Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Язенин, И. С. Солдатенко, Сравнительное изучение поведения эффективной границы портфеля минимального риска в условиях гибридной неопределенности в зависимости от ограничений на доходность портфеля, *Нечеткие системы и мягкие вычисления*, 2021, том 16, выпуск 1, 58–69

DOI: <https://doi.org/10.26456/fssc79>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 13:32:08

**СРАВНИТЕЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОЙ
ГРАНИЦЫ ПОРТФЕЛЯ МИНИМАЛЬНОГО РИСКА В
УСЛОВИЯХ ГИБРИДНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В
ЗАВИСИМОСТИ ОТ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ДОХОДНОСТЬ
ПОРТФЕЛЯ¹**

Язенин А.В., Солдатенко И.С.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 20.04.2021, после переработки 28.06.2021.

В работе проведены исследования эффективной границы портфеля минимального риска в условиях гибридной неопределенности. Для случая двумерного портфеля при ограничении на ожидаемую доходность портфеля и ограничении по возможности/необходимости и вероятности на доходность портфеля в зависимости от уровня вероятности построены квазиэффективные границы портфеля. Результаты численных экспериментов согласуются с ранее полученными авторами теоретическими результатами.

Ключевые слова: портфель минимального риска, возможно-вероятностная оптимизация, ограничения по возможности/необходимости и вероятности, ограничения по вероятности и возможности/необходимости, эквивалентный детерминированный аналог, эквивалентный стохастический аналог, нечеткая случайная величина, сильнейшая t -норма.

Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2021. Т. 16, № 1. С. 58–69.
<https://doi.org/10.26456/fssc79>

Введение

Настоящая работа дополняет теоретические исследования по проблеме оптимизации инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности, представленные в работах авторов [1–4]. В ней проводится сравнительный анализ двух моделей портфеля минимального риска в условиях гибридной неопределенности возможно-вероятностного типа. Рассматриваемые модели различаются системами ограничений, определяющими модели допустимых портфелей. В первом случае используется принцип ожидаемой возможности, во втором – ограничение по вероятности на уровень доходности. Исследуется поведение второй модели в зависимости от уровня вероятности при снятии неопределенности вероятностного типа.

В основу исследования положены разработанные не прямые методы решения задач указанного класса, рассматриваемые в контексте сильнейшей t -нормы. Они основаны на построении их эквивалентных детерминированных аналогов.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №20-01-00669).

© Язенин А.В., Солдатенко И.С., 2021

1. Необходимые понятия и обозначения

Введем ряд необходимых в дальнейшем понятий и определений из теории возможностей [5–10]. Как обычно, пусть далее $(\Gamma, \mathbf{P}(\Gamma), \tau)$ и $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ есть возможностное и вероятностное пространства, соответственно, в которых Ω – пространство элементарных событий $\omega \in \Omega$, Γ – модельное пространство с элементами $\gamma \in \Gamma$, $\mathcal{B}$ – σ -алгебра событий, $\mathbf{P}(\Gamma)$ – множество всех подмножеств Γ , $\tau \in \{\pi, \nu\}$, π и ν – меры возможности и необходимости, соответственно, а $\mathbf{P}$ – мера вероятности; $\mathbb{E}_+^n = \{x \in \mathbb{E}^n : x \geq 0\}$, $\mathbb{E}^n$ – n -мерное Евклидово пространство.

Определение 1. *Нечеткой случайной величиной $Y(\omega, \gamma)$ будем называть вещественную функцию $Y : \Omega \times \Gamma \rightarrow \mathbb{E}^1$ σ -измеримую для каждого фиксированного γ , а функцию*

$$\mu_Y(\omega, t) = \pi\{\gamma \in \Gamma : Y(\omega, \gamma) = t\}, \forall t \in \mathbb{E}^1$$

будем называть ее функцией распределения.

