Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Е. Егорова, К методу решения задач возможно-вероятностного программирования, *Нечеткие системы и мягкие вычисления*, 2021, том 16, выпуск 1, 21–33

DOI: <https://doi.org/10.26456/fssc77>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 16:04:00

К МЕТОДУ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВОЗМОЖНОСТНО-ВЕРОЯТНОСТНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ¹

Егорова Ю.Е.

Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 25.12.2020, после переработки 06.05.2021.

В статье исследуется задача возможно-вероятностной оптимизации, основанная на принципе ожидаемой возможности, и метод решения ее стохастического аналога в случае слабой t -нормы, описывающей взаимодействие нечетких параметров. Получены более простые для проверки условия, обеспечивающие сходимость метода стохастических квазиградиентов решения эквивалентного стохастического аналога.

Ключевые слова: возможно-вероятностная оптимизация, метод стохастических квазиградиентов, нечеткая случайная величина, слабая t -норма.

Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2021. Т. 16, № 1. С. 21–33.
<https://doi.org/10.26456/fssc77>

1. Введение

В настоящее время задачи возможно-вероятностной оптимизации, в которых взаимодействие нечетких параметров описывается слабой t -нормой, представляют большой интерес как с теоретической [1–7], так и с практической точек зрения [8, 9]. Одним из применений таких задач является оптимизация инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности [8, 9].

Для решения задач возможно-вероятностной оптимизации были разработаны различные методы. Одни [1, 2, 8] основаны на непрямом подходе, сводящем задачу к эквивалентной детерминированной, которая в последствие решается известными методами оптимизации. Другим подходом является сведение задачи к стохастическому эквиваленту и применение методов стохастических квазиградиентов [3, 4, 6] или стохастического метода штрафов [7, 9].

Однако, в случае методов, использующих стохастические квазиградиенты, представленные теоремы о сходимости этих методов [3, 4, 7] включают условия, которые не всегда удобно проверять на практике. Поэтому целью данной статьи является показать, что теоремы о сходимости остаются справедливыми, если некоторые их условия ослабить, заменив на более простые для проверки в реальных задачах.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №20-01-00669).
© Егорова Ю.Е., 2021

2. Необходимые понятия и обозначения

В контексте работ [10-17] введем ряд определений и понятий из теории возможностей. Пусть $(\Gamma, \mathfrak{P}(\Gamma), \pi)$ и $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ есть возможностное и вероятностное пространства, в которых Ω — пространство элементарных событий $\omega \in \Omega$, Γ — модельное пространство с элементами $\gamma \in \Gamma$, $\mathcal{B}$ — σ -алгебра событий, $\mathfrak{P}(\Gamma)$ — множество всех подмножеств Γ , π — мера возможности, а P — мера вероятности; E^1 — числовая прямая.

Дадим определение нечеткой случайной (возможностно-вероятностной) величины и ее распределения [11, 12].

Определение 1. *Нечеткая случайная величина Y есть вещественная функция $Y : \Omega \times \Gamma \rightarrow E^1$, σ -измеримая для каждого фиксированного γ , а функция*

$$\mu_Y(\omega, t) = \pi\{\gamma \in \Gamma : Y(\omega, \gamma) = t\}$$

называется ее функцией распределения.

Из определения 1 следует, что функция распределения нечеткой случайной величины зависит от случайного параметра, т. е. является случайной функцией.

Определение 2. *Пусть $Y(\omega, \gamma)$ — нечеткая случайная величина. Ее ожидаемым значением $E[Y]$ [11, 12] называется нечеткая величина, имеющая функцию распределения возможностей*

$$\mu_{E[Y]}(t) = \pi\{\gamma \in \Gamma : E[Y(\omega, \gamma)] = t\},$$

где $E[\cdot]$ есть оператор взятия математического ожидания

$$E[Y(\omega, \gamma)] = \int_{\Omega} Y(\omega, \gamma) P d\omega.$$

В данном случае функция распределения ожидаемого значения нечеткой случайной величины уже не зависит от случайного параметра и является детерминированной.

Определяемое в соответствии с рассматриваемым подходом математическое ожидание случайных величин наследует основные свойства вещественных случайных величин.

Интересным для приложений является сдвиг-масштабное представление [14] нечетких случайных величин:

$$Y(\omega, \gamma) = a(\omega) + \sigma(\omega)Z(\gamma),$$

где $a(\omega)$ и $\sigma(\omega)$ — случайные величины, определенные на $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, а $Z(\gamma)$ есть нечеткая величина, определенная на $(\Gamma, P(\Gamma), \pi)$. В данном случае, $a(\omega)$ и $\sigma(\omega)$ обозначают соответственно параметры сдвига и масштаба.

Для моделирования нечетких величин часто используется распределение LR-типа [15].

