, u, \tau)} [\omega_{abs}[\varepsilon]] \left(\sum_{i=1}^{n-1} \{(z_{i+1} - z_i) \varphi(z_i) - \beta(n-1)\} \right) + \\ & + \sup_{z \in Path(x, y, \tau)} [\omega_{abs}[\varepsilon]] \left(- \sum_{i=1}^{n-1} \{(z_{i+1} - z_i) \varphi(z_i) + \beta(n-1)\} \right). \end{aligned}$$

Выберем произвольный путь $z \in Path(x, y, \tau)$. Тогда $(z_1, \dots, z_{n-1}, y, u) \in Path(x, u, \tau)$ и справедливы неравенства

$$F(u) - F(y) \leq (u - y) \varphi(y) + \beta(2n - 1),$$

$$F(u) - F(y) \geq (u - y) \varphi(y) - \beta(2n - 1).$$

Поскольку путь $z \in Path(x, y, \tau)$ был произвольный, то справедливы оценки

$$F(u) - F(y) \leq (u - y) \varphi(y) + \beta \min_{z \in Path(x, y, \tau)} (2n - 1),$$

$$F(u) - F(y) \geq (u - y) \varphi(y) - \beta \min_{z \in Path(x, y, \tau)} (2n - 1).$$

Отсюда получаем

$$|F(u) - F(y) - (u - y) \varphi(y)| \leq \beta \min_{z \in Path(x, y, \tau)} (2n - 1) \leq \delta(y).$$

Это означает, что $\varphi(y) \in \mathbb{D}(F, y, \tau, \rho)$. Утверждение доказано. $\square$

Приведем теперь достаточные условия существования мягкого интегратора.

Утверждение 2.16. Пусть выполнены следующие условия:

1. $\varepsilon, \delta, \sigma, \beta \in \mathbb{R}^+$.
2. Выбраны число $x \in \mathbb{R}$ и число $y \in [x + \varepsilon, +\infty)$.
3. Функция $f \in \Phi$ является $(\omega_{sep}^+[\varepsilon, \delta], \omega_{abs}[\alpha])$ -непрерывной на множестве $[x + \varepsilon, y)$.
4. Выполнены неравенства

$$\delta \geq \varepsilon,$$

$$\beta \geq \frac{\sigma(\varepsilon + \delta)}{4(y - x)} + \frac{\alpha \max\{|x|, |y|\}}{2} \left(1 + \frac{(\varepsilon + \delta)}{(y - x)}\right).$$

Тогда существует $(\omega_{sep}^+[\varepsilon, \delta], \omega_{abs}[\beta])$ -интегратор от x до y от функции f , то есть

$$\mathbb{I}_x^y[f, \omega_{sep}^+[\varepsilon, \delta], \omega_{abs}[\beta]] \neq \emptyset.$$

Доказательство. Из утверждения 2.13. имеем

$$\begin{aligned} & \mathbb{I}_x^y[f, \omega_{sep}^+[\varepsilon, \delta], \omega_{abs}[\beta]] = \\ &= \bigcap_{z \in Path(x, y, \omega_{sep}^+[\varepsilon, \delta])} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) f(z_i) + \beta(n-1)[-1, 1] \right\}. \end{aligned}$$

Используя оценки утверждения 2.9., возьмем два произвольных пути $u, v \in Path(x, y, \omega_{sep}^+[\varepsilon, \delta])$ и получаем

$$G(u) = \sum_{i=1}^{n-1} (u_{i+1} - u_i) f(u_i) + \beta(n-1),$$

$$H(v) = \sum_{i=1}^{m-1} (v_{i+1} - v_i) f(v_i) - \beta(m-1).$$

Имеем следующую цепочку

$$\begin{aligned} G(u) - H(v) &= 2\beta(n + m - 2) + \sum_{i=1}^{n-1} (u_{i+1} - u_i) f(u_i) - \sum_{i=1}^{m-1} (v_{i+1} - v_i) f(v_i) = \\ &= 2\beta(n + m - 2) + \sum_{i=2}^{n-1} u_i [f(u_{i-1}) - f(u_i)] + y f(u_{n-1}) - x f(x) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=2}^{m-1} v_i [f(v_{i-1}) - f(v_i)] - y f(v_{m-1}) + x f(x) \geq 2\beta(n+m-2) + \\
& + \sum_{i=2}^{n-1} u_i [f(u_{i-1}) - f(u_i)] - \sum_{i=2}^{m-1} v_i [f(v_{i-1}) - f(v_i)] + y [f(u_{n-1}) - f(v_{m-1})] \geq \\
& \geq 2\beta(n+m-2) - \left| \sum_{i=2}^{m-1} v_i [f(v_{i-1}) - f(v_i)] \right| - \left| \sum_{i=2}^{n-1} u_i [f(u_{i-1}) - f(u_i)] \right| - \\
& \quad - |y [f(u_{n-1}) - f(v_{m-1})]|.
\end{aligned}$$