Определение 2. *Пусть $Y(\omega, \gamma)$ – нечеткая случайная величина. Ее ожидаемым значением $\mathbf{E}[Y]$ называется нечеткая величина, имеющая функцию распределения возможностей*

$$\mu_{\mathbf{E}[Y]}(t) = \pi\{\gamma \in \Gamma : \mathbf{E}[Y(\omega, \gamma)] = t\}, \forall t \in \mathbb{E}^1,$$

где $\mathbf{E}$ – оператор взятия математического ожидания

$$\mathbf{E}[Y(\omega, \gamma)] = \int_{\Omega} Y(\omega, \gamma) \mathbf{P}(d\omega).$$

Функция распределения ожидаемого значения нечеткой случайной величины является нечеткой величиной, так как уже не зависит от случайного параметра.

Следуя [11], определим моменты второго порядка. Пусть X и Y – нечеткие случайные величины.

Определение 3. *Ковариация нечетких случайных величин X и Y вычисляется по формуле:*

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\text{cov}(X_{\omega}^{-}(\alpha), Y_{\omega}^{-}(\alpha)) + \text{cov}(X_{\omega}^{+}(\alpha), Y_{\omega}^{+}(\alpha))) d\alpha,$$

где $X_{\omega}^{-}(\alpha)$, $Y_{\omega}^{-}(\alpha)$, $X_{\omega}^{+}(\alpha)$, $Y_{\omega}^{+}(\alpha)$ – соответственно, левые и правые границы α -уровневых множеств нечетких величин X_{ω} и Y_{ω} .

Определение 4. *Дисперсия нечеткой случайной величины Y есть:*

$$\mathbf{D}[Y] = \text{cov}(Y, Y). \quad (1)$$

Для моделирования нечетких величин часто используется распределение LR -типа [12], которое для нечеткой величины $Y(\gamma)$ записывается, как правило, в виде $\mu_Y(t) = [\underline{m}, \overline{m}, \underline{d}, \overline{d}]_{LR}$:

$$\mu_Y(t) = \begin{cases} L\left(\frac{\underline{m} - t}{\underline{d}}\right), & t < \underline{m}, \\ 1, & \underline{m} \leq t \leq \overline{m}, \\ R\left(\frac{t - \overline{m}}{\overline{d}}\right), & t > \overline{m}. \end{cases}$$

Далее мы просто будем писать $Y(t) = [\underline{m}, \overline{m}, \underline{d}, \overline{d}]_{LR}$. Здесь $\underline{m}, \overline{m}$ есть левая и правая границы интервала толерантности, $\underline{d}, \overline{d}$ – коэффициенты нечеткости, при этом $\underline{m} \leq \overline{m}$ и $\underline{d} > 0, \overline{d} > 0$, а $L(t)$ и $R(t)$ – функции представления левой и правой форм нечеткости возможностного распределения:

1. $L(t), R(t)$ невозрастающие, полунепрерывные сверху, определенные на неотрицательной части числовой прямой,
2. $L(0) = R(0) = 1$,
3. $L(t), R(t) < 1, \quad \forall t > 0$,
4. $\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0$.

Для агрегирования нечеткой информации как и прежде используем t -нормы, обобщающие операцию типа «min», заложенную в действиях над нечеткими множествами и нечеткими величинами [8, 9]. В настоящей работе мы будем использовать только экстремальную t -норму: $T_M(x, y) = \min(x, y)$, которая называется сильнейшей t -нормой.

2. Математическая модель допустимых портфелей в условиях гибридной неопределенности при ограничении на уровень ожидаемой доходности

