Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Поморцев, В. И. Цурков, Гигиена последовательностей вывода, *Нечеткие системы и мягкие вычисления*, 2021, том 16, выпуск 1, 34–57

DOI: <https://doi.org/10.26456/fssc78>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 12:33:57

ГИГИЕНА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ВЫВОДА

Поморцев Л.А.*, Цурков В.И.**

*Московский технический университет связи и информатики, г. Москва

**Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»
Российской Академии Наук, г. Москва

Поступила в редакцию 25.03.2021, после переработки 30.03.2021.

Последовательность Вывода (ПВ) Функциональной Зависимости (ФЗ) из заданной совокупности ФЗ является программой умозрительной ВМ (Вычислительной машины), управляющей командами Г и В. Формализация представляет ПВ в виде Каскадно Упорядоченного Множества (КУМ) с порядками следования $\leq^0 := \Rightarrow$ и вывода $\leq^1 := \Rightarrow$, наследующего от ПВ нежелательные свойства программирования: 1. Вариативность создания; 2. Неконтролируемое исходящее гнездование (ветвление); 3. Возможность многократного повторения в программе функционально эквивалентных фрагментов; 4. Прочее. Настоящая работа нацелена на искоренение этих недостатков ПВ, что достигается спрямлением алгоритмов и реализуется цепочкой Лемма 3 $\mapsto$ Теорема 3 $\mapsto$ Теорема 4, которая в конечном счёте позволит каждой ПВ поставить в соответствие функционально эквивалентное ей алгебраическое выражение в некоторой D-алгебре.

Ключевые слова: силлогизм, анализ, синтез, таблица, отношение, атрибут, схема, ключ, функциональная зависимость, граф, логическая схема, кортеж, проекция, гнездование, D-алгебра, ЧП, ЧУМ, РБД, ТРБД.

Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2021. Т. 16, № 1. С. 34–57.
<https://doi.org/10.26456/fssc78>

Введение

Мы продолжаем исследования, ведущие к алгебраизации *Последовательности Вывода (ПВ)* некоторой *Функциональной Зависимости (ФЗ)* из заданного множества других *ФЗ*, ради которых в [12] был задуман цикл статей, решающих следующие задачи ...

ПВ ФЗ

1. СИНТЕЗ-АНАЛИЗ *последовательностей вывода функциональных зависимостей* [12]
2. *Перестройка порядков каскадно упорядоченного множества* [13]
3. *Гигиена последовательностей вывода* настоящая работа
4. *Алгебраический вывод функциональных зависимостей* продолжение

© Поморцев Л.А., Цурков В.И., 2021

Задача 3 формализует отладку **ПВ** как программы. Однако **ПВ** не пользуется командами передачи управления и в широком смысле программой не является. Поэтому термин *Отладка* заменён словом *Гигиена*. Это более соответствует намерению наведения чистоты и порядка в **ПВ** и гигиенические акты, описанные в настоящей работе, сводятся к выносу из неё мусора и в ряде случаев к перестройке в ней интерьеров, обеспечивающих спрямление алгоритмов **ПВ**. Проблема принципиальна, серьёзна и решается с соблюдением Функциональной Эквивалентности (**ФЭ**) [Опр.7, стр.39] промежуточных состояний **ПВ** в три этапа:

ФЭ

- ❶ консолидация повторов **ФЗ** в **ПВ** за счёт повторного использования первой из них, что ведёт к исходящему гнездованию в выводе. Корректное удаление прочих **ФЗ** повтора не представляет трудностей; $\Leftarrow$ Лемма 3(3), стр.47
- ❷ представление (декомпозиция) **ПВ** в виде дерева с *ветвями*, образованными **АР**-выводами; $\Leftarrow$ Опр.*8 [стр.42] и Теорема 3, стр.50
- ❸ принуждение **ПВ** к **ALT**-стилю $\{\{ [11, 06зн.12, стр.66] \text{ и } [Обзн.4, стр.40] \}\}$, в котором константы и выводимые **ФЗ** чередуются в порядке следования.

$\Leftarrow$ Опр.16 [стр.53] и Теорема 4, стр.53

Пункт ❸ является итогом настоящей работы, который необходим для завершения исследований в задаче 4, где чередующиеся **ПВ** будут преобразованы в алгебраические выражения в специально построенной **D**-алгебре.

Настоящая и последующие статьи являются продолжением [12] и [13], которые, кроме прочего, устанавливают необходимые здесь и везде методологию математических исследований, терминологию, а также первичные для данной статьи понятия и утверждения. Это позволяет незамедлительно приступить к продолжению разработки запланированных тем.

1. Аксиома накопления [12, раздел 2.5 «Аксиомы вывода», табл.2, стр.163]

Обозначения 1 **F** и **B** аксиомы вывода

$$\mathbf{F} := \{\mathbf{F1}, \mathbf{F2}, \mathbf{F3}, \mathbf{F4}, \mathbf{F5}, \mathbf{F6}\}$$

$$\mathbf{B} := \{\mathbf{B1}, \mathbf{B2}, \mathbf{B3}\}$$

$$\mathbf{B12} := \{\mathbf{B1}, \mathbf{B2}\} = \mathbf{B} \setminus \{\mathbf{B3}\}$$

$$\mathbf{FB} := \mathbf{F} \cup \mathbf{B}$$

$$\mathbf{B23} := \{\mathbf{B2}, \mathbf{B3}\} = \mathbf{B} \setminus \{\mathbf{B1}\}$$

$$A, B, C, \dots, X, Y, Z$$

$\Leftarrow$ произвольные множества

$$\text{Напомним определение аксиомы } \mathbf{B2} : X \rightarrow (Y \cup Z) \text{ и } Y \rightarrow U \Rightarrow X \rightarrow (Y \cup Z \cup U)$$

Термины 1 **B2**-аксиомы

1)

Произвольность X, Y, Z, U позволяет записать аксиому накопления **B2** в виде:

$$\left. \begin{array}{l} \{A \rightarrow B, C \rightarrow D\} \mid B \supseteq C \Rightarrow A \rightarrow (B \cup D) \\ \Psi := A \rightarrow B - \text{мама} \mid A - \text{наследство} \mid \Phi \multimap \Psi := \{\Psi, \Phi\} \mid \Phi^H \subseteq \Psi^K \\ \Phi := C \rightarrow D - \text{папа} \mid \text{мама} \multimap \text{папа} \mid \Psi \multimap \Phi := \Phi \multimap \Psi \end{array} \right\} \quad (1)$$

$\mathbf{NB}^1$ наследство A дитя $A \rightarrow (B \cup D)$ получает от мамы $\Psi := A \rightarrow B$

Ниже на примере **F5** показана взаимозависимость отдельных аксиом вывода:

$$\begin{array}{l} \mathbf{NB}^2 \quad \mathbf{B2} \text{ (накопление)} \text{ и } \mathbf{B3} \text{ (проективность)} \Rightarrow \mathbf{F5} \text{ (транзитивность)} \\ \mathbf{F6} \text{ (псевдотранзитивность)} \Rightarrow \mathbf{F5} \text{ (транзитивность)} \end{array} \mid Z = \emptyset \quad 2)$$

На самом деле перечисленные выше **FB**-аксиомы являются нетрудными следствиями [12, Опр.9 «ФЗ таблицы П», стр.162], что уже отмечалось в третьем

1) 1. **B2** можно и нужно трактовать как одну из конструктивных моделей *Силлогизма*.

2. [12, Обзн.20 «Компоненты ФЗ», стр.162]

2) [12, Обзн.3 «грамматор», стр. 153]

абзаце [12, гл.«Введение»]. Для демонстрации его применения докажем ниже-
следующее утверждение:

Лемма 1 Усечение функциональной зависимости

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow A \rightarrow (B \setminus \check{C}A) \mid A, B \subseteq R$$

Доказательство. Вывод $\Rightarrow$ является следствием аксиомы **F4** (проективность), которая в свою очередь с лёгкостью выводится из [12, Опр.9, стр.162]. Поэтому ограничимся рассмотрением обратного вывода $\Leftarrow$ на базе выбора $T \check{C} A$, произвольного отношения Π и его кортежей π_1 и π_2 , для которых $\pi_1 \vdash A = \pi_2 \vdash A \Rightarrow \Rightarrow \pi_1 \vdash (B \setminus T) = \pi_2 \vdash (B \setminus T)$. Та же **F4** позволяет утверждать $\pi_1 \vdash A = \pi_2 \vdash A \Rightarrow \Rightarrow \pi_1 \vdash T = \pi_2 \vdash T$ поскольку $T \subseteq A$. Теперь воспользуемся слиянием кортежей $\pi_i \vdash U \cup \pi_i \vdash V = \pi_i \vdash (U \cup V) \mid \{i \in \{1, 2\} \text{ и } U, V \check{C} R\}$ для получения требуемого результата.

2. Управление функциональными зависимостями

2.1. Неалгоритмический вывод функциональных зависимостей

Определение 1 Замкнутость множества ф.зависимостей

Будем говорить, что множество ф.зависимостей $\mathbb{F} \mid \mathbb{F} \check{C} 2^R \rightarrow 2^R$ замкнуто или, что то же самое, устойчиво относительно **E** $\mid \mathbb{E} \check{C} \mathbb{F}\mathbb{B}$, если применение аксиом **E** к ф.зависимостям из $\mathbb{F}$ даёт снова ф.зависимости из $\mathbb{F}$.

Определение 2 $\mathbb{F}^{\mathbb{E}}$ — замыкание $\mathbb{F}$ аксиомами из **E**

Замыканием $\mathbb{F}^{\mathbb{E}}$ множества $\mathbb{F}$ аксиомами из **E** назовём множество **ФЗ** наименьшее из замкнутых относительно **E** множеств, содержащих $\mathbb{F}$

$\mathbb{N}\mathbb{B}$ [1, §10.4, стр.405] и [6, §4.3, стр.57] ↔ первоисточники

Определение 2 допускает дуальную формулировку: $\mathbb{F}^{\mathbb{E}}$ является максимальным множеством **ФЗ**, выводимых из $\mathbb{F}$ с помощью аксиом **E** $\mid \mathbb{E} \check{C} \mathbb{F}\mathbb{B}$

Следствия 0-2: ❶ $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}^{\mathbb{F}} \equiv \mathbb{F}^{\mathbb{F}\mathbb{B}} \equiv \mathbb{F}^{\mathbb{B}}$ ❷ $\mathbb{F}^{\mathbb{B}1} \equiv \mathbb{F} \cup \{A \rightarrow A \mid A \subseteq R\} \equiv \mathbb{F} \cup \emptyset^{\mathbb{B}1}$ $\mathbb{F}^{\mathbb{F}\mathbb{B}} \mathbb{F}^{\mathbb{B}1}$
❸ $(A \rightarrow B)^{\mathbb{B}2} \equiv A \rightarrow B \mid A, B \check{C} R$

Продолжим ретроспекцию результатов **ТРБД**, относящихся к функциональным зависимостям, на которую будем смотреть через призму алгебраизации их вывода из заданного (конечного) множества $\mathbb{F}$ ф.зависимостей. Следующее определение выражает понятие **E-вывода** ф.зависимости $X \rightarrow Y$ из множества $\mathbb{F}$ через его замыкание [6, §4.3, стр.57]:

Определение 3 Выводимость **ФЗ** из множества **ФЗ**

$$\{\{X \rightarrow Y \text{ E-выводима из } \mathbb{F}, \text{ если } (X \rightarrow Y) \in \mathbb{F}^{\mathbb{E}}\}\} =: \mathbb{F} \stackrel{\mathbb{E}}{\Rightarrow} X \rightarrow Y =: X \rightarrow Y \stackrel{\mathbb{E}}{\Leftarrow} \mathbb{F} \quad 3)$$

$$\mathbb{F} \stackrel{\mathbb{F}\mathbb{B}}{\Rightarrow} X \rightarrow Y := \mathbb{F} \stackrel{\mathbb{F}\mathbb{B}}{\Rightarrow} X \rightarrow Y \text{ — индифферентная выводимость} \quad 4)$$

Из [12, Опр.10, стр.162] и Опр.3 следует [12, Обзн.8, стр.154]
 $(\mathbb{F} \stackrel{\mathbb{F}\mathbb{B}}{\Rightarrow} X \rightarrow Y) \implies (\mathbb{F} \Rightarrow X \rightarrow Y)$

или то же, но словами:

Если ф.зависимость $X \rightarrow Y$ выводится из $\mathbb{F}$, **то** $\mathbb{F}$ влечёт за собой $X \rightarrow Y$.

Большим достижением **ТРБД** является нижеследующая Теорема 1 об эквивалентности вывода $\Rightarrow$ и следования $\Rightarrow$. Её изложение в [6] одновременно опре-

3) Общим назначением группирующих скобок $\{\{ \}$ является придание простого статуса сложным предикатам-высказываниям. $\{\{ \}$

4) indifferens — (лат.) не имеющий отличия, безразличный

деляет понятие полноты, включает в себя предыдущее утверждение и обратное к нему:

Теорема 1 Система аксиом вывода $\mathbf{F} := \mathbf{F1} \div \mathbf{F6}$ – полна [Армстронг]

Φ .зависимость $X \rightarrow Y$ **выводится** из $\mathbf{F}$, **тогда и только тогда, когда** $\mathbf{F}$ **влечёт** за собой $X \rightarrow Y$. Символически это утверждение записывается короче:

$$(\mathbf{F} \Rightarrow X \rightarrow Y) \iff (\mathbf{F} \Rightarrow X \rightarrow Y)$$

Доказательство Теоремы 1 можно почерпнуть в [6, §4.4, Теорема 4.1, стр.58], где она сформулирована как в заголовке, что не меняет сути дела.

