Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Солдатенко, А. В. Язенин, Об одной задаче портфельного анализа при мягких ограничениях, *Нечеткие системы и мягкие вычисления*, 2020, том 15, выпуск 1, 64–76

DOI: <https://doi.org/10.26456/fssc71>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 15:31:46

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПОРТФЕЛЬНОГО АНАЛИЗА
ПРИ МЯГКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ¹

Солдатенко И.С., Язенин А.В.

Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 19.05.2020, после переработки 22.06.2020.

Разработана и исследована модель портфеля минимального риска в условиях гибридной неопределенности возможно-вероятностного типа, основанная на принципе ожидаемой возможности. Особенностью рассматриваемой модели является то, что «мягкость» ограничения на уровень ожидаемой доходности моделируется путем замены четкого ограничения возможным бинарным отношением. На модельном примере показано, как мягкость ограничения влияет на множество квазиэффективных оценок инвестиционного портфеля.

Ключевые слова: портфель минимального риска, гибридная неопределенность, нечеткая случайная величина, возможность, ожидаемая возможность, возможностное отношение, мягкое ограничение по возможности.

Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2020. Т. 15, № 1. С. 64–76.
<https://doi.org/10.26456/fssc71>

Введение

В статье представлена архитектура модели портфеля минимального риска в условиях гибридной неопределенности возможно-вероятностного типа. По отношению к ранее полученным результатам [1–4] в системе ограничений, определяющей множество допустимых портфелей, возможностное ограничение на уровень его ожидаемой доходности моделируется путем замены четкого отношения возможным бинарным отношением. Это позволяет более адекватно моделировать предпочтения инвестора. Доходности отдельных финансовых активов в портфеле представлены нечеткими случайными величинами, имеющими сдвиг-масштабное представление [5]. Взаимодействие нечетких параметров в них описывается сильнейшей t-нормой. Формула для дисперсии портфеля, позволяющая оценивать риск портфеля, получена на основе подхода Фенга [6], в четкой форме. Для построенной модели получен ее детерминированный аналог-задача квадратичного программирования. Исследовано поведение множества квазиэффективных инвестиционных возможностей.

1. Основные элементы теории возможностей

Введем необходимые в дальнейшем определения и понятия из теории возможностей [5–11].

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №20-01-00669).

Пусть Γ – модельное пространство, $\gamma \in \Gamma$ – его элементы, а $\mathbb{P}(\Gamma)$ – множество всех подмножеств множества Γ , $\mathbb{E}^1$ – числовая прямая.

Определение 1. *Возможностная мера $\pi : \mathbb{P}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{E}^1$ – есть функция множества, обладающая следующими свойствами:*

$$1. \pi(\emptyset) = 0, \pi(\Gamma) = 1,$$

$$2. \pi\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sup_{i \in I} \pi(A_i), \forall A_i \in \mathbb{P}(\Gamma), \forall I.$$

Определение 2. *Тройка $(\Gamma, \mathbb{P}(\Gamma), \pi)$ называется возможным пространством.*

Определение 3. *Возможностной (нечеткой) величиной называется вещественная функция*

$$A(\cdot) : \Gamma \rightarrow \mathbb{E}^1,$$

характеризующаяся распределением возможностей $\mu_A(x)$:

$$\mu_A(x) = \pi\{\gamma \in \Gamma : A(\gamma) = x\}, \forall x \in \mathbb{E}^1,$$

где $\mu_A(x)$ – возможность того, что A может принять значение x .

Определение 4. *Носителем возможностной величины A называется четкое подмножество:*

$$\text{supp}(A) = \{x \mid \mu_A(x) > 0\}, x \in \mathbb{E}^1.$$

Определение 5. *Модалным значением возможностной величины A называется следующее четкое подмножество:*

$$\{x \mid \mu_A(x) = 1\}, x \in \mathbb{E}^1.$$

Определение 6. *Для любой возможностной переменной A и любого $\alpha \in [0, 1]$, α -уровневым множеством $A(\alpha)$ называется:*

- $A(\alpha) = \{x \in \mathbb{E}^1 \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$, для $\alpha \in (0, 1]$,
- $A(\alpha) = \text{cl}(\text{supp}(A))$, для $\alpha = 0$,

где $\text{cl}(\text{supp}(A))$ – замыкание носителя возможностной переменной A .