В условиях гибридной неопределенности возможно-вероятностного типа доходность инвестиционного портфеля может быть представлена нечеткой случайной функцией

$$R_p(w, \omega, \gamma) = \sum_{i=1}^n R_i(\omega, \gamma) w_i, \quad (2)$$

которая является линейной функцией долей капитала $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ в инвестиционном портфеле. Здесь $R_i(\omega, \gamma)$ – нечеткие случайные величины, моделирующие доходности отдельных финансовых активов, имеющие сдвиг-масштабное представление [5]:

$$R_i(\omega, \gamma) = a_i(\omega) + \sigma_i(\omega) Z_i(\gamma).$$

Далее будем предполагать, что нечеткие величины $Z_i(\gamma) = [\underline{m}_i, \overline{m}_i, \underline{d}_i, \overline{d}_i]_{LR}$ взаимно минисвязаны, то есть их взаимодействие описывается сильнейшей t -нормой T_M , а $a_i(\omega)$ и $\sigma_i(\omega)$ есть коэффициенты сдвига и масштаба – случайные величины, определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, B, \mathbf{P})$. Тогда возможностное распределение доходности портфеля (2) принимает вид:

$$R_p(w, \omega, \gamma) = [\underline{m}_{R_p}(w, \omega), \overline{m}_{R_p}(w, \omega), \underline{d}_{R_p}(w, \omega), \overline{d}_{R_p}(w, \omega)]_{LR},$$

где

$$\underline{m}_{R_p}(w, \omega) = \sum_{i=1}^n (a_i(\omega) + \sigma_i(\omega) \underline{m}_i) w_i, \quad \overline{m}_{R_p}(w, \omega) = \sum_{i=1}^n (a_i(\omega) + \sigma_i(\omega) \overline{m}_i) w_i,$$

а коэффициенты нечеткости принимают вид:

$$\underline{d}_{R_p}(w, \omega) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(\omega) \underline{d}_i w_i, \quad \overline{d}_{R_p}(w, \omega) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(\omega) \overline{d}_i w_i.$$

Для снятия неопределенности вероятностного типа на основе принципа ожидаемой доходности необходимо идентифицировать возможностное распределение математического ожидания функции $R_p(w, \omega, \gamma)$, то есть вычислить его параметры. Ожидаемая доходность портфеля в моделях портфельного анализа является при фиксированном w нечеткой величиной. Об этом говорит следующая теорема.

Теорема 1. Пусть в $R_p(w, \omega, \gamma)$ все нечеткие параметры взаимно-минисвязаны. Тогда ожидаемая доходность портфеля $\hat{R}_p(w, \gamma)$ характеризуется возможностным распределением

$$\hat{R}_p(w, \gamma) = \mathbf{E}[R_p(w, \omega, \gamma)] = [\underline{m}_{\hat{R}_p}(w), \overline{m}_{\hat{R}_p}(w), \underline{d}_{\hat{R}_p}(w), \overline{d}_{\hat{R}_p}(w)]_{LR},$$

где

$$\begin{aligned} \underline{m}_{\hat{R}_p}(w) &= \sum_{i=1}^n (\hat{a}_i + \hat{\sigma}_i \underline{m}_i) w_i, & \overline{m}_{\hat{R}_p}(w) &= \sum_{i=1}^n (\hat{a}_i + \hat{\sigma}_i \overline{m}_i) w_i, \\ \underline{d}_{\hat{R}_p}(w) &= \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i \underline{d}_i w_i, & \overline{d}_{\hat{R}_p}(w) &= \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i \overline{d}_i w_i, \\ \hat{a}_i &= \mathbf{E}[a_i(\omega)], & \hat{\sigma}_i &= \mathbf{E}[\sigma_i(\omega)]. \end{aligned}$$

Так как ожидаемая доходность портфеля в случае нечетких случайных данных есть нечеткая величина, то для снятия неопределенности возможностного типа в систему ограничений, определяющую множество допустимых портфелей, можно ввести ограничение по мере возможности/необходимости на приемлемый для инвестора уровень ожидаемой доходности, который в общем случае может быть нечетким. Тогда обобщенная модель допустимых портфелей по Марковицу может быть представлена в виде

$$F_p^{\tau \mathbf{E}}(w) = \begin{cases} \tau \{ \hat{R}_p(w, \gamma) \geq m_d \} \geq \alpha, \\ \sum_{j=1}^n w_j = 1, w \in \mathbb{E}_+^n, \end{cases} \quad (3)$$

где $\alpha \in (0, 1]$, m_d – уровень доходности, приемлемый для инвестора.