Определение 3. *Нечеткая величина Z называется величиной LR-типа, если ее функция распределения возможности имеет вид*

$$\mu_Z(t) = \begin{cases} L\left(\frac{\underline{m}-t}{d}\right), & t < \underline{m}, \\ 1, & \underline{m} \leq t \leq \overline{m}, \\ R\left(\frac{t-\overline{m}}{d}\right), & t > \overline{m}, \end{cases}$$

где $L(t)$ и $R(t)$ — функции представления формы. В этом случае величина Z записывается, как правило, в виде $Z = [\underline{m}, \overline{m}, \underline{d}, \overline{d}]_{LR}$.

В данном представлении, $\underline{m}$ и $\overline{m}$ есть левая и правая границы интервала толерантности, а $\underline{d}$, $\overline{d}$ — коэффициенты нечеткости; при этом $\underline{m} \leq \overline{m}$ и $\underline{d} > 0, \overline{d} > 0$.

Для агрегирования нечеткой информации будем использовать t-нормы и t-конормы, которые расширяют операции типа min и max, заложенные в действиях над нечеткими множествами и нечеткими величинами [16].

Особый интерес представляют t-нормы

$$T_M(x, y) = \min\{x, y\} \text{ и } T_W(x, y) = \begin{cases} \min\{x, y\}, & \text{если } \max\{x, y\} = 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

которые являются экстремальными.

Сильнейшей t-нормой называется t-норма T_M , а T_W — слабойшей t-нормой, так как для любой произвольной t-нормы T и $\forall x, y \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$T_W(x, y) \leq T(x, y) \leq T_M(x, y).$$

Опираясь на результаты работы [17], обобщим понятие несвязанности нечетких величин, введенное в [10], на случай произвольной t-нормы.

Определение 4. Множества $A_1, \dots, A_n \in P(\Gamma)$ называются взаимно T связанными, если для любого индексного множества $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$, $1 \leq k \leq n$ справедливо

$$\pi(X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_k}) = T(\pi(X_{i_1}), \dots, \pi(X_{i_k})),$$

где

$$T(\pi(A_{i_1}), \dots, \pi(A_{i_k})) = T(T(\dots T(T(\pi(A_{i_1}), \pi(A_{i_2}))), \pi(A_{i_3})), \dots, \pi(A_{i_{k-1}})), \pi(A_{i_k})).$$

Пусть $Z_1, \dots, Z_n$ есть нечеткие величины, определенные на возможностном пространстве $(\Gamma, P(\Gamma), \pi)$. Перенесем понятие взаимной T-связанности множеств (событий) на нечеткие величины.

Определение 5. Нечеткие величины $Z_1, \dots, Z_n$ называются взаимно T связанными, если для любого индексного множества $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$, $1 \leq k \leq n$ справедливо

$$\begin{aligned} \mu_{Z_{i_1}, \dots, Z_{i_k}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) &= \pi\{\gamma \in \Gamma : Z_{i_1}(\gamma) = x_{i_1}, \dots, Z_{i_k}(\gamma) = x_{i_k}\} \\ &= \pi\{Z_{i_1}^{-1}\{x_{i_1}\} \cap \dots \cap Z_{i_k}^{-1}\{x_{i_k}\}\} \\ &= T(\pi(Z_{i_1}^{-1}\{x_{i_1}\}), \dots, \pi(Z_{i_k}^{-1}\{x_{i_k}\})), \quad x_{i_j} \in E^1. \end{aligned}$$

3. Модель возможно-вероятностной оптимизации

В статье будем рассматривать следующую модель возможно-вероятностной оптимизации, сформулированную впервые для случая дискретных вероятностных распределений в [1]:

$$\begin{aligned} k &\rightarrow \text{extr}_x, \\ \tau_0 \{E[f_0(x, \omega, \gamma)] \mathcal{R}_0 k\} &\geq \alpha_0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \tau_i \{E[f_i(x, \omega, \gamma)] \mathcal{R}_i 0\} \geq \alpha_i, & i = \overline{1, m}, \\ x \in X. \end{cases} \quad (2)$$

В представленной модели $X \subseteq E_+^n = \{x \in E^n : x \geq 0\}$; $f_i(x, \omega, \gamma)$ есть нечеткие случайные функции

$$f_i : X \times \Omega \times \Gamma \rightarrow E^1, \quad i = \overline{0, m};$$

τ_i есть мера возможности π или мера необходимости ν ; $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_i$ — четкие отношения $\{\leq, \geq, =\}$; $\alpha_i \in (0, 1]$, k — дополнительные переменные.

Пусть функции $f_i(x, \omega, \gamma)$, $i = \overline{0, m}$ имеют вид

$$f_i(x, \omega, \gamma) = \sum_{j=0}^n b_{ij}(\omega, \gamma) x_j - b_i(\omega, \gamma),$$

где нечеткие случайные величины $b_{ij}(\omega, \gamma), b_i(\omega, \gamma)$ имеют сдвиг-масштабное представление

$$\begin{aligned} b_{ij}(\omega, \gamma) &= a_{ij}(\omega) + \sigma_{ij}(\omega) Z_{ij}(\gamma), \\ b_i(\omega, \gamma) &= a_i(\omega) + \sigma_i(\omega) Z_i(\gamma). \end{aligned}$$

Здесь случайные величины $a_{ij}(\omega), \sigma_{ij}(\omega)$ и $a_i(\omega), \sigma_i(\omega)$ независимы и имеют конечные математические ожидания, а нечеткие величины $Z_{ij}(\gamma) = [\underline{m}_{ij}, \overline{m}_{ij}, \underline{d}_{ij}, \overline{d}_{ij}]_{LR}$ и $Z_i(\gamma) = [\underline{m}_i, \overline{m}_i, \underline{d}_i, \overline{d}_i]_{LR}$ взаимно T_w -связаны.

