Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Поморцев, Алгебраический аппарат последовательностей вывода, *Нечеткие системы и мягкие вычисления*, 2021, том 16, выпуск 2, 96–110

DOI: <https://doi.org/10.26456/fssc80>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 16:15:33

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АППАРАТ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ВЫВОДА¹

Поморцев Л.А.

Московский технический университет связи и информатики, г. Москва

Поступила в редакцию 13.09.2021, после переработки 01.10.2021.

Предлагаемая работа нацелена на искоренение недостатков Последовательностей Вывода (ПВ), присущих программам вычислительных машин. Постановка задачи и предшествующие исследования ПВ составляют содержание работ [10-12]. На завершающем этапе статьи ПВ заменяются Функционально-Эквивалентными (ФЭ) им алгебраическими выражениями, на входе в которые имеют место те же Функциональные Зависимости (ФЗ), что и в исходных ПВ. Результат работы, соответствующий её целям, содержится в Теореме 3.

Ключевые слова: конечный, силлогизм, анализ, синтез, таблица, отношение, атрибут, схема, ключ, функциональная зависимость, граф, логическая схема, кортеж, проекция, гнездование, D-алгебра, ЧП, ЧУМ, РБД, ТРБД.

Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2021. Т. 16, № 2. С. 96–110.
<https://doi.org/10.26456/fssc80>

1. Введение

Мы продолжаем исследования, начало которых было положено обзорной статьёй [9, «Алгебраизация вывода функциональных зависимостей реляционных баз данных»], где декларировался цикл статей, решающих следующие задачи:

- 1.. СИНТЕЗ-АНАЛИЗ *последовательностей вывода функциональных зависимостей*..... [10]
- 2.. *Перестройка порядков каскадно упорядоченного множества*..... [11]
- 3.. *Гигиена последовательностей вывода* [12]
- 4.. *Алгебраический вывод функциональных зависимостей* ... настоящая работа

Особенностью цикла является строгость последовательности, в которой умозаключения передаются по наследству по мере продвижения к цели от 1. к 4. Текущая статья завершает цикл, продолжая [10], [11], [12], в которых, кроме прочего, устанавливаются необходимые здесь и везде методология математических исследований, терминология, а также первичные для данной статьи понятия и утверждения. Это позволяет незамедлительно приступить к продолжению и завершению разработки запланированных тем.

¹Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-01-00625).
© Поморцев Л.А., 2021

2. Алгебры вывода функциональных зависимостей

Уже в [12, §«Постановка задачи алгебраизации вывода»] аксиомы вывода толковались как алгебраические операции и на том этапе можно было бы придать статус “**D**-алгебра” полному множеству ф.зависимостей $2^R \rightarrow 2^R$, а также замыканиям $\mathbb{F}^D \mid \{\{F \subseteq 2^R \rightarrow 2^R \text{ и } D \subseteq F \cup B\}\}$ [12, см. Опр. 2]. В нашем случае понятие “**D**-алгебра” соответствует установкам [2, гл. II «Алгебры», стр. 55] и [3, Гл. 3, §1, п. 3, стр. 109], в которых вместо **D** используется знак Ω . В этой главе **D** пополнится тремя операциями $\{\triangleright, \triangleright, \triangleright\}$ [см. Определения 1, стр. 98; 9, стр. 103; 10, стр. 104], две из которых $\{\triangleright, \triangleright\}$ позволят заменить последовательности вывода функционально-эквивалентными им алгебраическими выражениями в алгебре $\{B1, \triangleright, B3\}$ или эквивалентной ей алгебре $\{B1, \triangleright, B3\}$.