Следующие теоремы позволяют строить эквивалентные детерминированные аналоги модели допустимых портфелей (3) по возможности и необходимости [4].

Теорема 2. Пусть в модели ограничений (3) мера $\tau = \pi$. Тогда эквивалентная детерминированная модель допустимых портфелей имеет вид:

$$F_p^{\pi \mathbf{E}}(w) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n (\hat{a}_i + \hat{\sigma}_i \overline{m}_i) w_i + \overline{d}_{\hat{R}_p}(w) R^{-1}(\alpha) \geq m_d, \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1, w \in \mathbb{E}_+^n. \end{cases}$$

Теорема 3. Пусть в модели ограничений (3) мера $\tau = \nu$. Тогда эквивалентная детерминированная модель допустимых портфелей имеет вид:

$$F_p^{\nu \mathbf{E}}(w) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n (\hat{a}_i + \hat{\sigma}_i \underline{m}_i) w_i - \underline{d}_{\hat{R}_p}(w) L^{-1}(1 - \alpha) \geq m_d, \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1, w \in \mathbb{E}_+^n. \end{cases}$$

3. Математическая модель допустимых портфелей в условиях гибридной неопределенности при ограничении по возможности/необходимости и вероятности на уровень доходности

В том случае, когда доходность, определяемая (2), вносится в систему ограничений, гибридную неопределенность можно снять путем наложения ограничения по возможности/необходимости и вероятности на приемлемый уровень доходности. Формально, математическая модель такого ограничения может быть записана в виде:

$$F_p^{\tau \mathbf{P}}(w) = \begin{cases} \tau\{\mathbf{P}\{R_p(w, \omega, \gamma) \geq m_d\} \geq p_0\} \geq \alpha, \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1, w \in \mathbb{E}_+^n, \end{cases} \quad (4)$$

где $\mathbf{P}$ – вероятностная мера, $p_0 \in (0, 1]$ – уровень вероятности. Рассмотрим ее более подробно. Для этого введем еще ряд обозначений. Пусть далее $t = (t_1, \dots, t_n)$ – вектор возможных значений нечетких величин $Z_1(\gamma), \dots, Z_n(\gamma)$, соответственно. Тогда с возможностью $\mu_p(t) = \min_{i=1, \dots, n} \{\mu_{Z_i}(t_i)\}$ доходность портфеля определяется формулой $R_p(w, \omega, t) = \sum_{i=1}^n (a_i(\omega) + \sigma_i(\omega)t_i)w_i$. Следуя [5], мы теперь можем определить ожидаемую доходность и риск портфеля с возможностью $\mu_p(t)$:

$$m_{R_p}(w, t) = \mathbf{E}[R_p(w, \omega, t)] = \sum_{i=1}^n (\hat{a}_i + \hat{\sigma}_i t_i)w_i,$$

и

$$d_{R_p}(w, t) = \mathbf{E}[(R_p(w, \omega, t) - m_{R_p}(w, t))^2]. \quad (5)$$

Введем обозначения для коэффициентов ковариации случайных параметров, участвующих в сдвиг-масштабном представлении нечетких случайных величин:

$$C_{a_i a_j} = \text{cov}(a_i, a_j); \quad C_{\sigma_i \sigma_j} = \text{cov}(\sigma_i, \sigma_j); \quad C_{a_i \sigma_j} = \text{cov}(a_i, \sigma_j); \quad C_{\sigma_i a_j} = \text{cov}(\sigma_i, a_j);$$

а также ковариационную матрицу $\mathbb{C}(t) = \{\mathbb{C}_{ij}(t)\}_{i,j=1}^n$, с коэффициентами

$$\mathbb{C}_{ij}(t) = C_{a_i a_j} + C_{a_i \sigma_j} t_j + C_{\sigma_i a_j} t_i + C_{\sigma_i \sigma_j} t_i t_j.$$

С учетом введенных обозначений специфицируем формулу (5) [2]:

$$d_{R_p}(w, t) = \langle \mathbb{C}(t)w, w \rangle,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – оператор взятия скалярного произведения.