2.2. Алгоритмический вывод функциональных зависимостей

Обозначения 2 Формальности

(1) Предикат ВОЛИ ОПЕРАТОРА

БезГлагольный и **безАргументный** предикат, исполняющий *Волю оПератора*, обозначим словом **ВоП**. Это позволит особе, приближённой к Императору, выбрать элемент x в множестве X и записать его в виде **ВоП** $| x \in X$, соответствующем [12, Обозначению 7 «Кванторы...», стр.154].

(2) Аргументы Аксиомы Вывода (АВ) [12, р.2.5 «Аксиомы вывода», стр.162]

АВ(Φ, Ψ) $\Rightarrow$ результат применения аксиомы вывода **АВ** к $\Phi, \Psi \in 2^R \rightarrow 2^R$

Если **АВ** унарна или нульарна, то соответственно

АВ(Φ) $\doteq$ **АВ**(Φ, Ψ) или **АВ**() $\doteq$ **АВ**(Φ, Ψ) $\Rightarrow$ потеря аргументов

Нетрудно видеть, что получение усеченной функциональной зависимости в Лемме 1 [стр.36] для $\Rightarrow$ и $\Leftarrow$ дважды подпадает под действие определения 4, в котором $\mathbb{P} \subset 2^R \rightarrow 2^R$ – множество **ФЗ** над схемой R . $\Rightarrow \mathbb{P}$ – конечно.

Определения 4 Последовательность Вывода из $\mathbb{P}$ (ПВ) [6, §4.5, стр.59]

(1) Упорядоченное расширение $\mathbb{P}$ делает его *последовательностью вывода* $\mathcal{F}$,

если каждая функциональная зависимость в $\mathcal{F}$...

либо является членом $\mathbb{P}$,

либо выводится из предыдущих **ФЗ** в $\mathcal{F}$ с помощью какой-либо **ФВ**-аксиомы.

(2) Элементы из $\mathbb{P}$ будем называть *константами*.

(3) Состав **ПВ** обозначим двойной записью $\|\mathcal{F}\| := \mathbf{F} \{ \Rightarrow \mathbb{P} \subseteq \mathbf{F} \doteq \|\mathcal{F}\| \subseteq 2^R \rightarrow 2^R \}$. Зависимость $\mathcal{F}$ от $\mathbb{P}$ запишем в виде $\mathcal{F}(\mathbb{P}) := \mathcal{F}$.

ВВ $\mathcal{F}$ суть кортеж [12, Обзн.12 «Кортеж», стр.154], **ФЗ** которого задаются рекуррентно **ВоП** $| \{ \mathcal{F}_0 \in \mathbb{P} \text{ и } \mathcal{F}_k \in \{ \in \mathbf{FV} [\in \mathcal{F} [0, k[, \in \mathcal{F} [0, k[] \} | k \in 1 + \mathbb{Z}^+ \} \}$.⁵⁾

Предикат **ВоП** на самом деле является программистом, извлекающим программный продукт $\mathcal{F}$ из небытия. В частности в каждой итерации формирования **ПВ** им извлекается аксиома $\in \mathbf{FV}$ из полного их состава **ФВ**, действие которой на аргументы описано в Обзн.2(2).

$\Leftarrow$ Определение 4 допускает *повторы* **ФЗ** в $\mathcal{F}$. Это обстоятельство является большим препятствием на пути решения задачи алгебраизации **ПВ**. Его преодоление начинается в Опр.11(1) [стр.44] с осмысления этого явления и через Опр.14 [стр.47] проходит через всю настоящую статью.

Обозначения 3 Каскад порядков вывода [13, Обзн.7 «Графы»; гл.4 «КУМ»]

(1) Последовательность вывода $\mathcal{F}$ является «*двухцветным*» графом [см. п.(4)]

$\rightarrow$ Ребро пошагового формирования; $\{ \mathbf{F}, \rightarrow \}$ $\Rightarrow$ граф следования

$\Rightarrow$ Ребро вывода; $\{ \mathbf{F}, \Rightarrow \}$ $\Rightarrow$ граф вывода

⁵⁾ $\mathcal{F} [0, k[$

$\Rightarrow$ начальный отрезок $\mathcal{F}$ длиной k . Подробнее см. в Обзн.7 [стр.45]

- Операция $\rightarrow$ формирования (следования) $\mathcal{P}$ производит из некоторых предыдущих по времени (следованию) $\Phi\mathbf{З}$ новую $\Psi \mid \Psi \in \mathbb{F}^{\mathbf{FB}} \mid \mathbb{F} \subseteq 2^R \rightarrow 2^R$ и ставит её в конец $\mathcal{P}$ по правилам Опр.4 ⟨1⟩ [стр.37].
Смысл знака $\rightarrow$ включает в себе $\mapsto$, то есть событие перехода от одного объекта (или состояния) к другому. [12, Обзн.28 «событие...», стр.167].
- Знак $\Rightarrow$ может быть частью входящего гнезда подобных знаков в графе $\{\mathbb{F}, \Rightarrow\}$ поэтому в общем случае с ним не может быть связан переход во времени $\mapsto$ к локальному результату вывода.
- ↔ Φ в выводе Ψ может не участвовать в ситуации $\Phi \rightarrow \Psi$
- ⟨2⟩ Последовательность вывода $\mathcal{F}$ имеет две *структуры упорядочения*:
 $=\rightarrow$ Линейный порядок формирования (следования); $\min =\rightarrow \max$
 $=\Rightarrow$ Частичная упорядоченность вывода $\Phi\mathbf{З}$; $\min =\Rightarrow \max$
 Упорядоченность $=\rightarrow$ задана непосредственно определением 4. Принцип получения упорядоченности $=\Rightarrow$ из рёбер $\Rightarrow$ и обратно описан в [12, Кнст.1 ⟨4⟩ «Ядро», ⟨5⟩ «расширения», стр.168 и Трм.2 «восстановление», стр.171]⁶⁾. На этой основе в Опр.10 ⟨1⟩ [стр.44] констатирована связь между ними. Обратные преобразования для $=\rightarrow$ и $=\Rightarrow$ установлены Теоремой 2 «Алгебраическое восстановление частичного порядка из его ядра» в [12, стр.171].
- ↗ В абстрактном графе порядка $\{\mathbb{G}, \lessdot\}$ среди вершин $\in \mathbb{G}$ нет повторов, поэтому переход типа $\lessdot^+ = \leq$ [12, Теорема 2], к которому относится связь между $\Rightarrow$ и $=\Rightarrow \mid \doteq \Rightarrow^+$, в нашем случае не возможен без оговорок. Временное решение этого вопроса предлагается в Опр.11 [стр.44]. Постоянное решение даётся Леммой 3 [стр.47]. До Опр.11 будем предполагать отсутствие повторов $\Phi\mathbf{З}$ в **ПВ** $\Rightarrow$ это неудобно, но терпимо. ↗
 Для $=\rightarrow$ и $=\Rightarrow$ в **ПВ** без повторов справедливы свойства отношений порядка:
Р рефлексивность $\Rightarrow$ это понятно без слов;
А антисимметричность $\Rightarrow$ обеспечивается встроенностью $\Rightarrow$ в $=\rightarrow$;
Т транзитивность $\Rightarrow$ по построению того и другого.
- NB Свойство $\{\{\Phi \Rightarrow \Psi \Rightarrow \Phi \Rightarrow \Psi\}\}$ делает последовательность вывода *Каскадно Упорядоченным Множеством (КУМ)*, что является предметом задачи 2 гл. Введение. [13, Опр.4 «Каскады частичных порядков», стр.107] КУМ
- ⟨3⟩ $\mu(M)$ – *мощность множества M*; $\mu()$
Определение 5 Множество M назовём *нёмощным*, если $\mu(M) \leq 1$.
 Прочие множества будут называться *мощными*.
- ⟨4⟩ Структуры последовательности вывода
 $\mathcal{F} := \{\mathbb{F} \{ \rightarrow =\rightarrow \} \{ \Rightarrow =\Rightarrow \} \}$ $\Rightarrow$ сборка последовательности вывода
 $\mu(\mathcal{F}) - 1 =$ номер последней $\Phi\mathbf{З}$ в $\mathcal{F}$ $\Leftarrow$; $0 =$ номер начальной $\Phi\mathbf{З}$ в $\mathcal{F}$
 * $\vec{\mathbb{F}} := \{\mathbb{F}, \rightarrow\} := \mathbb{F}_0 \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{F}_{\mu(\mathbb{F})-1}$ $\Rightarrow$ орграф следования $\Phi\mathbf{З}$
 $\{\mathcal{F}, \Rightarrow\} := \{\vec{\mathbb{F}}, \Rightarrow\}$ $\Rightarrow$ орграф [2, стр.16 и 53] вывода $\Phi\mathbf{З}$
 $\mathbb{F}_i \doteq \vec{\mathbb{F}}_i \doteq \mathcal{F}_i \mid i \in [0, \mu(\mathbb{F})[$ $\Rightarrow$ функциональные зависимости вывода
 $\|\mathcal{F}\| \doteq \mathbb{F} = \{\mathcal{F}_i \mid i \in [0, \mu(\mathcal{F})[$ $\Rightarrow$ все $\Phi\mathbf{З}$ последовательности вывода $\mathcal{F}$
 $\{\mathcal{F}, =\rightarrow\} := \{\mathbb{F}, =\rightarrow\}$ $\Rightarrow$ **ЛУМ**⁷⁾ формирования $\Phi\mathbf{З}$ ЛУМ
 $\{\mathcal{F}, =\Rightarrow\} := \{\mathbb{F}, =\Rightarrow\}$ $\Rightarrow$ **ЧУМ**⁸⁾ вывода $\Phi\mathbf{З}$ ЧУМ
- ⟨5⟩ Экстремумы последовательности вывода
 $\min^{\rightarrow} \mathcal{F} := \min \{\mathcal{F} \rightarrow\} = \mathcal{F}_0$ $\Rightarrow$ НАЧАЛО **ПВ**

⁶⁾ Кнст. $\Rightarrow$ сокращение от «Конструкция» • см. далее Опр.12 ⟨4⟩ [стр.45]

⁷⁾ **ЛУМ** $\Rightarrow$ Линейно Упорядоченное Множество [13, Опр.3, стр.103]

⁸⁾ **ЧУМ** $\Rightarrow$ Частично Упорядоченное Множество [13, Опр.2, стр.102]

$$\begin{aligned}
\max^{\rightarrow} \mathcal{F} &:= \max\{\mathcal{F} \Rightarrow\} = \mathcal{F}_{\mu(\mathcal{F})-1} && \text{☞ КОНЕЦ ПВ} \\
\min \mathcal{F} &:= \min^{\Rightarrow} \mathcal{F} := \min\{\mathcal{F} \Rightarrow\} && \text{☞ ВХОД в ПВ} \\
\max \mathcal{F} &:= \max^{\Rightarrow} \mathcal{F} := \max\{\mathcal{F} \Rightarrow\} && \text{☞ ВЫХОД из ПВ}
\end{aligned}$$

2.3. Функциональная Эквивалентность последовательностей вывода (ФЭ)

Термины 2 Потенция ФЗ в последовательности вывода $\mathcal{F}$

Активность — ФЗ используется для вывода следующих за ней ф.зависимостей.

$$A(\mathcal{F}) := \bigcup_{\Psi \in \mathcal{F}} \Psi \Leftarrow \neq \quad 9) \quad \text{☞ все активные члены } \mathcal{F}$$

Пассивность — ФЗ выводится из предшествующих ей ф.зависимостей.

$$P(\mathcal{F}) := \bigcup_{\Psi \in \mathcal{F}} \Leftarrow \neq \Psi \quad 9) \quad \text{☞ все пассивные члены } \mathcal{F}$$

Бездействие — изолированные ФЗ $\doteq$ не активность -и- не пассивность

Активность-и-Пассивность — состояние, определяющее так называемые “внутренние” ФЗ

Определения 6 Классификация ФЗ в последовательности вывода $\mathcal{F}$

$\gg \mathcal{F} := \text{ind } A(\mathcal{F}(P)) \mid \mathbb{F}(\mathcal{F}) \subseteq P$	множество используемых констант в выводе $\mathcal{F}$. ФЗ активные-и-непассивные в $\mathcal{F}$ [6, Опр.4.4, стр.60]
$\mathcal{F} \gg := \text{ind } P(\mathcal{F}(P))$	результат вывода последовательностью $\mathcal{F}$. ФЗ не активные-и-пассивные в $\mathcal{F}$ [Опр.4 <2> [стр.37]]
$\ \mathcal{F}\ \setminus (\gg \mathcal{F} \cup \mathcal{F} \gg)$	множество выводимых и используемых ФЗ в $\mathcal{F}$. ФЗ активные-и-пассивные в $\mathcal{F}$

NB ❶ $\gg \mathcal{F} \doteq \mathcal{F} \gg$ и $\ll \mathcal{F} \doteq \mathcal{F} \ll$; ❷ Равенство $P = \gg \mathcal{F}$ не исключается

⚡ Включения типа $\Theta \in (\|\mathcal{F}\| \setminus \{\Theta\})^{\text{FB}} \mid \Theta \in \|\mathcal{F}\|$ возможны и могут, в частности, указывать на присутствие выводимых ФЗ среди констант и наоборот.