Определение 7. *Возможностная переменная A называется выпуклой, если ее функция распределения является квазिवогнутой:*

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}, \lambda \in [0, 1], x_1, x_2 \in \mathbb{E}^1.$$

Возможностные переменные на числовой прямой, характеризующиеся строго унимодальными, квазिवогнутыми, полунепрерывными сверху функциями распределения и ограниченными носителями, называются *нечеткими числами*.

Для моделирования нечетких чисел часто используются распределения (L, R) -типа [12, 13].

Определение 8. (L, R) -функциями (функциями представления формы или просто формами) будем называть невозрастающие, полунепрерывные сверху, определенные на неотрицательной части числовой прямой функции, обладающие следующими свойствами:

1. $L(0) = R(0) = 1$,
2. $L(t), R(t) < 1, \quad \forall t > 0$,
3. $\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0$.

Определение 9. *Возможностная величина A называется возможностью (L, R) -типа, если ее распределение имеет вид:*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right), & x < a, \\ 1, & a \leq x \leq b, \\ R\left(\frac{x-b}{\beta}\right), & x > b. \end{cases}$$

Здесь $[a, b]$ – есть интервал толерантности A , a и b – соответственно, нижнее и верхнее модальные значения, α и β – коэффициенты нечеткости возможностной величины. Если $a = b$, то получаем *нечеткое число*, которое будем обозначать как $A = (a, \alpha, \beta)_{LR}$.

Пример 1. Если в качестве левой и правой форм взять кусочно-линейную функцию $L(x) = R(x) = \max\{0, 1 - x\}$, $x \geq 0$, то для случая нечетких чисел мы получаем так называемые *триангулярные нечеткие числа*.

Распределения возможностных величин (L, R) -типа удобны тем, что они являются параметризованными, что позволяет в ряде случаев сводить выполнение основных арифметических операций над возможностными величинами к выполнению этих операций над параметрами.

Пусть также (Ω, B, P) есть вероятностное пространство. Дадим понятие нечеткой случайной величины [5, 11].

Определение 10. *Нечеткая случайная величина $Y(\omega, \gamma)$ есть вещественная функция $Y : \Omega \times \Gamma \rightarrow \mathbb{E}^1$ σ -измеримая для каждого фиксированного γ , а функция*

$$\mu_Y(\omega, t) = \pi\{\gamma \in \Gamma : Y(\omega, \gamma) = t\}, \forall t \in \mathbb{E}^1$$

называется ее функцией распределения.

Из определения 10 следует, что функция распределения нечеткой случайной величины зависит от случайного параметра, т. е. является случайной функцией.

Определение 11. *Пусть $Y(\omega, \gamma)$ – нечеткая случайная величина. Ее ожидаемым значением $\mathbf{E}[Y]$ называется нечеткая величина, имеющая функцию распределения возможностей*

$$\mu_{\mathbf{E}[Y]}(t) = \pi\{\gamma \in \Gamma : \mathbf{E}[Y(\omega, \gamma)] = t\}, \forall t \in \mathbb{E}^1,$$

где $\mathbf{E}$ – оператор взятия математического ожидания

$$\mathbf{E}[Y(\omega, \gamma)] = \int_{\Omega} Y(\omega, \gamma) P(d\omega).$$

Функция распределения ожидаемого значения нечеткой случайной величины уже не зависит от случайного параметра и является нечеткой величиной. Определим, следуя [6], моменты второго порядка. Пусть X и Y – нечеткие случайные величины.

Определение 12. Ковариация нечетких случайных величин X и Y определяется следующим образом:

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\text{cov}(X_\omega^-(\alpha), Y_\omega^-(\alpha)) + \text{cov}(X_\omega^+(\alpha), Y_\omega^+(\alpha))) d\alpha,$$

где $X_\omega^-(\alpha)$, $Y_\omega^-(\alpha)$, $X_\omega^+(\alpha)$, $Y_\omega^+(\alpha)$ – суть границы α -уровневых множеств нечетких величин X_ω , Y_ω , соответственно.

Определение 13. Дисперсия нечеткой случайной величины Y есть

$$D[Y] = \text{cov}(Y, Y). \quad (1)$$

Определяемые в соответствии с рассматриваемым подходом математическое ожидание, дисперсия и ковариация нечетких случайных величин наследуют основные свойства аналогичных характеристик вещественных случайных величин.

Следуя [14], приведем определение нечеткого бинарного отношения в возможностной интерпретации.