Перейдем к построению эквивалентного четкого аналога модели (4). В [1], опираясь на результаты [7, 13], доказаны следующие теоремы.

Теорема 4. Пусть в модели ограничений (4) $\tau = \pi$, нечеткие случайные величины $Z_i(\gamma)$, $i = 1, \dots, n$ являются взаимно минисвязанными и характеризуются квазивогнутыми, полунепрерывными сверху распределениями с конечными носителями, а коэффициенты сдвига и масштаба являются нормально распределенными случайными величинами $a_i(\omega) \in \mathcal{N}(\hat{a}_i, \hat{d}_{a_i})$, $\sigma_i(\omega) \in \mathcal{N}(\hat{\sigma}_i, \hat{d}_{\sigma_i})$,

$i = 1, \dots, n$. Тогда модель (4) эквивалентна детерминированной модели ограничений

$$F_p^{\pi P} = \begin{cases} m_{R_p}(w, \alpha) + \beta_0 \sqrt{d_{R_p}(w, \alpha)} \geq m_d, \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1, w \in E_+^n, \end{cases}$$

где

$$m_{R_p}(w, \alpha) = \sum_{i=1}^n (\hat{a}_i + \max\{\hat{\sigma}_i t_i^-(\alpha), \hat{\sigma}_i t_i^+(\alpha)\}) w_i,$$

$$d_{R_p}(w, \alpha) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (C_{a_i a_j} + \max\{C_{a_i \sigma_j} t_j^-(\alpha), C_{a_i \sigma_j} t_j^+(\alpha)\} +$$

$$+ \max\{C_{\sigma_i a_j} t_i^-(\alpha), C_{\sigma_i a_j} t_i^+(\alpha)\} + \max\{C_{\sigma_i \sigma_j} (t_i t_j)^-(\alpha), C_{\sigma_i \sigma_j} (t_i t_j)^+(\alpha)\}) w_i w_j,$$

$$(t_i t_j)^-(\alpha) = \min\{t_i^-(\alpha) t_j^-(\alpha), t_i^-(\alpha) t_j^+(\alpha), t_i^+(\alpha) t_j^-(\alpha), t_i^+(\alpha) t_j^+(\alpha)\},$$

$$(t_i t_j)^+(\alpha) = \max\{t_i^-(\alpha) t_j^-(\alpha), t_i^-(\alpha) t_j^+(\alpha), t_i^+(\alpha) t_j^-(\alpha), t_i^+(\alpha) t_j^+(\alpha)\},$$

$t_i^-(\alpha), t_i^+(\alpha)$ – соответственно, левые и правые границы α -уровневых множеств нечетких величин $Z_i(\gamma)$, β_0 – решение уравнения $\mathcal{F}(x) = 1 - p_0$, а $\mathcal{F}(x)$ – функция стандартного нормального распределения вероятностей.

Модель допустимых портфелей с ограничением по необходимости $F_p^{\nu P}$ строится аналогичным образом.

4. Оценка риска портфеля в условиях гибридной неопределенности

Для оценки риска портфеля определим его дисперсию. Для этого воспользуемся формулой (1) для нахождения ковариации двух нечетких случайных величин:

$$D_p(w) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\mathbf{D}[R_p^-(w, \omega, \alpha)] + \mathbf{D}[R_p^+(w, \omega, \alpha)]) d\alpha,$$