Определение 7 $\doteq$ символ ФЭ [12, Обзн.1 «тоже, что», стр.153]

(1) $\doteq := \doteq \cup \text{ФЭ}$ ☞ расширение понятия “тоже, что” его переопределением.

Ранее символ $\doteq$ констатировал эмпирическое совпадение сущностей. Добавление к нему новой функции, не противоречит здравому и в том числе прежнему смыслу. Примером этому служит определение (2) .

(2) С помощью Опр.6 выразим ФЭ для $\mathcal{F}(P)$ и $\mathcal{G}(\mathbb{R})$: [Опр.4 <2>, стр.37]

$$\{\mathcal{F} \doteq \mathcal{G}\} \doteq \{\mathcal{F} \gg = \vec{\mathcal{G}} \gg\} \quad (2)$$

Термин 3 Эквивалентность $\doteq$ “Чёрный ящик” [Обзн.9, стр.46]

$$\{\mathcal{F} \doteq \mathcal{G}\} \doteq \{\mathcal{F} \doteq \mathcal{G} \text{ и } \gg \mathcal{F} = \gg \mathcal{G}\}$$

Чёрный ящик это произвольный выбор из класса эквивалентности $\doteq$. ¹⁰⁾

На самом деле этим термином можно называть классы эквивалентности $\doteq$.

Мы будем варьировать этим по обстоятельствам.

Усиление регламентации вывода ФЗ будет связано с их ФЭ-преобразованиями, обеспечивающими переходы из одного стиля к следующему, представленных ниже:

Обозначения 4 Стили Вывода (СВ)

⁹⁾ $\Psi \Leftarrow \neq := (\Psi \Leftarrow =) \setminus \{\Psi\}$ и $\Leftarrow \neq \Psi$ ☞ конусы без опоры [13, Терм.2 «конусы с опорой», стр.104]

¹⁰⁾ Пример Чёрного ящика — радиоприёмник: (Основной пример см. в гл.3 [стр.41])
Принимает радиоволны, выдаёт звук, а внутренность пользователю неинтересна.

Обозначение 6 *Рефлексия*: $\overline{W} := W \rightarrow W \mid W \subseteq R$ [12, Табл.1, стр.162]

$$\begin{array}{c} \textcircled{\text{F3}} \text{ Аналогично} \\ \text{F3 через} \\ \text{B-аксиомы:} \end{array} \left\| \begin{array}{c} \text{B1} \\ \Rightarrow \overline{X} \end{array} \left| \begin{array}{c} \text{B2} \Downarrow \\ \Rightarrow X \rightarrow (X \cup Y) \end{array} \right| \begin{array}{c} \text{B3} \Downarrow \\ \Rightarrow X \rightarrow (X \cup Y \cup Z) \end{array} \right. \Rightarrow X \rightarrow (Y \cup Z) \Rightarrow \times$$

Надо полагать близость понятий $\{\Rightarrow \Rightarrow\}$, их тесное взаимодействие и конструктивность вывода $\Rightarrow$ позволит со временем расширить перечень механизмов *Силлогизма* и представления об его устройстве [см. прим.¹⁾, стр.35]. В слабое оправдание сказанного продемонстрируем сочетание [12, Обзн.20, стр.162] и Определение [3, стр.36] с логическим разветвлением:

$$\left. \begin{array}{l} \text{B2} \\ \{\Psi, \Phi\} \Rightarrow \Theta \Rightarrow \Psi^K \cup \Phi^K = \Theta^K - \text{накопление} \\ \Downarrow \\ \Psi^H = \Theta^H \text{ или } \Phi^H = \Theta^H - \text{наследство} \end{array} \right\} \quad (3)$$

3. Постановка задачи алгебраизации вывода

Аксиомы Вывода (**AB**) являются логическим инструментарием преобразований ф.зависимостей. За ними мы оставим устоявшуюся на текущий момент терминологию, но понятие вывода приводит к их алгоритмическому толкованию. В этом смысле **AB** играют роль команд некоторого умозрительного автомата, а правильнее сказать Вычислительной Машины (**BM**). Из **AB** строятся *Последовательности Вывода* (**ПВ**) [Опр.4, стр.37], представляющие собою управленческие $\{\Rightarrow \text{ традиционные}\}$ алгоритмы [13, В Теор.1 «Шпильрайн», стр.108] решения задачи (мы совмещаем понятия алгоритм и программа), в которых **AB** линейно упорядочены, а вывод **F3** из заданного множества ф.зависимостей $\mathbb{F}$, является вычислительным процессом, реализующим **AB** во времени. Необходимо понимать, что связи вывода, ведущие к исполнению **AB** задают в **ПВ** частичное упорядочение, согласованное с порядком следования в соответствии с упомянутым выше [13, Опр.4 «Каскады частичных порядков», стр.107].

Синонимы: аксиома вывода (**AB**), правило вывода, команда **FB**-автомата (вычислительной машины), **FB**-команда.

$$\{\mathbf{AB}\} \doteq \{\mathbf{F}\text{-команда}\} \cup \{\mathbf{B}\text{-команда}\} \doteq \{\mathbf{FB}\text{-команда}\} .$$

При этом вывод из $\mathbb{F}$ некоторой ф.зависимости $A \rightarrow B$ можно осуществить многими способами, поэтому [Обзн.5, стр.40] выражение $\{\mathbb{F} \Rightarrow A \rightarrow B\}$ является Чёрным ящиком [Терм.3, стр.39], состоящим из *Функционально Эквивалентных (ФЭ)* последовательностей вывода [Опр.7, стр.39], то есть программ решающих одну и ту же задачу с точки зрения пользователя, которому не интересно вникать в вопрос “**Как** сделана программа?”, но которому важно знать “**Что** умеет делать программа?”. В смысле ответа на последний вопрос программа представляет собою образ функции, преобразующей характерные для неё данные в некоторые другие, также характерные для неё. И, разумеется, разные программы, реализующие одну и ту же функцию преобразования данных, естественно отождествить и назвать их *функционально эквивалентными*. В данном случае речь идёт о выводе зависимости $A \rightarrow B$ из зависимостей, лежащих в $\mathbb{F}$. Этот взгляд на **AB** будет основным в настоящей работе, до тех пор пока мы плавно не перейдём к их алгебраической трактовке.

Лемма 2 *Системы аксиом Армстронга $\{\mathbf{F1}, \mathbf{F2}, \mathbf{F6}\}$ и B-аксиом **B** — эквивалентны . $\Rightarrow$ система $\mathbf{B} := \{\mathbf{B1}, \mathbf{B2}, \mathbf{B3}\}$ — полна [6, §4.5, стр. 60]*

Полнота **B**-аксиом в сочетании с условием $\mathbb{F} \Rightarrow A \rightarrow B$ или, что то же самое $\mathbb{F} \Rightarrow A \rightarrow B$ $\{\Leftarrow$; Теорема 1 [стр.37] $\}$, приводит к возможности **B**-вывода $A \rightarrow B$ из $\mathbb{F}$. Однако этого нам мало. Продвигаясь вперёд по пути регламентации вывода, введём определением 8 так называемые ¹¹⁾ **РАР**-последовательности [6, п.4.5.1, стр.61]:

Определение 8 **РАР**-последовательностью вывода $\mathcal{P}$

... зависимости $A \rightarrow B$ из $\mathbb{F}$ называется **B**-вывод, удовлетворяющий следующим условиям: [6, п.4.5.1, стр.61]

- $\langle 0 \rangle \mathcal{P}_0 := \bar{A}$ — начальная **ФЗ** в **B**-выводе; [Обзн.6 «Рефлексия», стр.41]
- $\langle 1 \rangle \mathcal{P}_{\mu(\mathcal{P})-1} := A \rightarrow B$ — последняя **ФЗ** в **B**-выводе;
- $\langle 2 \rangle$ каждая ф.зависимость, отличающаяся от первой или последней, либо принадлежит $\mathbb{F}$, либо имеет вид $A \rightarrow \bar{C}R$ [12, Обзн.6 «произвольный выбор», стр.154] и получена с помощью аксиомы **B2** (накопление).

С точки зрения [6] ценность Опр. 8 заключена в следующем утверждении:

Теорема 2 **РАР**-редукция вывода

Пусть $\mathbb{F}$ — множество ф.зависимостей. Если зависимость $X \rightarrow Y$ выводима из $\mathbb{F}$, то существует **РАР**-последовательность вывода $X \rightarrow Y$ из $\mathbb{F}$

⚡ Теорема 2 совпадает с [6, Теорема 4.2, стр.62]. Нам, к сожалению, не удалось передоказать её, чего она заслуживала бы. На самом деле она ценна угадыванием направления исследований в непознанной пока области математики — **ТРБД**.

Вместо неё мы предлагаем Теорему 3 [стр.50], которой воспользуемся для алгебраической интерпретации аксиом вывода, лежащей в основе эффективного вычисления замыкания $\mathbb{F}^{\mathbf{FB}}$. Она исходит из Определения *8, в котором по сравнению с Опр.8 требование $\langle 0 \rangle$ наличия начальной рефлексии отсутствует. Заметим, что упомянутая выше Трм.3 ¹²⁾ «**АР**-декомпозиция плотного **B12**-вывода» раскрывает причину недееспособности доказательства Теоремы 2.

Определение 9 Однотипность последовательности вывода $\mathcal{P}$

$\mathcal{P}$ однотипна, если у всех её строго-выводимых **ФЗ** совпадают начальные под-схемы $\doteq \mu\{(\mathcal{P} \setminus \mathbb{F}^{\mathbf{B1}})^H\} \leq 1$ [12, Обзн.20, стр.162] и [След. о-2 **2**, стр.36]

Определение *8 **АР**-последовательность вывода $\mathcal{P}$

удовлетворяет

следующим условиям:

- $\langle 1 \rangle \mathcal{P}$ является *однотипной* последовательностью **B**-вывода [Опр.9, стр.42]
- $\langle 2 \rangle$ Аксиомы **B3** (проективность) используются только в конце вывода
- NB** Ввиду элементарного равенства $(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z)$ требование $\langle 2 \rangle$ можно сделать жёстче: [12, Обзн.2, стр.153] и [Опр.5, стр.38]
- $\langle 2 \rangle := \{ \{ \langle 2 \rangle \} \text{ и } \{ \text{Множество аксиом } \mathbf{B3} \text{ в } \mathcal{P} \text{ неможно, то есть } \mu\{\mathbf{B3} \mid \in \mathcal{P}\} \leq 1 \} \}$

Sic! Из приведённых выше правил вывода **F** и **B** видно, **AB** по сути являются алгебраическими операциями, заданными на множестве ф.зависимостей $2^R \rightarrow 2^R$. Это в равной степени относится к квазиунарным операциям **F2**,

F2	$X \rightarrow Y \text{ и } Z \rightarrow V \Rightarrow X \cup Z \rightarrow Y$	операция пополнения ¹³⁾
F4/B3	$X \rightarrow Y \text{ и } Z \rightarrow V \Rightarrow X \rightarrow Y \setminus V$	операция проектирования
B2UF6	$X \rightarrow Y \text{ и } Z \rightarrow V \Rightarrow X \cup (Z \setminus Y) \rightarrow Y \cup V$	операция полного накопления

¹¹⁾ По первым буквам названия **B**-аксиом:

[6, прим.¹], стр.61]

Reflexivity, Accumulation, Projectivity

¹²⁾ Трм. $\Rightarrow$ сокращение от «Теорема»

[см. прим.⁶], стр.38]

¹³⁾ Списки **AB** см. в [11, § 2.2. «Аксиомы вывода», стр.63] и

[12, Табл.1 «F-аксиомы», стр.162 и Табл.2 «B-аксиомы», стр.163]

Рефлексивность **F1/B1** можно трактовать как нульарную операцию, действие которой подчинено случаю или, напротив, преднамеренному выбору. Правило вывода **B2UF6**, которое будет обосновано в рамках задачи 4. «Введение», ранее не встречалось нам. Упоминание о нём без должных предыстории и развития можно найти в [1, §10.4, стр.406]. Вместе с тем **B2UF6**, являясь важной предпосылкой получения целевого результата, алгебраически интерпретирует **B2** и **F6**. В задаче 4. «Введение» она обозначена символом $\blacktriangleright$, с помощью которого **B2UF6** приобретает знакомый для операций вид

$$(X \rightarrow Y) \blacktriangleright (Z \rightarrow V) := X \cup (Z \setminus Y) \rightarrow Y \cup V,$$

от которого можно с легкостью вернуться к аксиомам вывода:

$$\begin{array}{l} \underbrace{\left(\begin{array}{l} Z \subseteq Y \Rightarrow Z \setminus Y = \emptyset; \quad Z \setminus Y = \emptyset \Rightarrow (X \rightarrow Y) \blacktriangleright (Z \rightarrow V) = X \rightarrow Y \cup V \quad \text{— аксиома B2} \\ ((X \rightarrow Y) \blacktriangleright (Y \cup Z \rightarrow V)) \cup ((Z \cap Y) \rightarrow \emptyset) \setminus (\emptyset \rightarrow (Y \setminus V)) \equiv (X \cup Z) \rightarrow V \quad \text{— аксиома F6} \end{array} \right)}_{\substack{\text{пополнение F2} \quad \text{проективность F4/B3}}} \quad (4) \end{array}$$

В алгебраической природе **AB** кроется возможность $\Phi\Xi$ -замены вольно написанных программ вывода, то есть элементов множества $\{F \Rightarrow A \rightarrow B\}$, регламентированными алгебраическими выражениями, использующими одну из бинарных операций $\blacktriangleright, \triangleright, >$, названных нами в задаче 4. «Введение» операциями *накопления*. Первая из них $\blacktriangleright$, так называемая операция *полного накопления*, алгебраизует правило вывода **B2UF6**. Наиболее логично выглядит средняя:

$$(X \rightarrow Y) \triangleright (Z \rightarrow V) := (X \cup (Z \setminus Y)) \rightarrow (Y \cup (V \setminus X))$$

Операция $>$ носит вспомогательный характер.