Определение 14. Возможностным (нечетким) отношением называется отображение $\mathfrak{R} : \Gamma \rightarrow E^1 \times E^1$, возможные значения которого описываются его возможностным распределением, определяемым по правилу:

$$\mu_{\mathfrak{R}}(x, y) = \pi\{\gamma \in \Gamma : \mathfrak{R}(\gamma) = (x, y)\}, \quad \forall x, y \in E^1.$$

$\mu_{\mathfrak{R}}(x, y)$ есть возможность того, что x и y находятся в отношении $\mathfrak{R}$.

2. Задача портфельной оптимизации с нечеткими отношениями в ограничении

Будем рассматривать модель минимизации риска портфеля при ограничениях по возможности на его доходность. В соответствии с классическим подходом Марковица [15] нам необходимо построить функцию риска портфеля, а его доходность можно внести в систему ограничений. Для снятия неопределенности вероятностного типа будем использовать принцип ожидаемой доходности, которая будет уже нечеткой величиной. Далее для снятия неопределенности возможностного типа введем в систему ограничений, определяющую множество допустимых портфелей, ограничение по мере возможности на приемлемый для инвестора уровень ожидаемой доходности, после чего построим эквивалентный детерминированный аналог системы ограничений. Для начала идентифицируем все компоненты модели.

Доходность инвестиционного портфеля будем представлять нечеткой случайной функцией:

$$R_p(w, \omega, \gamma) = \sum_{i=1}^n R_i(\omega, \gamma) w_i,$$

которая является линейной функцией долей капитала $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ в инвестиционном портфеле. Доходности отдельных финансовых активов $R_i(\omega, \gamma)$ будем моделировать с помощью сдвиг-масштабного представления [5]:

$$R_i(\omega, \gamma) = a_i(\omega) + \sigma_i(\omega) Z_i(\gamma).$$

Далее будем предполагать, что нечеткие величины $Z_i(\gamma) = [\underline{m}_i, \overline{m}_i, \underline{d}_i, \overline{d}_i]_{LR}$ взаимно минисвязаны, то есть их взаимодействие описывается сильнейшей t -нормой T_M , а $a_i(\omega)$ и $\sigma_i(\omega)$ – коэффициенты сдвига и масштаба – независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

В этом случае возможностное распределение доходности портфеля принимает вид:

$$R_p(w, \omega, \gamma) = [\underline{m}_{R_p}(w, \omega), \overline{m}_{R_p}(w, \omega), \underline{d}_{R_p}(w, \omega), \overline{d}_{R_p}(w, \omega)]_{LR}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \underline{m}_{R_p}(w, \omega) &= \sum_{i=1}^n (a_i(\omega) + \sigma_i(\omega) \underline{m}_i) w_i, & \overline{m}_{R_p}(w, \omega) &= \sum_{i=1}^n (a_i(\omega) + \sigma_i(\omega) \overline{m}_i) w_i, \\ \underline{d}_{R_p}(w, \omega) &= \sum_{i=1}^n \sigma_i(\omega) \underline{d}_i w_i, & \overline{d}_{R_p}(w, \omega) &= \sum_{i=1}^n \sigma_i(\omega) \overline{d}_i w_i. \end{aligned}$$

Для построения эквивалентного детерминированного аналога ограничений задачи, нам потребуется снять неопределенности вероятностного и возможностного типов с доходности портфеля. Для снятия вероятностной неопределенности будем использовать принцип ожидаемой возможности: найдем математическое ожидание $R_p(w, \omega, \gamma)$, а затем идентифицируем его возможностное распределение, вычислив соответствующие параметры. При фиксированном w ожидаемая доходность портфеля является нечеткой величиной (см. [5]):

$$\hat{R}_p(w, \gamma) = \mathbf{E}[R_p(w, \omega, \gamma)] = [\underline{m}_{\hat{R}_p}(w), \overline{m}_{\hat{R}_p}(w), \underline{d}_{\hat{R}_p}(w), \overline{d}_{\hat{R}_p}(w)]_{LR},$$