где $R_p^-(w, \omega, \alpha)$ и $R_p^+(w, \omega, \alpha)$ – соответственно левая и правая границы α -уровневого множества нечеткой случайной величины $R_p(w, \omega, \gamma)$. Если все случайные параметры распределений независимы, а нечеткие параметры заданы нечеткими числами с одинаковыми функциями представления формы и левыми и правыми коэффициентами нечеткости, т.е. $L(\alpha) = R(\alpha) = S(\alpha)$, $\bar{m}_i = \underline{m}_i = m_i$, $\bar{d}_i = \underline{d}_i = d_i$, $i = 1, \dots, n$, то после соответствующих преобразований окончательная формула для дисперсии, позволяющая определить риск портфеля, имеет вид [2, 3]:

$$D_p(w) = \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{D}[a_i(\omega)] + \mathbf{D}[\sigma_i(\omega)] \left(m_i^2 + d_i^2 \int_0^1 (S^{-1}(\alpha))^2 d\alpha \right) \right) w_i^2.$$

Пример 1. В случае, когда все коэффициенты сдвига и масштабирования $a_i(\omega)$, $\sigma_i(\omega)$ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с дисперсией D , а функция представления формы $S(t) = \max\{0, 1 - t\}$, $t \geq 0$, то мы получим следующую формулу для нахождения дисперсии нечеткой случайной величины $R_p(w, \omega, \gamma)$:

$$D_p(w) = D \sum_{i=1}^n \left(m_i^2 + \frac{1}{3} d_i^2 + 1 \right) w_i^2.$$

5. Модельные расчеты

С учетом результатов, представленных в разделах 2, 3 и 4, модели портфеля минимального риска в условиях гибридной неопределенности вероятностного типа могут быть записаны в виде:

$$D_p(w) \rightarrow \min,$$

$$w \in F_p(w),$$

где $F_p(w) \in \{F_p^{\pi E}, F_p^{\nu E}, F_p^{\pi P}, F_p^{\nu P}\}$. Перейдем к их исследованию на модельном примере. В частности, исследуем поведение моделей с системами допустимых портфелей $F_p^{\tau P}$ при различных значениях p_0 , а именно при $p_0 = 0.6$, $p_0 = 0.5$ и $p_0 = 0.4$.

В качестве модельного примера рассмотрим двумерный портфель ($n = 2$). Пусть $Z_1 = [2.2, 2.2, 0.3, 0.3]_{LR}$, $Z_2 = [1.2, 1.2, 0.4, 0.4]_{LR}$, $L(t) = R(t) = \max\{0, 1 - t\}$, $t \geq 0$, $\alpha = 0.75$. Пусть в моделях $F_p^{\tau E}$ все $a_i(\omega)$, $\sigma_i(\omega)$ являются независимыми случайными величинами с равномерным на отрезке $[0, 1]$ распределением, а в модели $F_p^{\tau P}$ — независимыми случайными величинами с нормальным распределением с $\mu = 0.5$ и $\sigma^2 = 0.2$. Напомним, что модель $F_p^{\tau E}$ была исследована для случая равномерного распределения вероятностей, в то время как модель $F_p^{\tau P}$ — для нормального распределения. В связи с этим параметры распределений случайных факторов были подобраны таким образом, чтобы моделировать «близкие» по значениям случайные величины. Ниже на рисунках представлены результаты модельных экспериментов.

Рис. 1: Множества квазиэффективных портфелей при $p_0 = 0.6$

При $p_0 = 0.5$ β_0 становится равным нулю. В результате моменты второго порядка не участвуют в формировании математической модели допустимых портфелей $F_p^{\tau P}$. Поэтому множества квазиэффективных портфелей по первой и второй моделям совпадают, как следует из Рис. 2. Это соответствует результатам Теоремы 6, доказанной в [4]. При более высоком уровне вероятности (Рис. 1) модель с ограничениями по вероятности ведет себя менее рискованно, а при

Рис. 2: Множества квазиэффективных портфелей при $r_0 = 0.5$

Рис. 3: Множества квазиэффективных портфелей при $r_0 = 0.4$

меньшем (Рис. 3), соответственно, более рискованно, что вполне согласуется с теоретическими результатами.