4. Эквивалентный стохастический аналог

Согласно [4] задачу (1)–(2) можно свести к следующей задаче стохастического программирования:

$$\lambda_0 m_{E[f_0]}(x) + \beta_0 d_{E[f_0]}(x) \rightarrow \min_x, \quad (3)$$

$$\begin{cases} \lambda_i m_{E[f_i]}(x) + \beta_i d_{E[f_i]}(x) \leq 0, & i \in \overline{1, k}, \\ x \in X. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь в зависимости от $\mathcal{R}_i$ и τ_i для $i = \overline{0, k}$

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \pm 1, \quad \beta_i = -L(\alpha_i), -L(1 - \alpha_i), R(\alpha_i) \text{ или } R(1 - \alpha_i), \\ m_{E[f_i]}(x) &= \underline{m}_{E[f_i]}(x) \text{ или } \overline{m}_{E[f_i]}(x), \quad d_{E[f_i]}(x) = \underline{d}_{E[f_i]}(x) \text{ или } \overline{d}_{E[f_i]}(x), \end{aligned}$$

при этом $m \leq k \leq 2m$. Предположим, что

$$\overline{a}_{ij} = E[a_{ij}(\omega)], \quad \overline{\sigma}_{ij} = E[\sigma_{ij}(\omega)], \quad \overline{a}_i = E[a_i(\omega)], \quad \overline{\sigma}_i = E[\sigma_i(\omega)],$$

тогда функции $\underline{m}_{E[f_i]}(x)$, $\overline{m}_{E[f_i]}(x)$ и $\underline{d}_{E[f_i]}(x)$, $\overline{d}_{E[f_i]}(x)$ примут вид

$$\begin{aligned}\underline{m}_{E[f_i]}(x) &= \sum_{j=1}^n (\bar{a}_{ij} + \bar{\sigma}_{ij} \underline{m}_{ij}) x_j - (\bar{a}_i + \bar{\sigma}_i \underline{m}_i), \\ \overline{m}_{E[f_i]}(x) &= \sum_{j=1}^n (\bar{a}_{ij} + \bar{\sigma}_{ij} \overline{m}_{ij}) x_j - (\bar{a}_i + \bar{\sigma}_i \overline{m}_i), \\ \underline{d}_{E[f_i]}(x) &= E[\max \{ \sigma_{i1}(\omega) \underline{d}_{i1} x_1, \dots, \sigma_{in}(\omega) \underline{d}_{in} x_n, \sigma_i(\omega) \underline{d}_i \}], \\ \overline{d}_{E[f_i]}(x) &= E[\max \{ \sigma_{i1}(\omega) \overline{d}_{i1} x_1, \dots, \sigma_{in}(\omega) \overline{d}_{in} x_n, \sigma_i(\omega) \overline{d}_i \}].\end{aligned}$$

Стоит заметить, что функции $m_{E[f_i]}(x)$ и $d_{E[f_i]}(x)$ можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned}m_{f_i}(x, \omega) &= \sum_{j=1}^n (\bar{a}_{ij}(\omega) + \bar{\sigma}_{ij} m_{ij}) x_j - (\bar{a}_i(\omega) + \bar{\sigma}_i m_i), \\ d_{f_i}(x, \omega) &= \max \{ \sigma_{i1}(\omega) d_{i1} x_1, \dots, \sigma_{in}(\omega) d_{in} x_n, \sigma_i(\omega) d_i \}.\end{aligned}$$

5. Метод стохастических квазиградиентов

В работах [3, 4] для решения задачи (3)–(4) был применен метод стохастических квазиградиентов, который является стохастическим вариантом градиентного метода Эрроу-Гурвица. Основная идея стохастических квазиградиентных методов заключается в том, что вместо градиентов или обобщенных градиентов при решении задачи используются их стохастические оценки, которые позволяют применять данные методы даже в случае, если функции ограничений и цели нельзя точно вычислить. Таким образом, применение данного подхода для решения задачи (3)–(4) позволит избежать трудоемких вычислений значений функций $d_{E[f_i]}(x)$.

Кратко опишем основные шаги метода стохастических квазиградиентов [18]. Обозначим через $\hat{\varphi}_x(x, u)$ вектор обобщенного градиента функции Лагранжа $\varphi(x, u)$, отвечающей некоторой задаче выпуклого математического программирования, по переменным x при фиксированном u , т. е. такой вектор, что для любого $z \in X$ выполняется

$$\varphi(z, u) - \varphi(x, u) \geq \langle \hat{\varphi}_x(x, u), z - x \rangle,$$

а через $\varphi_u(x, u)$ – градиент этой функции по переменным u .