где

$$\begin{aligned} \underline{m}_{\hat{R}_p}(w) &= \sum_{i=1}^n (\hat{a}_i + \hat{\sigma}_i \underline{m}_i) w_i, & \overline{m}_{\hat{R}_p}(w) &= \sum_{i=1}^n (\hat{a}_i + \hat{\sigma}_i \overline{m}_i) w_i, \\ \underline{d}_{\hat{R}_p}(w) &= \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i \underline{d}_i w_i, & \overline{d}_{\hat{R}_p}(w) &= \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i \overline{d}_i w_i, & \hat{a}_i &= \mathbf{E}[a_i(\omega)], & \hat{\sigma}_i &= \mathbf{E}[\sigma_i(\omega)]. \end{aligned}$$

Теперь, используя все обозначения и результаты, приведенные выше, мы можем построить модели допустимых портфелей в возможностном контексте:

$$F_{p,\pi}^{\mathbf{E}}(w, \gamma) = \begin{cases} \pi\{\hat{R}_p(w, \gamma) \Re m_d\} \geq \alpha, \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1, \\ w \in \mathbb{E}_+^n, \end{cases} \quad (3a)$$

и в необходимостном контексте:

$$F_{p,\nu}^{\mathbf{E}}(w, \gamma) = \begin{cases} \nu\{\hat{R}_p(w, \gamma) \Re m_d\} \geq \alpha, \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1, \\ w \in \mathbb{E}_+^n, \end{cases} \quad (3b)$$

где $\mathbb{E}_+^n = \{x \in \mathbb{E}^n : x \geq 0\}$, $\hat{R}_p(w, \gamma)$ – ожидаемая доходность, $\Re$ – отношение $\{\geq, =\}$, $\alpha \in (0, 1]$, m_d – уровень доходности, приемлемый для инвестора.

В [14] данная модель была изучена, когда отношение $\mathfrak{R}$ было четким. Для последующего проведения сравнительного анализа результатов, выпишем эквивалентный детерминированный аналог системы (3) для четкого отношения ' $\geq$ ' в возможностном контексте:

$$F_{p,\pi}^{\mathbf{E},\geq}(w) = \begin{cases} \overline{m}_{\hat{R}_p}(w) + \overline{d}_{\hat{R}_p}(w) * R^{-1}(\alpha) \geq m_d, \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1, \\ w \in \mathbb{E}_+^n, \end{cases} \quad (4a)$$

и в необходимостном контексте:

$$F_{p,\nu}^{\mathbf{E},\geq}(w) = \begin{cases} \underline{m}_{\hat{R}_p}(w) - \underline{d}_{\hat{R}_p}(w) * L^{-1}(1 - \alpha) \geq m_d, \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1, \\ w \in \mathbb{E}_+^n. \end{cases} \quad (4b)$$

В настоящей работе мы продолжим начатые ранее исследования и рассмотрим более общий случай, когда отношение $\mathfrak{R}$ является нечетким.

На основании результатов, полученных в [14], может быть доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть в модели (3a)-(3b) $\mathfrak{R}$ моделируется нечеткой величиной $\mathfrak{R}(\gamma)$. Тогда ее эквивалентный детерминированный аналог принимает вид в возможностном контексте:

$$F_{p,\pi}^{\mathbf{E},\mathfrak{R}(\gamma)}(w) = \begin{cases} \bar{t} \leq \overline{m}_{\hat{R}_p}(w) + \overline{d}_{\hat{R}_p}(w) * R^{-1}(\alpha), \\ \bar{t} \geq \underline{m}_{\hat{R}_p}(w) - \underline{d}_{\hat{R}_p}(w) * L^{-1}(\alpha), \\ \mu_{\mathfrak{R}}(\bar{t}, m_d) \geq \alpha, \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1, \\ w \in \mathbb{E}_+^n, \end{cases} \quad (5a)$$

и в необходимостном контексте: $F_{p,\nu}^{\mathbf{E},\mathfrak{R}(\gamma)}(w) =$

$$\begin{cases} \bar{t} \geq \overline{m}_{\hat{R}_p}(w) + \overline{d}_{\hat{R}_p}(w) * R^{-1}(1 - \alpha) \cup \bar{t} \leq \underline{m}_{\hat{R}_p}(w) - \underline{d}_{\hat{R}_p}(w) * L^{-1}(1 - \alpha), \\ \mu_{\mathfrak{R}}(\bar{t}, m_d) \leq 1 - \alpha, \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1, \\ w \in \mathbb{E}_+^n, \end{cases} \quad (5b)$$

где $\mu_{\mathfrak{R}}(\cdot, \cdot)$ – функция распределения возможностного бинарного отношения $\mathfrak{R}(\gamma)$.