ДЕКЛАРАЦИЯ: Целью цикла статей, перечисленных в гл. Введение является замена **FB**-алгоритмов вывода ф.зависимостей функционально эквивалентными ($\Phi\Xi$) им алгебраическими выражениями в **D**-алгебре унарных операций **F1/B1** (рефлексивность), **F4/B3** (проективность), а также одной из бинарных операций $\{\blacktriangleright, \triangleright\}$ накопления типа **B2UF6**, определённых на множестве $2^R \rightarrow 2^R$

Решение поставленной задачи даётся выражением

$$\mathbb{F}^{\{B1, \epsilon, B3\}} \equiv \mathbb{F}^{FB} \mid \{ \{ \epsilon \in \{ \triangleright \blacktriangleright \} \text{ и } F \subseteq 2^R \rightarrow 2^R \} \}, \quad (5)$$

позволяющим эффективно вычислять замыкания $\mathbb{F}^{FB}$. Его смысл понятен из Определения 2 [стр.36], но доказательство не просто и даёт решение задачи 4. «Введение». Начало этому процессу заложено упомянутой выше Теоремой 1 (Армстронг) [стр.37] и на протяжении настоящей работы и далее строится последовательность математических алгоритмов, приводящих к алгебраизации вывода функциональных зависимостей.

На их входе и выходе фигурируют предикаты, аппаратом обработки которых являются *Потоки Вывода* (**ВП**) и так называемые *Логические Схемы* (**ЛС**), использующие их, а также Силлогизмы. В целом логические методы цикла работ, упомянутого в гл.1 Введение, составляют предмет так называемой *Пространственной логики*, описанной, пока частично, в [7], [8], [9], [10], [11] и, наконец, в [12, гл.1 «Инструментарий логических схем», стр.153] и [13, гл.2 «Синтез-Анализ логических схем», стр.98]. В данной работе мы их объяснять не будем, но будем пользоваться ими, строя **ЛС** всего лишь из двух пространственных связей

$\Rightarrow$ — импликация и $\mapsto$ — передача управления. *Потоки вывода* используют:
 $\Rightarrow$ — начальная импликация и $\Rightarrow$; $\Rightarrow$ — внутренняя импликация потока.

¹⁴⁾ $\Phi * \Psi := \Phi^H * \Psi^H \rightarrow \Phi^K * \Psi^K \mid * \in \{\cap, \cup\}$

накопление

$\blacktriangleright, \triangleright, >$

накопление

$\Phi\Xi$

ВП ЛС
Силлогизм

$\Rightarrow \mapsto$

4. Сущности вывода ФЗ

Исходя из Опр. 4 [стр.37], в гл.4 и далее вниманию читателя предлагается реализация плана действий, намеченных в преамбуле Обзн.4 «Стили вывода» [стр.39].

4.1. Состав каскада порядков ПВ

Определения 10 *Линейная упорядоченность следования/формирования в $\mathcal{F}$*
 (1) $\Rightarrow$ Упорядоченность Следования/формирования (УС) $\mathcal{F}$ нестрогая:

$$\Rightarrow = \Rightarrow^+ \text{ и } \Rightarrow = \Rightarrow \quad \Leftarrow [12, \text{Кнст.1} \langle 4, 5 \rangle, \text{стр.168 и Трм.2, стр.171}] \quad \Rightarrow \Leftarrow$$

[см. прим.¹²⁾, стр.42]

(2) $\neq \Rightarrow$ УС в $\mathcal{F}$ строгая $:=$ многократное шаговое расширение ребра $\Rightarrow$
 Представление $\mathcal{F}$ в виде линейно-упорядоченного пути вывода позволяет маршрутом неопределённой длины $\mathcal{F}_k \Rightarrow \mathcal{F}_{k+1} \Rightarrow \dots \Rightarrow \mathcal{F}_{l-1} \Rightarrow \mathcal{F}_l \mid k, l \in \mathbb{Z}^+ \mid k < l$ трактовать как строгое отношение линейной упорядоченности $\neq \Rightarrow$ между $\mathcal{F}_k, \mathcal{F}_l \mid \mathcal{F}_k, \mathcal{F}_l \in 2^R \rightarrow 2^R$: $k < l \Leftrightarrow \mathcal{F}_k \neq \Rightarrow \mathcal{F}_l \doteq \mathcal{F}_l \Leftarrow \mathcal{F}_k \Leftrightarrow \mathcal{F}_k \Rightarrow \dots \Rightarrow \mathcal{F}_l$

⚡ $\mathcal{F}_l$ может быть *повтором* $\mathcal{F}_k$ в ребре $[\mathcal{F}_k \neq \Rightarrow \mathcal{F}_l] \mid k < l$, т.е. $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_l$
 Звено расширения $\mathcal{F}$ [Обзн.3 (5), стр.38] $\vec{\mathbb{F}}$: [Опр.14, стр.47]
 $\max \Rightarrow \vec{\mathbb{F}} \Rightarrow \Psi \doteq \Psi \Leftarrow \max \Rightarrow \vec{\mathbb{F}} \doteq (\max \Rightarrow \vec{\mathbb{F}}, \Psi) \mid \Psi \in 2^R \rightarrow 2^R \text{ и } \vec{\mathbb{F}} := \{\mathbb{F}, \Rightarrow\}$ ¹⁵⁾

УС

$\Rightarrow \Leftarrow$

$\neq \Rightarrow \Leftarrow \neq$

$\vec{\mathbb{F}} := \{\mathbb{F}, \Rightarrow\}$

Определения 11 *Индивидуализация $\vec{\mathbb{F}} \mapsto \langle \vec{\mathbb{F}} \rangle$ ф.зависимостей в $\mathcal{F}$* ¹⁶⁾

(1) Любая функция $f: X \rightarrow Y$ является дватрибутной таблицей $\{\{ \text{т.е. 2-арным отношением на домене } \text{dom}(X) \times \text{dom}(Y) \} \text{ со схемой } \langle X, Y \rangle\}$ [12, Опр.5 «Отношение и ...», стр.159]. Для функций использование скобок $\langle \rangle$ существенно и соответствует [12, Обзн.12.2 «...позиционный кортеж», стр.154]. В общих таблицах линейная упорядоченность атрибутов и их доменных значений в кортежах таблиц в отличие от $\langle \rangle$ не требуется, но она может появиться под воздействием дополнительных условий, наложенных на $\{ \}$.

Мораль: $\langle \rangle$ являются частным случаем скобок $\{ \}$. $\vec{\mathbb{F}}$ «ФЗ таблицы ПП»

Атрибут X должен быть ключом. [12, Опр.9, стр.162]

Основой вывода $\mathcal{F}$ является кортеж $\vec{\mathbb{F}} \mid \vec{\mathbb{F}}: [0, \mu(\mathbb{F})[\rightarrow 2^R \rightarrow 2^R$ в соответствии с [12, Обзн.12.1 «кортеж – это отображение», стр.154], хотя в Обзн. 3 (4)* [стр.38] он представлен в виде последовательности. В целях индивидуализации членов $\mathcal{F}$ представим $\vec{\mathbb{F}}$ в виде набора $\langle \vec{\mathbb{F}} \rangle$ строк таблицы функции: $\langle \vec{\mathbb{F}} \rangle := \{ \langle \mathbb{F}_i, i \rangle \mid i \in [0, \mu(\mathbb{F})[\}$. Таким образом получим парадоксальные совпадения $\langle \mathbb{F}_i, i \rangle \doteq \langle \vec{\mathbb{F}}_i, i \rangle \doteq \langle \mathcal{F}_i, i \rangle \doteq \mathcal{F}_i \mid i \in [0, \mu(\mathcal{F})[\{ \Leftarrow \mathcal{F} \doteq \langle \vec{\mathbb{F}} \rangle =: \langle \mathcal{F} \rangle \}$, ведущие к индивидуализации членов $\mathcal{F}$ за счёт связывания каждой ФЗ с её номером в ПВ. Это даёт возможность зависимостям $\in \mathcal{F} \{ \doteq \in \langle \mathcal{F} \rangle \notin 2^R \rightarrow 2^R \}$ самим определять своё место в выводе, хотя вместо $[0, \mu(\mathcal{F})[$ можно ...

использовать элементы любого множества $N \mid \mu(N) = \mu(\mathbb{F})$ (6)
 даже неупорядоченного. Множество N будем называть *номератором*, а его элементы *идентификаторами*. Советом (6) мы будем пользоваться по мере необходимости, пока же примем описанное выше решение о замене $\mathbb{F}_i$ на $\langle \mathbb{F}_i, i \rangle$ вплоть до Леммы 3 [стр.47], где повторы ФЗ в ПВ будут ликвидированы их консолидацией в исходящих гнездах вывода.

(2) **Выявление позиции ФЗ в ПВ**

В выводе $\mathcal{F}$ по номеру (индексу) $i \mid i \in [0, \mu(\mathcal{F})[$ можно однозначно найти

¹⁵⁾ [12, Обзн.12.2 «...позиционный», стр.154]

¹⁶⁾ [12, Обзн.28 «событие...», стр.167] и [Обзн.3 (1), стр.37]

требуемую $\Phi\mathbf{3}$, то есть $\langle \mathcal{F}_i, i \rangle$. В связи с этим в $\langle 2 \rangle$ описывается обратное синтаксическое выражение $\mathbb{N}(\Phi\mathbf{3} \in \text{пв})$:

$$\mathbb{N}(\Theta \in \mathcal{F}) := j \mid \mathcal{F}_j = \Theta \quad {}^{17)} \quad \Leftrightarrow \text{номер } \Phi\text{-зависимости } \Theta \text{ в выводе } \mathcal{F} \quad \mathbb{N}(\dots \in \dots)$$

$$\Phi, \Psi \in \mathcal{F} \Rightarrow \{ \{ \Phi \neq \Psi \Leftrightarrow \mathbb{N}(\Phi \in \mathcal{F}) < \mathbb{N}(\Psi \in \mathcal{F}) \} \}$$

Тавтологии: $\mathbb{N}(\mathcal{F}_j \in \mathcal{F}) = j \mid j \in [0, \mu(\mathcal{F})[$ и $\langle \mathcal{F} \rangle_{\mathbb{N}(\Theta \in \mathcal{F})} = \langle \mathbb{N}(\Theta \in \mathcal{F}), \Theta \rangle$

Sic! Только в случае $\mu(\mathbb{F}) = \mu(\|\langle \mathcal{F} \rangle\|)$ **ЧУМ**-ы $\{\mathbb{F}, \Rightarrow\}$ и $\{\|\langle \mathcal{F} \rangle\|, \Rightarrow\}$ изоморфны, иначе выводы непредсказуемы.