Поскольку функция f является $(\omega_{\text{sep}}^+[\varepsilon, \delta], \omega_{\text{abs}}[\alpha])$ -непрерывной на множестве $[x+\varepsilon, y]$, то справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
-\alpha & \leq f(u_{i-1}) - f(u_i) \leq \alpha, \\
-\alpha & \leq f(v_{i-1}) - f(v_i) \leq \alpha, \\
|f(u_{n-1}) - f(v_{m-1})| & = |f(u_{n-1}) - f(y) + f(y) - f(v_{m-1})| \leq 2\alpha.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
G(u) - H(v) & \geq 2\beta(n+m-2) - \alpha \max\{|x|, |y|\} (n+m) \geq \\
& \geq 4\beta \frac{y-x}{\varepsilon+\delta} - 2\alpha \max\{|x|, |y|\} \left(\frac{y-x}{\varepsilon+\delta} + 1 \right) \geq \sigma.
\end{aligned}$$

Условия леммы 2.1. выполнены и, следовательно, пересечение не пусто. Утверждение доказано. $\square$

Заключение

В настоящей работе предложено два варианта определения мягкой производной для функций, заданных на множестве рациональных чисел и принимающих рациональные значения. Показано, что вычисление мягких производных сводится к одной операции вычисления пересечения семейства множеств. Приведены простейшие свойства мягких производных и доказан аналог теоремы Ферма. Доказано также, что в «мягкой» форме аналог теоремы Ферма обладает свойствами устойчивости.

Для обоих вариантов мягкой производной построены обратные операции мягкого интегрирования. Доказаны теоремы существования и аналоги свойств дифференцируемости классического интеграла по верхнему пределу.

Пока сделаны только первые шаги в создании рационального анализа, но уже сейчас можно сделать некоторые выводы.

- Удалось предложить математический аппарат, который позволяет эффективно строить анализ на неполных пространствах.
- Предложенные мягкие аналоги непрерывности, производной и интеграла строятся без использований понятий предела.
- Предложенные мягкие аналоги непрерывности, производной и интеграла позволяют более адекватно описывать реальные вычислительные процедуры, используемые на практике, так как позволяют эффективно учитывать неопределенности и неоднозначности, имеющие место в реальной жизни.

Список литературы

- [1] Молодцов Д.А. Начала рационального анализа - непрерывность функций // Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2019. Т. 14, № 2. С. 126–141. <https://doi.org/10.26456/fssc57>
- [2] Орлов И.В., Стонякин Ф.С. Новые методы негладкого анализа и их приложения в векторном интегрировании и теории оптимизации. Симферополь: ДИАПИ, 2016. 318 с.
- [3] Демьянов В.Ф., Шомесова В.К. Условные субдифференциалы выпуклых функций // Доклады Академии наук СССР. 1978. Т. 242, № 4. С. 753–756.

Образец цитирования

Молодцов Д.А. Начала рационального анализа - производные и интегралы // Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2020. Т. 15, № 1. С. 5–25. <https://doi.org/10.26456/fssc70>

Сведения об авторах

1. Молодцов Дмитрий Анатольевич

ведущий научный сотрудник Вычислительного центра им. А.А. Дородницына Российской академии наук Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук.

Россия, 119311, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40, ВЦ РАН.

PRINCIPLES OF RATIONAL ANALYSIS – DERIVATIVES AND INTEGRALS

Molodtsov Dmitriy Anatolievich

Leading Researcher at Institution of Russian Academy of Sciences,
Dorodnicyn Computing Centre of RAS
Russia, 119333, Moscow, 40 Vavilova str., CC RAS.

Received 26.11.2019, revised 16.12.2019.

Building on the basics of rational analysis is ongoing. Two concepts of a soft derivative are proposed. An analogue of Fermat's theorem is proved. For both variants of the soft derivative, the inverse operations of soft integration are constructed. Existence theorems and analogues of the differentiability properties of the classical upper limit integral are proved.

Keywords: rational analysis, soft derivatives of rational function, soft integral of rational function.

Citation

Molodtsov D.A., “Principles of rational analysis - derivatives and integrals”, *Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya [Fuzzy Systems and Soft Computing]*, **15**:1 (2020), 5–25 (in Russian). <https://doi.org/10.26456/fssc70>

References

- [1] Molodtsov D.A., “Principles of rational analysis - continuity of functions”, *Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya [Fuzzy Systems and Soft Computing]*, **14**:2 (2019), 126–141 (in Russian), <https://doi.org/10.26456/fssc57>.
- [2] Orlov I.V., Stonyakin F.S., *Novye metody negladkogo analiza i ikh prilozheniya v vektornom integririrovani i teorii optimizatsii [New methods of non-smooth analysis and their applications in vector integration and optimization theory]*, Diajpi, Simferopol, 2016 (in Russian), 318 pp.
- [3] Demyanov V.F., Shomesova V.K., “Conditional subdifferentials of convex functions”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **242**:4 (1978), 753–756 (in Russian).