Возьмем для примера отношение $\mathfrak{R}(\gamma)$, моделирующее нечеткое отношение «больше или равно»:

$$\mu_{\mathfrak{R}}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - y \geq 0, \\ e^{x-y}, & \text{если } x - y < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Специфицируем третье неравенство системы (5а). Понятно, что $\bar{t}$ является одним из значений $\hat{R}_p(w, \gamma)$ с возможностью, большей или равной α . Тогда если $\bar{t} \geq m_d$, то третье неравенство выполняется всегда, так как значение $\mu_{\mathfrak{R}}(\cdot, \cdot)$ в этом случае всегда будет равно 1. Покажем теперь, при каких значениях $\bar{t} < m_d$ третье неравенство будет выполняться. Имеем

$$e^{\bar{t}-m_d} \geq \alpha \Rightarrow \bar{t} - m_d \geq \ln \alpha \Rightarrow \bar{t} \geq m_d + \ln \alpha.$$

Теперь, используя полученные результаты, мы можем переписать систему (5а) в следующей форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max\{\underline{m}_{\hat{R}_p}(w) - \underline{d}_{\hat{R}_p}(w) * L^{-1}(\alpha), m_d + \ln \alpha\} \leq \bar{m}_{\hat{R}_p}(w) + \bar{d}_{\hat{R}_p}(w) * R^{-1}(\alpha), \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1, \\ w \in \mathbb{E}_+^n. \end{array} \right. \quad (7a)$$

Заметим, что система (7а) сводится к системе (4а) в случае замены нечеткого отношения $\mathfrak{R}(\gamma)$ на четкое $\geq$.

Преобразуем теперь аналогичным образом систему (5б). Если $\bar{t} \geq m_d$, то второе неравенство системы (5б) выполняется только в случае $\alpha = 0$, который на практике не рассматривается. Пусть $\bar{t} < m_d$. После элементарных преобразований получаем эквивалентное ограничение $\bar{t} \leq m_d + \ln(1 - \alpha)$. В результате мы можем упростить систему (5б), переписав ее в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{m}_{\hat{R}_p}(w) - \underline{d}_{\hat{R}_p}(w) * L^{-1}(1 - \alpha) \geq m_d + \ln \alpha, \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1, \\ w \in \mathbb{E}_+^n. \end{array} \right. \quad (7b)$$

Для завершения построения модели нам необходимо идентифицировать функцию риска портфеля, которую мы будем минимизировать. Для этого выпишем формулу дисперсии портфеля. Воспользовавшись формулами (1) и (2), получаем:

$$D_p(w) = \frac{1}{2} \int_0^1 (D[R_p^-(w, \omega, \alpha)] + D[R_p^+(w, \omega, \alpha)]) d\alpha,$$

где $R_p^-(w, \omega, \alpha)$ и $R_p^+(w, \omega, \alpha)$ – левая и правая границы α -уровневого множества доходности портфеля $R_p(w, \omega, \gamma)$:

$$R_p^-(w, \omega, \alpha) = \underline{m}_{R_p}(w, \omega) - \underline{d}_{R_p}(w, \omega) * L^{-1}(\alpha),$$

$$R_p^+(w, \omega, \alpha) = \bar{m}_{R_p}(w, \omega) + \bar{d}_{R_p}(w, \omega) * R^{-1}(\alpha).$$

Будем рассматривать случай, когда в нечетких случайных величинах нечеткая компонента задается нечеткими числами (L, R) -типа с одинаковыми левой и правой функциями представления формы и коэффициентами нечеткости, т.е. $L(\alpha) = R(\alpha) = S(\alpha), \forall \alpha$ и $\underline{m}_i = \bar{m}_i = m_i, \bar{d}_i = \underline{d}_i = d_i, i = 1, \dots, n$. На практике именно такая конфигурация нечетких параметров всегда и используется, поэтому подобным упрощением мы никак не ограничиваем получаемые результаты. Однако при этом формула дисперсии примет существенно более простой

для проведения расчетов вид. Учитывая, что все случайные параметры распределений независимы и одинаково распределены, дисперсия доходности портфеля будет выглядеть следующим образом:

$$D_p(w) = \sum_{i=1}^n \left(D[a_i(\omega)] + D[\sigma_i(\omega)] \left(m_i^2 + d_i^2 \int_0^1 (S^{-1}(\alpha))^2 d\alpha \right) \right) w_i^2.$$