Далее строим последовательность точек (x^s, u^s) , исходя из следующих соотношений:

$$\begin{aligned}x^{s+1} &= \Pi_X(x^s - \rho_s \gamma_s \xi^s), \quad s = 0, 1, \dots, \\ u^{s+1} &= \Pi_U(u^s + \rho_s \gamma_s \zeta^s), \quad s = 0, 1, \dots,\end{aligned}$$

где (x^0, u^0) – произвольное начальное приближение, ρ_s – величина шага, γ_s – нормирующий множитель; Π_X – оператор проектирования на множество X , который ставит в соответствие каждой точке $x \in R^n$ точку $\Pi_X(x) \in X$ так, что

$$\|y - \Pi_X(x)\| \leq \|y - x\|, \quad \forall y \in X;$$

Π_U – оператор проектирования на некоторое выпуклое и замкнутое множество U , содержащее компоненты u^* седловых точек (x^*, u^*) функции Лагранжа $\varphi(x, u)$ в области $x \in X, u \geq 0$; ξ^s, ζ^s – случайные векторы такие, что

$$\begin{aligned} E[\xi^s | (x^0, u^0), \dots, (x^s, u^s)] &= a_s \widehat{\varphi}_x(x^s, u^s) + b^s, \\ E[\zeta^s | (x^0, u^0), \dots, (x^s, u^s)] &= a_s \varphi_u(x^s, u^s) + d^s, \end{aligned}$$

где случайная величина $a_s \geq 0$ и случайные векторы b^s, d^s измеримы относительно σ -подалгебры $\mathcal{B}_s$, индуцированной семейством случайных величин $(x^0, u^0), \dots, (x^s, u^s)$. Величины ρ_s, γ_s также измеримы относительно $\mathcal{B}_s$.

Функция Лагранжа задачи (3)–(4) будет выглядеть следующим образом [4]:

$$\varphi(x, u) = \lambda_0 m_{E[f_0]}(x) + \beta_1 d_{E[f_0]}(x) + \sum_{i=1}^k u_i (\lambda_i m_{E[f_i]}(x) + \beta_i d_{E[f_i]}(x)).$$

Определим вектор ξ^s на s -й итерации следующим образом:

$$\xi^s = \xi_0^s + \sum_{i=1}^k u_i^s \xi_i^s,$$

где

$$\xi_i^s = (\lambda_i (\bar{a}_{i1} + \bar{\sigma}_{i1} m_{i1}) + \beta_i t_{i1}^s \sigma_{i1}(\omega^s) d_{i1}, \dots, \lambda_i (\bar{a}_{in} + \bar{\sigma}_{in} m_{in}) + \beta_i t_{in}^s \sigma_{in}(\omega^s) d_{in}).$$

Здесь x^s – точка, полученная на s -й итерации, $\sigma_{ij}(\omega^s)$ – реализация случайной величины $\sigma_{ij}(\omega)$ на s -й итерации; $t_{ij}^s = 1$, если j такой номер, что

$$\sigma_{ij}(\omega^s) d_{ij} x_{ij}^s \geq \sigma_{ik}(\omega^s) d_{ik} x_{ik}^s$$

для любых $k = \overline{1, n}$, в противном случае $t_{ij}^s = 0$.

В качестве вектора ζ^s возьмем градиент функции Лагранжа $\varphi(x, u)$ по u [4]

$$\zeta^s = (\lambda_1 m_{E[f_1]}(x) + \beta_1 d_{E[f_1]}(x), \dots, \lambda_k m_{E[f_k]}(x) + \beta_k d_{E[f_k]}(x)).$$

В работе [4] показано, что если функция цели (3) и функции ограничений (4) являются непрерывными и выпуклыми, множество X выпуклое и замкнутое, а ограничения (4) удовлетворяют условию Слейтера, то справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть η_s – случайная величина, измеримая относительно σ -подалгебры $\mathcal{B}_s$, индуцированной величинами $(x^0, u^0), \dots, (x^s, u^s)$, такая, что

$$E[\|\xi^s\|^2 + \|\zeta^s\|^2 | (x^0, u^0), \dots, (x^s, u^s)] \leq \eta_s^2 \leq C_L < \infty \quad (5)$$

при $\|x^k\| + \|u^k\| \leq L < \infty, k = \overline{0, s}$; нормирующий множитель γ_s для некоторых чисел $\underline{\gamma}, \bar{\gamma}$ удовлетворяет условию

$$0 < \underline{\gamma} \leq \gamma_s \eta_s \leq \bar{\gamma} < \infty; \quad (6)$$

величина ρ_s такая, что

$$\rho_s \geq 0, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s^2 < \infty.$$

Тогда с вероятностью 1 одна из предельных точек последовательности x^s принадлежит X^* .