Обозначение 7 Начальные отрезки последовательности вывода $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}[k] := [\mathcal{F}_0 \Rightarrow \mathcal{F}_k] := \mathcal{F}_0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \mathcal{F}_k \quad ; \Rightarrow \quad \mathcal{F} \equiv \mathcal{F}[\mu(\mathcal{F}) - 1]$$

$$\mathcal{F}[\in \mathcal{F}] := \mathcal{F}[\mathbb{N}((\in \mathcal{F}) \in \mathcal{F})] \quad \Leftrightarrow \text{начальный отрезок до } \in \mathcal{F} \quad [12, \text{Обзн.6, стр.154}]$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{F}'[k] := (\mathcal{F}[k])' := \mathcal{F}[k[:= \mathcal{F}[k-1] \\ \mathcal{F}'[\in \mathcal{F}] := \mathcal{F}[\mathbb{N}((\in \mathcal{F}) \in \mathcal{F})[\\ \text{В частности } \mathcal{F}' := \mathcal{F}[\mu(\mathcal{F}) - 2] \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Терминология:} \\ \text{усечение } \mathcal{F}[k] \doteq \\ \doteq \text{отсечение конца отрезка} \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow$$

$$\text{Sic!} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{1} \quad \mathcal{F} \in \{\mathbb{F} \xRightarrow{\text{AP}} \mathcal{F}_{\mu(\mathcal{F})-1}\} \Rightarrow \mathcal{F}' \xRightarrow{\text{B12}} \mathcal{F}'_{\mu(\mathcal{F}')-1} \mid \mu(\mathbf{B3}) = 1 \quad [\text{Опр.*8, стр.42}] \\ \text{2} \quad \mathcal{F}[\mu(\mathcal{F}) - 1 - \mu(\mathbf{B3})] = \mathcal{F}[\mathcal{F}_{\mu(\mathcal{F})-1 - \mu(\mathbf{B3})}] =: \mathcal{F}[\mathbf{B12}] \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{B12-часть} \\ \text{AP-вывода } \mathcal{F} \end{array} \right.$$

Определение 12 Частичная упорядоченность $\Rightarrow$ вывода $\Phi\mathbf{3}$ в $\mathcal{F}$

$\langle 1 \rangle$ Строгий частичный порядок $\neq \Rightarrow$ Φ -зависимостей в $\langle \mathcal{F} \rangle$ определим через маршрут вывода $\Upsilon \in \langle \mathcal{F} \rangle^{\times k} \mid k \in \mathbb{Z}^+ {}^{18)}$, соединяющий концы $\Phi, \Psi \in \langle \mathcal{F} \rangle$:

$$\Phi \neq \Rightarrow \Psi \iff \Phi \Rightarrow \Upsilon_1 \Rightarrow \Upsilon_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \Upsilon_k \Rightarrow \Psi \mid \Upsilon \in \langle \mathcal{F} \rangle^{\times k} \mid k \in \mathbb{Z}^+$$

Метки $?$ в вертикальных выводах Υ_i означают возможное отсутствие Υ на этом месте, что характерно для получения $\Phi\mathbf{3}$ аксиомой $\mathbf{B3}$.

Sic! $\Phi \Rightarrow \Psi \implies \Phi \neq \Rightarrow \Psi \iff$ Определение 4(0) [стр.37]

$\langle 2 \rangle$ Нестрогий порядок вывода в $\langle \mathcal{F} \rangle$ обозначим через $\Rightarrow$

$$\Phi, \Psi \in \langle \mathcal{F} \rangle \implies \{ \{ \Phi \Rightarrow \Psi \Leftrightarrow \Phi = \Psi \text{ или } \Phi \neq \Rightarrow \Psi \} \}$$

Подтвердим формально свойства **РТА** частичного порядка $\Rightarrow$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Р} \quad \text{Рефлексивность:} \quad \text{Возможность истинности отношения} \\ \quad \Phi \Rightarrow \Phi \text{ включена в определение непосредственно.} \\ \text{Т} \quad \text{Транзитивность является следствием возможности последо-} \\ \quad \text{вательного соединения двух маршрутов вывода при усло-} \\ \quad \text{вии совпадения конца первого с началом второго [12, Опр.17} \\ \quad \text{5) «Операция } \cdot \text{», стр.169].} \\ \text{А} \quad \text{Антисимметричность:} \\ \quad \Phi \Rightarrow \Psi \text{ и } \Psi \Rightarrow \Phi \Rightarrow \Phi \Rightarrow \Psi \text{ и } \Psi \Rightarrow \Phi \iff \{ \{ \leftarrow \langle 1 \rangle \text{Sic!} \} \} ; \Rightarrow \Phi = \Psi \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} [12, \text{Опр.18}] \\ \text{«РТСА», стр.169} \end{array} \right\}$$

$$\langle 3 \rangle \{ \{ \Phi \neq \Rightarrow \Psi \Rightarrow \Phi \neq \Rightarrow \Psi \} \} \text{ и } \{ \{ \Phi \Rightarrow \Psi \Rightarrow \Phi \Rightarrow \Psi \} \} \iff \langle 1 \rangle \text{Sic!}$$

$$\langle 4 \rangle \Rightarrow \equiv \Rightarrow^+ \text{ и } \Rightarrow \equiv \Rightarrow \quad {}^{19)} \quad [\text{Обзн.3(2), стр.38}]$$

Sic! $\langle \mathcal{F} \rangle$ является 2-каскадно упорядоченным множеством: $\iff \langle 4 \rangle$

$$\leq^{(0)} := \Rightarrow \text{ и } \leq^{(1)} := \Rightarrow \quad [13, \text{Опр.4 «Каскады ЧП», стр.107}]$$

⚡ Упорядоченности в парах $\{\Rightarrow, \leq^{(0)}\}$, $\{\Rightarrow, \leq^{(1)}\}$ совпадают, но графически разнонаправлены $\Leftrightarrow$ сравни с [13, **NB2** к Обзн.7 «Графы», стр.104]

4.2. Виртуальное обращение связей вывода

Определение 13 *КОНУС ВЫВОДА*

¹⁷⁾ В $\mathbb{N}(\dots \in \dots)$ знак $\in$ используется как мнемонический разделитель, но иногда по смыслу.

¹⁸⁾ маршрут – [12, Опр.17(2) «Маршрут в...», стр.168]; $\times$ – [12, Обзн.13 «(ДП)», стр.155]

¹⁹⁾ [12, Кист.1 (4) «Ядро», (5) «расширения», стр.168 и Трм.2 «восстановление», стр.171]

Последовательность вывода $\mathcal{F}$ назовём *конусом вывода*, если [Опр.6, стр. 39]

$$\gg \mathcal{F} = \min \mathcal{F} \text{ и } \mathcal{F} \gg = \max \mathcal{F}$$

Пример: Рассмотрим входной конус $\mathcal{G} := (\Rightarrow \mathbb{W}) \mid \mathbb{W} \subseteq \mathbb{F} := \|\mathcal{F}\|$. В конусе без опор $\mathcal{G} \setminus \mathbb{W}$ все **ФЗ** активны; $\Rightarrow \mathbb{P} := \gg \vec{\mathcal{G}} = \min \mathcal{G}$; $\Rightarrow \mathbb{P} \xRightarrow{\mathcal{F}} \mathbb{W}$ $\{\{\Rightarrow\}$ обозначение факта вывода внутри $\mathcal{F} \mid \mathbb{P}, \mathbb{W} \subseteq \mathbb{F}\}$ является конусом вывода.

Обозначения 8 Конус вывода $\mathcal{F} \doteq \mathcal{F} \langle \langle \mathbb{P} \rangle \rangle := \mathbb{F} \langle \langle \mathbb{P} \rangle \rangle \mid \mathbb{P} := \min \mathcal{F}$
Результат вывода $\mathcal{F} \langle \langle \mathbb{P} \rangle \rangle := \mathbb{F} \langle \langle \mathbb{P} \rangle \rangle \mid \mathbb{P} := \min \mathcal{F}$

Предлагаемые обозначения предназначены исключительно для конусов вывода. Они в неявном виде содержат в общей сложности три предиката два из Определения 13 и $\mathbb{P} := \min \mathcal{F}$.

$\mathcal{F} \langle \langle \mathbb{P} \rangle \rangle$ и $\mathcal{F} \langle \langle \mathbb{P} \rangle \rangle$, а также их модификации ниже, согласованы с направлением вывода $\min \Rightarrow \max$ каждой **АВ** из **ФВ**. Поэтому в настоящей работе отсутствуют понятия и обозначения противоположного направления.

Обозначения 9 “Чёрный (белый) ящик” конуса вывода [Опр.6, стр.39]

$$\mathcal{F} \doteq (\text{ВХОД} \Rightarrow \boxed{\mathcal{F}} \Rightarrow \text{ВЫХОД}) \doteq (\min \mathcal{F} \Rightarrow \boxed{\mathcal{F}} \Rightarrow \max \mathcal{F}) \doteq \\ \doteq (\gg \mathcal{F} \Rightarrow \boxed{\mathcal{F}} \Rightarrow \mathcal{F} \gg) \doteq (\{\text{константы}\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{F}} \Rightarrow \{\text{результат вывода}\})$$

⟨1⟩ Упростим эти обозначения, опуская ящик $\boxed{\mathcal{F}}$: $\mathcal{F} \doteq \min \mathcal{F} \Rightarrow \max \mathcal{F}$

⟨2⟩ $\mathcal{F} \langle \langle \mathcal{F} \rangle \rangle \doteq \max \mathcal{F} \doteq \mathcal{F} \gg$ $\{\{\Rightarrow\}$ связь типа “чёрный ящик” между используемыми константами и результатами вывода

Введём дополнительные обозначения, обеспечивающие влияние внешних факторов на внутренние параметры конуса вывода:

$$\langle \mathcal{F} \langle \langle \mathbb{P} \rangle \rangle := \mathcal{F} \langle \langle \mathbb{P} \rangle \rangle \mid \doteq \mathbb{F} \langle \langle \mathbb{P} \rangle \rangle \mid \mathbb{F} := \|\mathcal{F}\| \quad \{\{\Rightarrow\}$$
 конус вывода $\mathbb{F}$ из $\mathbb{P} := \mathcal{F} \langle \langle \mathbb{P} \rangle \rangle$
 $\langle \mathcal{F} \langle \langle \mathbb{P} \rangle \rangle := \mathcal{F} \langle \langle \mathbb{P} \rangle \rangle \mid \doteq \mathbb{F} \langle \langle \mathbb{P} \rangle \rangle \mid \mathbb{F} \text{ то же} \quad \{\{\Rightarrow\}$ результат $\mathbb{F}$ то же

Эффект влияния усиливается, когда к каждому аргументу Ψ_k списка $\mathbb{P} := \{\Psi_1, \dots$

$\dots, \Psi_n\}$ открыт свободный доступ.

⟨3⟩ В настоящей работе особое значение имеет случай, когда $\mu(\max \mathcal{F}) = 1$. В соответствии с [12, Опр.22 «Заострённость...», стр. 172] такие выводы называются *острыми* и для них предлагаемые ниже обозначения соответствуют предыдущим определениям $\langle \mathcal{F} \langle \langle \mathbb{P} \rangle \rangle := \mathcal{F} \langle \langle \mathbb{P} \rangle \rangle$ и $\langle \mathcal{F} \langle \langle \mathbb{P} \rangle \rangle := \mathcal{F} \langle \langle \mathbb{P} \rangle \rangle$:

* $\Psi \langle \langle \mathbb{P} \rangle \rangle$ и $\Psi \doteq \Psi \langle \langle \mathbb{P} \rangle \rangle \mid \Psi \in 2^R \rightarrow 2^R$ $\{\{\Rightarrow\}$ конус и результат вывода Ψ из $\mathbb{P}$.
 Эти обозначения будут активно использоваться, а всё предыдущее вело к их пониманию.

Обозначения 10 Склеивание конусов вывода

⟨0⟩ Рекомендуем ознакомиться с [12, § 3.3 «Алгебра ЧУМ», стр. 171 и

§ 3.4 «Синтез острых множеств», стр. 172]

⟨1⟩ Константы $\{\Psi_1, \dots, \Psi_k\} =: \mathbb{P}$ конуса вывода играют роль аргументов, предназначенных для взаимодействия (склеивания) $\mathcal{F}$ с внешним миром. Склеивание происходит в направлении обратном порядкам следования и вывода **ФЗ** в **ПВ**. Вопрос двойного упорядочения **ФЗ** в результате склеивания носит технический характер и с лёгкостью решается в соответствии с требованием Обзн.3⟨2⟩ [стр.38].

⟨2⟩ Примеры:

$$\Lambda \langle \langle \Psi_0, \Psi_1 \langle \langle \Phi_0, \Phi_1 \langle \langle \Xi, \Theta_1 \rangle \rangle, \Phi_2 \rangle \rangle, \Psi_2, \Psi_3 \langle \langle \Omega, \Phi_3 \rangle \rangle \rangle \rangle \quad \{\{\Rightarrow\}$$
 три уровня склеивания
 $\Lambda \langle \langle \Psi_0, \Psi_1 \langle \langle \Phi_0, \Phi_1 \langle \langle \Theta_0, \Theta_1 \rangle \rangle, \Phi_2 \rangle \rangle, \Delta, \Psi_3 \langle \langle \Phi_3, \Phi_4 \rangle \rangle \rangle \rangle \quad \{\{\Rightarrow\}$ максимальный элемент

⟨3⟩ Очень важно иметь в виду следующее свойство острых выводов:

Склеивание острых множеств (то есть **КУМ**’ов) даст острое множе-

Чёрный ящик

ство.

[12, Следствие **thr3** «Замкнутость...», стр. 174]

5. Чистка вывода функциональной зависимости

Первым гигиеническим шагом мог бы стать переход $\mathcal{F} \mapsto \gg \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F} \gg$ [Опр.6, стр.39]. Однако он не решает проблем, связанных с $\boxed{\mathcal{F}}$. Мы пойдём другим путём, который заодно приведёт нас к **ФЭ ПВ**, удовлетворяющей требованиям поверхностной гигиены.

Определения 14 *Сучки и задоринки в последовательности вывода $\mathcal{F}$*

Повтор — **ФЗ**, который в $\mathcal{F}$ строго предшествует в смысле порядка следования $\neq \Rightarrow$ другая **ФЗ**, совпадающая с ней.