Пример 2. В рассматриваемом нами случае, когда коэффициенты сдвига и масштаба $a_i(\omega)$, $\sigma_i(\omega)$ являются равномерно распределенными на отрезке $[0, 1]$ и независимыми, а функция представления формы $S(t) = \max\{0, 1 - t\}$, $t \geq 0$, мы получаем следующую формулу для дисперсии:

$$D_p(w) = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n \left(m_i^2 + \frac{1}{3} d_i^2 + 1 \right) w_i^2.$$

После идентификации всех компонент модели, рассматриваемая задача портфельной оптимизации принимает следующий вид:

$$D_p(w) \rightarrow \min, \quad (8)$$

$$w \in F_{p,\tau}^{E,\Re}(w), \quad (9)$$

где $\Re \in \{\geq, \Re(\gamma)\}$, $\tau \in \{\pi, \nu\}$.

3. Модельный пример и сравнительный анализ

В качестве модельного примера рассмотрим двумерный портфель ($n = 2$). Пусть $Z_1 = [2.2, 2.2, 0.3, 0.3]_{LR}$, $Z_2 = [1.2, 1.2, 0.4, 0.4]_{LR}$, $L(t) = R(t) = \max\{0, 1 - t\}$, $t \geq 0$, $\alpha = 0.75$. Напомним, что все $a_i(\omega)$, $\sigma_i(\omega)$ являются независимыми случайными величинами с равномерным на отрезке $[0, 1]$ распределением. Пусть также $\Re(\gamma)$ моделирует нечеткое отношение «больше или равно» в соответствии с формулой (6). При сделанных предположениях эквивалентные детерминированные аналоги портфеля минимального риска (8)-(9) в возможностном и необходимостном контекстах при четком отношении $\geq$ принимают вид:

$$\frac{587}{1200} w_1^2 + \frac{187}{900} w_2^2 \rightarrow \min,$$

$$F_{p,\pi}^{E,\geq}(w) = \begin{cases} 1.6375w_1 + 1.15w_2 \geq m_d, \\ w_1 + w_2 = 1, \\ w_1, w_2 \geq 0, \end{cases} \quad F_{p,\nu}^{E,\geq}(w) = \begin{cases} 1.4875w_1 + 0.95w_2 \geq m_d, \\ w_1 + w_2 = 1, \\ w_1, w_2 \geq 0, \end{cases}$$

а при нечетком отношении $\Re(\gamma)$:

$$\frac{587}{1200} w_1^2 + \frac{187}{900} w_2^2 \rightarrow \min,$$

$$F_{p,\pi}^{E,\Re(\gamma)}(w) = \begin{cases} 1.6375w_1 + 1.15w_2 \geq \max\{1.5625w_1 + 1.05w_2, m_d - 0.2877\}, \\ w_1 + w_2 = 1, \\ w_1, w_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F_{p,\nu}^{E,\Re(\gamma)}(w) = \begin{cases} 1.4875w_1 + 0.95w_2 \geq m_d - 0.2877, \\ w_1 + w_2 = 1, \\ w_1, w_2 \geq 0. \end{cases}$$

Рис. 1: Множества квазиэффективных портфелей в зависимости от модели ограничений для $\tau \in \{\pi, \nu\}$

Заметим, что в нашем примере при $n = 2$ независимой является только одна переменная, поэтому для решения задачи можно не привлекать сложные оптимизационные методы, а использовать обычный перебор с некоторым шагом всех возможных значений $w_1 \in [0, 1]$.

На Рис. 1 изображены множества квазиэффективных (то есть эффективных с заданной возможностью) оценок портфеля в соответствии с выбранной системой ограничений (то есть с четким и нечетким отношениями «больше или равно»). Как видно из Рис. 1 при нечетком отношении модель инвестиционного портфеля становится более «мягкой», позволяя для одного и того же уровня риска иметь большую ожидаемую доходность портфеля.

Заключение

В статье исследована модель портфеля минимального риска, основанная на принципе ожидаемой возможности дохода в мягких ограничениях. Мягкость ограничения моделируется возможностным бинарным отношением. На модельном примере осуществлено построение множеств квазиэффективных портфелей в зависимости от модели ограничений. В плане дальнейших исследований предполагается перенести эти результаты на случай слабой t -нормы, моделирующей взаимодействие нечетких параметров.