Стоит отметить, что функции цели и функции ограничений задачи (3)–(4) являются выпуклыми, если $\beta_i = R(\alpha_i)$ или $R(1 - \alpha_i)$, то есть если в исходной задаче возможно-вероятностного программирования (1)–(2) в качестве τ_i была выбрана мера необходимости ν .

6. Упрощение теоремы о сходимости

В этом пункте покажем, что, наложив дополнительное ограничение на случайные величины $\sigma_{ij}(\omega)$, можно опустить условия (5) и (6), тем самым упростив применение Теоремы 1 в реальных задачах.

Теорема 2. Пусть случайные величины $\sigma_{ij}(\omega)$ такие, что $E[\sigma_{ij}^2(\omega)] < \infty$, тогда для всех $s = 0, 1, \dots$ выполняется

$$E[\|\xi^s\|^2 + \|\zeta^s\|^2 | (x^0, u^0), \dots, (x^s, u^s)] < \infty.$$

Доказательство. Для упрощения дальнейших выкладок обозначим σ -алгебру, индуцированную величинами $(x^0, u^0), \dots, (x^s, u^s)$, как $\mathcal{B}_s$, а вектор ξ^s представим в следующем виде

$$\xi^s = \sum_{i=0}^k u_i^s \xi_i^s,$$

где $u_0^s = 1$ для всех $s = 0, 1, \dots$

По свойствам математического ожидания имеем

$$E[\|\xi^s\|^2 + \|\zeta^s\|^2 | \mathcal{B}_s] = E[\|\xi^s\|^2 | \mathcal{B}_s] + E[\|\zeta^s\|^2 | \mathcal{B}_s].$$

Учитывая вид вектора ξ^s , можно получить, что

$$\begin{aligned} \|\xi^s\|^2 &= \left\| \sum_{i=0}^k u_i^s \xi_i^s \right\|^2 = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^k u_i^s \xi_{ij}^s \right)^2 = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^k (u_i^s)^2 (\xi_{ij}^s)^2 + 2 \sum_{\substack{i,l=0, \\ i \neq l}}^k u_i^s u_l^s \xi_{ij}^s \xi_{lj}^s \right) \\ &= \sum_{i=0}^k (u_i^s)^2 \sum_{j=1}^n (\xi_{ij}^s)^2 + \sum_{\substack{i,l=0, \\ i \neq l}}^k u_i^s u_l^s \sum_{j=1}^n \xi_{ij}^s \xi_{lj}^s. \end{aligned}$$

Здесь ξ_{ij}^s – j компонента вектора ξ_i^s . Тогда

$$E[\|\xi^s\|^2 | \mathcal{B}_s] = \sum_{i=0}^k (u_i^s)^2 \sum_{j=1}^n E[(\xi_{ij}^s)^2 | \mathcal{B}_s] + \sum_{\substack{i,l=0, \\ i \neq l}}^k u_i^s u_l^s \sum_{j=1}^n E[\xi_{ij}^s \xi_{lj}^s | \mathcal{B}_s].$$

Лемма 1. Пусть случайные величины $a_{ij}(\omega)$, $\sigma_{ij}(\omega)$ и $\sigma_{ij}^2(\omega)$ имеют конечные математические ожидания, тогда справедливо неравенство $E[(\xi_{ij}^s)^2 | \mathcal{B}_s] < \infty$.

Доказательство. Действительно

$$\begin{aligned} (\xi_{ij}^s)^2 &= (\lambda_i(\bar{a}_{ij} + \bar{\sigma}_{ij} m_{ij}) + \beta_i t_{ij}^s \sigma_{ij}(\omega^s) d_{ij})^2 \\ &= (\bar{a}_{ij} + \bar{\sigma}_{ij} m_{ij})^2 + \beta_i^2 t_{ij}^s \sigma_{ij}^2(\omega^s) d_{ij}^2 + 2\lambda_i(\bar{a}_{ij} + \bar{\sigma}_{ij} m_{ij})\beta_i t_{ij}^s \sigma_{ij}(\omega^s) d_{ij}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\xi_{ij}^s)^2 | \mathcal{B}_s] &= (\bar{a}_{ij} + \bar{\sigma}_{ij} m_{ij})^2 + \beta_i^2 t_{ij}^s \mathbb{E}[\sigma_{ij}^2(\omega^s) | \mathcal{B}_s] d_{ij}^2 \\ &\quad + 2\lambda_i (\bar{a}_{ij} + \bar{\sigma}_{ij} m_{ij}) \beta_i t_{ij}^s \mathbb{E}[\sigma_{ij}(\omega^s) | \mathcal{B}_s] d_{ij}. \end{aligned}$$

Так как математические ожидания $a_{ij}(\omega)$, $\sigma_{ij}(\omega)$ и $\sigma_{ij}^2(\omega)$ конечны, то легко видеть, что и $\mathbb{E}[(\xi_{ij}^s)^2 | \mathcal{B}_s]$ также конечно. $\square$

Лемма 2. Пусть случайные величины $a_{ij}(\omega)$ и $\sigma_{ij}(\omega)$ имеют конечные математические ожидания, тогда справедливо неравенство $\mathbb{E}[\xi_{ij}^s \xi_{lj}^s | \mathcal{B}_s] < \infty$.