Тупик — ф.зависимость некоторой подпоследовательности вывода $\mathcal{Q} \mid \bar{\mathcal{C}}\mathcal{F}$, которая не используется для вывода иных **ФЗ** из $\mathcal{Q}$. Примером *тупиковой* **ФЗ** в $\mathcal{F}$ может служить её последняя ф.зависимость. В терминах 2 [стр.39] тупики **неактивны-и**-(возможно пассивны).

Программа: Лемма 3(3) [стр.47] заменяет повторы **ФЗ** их повторным использованием, что называется *исходящим гнездованием*. Она это делает с помощью [13, Следствия т-2 «Консолидация повторов» (стр.110) Теоремы 2], относящейся к теории *Каскадно Упорядоченных Множеств (КУМ)* [13, гл. 4, стр.107].

Уплотнение повторов в едином **ФЗ** является гигиеническим актом. Лемма 3(3) минимизирует код **ПВ**, неявно оказывая влияние на последующую её декомпозицию. Решение этой задачи даётся Теоремой 3 [стр.50], которая использует [12, Обозначения 39 «Суперпозиция острых множеств», стр.174] и основана на [12, Лемме 6 «Достаточное условие склеивания порядков», стр.171]. Декомпозиция реализуется представлением **ПВ** в виде суперпозиции **АР**-выводов [Опр.*8, стр.42], являющихся в слое $\leq^1$ острыми **ЧУМ**'ами [12, Опр.22 «Заострённость ЧУМ», стр.172]. Напомним **АР**-выводы обладают свойством однотипности **ФЗ** [Опр.9, стр.42], необходимым для приведения в гл.7 [стр.53] веток декомпозированного вывода к чередующему виду, собирая которые в задаче 4 «Алгебраический вывод функциональных зависимостей» Введения последовательность вывода станет алгебраическим выражением. -----

ВБ *Тупики («задоринки») в ПВ и КУМ*

- ❶ С точки зрения **КУМ** *тупики* **ПВ** [Опр.14, стр.47] являются максимальными элементами 1-го слоя, а именно слоя $\leq^1 \stackrel{\circ}{=} \Rightarrow$ вывода **ФЗ**, где $\leq^0 \stackrel{\circ}{=} \Rightarrow$.
- ❷ Заострённость 1-слоя **КУМ**'а $\mathcal{W}$, в котором 0-слой является линейно упорядоченным множеством, эквивалентна отсутствию в нём тупиков, кроме $\mathcal{W}_{\mu(\mathcal{W})-1}$ [12, Свойство ② Опр.22 «Заострённость ЧУМ», стр.172]
- ❸ $\{\mathcal{W}, \leq^i\} \ni w$ — тупик $\Rightarrow \{\mathcal{W}, \leq^{i+1}\} \ni w$ — тупик

В Лемме 3 достигается освобождение вершин $\langle \mathbb{N}(\Phi \in \mathcal{F}), \Phi \rangle \mid \Phi \in \mathcal{F}$ от навязчивого номера $\mathbb{N}(\Phi \in \mathcal{F})$ [Опр.10 (2), стр.44] так, чтобы сами ф.зависимости без посредников стали именами вершин «двух-цветного» графа. Решение этой задачи оставляет ацикличность графа вывода неизменной. Более того предлагаемое в ней преобразование $\mathcal{F} \mapsto \hat{\mathcal{F}}$ сохраняет структуру последовательности вывода.

Лемма 3 *Сборка повторов и удаление тупиков*

Пусть $\mathcal{F}$ — последовательность вывода $X \rightarrow Y$ из множества ф.зависимостей $\mathbb{F}$, тогда, не изменяя порядка следования **ФЗ** в $\mathcal{F}$ и перестраивая связи вывода можно достичь следующего:

- ⟨1⟩ Привести $\mathcal{F}$ в состояние $\mathcal{Q}$, в котором $X \rightarrow Y$ будет уникальна $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ в результате $X \rightarrow Y$ окажется последней $\Phi\mathbf{З}$ в $\mathcal{F}$;
 ⟨2⟩ Удалить из $\mathcal{F}$ все тупиковые ф.зависимости, отличные от $X \rightarrow Y$
 ⟨3⟩ Исходящее гнездование: Заменить в $\mathcal{F}$ повторы $\Phi\mathbf{З}$ их повторным использованием;
 ⟨4⟩ Резюме: Последовательность $\mathcal{F}$ вывода $X \rightarrow Y$ можно уплотнить удалением из неё повторов (как в ⟨3⟩) и тупиков, кроме $X \rightarrow Y$ [⟨2⟩ и $\Leftarrow$ Опр.14, стр.47]. В ней $X \rightarrow Y$ будет последней $\Phi\mathbf{З}$, то есть $\hat{\mathcal{F}} \Rightarrow X \rightarrow Y$. [Опр.4 ⟨1.4⟩, стр.38]
Обозначение. $\hat{\mathcal{F}}$ – результат уплотнения последовательности вывода $\mathcal{F}$.

 $\hat{\mathcal{F}}$

Доказательство начнём с замечания:

$\Leftarrow$ Лемма 3 не утверждает, что результат $\hat{\mathcal{F}}$ уплотнения $\mathcal{F}$ однозначен.

- ⟨1⟩ Через $\mathcal{Q}$ обозначим начальный отрезок последовательности $\mathcal{F}$ вплоть до места первого вхождения в неё ф.зависимости $X \rightarrow Y$. Имеем $\mathcal{Q} \Rightarrow X \rightarrow Y$ и $\mathcal{Q}$ удовлетворяет требованию ⟨1⟩ Леммы.
 ⟨2⟩ Решение вопроса ⟨2⟩ даётся последовательностью вывода
 $\tilde{\mathcal{Q}} := \mathcal{Q}^{\leq 1} X \rightarrow Y [X \rightarrow Y] \quad \{ \Leftarrow; [13, \text{Лемма 6 «Уплотнение», стр. 111}] \}$
 [Обзн. 7, стр.45] и [13, Обзн.10 «Уплотнение», стр. 111]
 ⟨3⟩ Здесь мы будем иметь дело с $\langle \mathcal{Q} \rangle$ [Опр.11, стр.44], так как речь идёт о повторах $\Phi\mathbf{З}$ в $\mathcal{Q}$. Рассмотрим в $\langle \mathcal{Q} \rangle$ эквивалентность $\sim$ между её элементами:
 $\langle \mathcal{Q} \rangle_i \sim \langle \mathcal{Q} \rangle_j \Leftrightarrow \mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}_j \mid i, j \in [0, \mu(\mathcal{Q})]$
 Решение вопроса достигается применением [13, Следствие т-2 «Консолидация повторов...», стр.110], упомянутого в Программе, к каждому классу определённого здесь отношения эквивалентности $\sim$. Напомним в последовательности вывода имеют место два порядка:
 $\leq := \leq^0 := \Rightarrow$ – порядок следования и $\leq^1 := \Rightarrow$ – порядок вывода.
 ⟨4⟩ В заключение мы придаём единую словесную форму достигнутым в ⟨1⟩÷⟨3⟩ результатам, но необходимо иметь ввиду, что Лемма 3 имеет модульную структуру и каждая её часть ⟨1⟩, ⟨2⟩, ⟨3⟩ может применяться отдельно от других, хотя последовательность действий $\langle 1 \rangle \mapsto \langle 2 \rangle \mapsto \langle 3 \rangle$ не лишена алгоритмического смысла.

Определения 15 Уплотнение последовательности вывода $\mathcal{F} \mapsto \hat{\mathcal{F}} =: \mathcal{P}$

Sic! Переход $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{P}$ стоит в ряду гигиенических мер по отношению к последовательности вывода $\mathcal{F}$.

- ⟨1⟩ Процесс объединения повторов в лидере повторов, перестройки связей каскадного упорядочения и удаления на следующем этапе из $\mathcal{F}$ образовавшихся тупиковых ветвей вывода назовём её уплотнением. Результат уплотнения выше обозначен через $\hat{\mathcal{F}}$;

$$\mathcal{F} \Rightarrow \Theta \Rightarrow \hat{\mathcal{F}} \Rightarrow \Theta \quad (7)$$

$\Leftarrow$ Уплотнение **RAP**-последовательности $\mathcal{F}$ может привести к утрате статуса **RAP** за счёт потери $\mathcal{F}_0 \mid \mathcal{F}_0 \Leftarrow \mathbf{B1}$, если она изолирована или ведёт к повтору $\Phi\mathbf{З}$ в $\mathcal{F}$.

- ⟨2⟩ Последовательность вывода $\mathcal{F}$, в которой нет повторяющихся и тупиковых, кроме последней, ф.зависимостей, назовём плотной.

Аналитически это выражается равенством $\mathcal{P} := \hat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$.

В Буквой $\mathcal{P}$ будем преимущественно пользоваться для обозначения плотных последовательностей вывода.

Лемма 4 Плотная ПВ является острым конусом вывода

[Опр.13, стр.45 и Обзн.9⟨3⟩, стр.46]

и $\Psi_m =: Z \rightarrow W$. Применение **B2** к Ψ_m , в соответствии с двух-адресностью входа в неё, возможно двумя способами ① и ②: $\{\{ \text{[термины 1, стр.35]} (1) \Rightarrow \}\}$

$$\left. \begin{array}{|c|} \hline \text{①} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} Z \rightarrow W \cup V \\ \Downarrow \\ Z \rightarrow W \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \Downarrow \\ Z \rightarrow W \cup T \end{array} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \text{B3} \\ \hline \begin{array}{c} S \subseteq W \\ \Downarrow \\ S \rightarrow T \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array} \right\} \begin{array}{|c|} \hline \text{②} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} Z \rightarrow W \cup V \\ \Downarrow \\ Z \rightarrow W \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \Downarrow \\ S \rightarrow W \cup T \end{array} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \text{B3} \\ \hline \begin{array}{c} Z \subseteq T \\ \Downarrow \\ S \rightarrow T \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array} \right\} (8)$$

Не зная порядка следования $Z \rightarrow W$ и $S \rightarrow T$ в $\mathcal{F}$, который для нас несуществен, мы выписали их по отношению к итоговым ф.зависимостям $Z \rightarrow W \cup T$ и $S \rightarrow W \cup T$, если можно так сказать, геометрически. Если же **B2** применить непосредственно к $Z \rightarrow W \cup U$, обойдя $Z \rightarrow W$, то получим

$$\left. \begin{array}{|c|} \hline \text{①} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} Z \rightarrow W \cup V \\ \Downarrow \\ Z \rightarrow (W \cup T) \cup V \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \Downarrow \\ Z \rightarrow W \cup T \end{array} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \text{B2} \\ \hline \begin{array}{c} S \subseteq W \\ \Downarrow \\ S \rightarrow T \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array} \right\} \begin{array}{|c|} \hline \text{②} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} Z \rightarrow W \cup V \\ \Downarrow \\ S \rightarrow (W \cup T) \cup V \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \Downarrow \\ S \rightarrow W \cup T \end{array} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \text{B2} \\ \hline \begin{array}{c} Z \subseteq T \\ \Downarrow \\ S \rightarrow T \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array} \right\} (9)$$

Переставляемость аксиом **B3** и **B2** в переходе (3) $\mapsto$ (9) [12, Обзн.28 «событие...», стр.167] достигнута. Для $\Theta := Z \rightarrow (W \cup T) \cup V$ или $\Theta := S \rightarrow (W \cup T) \cup V$ выразим этот факт формулой:

$$\text{B2} \quad \text{B3} \\ \Rightarrow \Theta \Rightarrow \Theta \setminus (\emptyset \rightarrow V \setminus (W \cup T)) \mid \Theta \in 2^R \rightarrow 2^R \quad [12, \text{Обзн.19 «}\Phi\text{3 схемы } R\text{», стр.161}]$$

ВБ Ликвидация Ψ_m с передачей вывода к Ψ_0 увеличивает повторность использования Ψ_0 , но проблема повторов **ФЗ** решается Леммой 3(3) [стр.47], а Теорема 3, к которой после небольшой паузы мы приступаем, делает эту проблему ничтожной.

Следствие л-5 *Плотный вывод $\mathcal{F}$ можно привести в состояние $\text{B12} \Rightarrow \text{B3}$*

Под (**B12** $\Rightarrow$ **B3**)-выводом подразумевается последовательное соединение **B12**-вывода с единственной аксиомой **B3**, присоединённой к нему в конце в единственном числе.

Док-во. Плотность необходима как гарантия единственности группы **B3** в преобразованной **ПВ**, что требуется Определением *8(2) [стр.42]. Многократное инвертирование $\Upsilon \xRightarrow{\text{B3}} \Upsilon \xRightarrow{\text{B2}} \Delta \mapsto \Upsilon \xRightarrow{\text{B2}} \Delta \cup (\Upsilon \setminus \Upsilon) \xRightarrow{\text{B3}} \Delta \xRightarrow{\text{B2}} \dots \mapsto \dots$ позволит результаты всех **B3** заданной **ПВ** сконцентрировать в конце преобразованной последовательности вывода и в результате получим последовательность вывода, удовлетворяющую Определению *8. Свойство плотности остаётся неизменным.