Список литературы

- [1] Yazenin A.V. Optimization with Fuzzy Random Data and its Application in Financial Analysis // Proceedings of International Conference on Fuzzy Sets

- and Soft Computing in Economics and Finance, FSSCEF 2004 (Saint-Petersburg, Russia June 17-20, 2004). Vol. 2. 2004. Pp. 16–32.
- [2] Yazenin A.V. Possibilistic–Probabilistic Models and Methods of Portfolio Optimization // Perception-based Data Mining and Decision Making in Economics and Finance. Eds. by I. Batyrshin, J. Kacprzyk, L. Sheremetov, L.A. Zadeh. Series: Studies in Computational Intelligence. Vol. 36. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. Pp. 241–259. https://doi.org/10.1007/978-3-540-36247-0_9
- [3] Yazenin A., Soldatenko I. A portfolio of minimum risk in a hybrid uncertainty of a possibilistic-probabilistic type: comparative study // Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017 (EUSFLAT 2017, IWIFSGN 2017). Eds. by Kacprzyk J., Szmidt E., Zadrozny S., Atanassov K., Krawczak M.. Series: Advances in Intelligent Systems and Computing. Vol. 643. 2018. Pp. 551–563. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66827-7_51
- [4] Yazenin A., Soldatenko I. On the Problem of Possibilistic-Probabilistic Optimization with Constraints on Possibility/Probability // Advances in Intelligent Systems and Computing. Eds. by Giove S., Masulli F., Fuller R.. Series: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 11291. Cham: Springer, 2019. Pp. 43–54.
- [5] Язенин А.В. Основные понятия теории возможностей. Математический аппарат для принятия решений в условиях гибридной неопределенности. М.: Физматлит, 2016. 144 с.
- [6] Feng Y., Hu L., Shu H. The variance and covariance of fuzzy random variables and their applications // Fuzzy Sets and Systems. 2001. Vol. 120, № 3. Pp. 487–497. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(99\)00060-3](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(99)00060-3)
- [7] Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. М.: Радио и связь, 1990.
- [8] Yazenin A.V. On the problem of possibilistic optimization // Fuzzy Sets and Systems. 1996. Vol. 81. Pp. 133–140.
- [9] Nahmias S. Fuzzy variables in a random environment // Advances in Fuzzy Set Theory and Applications. Eds. by M.M. Gupta, R.K. Ragade, R.R. Yager. Amsterdam: North-Holland, 1979. Pp. 165–180.
- [10] Nguyen H.T., Walker E.A. A first course in fuzzy logic. CRC Press, 1997.
- [11] Yazenin A., Wagenknecht M. Possibilistic Optimization. A Measure-Based Approach. Cottbus, Germany: Brandenburgische Technische Universität, 1996. 133 p.
- [12] Dubois D., Prade H. Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. New York: Academic Press, 1980.
- [13] Dubois D., Prade H. Fuzzy numbers: an overview // Analysis of Fuzzy Information. Ed. by J. Bezdek. Vol. 2. Boca Raton: CRC-Press, 1988. Pp. 3–39.
- [14] Гордеев Р.Н., Язенин А.В. Метод решения одной задачи возможностного программирования // Известия Российской Академии наук. Теория и системы управления. 2006. № 3. С. 112–119.

- [15] Markowitz H. Portfolio Selection // The Journal of Finance. 1952. Vol. 7, № 1. Pp. 77–91. <https://doi.org/10.2307/2975974>

Образец цитирования

Солдатенко И.С., Язенин А.В. Об одной задаче портфельного анализа при мягких ограничениях // Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2020. Т. 15, № 1. С. 64–76. <https://doi.org/10.26456/fssc71>

Сведения об авторах

1. Солдатенко Илья Сергеевич

доцент кафедры информационных технологий Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ. E-mail: soldis@tversu.ru

2. Язенин Александр Васильевич

заведующий кафедрой информационных технологий Тверского государственного университета.

*Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: Yazenin.AV@tversu.ru*

ON ONE PROBLEM OF PORTFOLIO ANALYSIS UNDER SOFT CONSTRAINTS

Soldatenko Ilia Sergeyevich

Associate Professor in the Department of Information Technologies, Tver State University

Russia, 170100, Tver, Zhelyabova str., 33, TverSU.

E-mail: soldis@tversu.ru

Yazenin Alexander Vasilyevich

Head of Information Technologies department, Tver State University

Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU.

E-mail: Yazenin.AV@tversu.ru

Received 19.05.2020, revised 22.06.2020.