Также на представленных иллюстрациях естественным образом выглядит поведение модели с ожидаемой доходностью, в которой берутся ожидаемые значения случайных факторов модели.

Заключение

В работе проведен сравнительный анализ двух моделей портфеля минимального риска в условиях гибридной неопределенности возможностно-вероятностного типа, отличающихся моделями допустимых портфелей. В первом

случае использовался принцип ожидаемой доходности, во втором – ограничение по вероятности для снятия неопределенности вероятностного типа. Исследовано поведение множества квазиэффективных портфелей по второй модели при различных уровнях вероятности. Установлена связь между первой и второй моделями при уровне вероятности $p_0 = 0.5$. Результаты, продемонстрированные на модельном примере, согласуются с ранее полученными теоретическими результатами.

В плане дальнейших исследований представляет интерес рассмотрение поведения указанных моделей в случае слабой треугольной нормы.

Список литературы

- [1] Yazenin A., Soldatenko I. On the Problem of Possibilistic-Probabilistic Optimization with Constraints on Possibility/Probability // *Advances in Intelligent Systems and Computing*. Eds. by Giove S., Masulli F., Fuller R.. Series: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 11291. Cham: Springer, 2019. Pp. 43–54.
- [2] Язенин А.В., Солдатенко И.С. Задача возможно-вероятностной оптимизации с ограничениями по возможности/необходимости – вероятности и вероятности – возможности/необходимости // *Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте. Сборник научных трудов X-й Международной научно-технической конференции, ИММВ-2021 (Коломна, 17-20 мая 2021 г.). В 2-х томах. Т. 1. Смоленск: Универсум, 2021. С. 271–283.*
- [3] Язенин А.В., Солдатенко И.С. Об одной модели портфеля минимального риска в условиях гибридной неопределенности // *Нечеткие системы, мягкие вычисления и интеллектуальные технологии. Труды VIII Международной научно-практической конференции, НСМВИТ-2020 (Смоленск, 29 июня – 01 июля 2020 г.). Смоленск: Универсум, 2020. С. 43–53.*
- [4] Yazenin A.V., Soldatenko I.S. Model of a minimal risk portfolio under hybrid undertainty // *Control and Cybernetics*. 2021. Vol. 50, № 2. (to appear)
- [5] Язенин А.В. Основные понятия теории возможностей. Математический аппарат для принятия решений в условиях гибридной неопределенности. М.: Физматлит, 2016. 144 с.
- [6] Nahmias S. Fuzzy variables in a random environment // *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*. Eds. by M.M. Gupta, R.K. Ragade, R.R. Yager. Amsterdam: North-Holland, 1979. Pp. 165–180.
- [7] Yazenin A., Wagenknecht M. Possibilistic Optimization. A Measure-Based Approach. Cottbus, Germany: Brandenburgische Technische Universität, 1996. 133 p.
- [8] Nguyen H.T., Walker E.A. A First Course in Fuzzy Logic. Boca Raton: CRC Press, 1997.
- [9] Mesiar R. Triangular-norm-based addition of fuzzy intervals // *Fuzzy Sets and Systems*. 1997. Vol. 91. Pp. 231–237. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(97\)00143-7](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(97)00143-7)

- [10] Hong D.H. Parameter estimations of mutually t-related fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems. 2001. Vol. 123, № 1. Pp. 63–71. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(00\)00113-5](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(00)00113-5)
- [11] Feng Y., Hu L., Shu H. The variance and covariance of fuzzy random variables and their applications // Fuzzy Sets and Systems. 2001. Vol. 120, № 3. Pp. 487–497. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(99\)00060-3](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(99)00060-3)
- [12] Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. М.: Радио и связь, 1990.
- [13] Yazenin A.V. On the problem of possibilistic optimization // Fuzzy Sets and Systems. 1996. Vol. 81. Pp. 133–140.