Обозначение 11 *Нéмощное разбиение множества* $A \cup B := A \cup B \mid \mu(A \cap B) \leq 1$

¶ [12, Обзн. 39(3) «Параллельное соединение», стр.174] и [Обзн. 8, стр.46]

Теорема 3 *АР-декомпозиция плотного B12-вывода*

Преамбула: Выявление **АР**-ветвей в плотном выводе $\mathcal{P}$, подлежащих склеиванию между собой параллельно и последовательно [Обзн.10, стр.46], носит итерационный характер. Если $\Delta \langle \Delta \rangle$ является **АР**-подПоследовательностью в $\mathcal{P}$ такой, что

Δ её корень и Δ – константы, определяющие вывод $\Delta \xRightarrow{\text{AP}} \Delta$, то тот же алгоритм строит следующую **АР**-ветвь по $\Delta' \in \Delta$, образуя таким же образом множество Δ' новых констант и вывод $\Delta' \xRightarrow{\text{AP}} \Delta'$. Ниже этот алгоритм помечен символом $\blacklozenge$ [стр.52]. Для него начальное значение $\Delta_1^1 := \max \mathcal{P} \doteq \mathcal{P}_{\mu(\mathcal{P})-1}$. Формирование

АР-ветвей совершается от $\max \mathcal{P}$ к $\min \mathcal{P}$, то есть в направлении противоположном $\rightarrow$ и $\Rightarrow$.

 (1) Плотный вывод $\mathcal{P} \mid \mathcal{P} \Rightarrow \Delta_1^1 := \mathcal{P}_{\mu(\mathcal{P})-1}$ **ФЗ**-приводится к немошному разбиению на плотные **АР**-выводы, с результатами вывода (корнями)

$$\Delta_q^p \mid \{ \Delta_q^p \in \mathcal{P} \mid p, q \in [1, \mu(\mathcal{P})] \}$$

(2) Множество констант Δ_{pq} для вывода $\Delta_{pq} \stackrel{\mathcal{P}}{\Rightarrow} \Delta_q^p$ образуется папами, при-
 мыкающими к мамам, которыми являются **ФЗ** однотипные с Δ_q^p в конусе $\Rightarrow \Delta_q^p$ и последовательно произрастающими из Δ_q^p в сторону $\min \mathcal{P}$. Последняя мама в этом ряду является константой $\mathcal{P}$ ²⁰⁾. [Терм.1, стр.35]

Все **АР**-ветви $\Delta_{pq} \stackrel{\mathcal{P}}{\Rightarrow} \Delta_q^p \mid \stackrel{\mathcal{P}}{=} \Delta_q^p \langle \langle \Delta_{pq} \rangle \rangle$ изоморфны лежащим в $\mathcal{P}$ соответствующим фрагментам вывода.

(3) Сформированные ветви **АР**-выводов обладают признаком *сверх-плотности*, выражающимся отсутствием в них повторов **ФЗ** и исходящего их гнездования ($\stackrel{\mathcal{P}}{=}$ повторного использования).

⚡ уточнение императива Теоремы 3 см. в Док-ве

⚡ Если $\mathcal{P}$ имеет исходящие гнезда вывода, то в декомпозированном выводе $\mathcal{Q}$ могут вновь образоваться повторы **ФЗ**. Во избежание неразберихи в $\mathcal{Q}$ следовало бы перейти к форме представления $\langle \mathcal{Q} \rangle$ [Опр.11, стр.44], однако для простоты изложения этого делать не будем. Тем более, что в **АР**-ветвях все **ФЗ** уникальны, что обеспечивается Леммой 3(4) [стр.48].

ВВ В силу особенностей будущих алгебраических операций повторы **ФЗ** в **ВВ** влияют на результаты вычислений алгебраических выражений прозрачно и предсказуемо ²¹⁾. Приведение в них “подобных членов” станет окончательным гигиеническим актом минимизации алгоритма **ВВ**, практически невозможным на этапе ручного формирования **ВВ**.

Док-во. Утверждение (2) станет фактом по мере построения алгоритма декомпозиции. (3) следует из условия плотности вывода $\mathcal{P}$ непосредственно.

Содержательная часть утверждения (1), к которому мы приступаем, относит ветви разбиения $\mathcal{P}$ к классу **АР**-выводов, что почти автоматически следует из построения вычислительного алгоритма декомпозиции, представляющую собой значительную вычислительную сложность, находящуюся вне математики. Декомпозиция ($\stackrel{\mathcal{P}}{=}$ разбиение) последовательности вывода, подчиняющейся требованию Определения 4 [стр.37], опирается на [12, Лемму 3 «Достаточное условие склеивания порядков», стр.171]. Её алгоритм, подчиняясь императиву теоремы, строит ниже в блоке ⚡ [стр.52] отдельный **АР**-вывод [Опр.*8, стр.42], являющийся фрагментом $\mathcal{P}$ и становящийся компонентой новой последовательности $\mathcal{Q}$, которая реализует цели теоремы. Совокупность компонент декомпозиции образует древовидную структуру. Собранные вместе они образуют вывод $\mathcal{Q}$, функционально эквивалентный $\mathcal{P}$.

✓ Направление декомпозиции противоположно направлениям $\rightarrow$ и $\Rightarrow$ формирования последовательности вывода $\mathcal{P}$.

Далее приводятся описания четырёх параметров, управляющих алгоритмом (10) [стр.53] декомпозиции:

p — номер уровня декомпозиции $\mathcal{P}$;

q — номер опоры **АР**-вывода ($\stackrel{\mathcal{P}}{=}$ **АР**-конуса) в уровне p декомпозиции; 22)

²⁰⁾ Конструкция, напоминающая рой пчёл.

²¹⁾ Точнее сказать никак не влияют. Они самоуничтожаются.

²²⁾ [13, Терм.2 «сущности графа», стр.104]

$m := m(p-1) := \sum_{q=1}^{m(p-2)} \mu(\Delta_q^{p-2})$ [Опр.6, стр. 39] общее количество аргументов в $(p-1)$ -ом уровне декомпозиции $\mathcal{P}$. Используется для ограничения q в цикле формирования ветвей декомпозиции на уровне p ;

n – количество аргументов в присоединённых к p -му уровню **АР**-выводах. Является внутренним, изменяемым в цикле по q параметром.

Промежуточные результаты декомпозиции $\mathcal{P}$ алгоритм (10) накапливает в $\mathcal{Q}$. На его входе $n := 0 := m$ и $p := 1 := q \Rightarrow \mathcal{Q} := \Delta_q^p := \mathcal{P}_{\mu(\mathcal{P})-1}$.

В ходе работы (10) $\mathcal{Q}$ наращивается, пока процесс выборочного перебора входящих гнёзд $\mathcal{P}$ не исчерпает их, дойдя до констант $\mathcal{P}$. Выборочность заключается в игнорировании входящих узлов $\mathcal{P}$, корни которых расположены строго внутри **АР**-ветви, формируемой в $\mathcal{Q}$ блоком $\diamond$ [стр.52] алгоритма (10).

✓ Номера p уровней декомпозиции возрастают при движении алгоритма от корня Δ_1^1 к константам $\mathcal{P}$.

✓ На каждом уровне p обрабатываются только аргументы **АР**-конусов этого уровня. Их нумерация q сквозная от 1 до $m \mid m := m(p)$.

✓ Связь между соседними уровнями декомпозиции даётся следующей схемой:

№ уровня	Конусы уровня с аргументами	В (10) переход $p-1 \mapsto p$ присутствует в виде $\mathcal{Q} := \mathcal{Q} \succ \Delta_q^p \succ \Delta_q^p \langle \Delta_{pq}^p \rangle$ (движение от $\max \mathcal{P}$ к $\min \mathcal{P}$)
p	$\dots, \Delta_q^p \langle \Delta_t^{p+1}, \dots, \Delta_u^{p+1} \rangle, \dots$	
$p-1$	$\dots, \Delta_s^{p-1} \langle \dots, \Delta_q^p, \dots \rangle, \dots$	

Стрелка $\uparrow$ имеет прежний смысл ²³⁾ и одновременно направляет алгоритмическое формирование новых **АР**-конусов в декомпозиции. Её инвертирование указывает на порядок склеивания $\dots \succ \Delta_s^{p-1} \langle \dots, \Delta_q^p, \dots \rangle \succ \Delta_q^p \succ \Delta_q^p \langle \Delta_{pq}^p \rangle \mid \Delta_{pq} := \{\Delta_t^{p+1}, \dots, \Delta_u^{p+1}\}$ [12, Обзн.38 (2) «Острое склеивание» Свойство 4, стр.173] компонент декомпозиции, чтобы вновь получить предмет разложения $\mathcal{P}$. Далее между ограничителями $\mapsto \diamond$ (ВХОД) и $\diamond \mapsto$ (ВЫХОД) следует блок $\diamond$ алгоритма (10) декомпозиции, формирующий **АР**-конус $\Delta_q^p \langle \dots \rangle$ p -ого уровня, заходящий в опору Δ_q^p [13, Терм.2 «сущности графа», стр.104], расположенную в $(p-1)$ -ом уровне в качестве аргумента. $\{\{\mathbf{NB}$ вообще говоря, в ней вместо Δ_q^p может быть использована любая другая **ФЗ** последовательности вывода $\mathcal{P}\}\}$:

$\mapsto \diamond$ Рассмотрим **КУМ** $\mathcal{W} := \{\{\Psi \mid \Psi \in \Rightarrow \Delta_q^p \text{ и } \Psi^H = \Delta_q^{pH}\}, = \Rightarrow, = \Rightarrow\}$.
 $\Rightarrow \mathcal{W} = \widehat{\mathcal{W}}$ [Обзн. в Лемме 3(4), стр.48] $\Leftarrow \mathcal{P} = \widehat{\mathcal{P}}$. Чтобы $\mathcal{W}$ стало выводом для Δ_q^p необходимо его дополнить тушиковыми в $(\Rightarrow \Delta_q^p) \setminus \mathcal{W}$ **ФЗ**: $\Delta_{pq} := \{\{\Delta_{n+1}^{p+1}, \Delta_{n+2}^{p+1}, \dots, \Delta_{n+k(\mathcal{W})}^{p+1}\}, = \Rightarrow, = \Rightarrow\} := \max\{(\Rightarrow \Delta_q^p) \setminus \mathcal{W} \mid k(\mathcal{W}) := k(\Delta_q^p) := \mu(\Delta_{pq})\}$. Если $\Delta_{pq} = \emptyset$, то $k(\mathcal{W}) = 0$. Порядок $= \Rightarrow$ в Δ_{pq} указывает каждой $\Delta_i^{p+1} \mid i \in n + [1, k(\mathcal{W})]$ своё место в конусе $= \Rightarrow \Delta_q^p$, что позволит подключить Δ_i^{p+1} к соответствующим **ФЗ** $\in \mathcal{W}$ как только мы присоединим Δ_{pq} к $\mathcal{W}$. $\mapsto \boxed{\Delta_q^p \langle \Delta_{pq} \rangle := \Delta_{pq} \cup \mathcal{W}} \cdot \Rightarrow \Delta_{pq} \stackrel{\text{АР}}{\Rightarrow} \Delta_q^p \diamond \mapsto$

Sic!

$\S$ [Обзн.5, стр.40 ; Опр. *8 на стр.42; Обзн.8, стр.46]

❶ Свойство плотности $\Delta_q^p \langle \Delta_{pq} \rangle$ наследует от $\mathcal{P}$

❷ $\in \min \Delta_q^p \langle \dots \rangle \neq \Delta_q^p \mid \Delta_q^p \langle \dots \rangle = \mathcal{W} \mid$ в том числе $\Delta_{pq} \not\prec \Delta_q^p$ по построению и $\min \mathcal{W} \setminus \Delta_{pq} \not\prec \Delta_q^p \{\{\Leftarrow; \min \mathcal{W} \setminus \Delta_{pq} \subseteq \mathbb{P}^{B1}\}\}$

²³⁾ [12, Обзн.28 «событие...», стр.167]

③ $\Delta_{pq} \subseteq \min W$ и $\min W \setminus \Delta_{pq} \subseteq \mathbb{P}^{B1}$; $\Rightarrow$ | вход в $\Delta_q^p \langle \langle \Delta_{pq} \rangle \rangle$ возможен только через Δ_{pq} , а выход через Δ_q^p и только.

Алгоритм **10** реализует переход $\mathcal{W}$ для конкретных значений p и q . Ниже он встроен в управляющую оболочку, декомпозирующую последовательность вывода $\mathcal{P}$ полностью. В ней за несколько оборотов цикла формируется один из уровней декомпозиции (через узел $q := q+1$) с последующим переходом на следующий уровень (по возрастанию p через узел $n \stackrel{?}{=} 0$):

7. Чередующиеся последовательности вывода

24)

Определения 16 Чередование ф.зависимостей в выводе

⟨1⟩ Операция $\sqsubseteq$ формирования чередующегося кортежа

Пусть T – некоторое множество. Имея два n -мерных кортежа, $t^i := \langle t_0^i, \dots, t_n^i \rangle \mid t^i \in T \mid \{i \in \langle 0, 1 \rangle \text{ и } n \in 1 + \mathbb{Z}^+\}$ [12, Обзн.10 « $\mathbb{Z}^+$ », стр.154], построим третий $t^0 \sqsubseteq t^1 := \langle t_0^0, t_0^1, t_1^0, t_1^1, \dots, t_n^0, t_n^1 \rangle$ размерности $2n$.