A model of a minimal risk portfolio under conditions of hybrid uncertainty of the possibility-probability type based on the principle of expected possibility has been developed and studied. The peculiarity of this model is that the "softness" of the restriction on the level of expected return is modeled by replacing a clear restriction with a possibilistic binary relation. The model example shows how the softness of the constraint affects a set of quasi-effective estimates of an investment portfolio.

Keywords: minimal risk portfolio, hybrid uncertainty, fuzzy random variable, possibility, expected possibility, possibilistic relation, soft restriction on possibility.

Citation

Soldatenko I.S., Yazenin A.V., "On one problem of portfolio analysis under soft constraints", *Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya [Fuzzy Systems and Soft Computing]*, **15**:1 (2020), 64–76(in Russian). <https://doi.org/10.26456/fssc71>

References

- [1] Yazenin A.V., "Optimization with Fuzzy Random Data and its Application in Financial Analysis", *Proceedings of International Conference on Fuzzy Sets and Soft Computing in Economics and Finance*. V.2, FSSCEF 2004 (Saint-Petersburg, Russia June 17-20, 2004), 2004, 16–32.
- [2] Yazenin A.V., "Possibilistic–Probabilistic Models and Methods of Portfolio Optimization", *Perception-based Data Mining and Decision Making in Economics and Finance*. V.36, Studies in Computational Intelligence, eds. I. Batyrshin, J. Kacprzyk, L. Sheremetov, L.A. Zadeh, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007, 241–259, https://doi.org/10.1007/978-3-540-36247-0_9.
- [3] Yazenin A., Soldatenko I., "A portfolio of minimum risk in a hybrid uncertainty of a possibilistic-probabilistic type: comparative study", *Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017*. V.643 (EUSFLAT 2017, IWIFSGN 2017), Advances in Intelligent Systems and Computing, eds. Kacprzyk J., Szmidt E., Zadrozny S., Atanassov K., Krawczak M., 2018, 551–563, https://doi.org/10.1007/978-3-319-66827-7_51.

- [4] Yazenin A., Soldatenko I., “On the Problem of Possibilistic-Probabilistic Optimization with Constraints on Possibility/Probability”, *Advances in Intelligent Systems and Computing*. V.11291, Lecture Notes in Computer Science, eds. Giove S., Masulli F., Fuller R., Springer, Cham, 2019, 43–54.
- [5] Yazenin A.V., *Osnovnye ponyatiya teorii vozmozhnostej. Matematicheskij apparat dlya prinyatiya reshenij v usloviyakh gibridnoj neopredelennosti [Basic concepts of the theory of possibilities. Mathematical decision-making apparatus in a hybrid uncertainty]*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2016 (in Russian), 144 pp.
- [6] Feng Y., Hu L., Shu H., “The variance and covariance of fuzzy random variables and their applications”, *Fuzzy Sets and Systems*, **120**:3 (2001), 487–497, [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(99\)00060-3](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(99)00060-3).
- [7] Dubois D., Prade H., *Theorie des Possibilites, Application a la Representation des Connaissances en Informatique*, Masson, Paris, 1988.
- [8] Yazenin A.V., “On the problem of possibilistic optimization”, *Fuzzy Sets and Systems*, **81** (1996), 133–140.
- [9] Nahmias S., “Fuzzy variables in a random environment”, *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*, eds. M.M. Gupta, R.K. Ragade, R.R. Yager, North-Holland, Amsterdam, 1979, 165–180.
- [10] Nguyen H.T., Walker E.A., *A first cours in fuzzy logic*, CRC Press, 1997.
- [11] Yazenin A., Wagenknecht M., *Possibilistic Optimization. A Measure-Based Approach*, Brandenburgische Technische Universitat, Cottbus, Germany, 1996, 133 pp.
- [12] Dubois D., Prade H., *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York, 1980.
- [13] Dubois D., Prade H., “Fuzzy numbers: an overview”, *Analysis of Fuzzy Information*. V. 2, ed. J. Bezdek, CRC-Press, Boca Raton, 1988, 3–39.
- [14] Gordeev R.N., Yazenin A.V., “A method for solving a problem of possibilistic programming”, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, **45**:3 (2006), 442–449.
- [15] Markowitz H., “Portfolio Selection”, *The Journal of Finance*, **7**:1 (1952), 77–91, <https://doi.org/10.2307/2975974>.