Образец цитирования

Язенин А.В., Солдатенко И.С. Сравнительное изучение поведения эффективной границы портфеля минимального риска в условиях гибридной неопределенности в зависимости от ограничений на доходность портфеля // Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2021. Т. 16, № 1. С. 58–69. <https://doi.org/10.26456/fssc78>

Сведения об авторах

1. Язенин Александр Васильевич

заведующий кафедрой информационных технологий Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

E-mail: Yazenin.AV@tversu.ru

2. Солдатенко Илья Сергеевич

доцент кафедры информационных технологий Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ. E-mail: soldis@tversu.ru

- [10] Hong D.H. Parameter estimations of mutually t-related fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems. 2001. Vol. 123, № 1. Pp. 63–71. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(00\)00113-5](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(00)00113-5)
- [11] Feng Y., Hu L., Shu H. The variance and covariance of fuzzy random variables and their applications // Fuzzy Sets and Systems. 2001. Vol. 120, № 3. Pp. 487–497. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(99\)00060-3](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(99)00060-3)
- [12] Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. М.: Радио и связь, 1990.
- [13] Yazenin A.V. On the problem of possibilistic optimization // Fuzzy Sets and Systems. 1996. Vol. 81. Pp. 133–140.

Образец цитирования

Язенин А.В., Солдатенко И.С. Сравнительное изучение поведения эффективной границы портфеля минимального риска в условиях гибридной неопределенности в зависимости от ограничений на доходность портфеля // Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2021. Т. 16, № 1. С. 58–69. <https://doi.org/10.26456/fssc79>

Сведения об авторах

1. Язенин Александр Васильевич

заведующий кафедрой информационных технологий Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

E-mail: Yazenin.AV@tversu.ru

2. Солдатенко Илья Сергеевич

доцент кафедры информационных технологий Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ. E-mail: soldis@tversu.ru

COMPARATIVE STUDY OF THE BEHAVIOR OF THE EFFECTIVE BOUNDARY OF MINIMAL RISK PORTFOLIO IN THE CONDITIONS OF HYBRID UNCERTAINTY, DEPENDING ON THE RESTRICTIONS ON THE PROFITABILITY OF THE PORTFOLIO

Yazenin Alexander Vasilyevich

Head of the Department of Information Technologies, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU.
E-mail: Yazenin.AV@tversu.ru

Soldatenko Ilia Sergeyeovich

Associate Professor in the Department of Information Technologies,
Tver State University
Russia, 170100, Tver, Zhelyabova str., 33, TverSU.
E-mail: soldis@tversu.ru

Received 20.04.2021, revised 28.06.2021.

The paper studies the effective boundary of the minimum risk portfolio in the conditions of hybrid uncertainty. For the case of a two-dimensional portfolio, with a restriction on the expected return of the portfolio and a restriction on possibility/necessity and probability on the return of the portfolio, quasi-effective portfolio boundaries are constructed depending on the probability level. The results of numerical experiments are consistent with the theoretical results previously obtained by the authors.

Keywords: portfolio of minimal risk, probability-probabilistic optimization, constraints on possibility/necessity and probability, constraints on probability and possibility/necessity, equivalent deterministic analog, equivalent stochastic analog, fuzzy random variable, the strongest t - norm.

Citation

Yazenin A.V., Soldatenko I.S., “Comparative study of the behavior of the effective boundary of minimal risk portfolio in the conditions of hybrid uncertainty, depending on the restrictions on the profitability of the portfolio”, *Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya [Fuzzy Systems and Soft Computing]*, **16**:1 (2021), 58–69 (in Russian). <https://doi.org/10.26456/fssc79>

References

- [1] Yazenin A., Soldatenko I., “On the Problem of Possibilistic-Probabilistic Optimization with Constraints on Possibility/Probability”, *Advances in Intelligent Systems and Computing*. V.11291, Lecture Notes in Computer Science, eds. Giove S., Masulli F., Fuller R., Springer, Cham, 2019, 43–54.
- [2] Yazenin A.V., Soldatenko I.S., “The problem of possibility-probability optimization with constraints on the possibility/necessity-probability and