Доказательство. Действительно

$$\begin{aligned} \xi_{ij}^s \xi_{lj}^s &= (\lambda_i (\bar{a}_{ij} + \bar{\sigma}_{ij} m_{ij}) + \beta_i t_{ij}^s \sigma_{ij}(\omega^s) d_{ij}) (\lambda_l (\bar{a}_{lj} + \bar{\sigma}_{lj} m_{lj}) + \beta_l t_{lj}^s \sigma_{lj}(\omega^s) d_{lj}) \\ &= \lambda_i \lambda_l (\bar{a}_{ij} + \bar{\sigma}_{ij} m_{ij}) (\bar{a}_{lj} + \bar{\sigma}_{lj} m_{lj}) + \beta_i \beta_l t_{ij}^s t_{lj}^s \sigma_{ij}(\omega^s) \sigma_{lj}(\omega^s) d_{ij} d_{lj} \\ &\quad + \lambda_i (\bar{a}_{ij} + \bar{\sigma}_{ij} m_{ij}) \beta_l t_{lj}^s \sigma_{lj}(\omega^s) d_{lj} + \lambda_l (\bar{a}_{lj} + \bar{\sigma}_{lj} m_{lj}) \beta_i t_{ij}^s \sigma_{ij}(\omega^s) d_{ij}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\xi_{ij}^s \xi_{lj}^s | \mathcal{B}_s] &= \lambda_i \lambda_l (\bar{a}_{ij} + \bar{\sigma}_{ij} m_{ij}) (\bar{a}_{lj} + \bar{\sigma}_{lj} m_{lj}) \\ &\quad + \beta_i \beta_l t_{ij}^s t_{lj}^s \mathbb{E}[\sigma_{ij}(\omega^s) | \mathcal{B}_s] \mathbb{E}[\sigma_{lj}(\omega^s) | \mathcal{B}_s] d_{ij} d_{lj} \\ &\quad + \lambda_i (\bar{a}_{ij} + \bar{\sigma}_{ij} m_{ij}) \beta_l t_{lj}^s \mathbb{E}[\sigma_{lj}(\omega^s) | \mathcal{B}_s] d_{lj} \\ &\quad + \lambda_l (\bar{a}_{lj} + \bar{\sigma}_{lj} m_{lj}) \beta_i t_{ij}^s \mathbb{E}[\sigma_{ij}(\omega^s) | \mathcal{B}_s] d_{ij}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что конечность математических ожиданий величин $a_{ij}(\omega)$ и $\sigma_{ij}(\omega)$ ведет к конечности $\mathbb{E}[\xi_{ij}^s \xi_{lj}^s | \mathcal{B}_s]$. $\square$

С учетом доказанных лемм, несложно показать, что $\mathbb{E}[\|\xi^s\|^2 | \mathcal{B}_s] < \infty$. С другой стороны

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|\xi^s\|^2 | \mathcal{B}_s] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^k (\lambda_i m_{\mathbb{E}[f_i]}(x^s) + \beta_i d_{\mathbb{E}[f_i]}(x^s))^2 | \mathcal{B}_s\right] \\ &= \sum_{i=1}^k (\lambda_i m_{\mathbb{E}[f_i]}(x^s) + \beta_i d_{\mathbb{E}[f_i]}(x^s))^2. \end{aligned}$$

Так как функции $\lambda_i m_{\mathbb{E}[f_i]}(x) + \beta_i d_{\mathbb{E}[f_i]}(x)$ непрерывны, а множество X ограничено, то очевидно, что и $\mathbb{E}[\|\xi^s\|^2 | \mathcal{B}_s]$ также будет ограничено. $\square$

Таким образом при условиях, когда функция цели (3) и функции ограничений (4) являются непрерывными и выпуклыми, множество X выпуклым и замкнутым, а ограничения (4) удовлетворяют условию Слейтера, будет справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть случайные величины $\sigma_{ij}(\omega)$ такие, что $\mathbb{E}[\sigma_{ij}^2(\omega)] < \infty$; нормирующий множитель γ_s для некоторых чисел $\underline{\gamma}, \bar{\gamma}$ удовлетворяет условию

$$0 < \underline{\gamma} \leq \gamma_s \leq \bar{\gamma} < \infty;$$

величина ρ_s такая, что

$$\rho_s \geq 0, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s^2 < \infty.$$

Тогда с вероятностью 1 одна из предельных точек последовательности x^s принадлежит X^* .

Стоит отметить, что требование конечности математических ожиданий случайных величин $\sigma_{ij}^2(\omega)$ достаточно легко обеспечить в реальных задачах.

Заключение

В статье рассмотрена модель возможно-вероятностного программирования с ограничениями по возможности и необходимости в случае слабой t -нормы, построен ее стохастический аналог и обоснован метод решения, основанный на стохастических квазиградиентах.