⟨2⟩ Чередующийся отрезок вывода

Отрезок вывода или даже последовательность вывода $\mathcal{A}$ ф.зависимости $\mathcal{A}_n \mid n := \mu(\mathcal{A}) - 1$ из заданного множества $\mathbb{A} \mid \mathbb{A} \subseteq 2^R \rightarrow 2^R$ называются *чередующимися*, если выполняются два условия: [Опр.10⟨1⟩, стр.44 и Обзн. 7, стр.45]

⟨2.1⟩ $\vec{\mathcal{A}} = \left(\mathcal{A}_0 \rightarrow \left((\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_0) \cap \mathbb{A} \sqsubseteq \mathcal{A}' \setminus \mathbb{A} \right) \stackrel{B3}{\Rightarrow} \mathcal{A}_n \right) \mid \mathcal{A}_0 \in \mathbb{A} \mid \mathbb{N}$ счёт начинается с 0

Допускается отсутствие части **B3**. В этом случае в предыдущей строке необходима замена $\mathcal{A}'$ на $\mathcal{A}$.

⟨2.2⟩ $\{\mathcal{A}_{2i}, \mathcal{A}_{2i+1}\} \stackrel{B2}{\Rightarrow} \mathcal{A}_{2(i+1)} \mid i \in [0, \frac{n-1}{2}]$

NB Чередование в $\mathcal{A}$ констант и выводимых **ФЗ** для наглядности представлено схемой:

В ней символ $\rightarrow$ изображает всего-лишь один шаг следования/формирования в последовательности вывода $\mathcal{A}$ и является ребром графа $\{\mathcal{A} \cap \mathbb{A}^{FB}, \rightarrow\}$ [Опр. 10⟨1⟩, стр.44]. Вертикальные шаги выводов $\Downarrow$ предложенной выше схемы связывают **ФЗ**, между которыми имеет место одно-шаговое следование $\downarrow$. Горизонтальные выводы $\mathcal{A}_{2(i-1)} \stackrel{B2}{\Rightarrow} \mathcal{A}_{2i} \mid i \in [1, \frac{n-1}{2}]$ реализуются на протяжении двух шагов следования, последний из которых совмещён с вертикальным выводом вида $\mathcal{A}_{2i-1} \stackrel{B2}{\Rightarrow} \mathcal{A}_{2i}$. В любом случае выводы удовлетворяют требованиям каскадности ⟨1⟩ **Sic!** [стр.45] и ⟨3⟩ [стр.45] Определения 12.

Теорема 4 АЛТ-редукция плотного B12-вывода

[Обзн.4, стр.40]

²⁴⁾ для задачи 4. «Введение»

- ⟨1⟩ Плотный В12-вывод $\mathcal{P}$ можно ФЭ-привести в состояние, в котором каждая АР-ветвь, предусмотренная Теоремой 3 [стр.50], приобретает вид $(\sqsubseteq)$
- ⟨2⟩ В результате получается дерево $\mathcal{Q}$, вершинами которого служат выявленные АР-ветви п.⟨1⟩, имеющие вид $\mathcal{A}$. В нём входящие гнёзда Δ имеют полу-степень захода $d(\Delta, \mathcal{Q}) = \mu(\mathcal{A})$ ²⁵⁾ [13, Обзн.7 ⟨6⟩, стр.104], а внутренние в $\mathcal{Q}$ вершины Δ имеют исходящие полустепени $=1$ ²⁶⁾.
- ⟨3⟩ $\mathcal{Q}$ является острым конусом, для которого $\in \max \mathcal{Q} \equiv \mathcal{P}_{\mu(\mathcal{P})-1}$
- Док-во вытекает из факта зафиксированного в Примечании²⁵⁾ [стр.54], из наличия линейного порядка $\Rightarrow$ в АР-ветвях а также отсутствия в них повторов ФЗ и исходящего гнездования.

8. Заключение

Теорема 4 для данной статьи носит целевой характер. На следующем этапе в рамках решения задачи 4 Введения «Алгебраический вывод функциональных зависимостей» непосредственно из неё будет выведено утверждение ⟨5⟩ [стр.43], закрывающее вопрос об алгебраизации последовательностей вывода ФЗ.

Список литературы

- [1] Дейт К.Д. Введение в системы Баз Данных. М., СПб.: Издательский дом Вильямс, 2001.
- [2] Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
- [3] Клини С.К. Введение в математику. М.: Иностранная литература, 1957.
- [4] Кон П. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968.
- [5] Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. М.: Физматлит, 1962.
- [6] Мейер Д. Теория реляционных баз данных. М.: Мир, 1987.
- [7] Поморцев Л.А. Вычисление моментов порядковых статистик последовательных сумм симметрически зависящих случайных величин // Труды Московского математического общества. 1983. Т. 46. С. 201–242.
- [8] Поморцев Л.А. Комбинаторно-симметрический анализ многомерных случайных блужданий // Дискретная математика. 1991. Т. 3, № 1. С. 21–41.
- [9] Поморцев Л.А. Алгебраическая интерпретация полноты аксиом вывода // Фундаментальная и прикладная математика. 2002. Т. 8, № 1. С. 195–219.
- [10] Поморцев Л.А. Алгебры функциональных зависимостей в теории реляционных баз данных // Труды Института Системного анализа РАН. Динамика неоднородных систем. 2007. Т. 29, № 1. С. 169–183.
- [11] Поморцев Л.А., Цурков В.И. Алгебраизация вывода функциональных зависимостей реляционных баз данных // Известия РАН. Теория и системы управления. 2019. № 2. С. 58–74. <https://doi.org/10.1134/S000233881902015X>

²⁵⁾ Для сравнения $d(\Psi, \mathcal{P}) = 2 \mid \Psi \in \Pi(\mathcal{P})$, так как $\stackrel{\mathbf{B2}}{\Rightarrow} \Psi \stackrel{\mathbf{B2}}{\Leftarrow}$. [Терм.2, стр.39]

²⁶⁾ Это характерно для суперпозиций функций в математике, изучаемых со школьной скамьи.

- [12] Поморцев Л.А., Цурков В.И. СИНТЕЗ-АНАЛИЗ последовательностей вывода функциональных зависимостей таблиц // Известия РАН. Теория и системы управления. 2020. Т. 6. С. 152–176.
- [13] Поморцев Л.А., Цурков В.И. Перестройка порядков каскадно упорядоченного множества // Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2020. Т. 15, № 2. С. 96–115. <https://doi.org/10.26456/fssc65>
- [14] Ульман Д. Базы данных на Паскале. М.: Машиностроение, 1990.
- [15] Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
- [16] Codd E.F. A relational model for large shared data banks // Communications of the ACM. 1970. Vol. 13. Pp. 377–387.
- [17] Codd E.F. Extending the database relational model to capture more meaning // ACM Transactions on Database Systems. 1979. № 4. Pp. 397–434.
- [18] Szpilrajn E. Sur l'extension de l'ordre partiel // Fundamenta Mathematicae. 1930. Vol. 16. Pp. 386–389. <https://doi.org/10.4064/fm-16-1-386-389>

Образец цитирования

Поморцев Л.А., Цурков В.И. Гигиена последовательностей вывода // Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2021. Т. 16, № 1. С. 34–57. <https://doi.org/10.26456/fssc78>

Сведения об авторах

1. Поморцев Леонид Александрович

доцент кафедры информатики Московского технического университета связи и информатики.

Россия, 123423, г. Москва, Северо-Западный Административный Округ, ул. Народного Ополчения, д. 32, МТУСИ. E-mail: brickfactory.org@mail.ru

2. Цурков Владимир Иванович

заведующий отделом ФИЦ ИУ РАН.

Россия, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2. E-mail: tsur@ccas.ru

HYGIENE OF DERIVATION SEQUENCES

Pomortsev Leonid Alexandrovitch

Associate Professor of the Department of Informatics, Moscow Technical University
of Communications and Informatics

Russia, 123423, Moscow, North-Western Administrative District, 32 Narodny
Opolcheniya str., MTUSI.

E-mail: brickfactory.org@mail.ru

Tsurkov Vladimir Ivanovich

Head of the Department, Federal Research Center "Computer Science and
Control" of Russian Academy of Sciences

Russia, Moscow, 44 Vavilova str., build. 2.

E-mail: tsur@ccas.ru

Received 25.03.2021, revised 30.03.2021.

The *Sequence of Derivation* (**DS**) of the of *Functional Dependence* from the set of other **FD** is the program of the notional *Computer* which is operated by commands **F** and **B**. Formalization of **DS** presents her as the *Cascade Ordered Set* (**COS**) with Orders of *consecution* $\leq^0 := \Rightarrow$ and of *conclusion* $\leq^1 := \Rightarrow$ inheriting undesirable properties of programming from **DS**: 1. *Variability of software development*; 2. *The uncontrollable outgoing nesting (branching)*; 3. *A possibility of repetition in the program of functionally equivalent fragments*; 4. *Other*. This work is aimed at eradication of these shortcomings of **DS** that is reached by rectification of algorithms and is implemented by the chain of Lemma 3 $\mapsto$ Theorem 3 $\mapsto$ Theorem 4 which eventually will allow each **DS** put in correspond the algebraic expression functionally equivalent to it in some **D**-algebra.

Keywords: syllogism, analysis, synthesis, database table, relation, attribute, scheme, key of table, functional dependence, graph, logical scheme, cortege, projection, nesting, D-algebra, PO, POS, RDB, TRDB.

Citation

Pomortsev L.A., Tsurkov V.I., "Hygiene of derivation sequences", *Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya [Fuzzy Systems and Soft Computing]*, **16**:1 (2021), 34–57 (in Russian). <https://doi.org/10.26456/fssc78>

References

- [1] Dejt K.D., *Vvedenie v sistemy Baz Dannykh [Introduction to Database Systems]*, Izdatelskij dom Vilyams, M., SPb., 2001 (in Russian).
- [2] Emelichev V.A., Melnikov O.I., Sarvanov V.I., Tyshkevich R.I., *Emelichev [Lectures on Graph Theory]*, Nauka Publ., Moscow, 1990 (in Russian).
- [3] Kleene S.C., *Introduction To Metamathematics*, Wolters-Noordhoff Publishing, Amsterdam, 1957.

- [4] Kon P., *Universalnaya algebra [Universal algebra]*, Mir Publ., Moscow, 1968 (in Russian).
- [5] Kurosh A.G., *Lektsii po obshchej algebre [Lectures on general algebra]*, Fizmatlit Publ., Moscow, 1962 (in Russian).
- [6] Mejer D., *Teoriya relyatsionnykh baz dannykh [The theory of relational databases]*, Mir Publ., Moscow, 1987 (in Russian).
- [7] Pomortsev L.A., “Calculation of moments of ordinal statistics of consecutive sums of symmetrically dependent random variables”, *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva [Proceedings of the Moscow Mathematical Society]*, **46** (1983), 201–242 (in Russian).
- [8] Pomortsev L.A., “Combinatorial-symmetric analysis of multidimensional random walks”, *Diskretnaya matematika [Discrete mathematics]*, **3:1** (1991), 21–41 (in Russian).
- [9] Pomortsev L.A., “Algebraic interpretation of the completeness of the axioms of inference”, *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika [Fundamental and Applied Mathematics]*, **8:1** (2002), 195–219 (in Russian).
- [10] Pomortsev L.A., “Functional dependency algebras in relational database theory”, *Trudy Instituta Sistemnogo analiza RAN. Dinamika neodnorodnykh sistem [Proceedings of the Institute of System Analysis of the Russian Academy of Sciences. Dynamics of inhomogeneous systems]*, **29:1** (2007), 169–183 (in Russian).
- [11] Pomortsev L.A., Tsurkov V.I., “Algebraization of inferring functional dependencies in relational databases”, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, **58:2** (2019), 212–228, <https://doi.org/10.1134/S000233881902015X>.
- [12] Pomortsev L.A., Tsurkov V.I., “SYNTHESIS AND ANALYSIS OF sequences of output of functional dependencies of tables”, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, **6** (2020), 152–176.
- [13] Pomortsev L.A., Tsurkov V.I., “Order alteration in a cascade-ordered set”, *Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya [Fuzzy Systems and Soft Computing]*, **15:2** (2020), 96–115 (in Russian), <https://doi.org/10.26456/fssc65>.
- [14] Ulman D., *Bazy dannykh na Paskale [Databases in Pascal]*, Mashinostroyeniye Publ., Moscow, 1990 (in Russian).
- [15] Yablonskij S.V., *Introduction to Discrete Mathematics*, Nauka Publ., Moscow, 1986 (in Russian).
- [16] Codd E.F., “A relational model for large shared data banks”, *Communications of the ACM*, **13** (1970), 377–387.
- [17] Codd E.F., “Extending the database relational model to capture more meaning”, *ACM Transactions on Database Systems*, 1979, № 4, 397–434.
- [18] Szpilrajn E., “Sur l’extension de l’ordre partiel”, *Fundamenta Mathematicae*, **16** (1930), 386–389, <https://doi.org/10.4064/fm-16-1-386-389>.