Также было показано, что теорема о сходимости метода решения поставленной задачи возможно-вероятностного программирования, основанного на методе стохастических квазиградиентов [4], остается верной, если условие об ограниченности математического ожидания суммы квадратов норм квазиградиентов (5) заменить на ограниченность математических ожиданий случайных величин $\sigma_{ij}^2(\omega)$, что проще обеспечить в реальных задачах, например, таких как задача оптимизации инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности.

В плане дальнейших исследований представляется необходимым получение оценок вычислительной сложности примененного метода стохастических квазиградиентов, а также сравнение его с непрямими методами решения задач возможно-вероятностной оптимизации.

Список литературы

- [1] Yazenin A.V. Linear programming with random fuzzy data // Soviet Journal of Computer and Systems Sciences. 1991. № 30. Pp. 86–93.
- [2] On a method of solving a problem of linear programming with random fuzzy data // Journal of Computer and Systems Sciences International. 1997. Vol. 36, № 5. Pp. 737–741.
- [3] Егорова Ю.Е., Язенин А.В. Стохастический квазиградиентный метод решения задач возможно-вероятностной оптимизации одного класса // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 4. С. 57–70.
- [4] Егорова Ю.Е., Язенин А.В. К проблеме возможно-вероятностной оптимизации // Известия Российской Академии наук. Теория и системы управления. 2017. № 4. С. 104–120.
- [5] Yazenin A., Soldatenko I. On the Problem of Possibilistic-Probabilistic Optimization with Constraints on Possibility/Probability // Advances in Intelligent Systems and Computing. Eds. by Giove S., Masulli F., Fuller R.. Series: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 11291. Cham: Springer, 2019. Pp. 43–54.

- [6] Yazenin A., Soldatenko I. On the Problem of Possibilistic-Probabilistic Optimization with Constraints on Possibility/Probability // *Advances in Intelligent Systems and Computing*. Eds. by Giove S., Masulli F., Fuller R.. Series: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 11291. Cham: Springer, 2019. Pp. 43–54.
- [7] Егорова Ю.Е. Стохастический метод штрафов в задачах возможно-вероятностного программирования // *Нечеткие системы и мягкие вычисления*. 2019. Т. 14, № 1. С. 64–74. <https://doi.org/10.26456/fssc53>
- [8] Yazenin A., Soldatenko I. A portfolio of minimum risk in a hybrid uncertainty of a possibilistic-probabilistic type: comparative study // *Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017 (EUSFLAT 2017, IWIFSGN 2017)*. Eds. by Kacprzyk J., Szmidt E., Zadrozny S., Atanassov K., Krawczak M.. Series: *Advances in Intelligent Systems and Computing*. Vol. 643. 2018. Pp. 551–563. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66827-7_51
- [9] Egorova Yu.E., Yazenin A.V. A method for minimum risk portfolio optimization under hybrid uncertainty // *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 973. 2018. ID 012033.
- [10] Nahmias S. Fuzzy variables // *Fuzzy Sets and Systems*. 1978. Vol. 1, № 2. Pp. 97–110. [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(78\)90011-8](https://doi.org/10.1016/0165-0114(78)90011-8)
- [11] Nahmias S. Fuzzy variables in a random environment // *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*. Eds. by M.M. Gupta, R.K. Ragade, R.R. Yager. Amsterdam: North-Holland, 1979. Pp. 165–180.
- [12] Yazenin A., Wagenknecht M. Possibilistic Optimization. A Measure-Based Approach. Cottbus, Germany: Brandenburgische Technische Universität, 1996. 133 p.
- [13] Язенин А.В. Основные понятия теории возможностей. Математический аппарат для принятия решений в условиях гибридной неопределенности. М.: Физматлит, 2016. 144 с.
- [14] Хохлов М.Ю., Язенин А.В. Расчет числовых характеристик нечетких случайных величин // *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*. 2003. № 1. С. 39–43.
- [15] Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. М.: Радио и связь, 1990.
- [16] Nguyen H.T., Walker E.A. A First Course in Fuzzy Logic. Boca Raton: CRC Press, 1997.
- [17] Hong D.H. Parameter estimations of mutually t-related fuzzy variables // *Fuzzy Sets and Systems*. 2001. Vol. 123, № 1. Pp. 63–71. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(00\)00113-5](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(00)00113-5)
- [18] Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. М.: Наука, 1976.

Образец цитирования

Егорова Ю.Е. К методу решения задач возможно-вероятностного программирования // Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2021. Т. 16, № 1. С. 21–33. <https://doi.org/10.26456/fssc77>

Сведения об авторах

1. Егорова Юлия Евгеньевна

ассистент кафедры информационных технологий Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

E-mail: j.e.egorova@gmail.com

ON A METHOD OF SOLVING OF POSSIBILISTIC-PROBABILISTIC PROGRAMMING PROBLEMS

Egorova Yulia Evgenyevna

Assistant in the Department of Information Technologies, Tver State University

Russia, 170100, Tver, Zhelyabova str., 33, TverSU.

E-mail: j.e.egorova@gmail.com

Received 25.12.2020, revised 06.05.2021.

The paper studies possibilistic-probabilistic optimization problems, based on the principle of expected possibility, and a method for solving its stochastic analogue in the case of the weakest t-norm describing the interaction of fuzzy parameters. The conditions that are easier to verify and ensure the convergence of the method of stochastic quasigradients of the solution of an equivalent stochastic analog are obtained.

Keywords: possibilistic-probabilistic optimization, stochastic quasigradient method, fuzzy random variable, the weakest t-norm.

Citation

Egorova Yu.E., “On a method of solving of possibilistic-probabilistic programming problems”, *Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya [Fuzzy Systems and Soft Computing]*, **16**:1 (2021), 21–33(in Russian). <https://doi.org/10.26456/fssc77>

References

- [1] Yazenin A.V., “Linear programming with random fuzzy data”, *Soviet Journal of Computer and Systems Sciences*, 1991, № 30, 86–93.
- [2] “On a method of solving a problem of linear programming with random fuzzy data”, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, **36**:5 (1997), 737–741.
- [3] Egorova Yu.E., Yazenin A.V., “Stochastic quasi-gradient method for solving possibilistic-probabilistic optimization task of one class”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2014, № 4, 57–70 (in Russian).
- [4] Egorova Y.E., Yazenin A.V., “The problem of possibilistic-probabilistic optimization”, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, **56**:4 (2017), 652–667.
- [5] Yazenin A., Soldatenko I., “On the Problem of Possibilistic-Probabilistic Optimization with Constraints on Possibility/Probability”, *Advances in Intelligent Systems and Computing*. V.11291, Lecture Notes in Computer Science, eds. Giove S., Masulli F., Fuller R., Springer, Cham, 2019, 43–54.

- [6] Yazenin A., Soldatenko I., “On the Problem of Possibilistic-Probabilistic Optimization with Constraints on Possibility/Probability”, *Advances in Intelligent Systems and Computing*. V.11291, Lecture Notes in Computer Science, eds. Giove S., Masulli F., Fuller R., Springer, Cham, 2019, 43–54.
- [7] Egorova Yu.E., “Stochastic penalty method in problems of probabilistic-probabilistic programming”, *Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya [Fuzzy Systems and Soft Computing]*, **14**:1 (2019), 64–74 (in Russian), <https://doi.org/10.26456/fssc53>.
- [8] Yazenin A., Soldatenko I., “A portfolio of minimum risk in a hybrid uncertainty of a possibilistic-probabilistic type: comparative study”, *Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017*. V.643 (EUSFLAT 2017, IWIFSGN 2017), Advances in Intelligent Systems and Computing, eds. Kacprzyk J., Szmidt E., Zadrozny S., Atanassov K., Krawczak M., 2018, 551–563, https://doi.org/10.1007/978-3-319-66827-7_51.
- [9] Egorova Yu.E., Yazenin A.V., “A method for minimum risk portfolio optimization under hybrid uncertainty”, *Journal of Physics: Conference Series*. V.973, 2018.
- [10] Nahmias S., “Fuzzy variables”, *Fuzzy Sets and Systems*, **1**:2 (1978), 97–110, [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(78\)90011-8](https://doi.org/10.1016/0165-0114(78)90011-8).
- [11] Nahmias S., “Fuzzy variables in a random environment”, *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*, eds. M.M. Gupta, R.K. Ragade, R.R. Yager, North-Holland, Amsterdam, 1979, 165–180.
- [12] Yazenin A., Wagenknecht M., *Possibilistic Optimization. A Measure-Based Approach*, Brandenburgische Technische Universitat, Cottbus, Germany, 1996, 133 pp.
- [13] Yazenin A.V., *Osnovnye ponyatiya teorii vozmozhnostej. Matematicheskij apparat dlya prinyatiya reshenij v usloviyakh gibridnoj neopredelennosti [Basic concepts of the theory of possibilities. Mathematical decision-making apparatus in a hybrid uncertainty]*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2016 (in Russian), 144 pp.
- [14] Khokhlov M.Yu., Yazenin A.V., “Calculation of numerical characteristics of fuzzy random variables”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2003, № 1, 39–43 (in Russian).
- [15] Dubois D., Prade H., *Theorie des Possibilites, Application a la Representation des Connaissances en Informatique*, Masson, Paris, 1988.
- [16] Nguyen H.T., Walker E.A., *A First Course in Fuzzy Logic*, CRC Press, Boca Raton, 1997.
- [17] Hong D.H., “Parameter estimations of mutually t-related fuzzy variables”, *Fuzzy Sets and Systems*, **123**:1 (2001), 63–71, [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(00\)00113-5](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(00)00113-5).
- [18] Ermolev Yu.M., *Metody stokhasticheskogo programmirovaniya [Stochastic programming methods]*, Nauka Publ., Moscow, 1976 (in Russian).