Лемма 1 Аксиома полного накопления [12, Sic! Опр.*8 «**B2** $\cup$ **F6**»]
Если R – схема и $X, Y, Z, V \subseteq R$ её подсхемы, то

$$X \rightarrow Y \text{ и } Z \rightarrow V \Rightarrow X \cup (Z \setminus Y) \rightarrow Y \cup V \quad (1)$$

Док-во. Ввиду важности этого утверждения приведём два решения поставленной задачи:

❶ Здесь будет непосредственно применено [10, Опр. 9, «**Ф3** таблицы ПП», стр. 162] функциональной зависимости к произвольному отношению $\mathbb{W} \vdash R$ [10, см. (4)], на котором имеют место зависимости $X \rightarrow Y$ и $Z \rightarrow V$. Выберем два кортежа $\mathbb{w}, \mathbb{m} \in \mathbb{W} \vdash R$, и предположим, что выполняется равенство $\mathbb{w} \vdash (X \cup (Z \setminus Y)) = \mathbb{m} \vdash (X \cup (Z \setminus Y)) \Rightarrow \mathbb{w} \vdash X = \mathbb{m} \vdash X \Rightarrow \mathbb{w} \vdash Y = \mathbb{m} \vdash Y \Leftarrow; X \rightarrow Y$. Кроме того $\mathbb{w} \vdash (X \cup (Z \setminus Y)) = \mathbb{m} \vdash (X \cup (Z \setminus Y)) \Rightarrow \mathbb{w} \vdash (Z \setminus Y) = \mathbb{m} \vdash (Z \setminus Y) \Rightarrow \mathbb{w} \vdash Z = \mathbb{m} \vdash Z \Leftarrow; \mathbb{w} \vdash Y = \mathbb{m} \vdash Y \Leftarrow; \mathbb{w} \vdash V = \mathbb{m} \vdash V \Leftarrow; Z \rightarrow V \Leftarrow; \mathbb{w} \vdash (Y \cup V) = \mathbb{m} \vdash (Y \cup V) \Leftarrow; \mathbb{w} \vdash Y = \mathbb{m} \vdash Y$

❷ Второй способ использует для вывода **AP**-аксиомы и представлен ниже в виде алгоритма:

1.. $Z \rightarrow V$		дано	
2.. $X \cup Z \rightarrow V$	F2 (пополнение)	из 1	
3.. $X \rightarrow Y$		дано	
4.. $X \cup Z \rightarrow Y$	F2 (пополнение)	из 3	
5.. $X \cup Z \rightarrow Y \cup V$	F3 (аддитивность)	из 2, 4	
6.. $X \rightarrow Z \cap Y$	F4 (проективность)	из 3	
7.. $X \cup (Z \setminus Y) \rightarrow Y \cup V$	F6 (псевдотранзитивность)	из 5, 6	$\Leftarrow; Z \equiv (Z \cap Y) \cup (Z \setminus Y)$

2.1 Операция полного накопления

Обозначение 1 Компоненты **Ф3**. Сделаем выбор $\Phi \in 2^R \rightarrow 2^R$. Слово Φ^H обозначает подсхему, фигурирующую в её *Начале*, а Φ^K – в *Конце*. Из этого следует:

$$\Phi^H, \Phi^K \subseteq R \text{ и } \Phi \equiv \Phi^H \rightarrow \Phi^K \mid \Phi \in 2^R \rightarrow 2^R$$

Любую ф.зависимость можно подвергнуть воздействию унарного правила вывода **F2** (пополнение), изменяющего её начальную подсхему. В результате получим более слабую ф.зависимость в том смысле, что обратного хода **F2** не даёт. Для нетривиального же преобразования начал функциональных зависимостей, в нашем распоряжении остаётся только правило, представленное Леммой 1 [стр. 97] и являющееся лёгким усилением аксиом **B2** и **F6**.

☞ [12, «... вернуться к аксиомам вывода: ... (4)»]

По сути правило вывода () [стр.97] определяет на множестве ф.зависимостей над фиксированной схемой алгебраическую операцию $\blacktriangleright$, формализация которой даётся ниже:

Определение 1 Операция полного накопления

$\Phi_1 \blacktriangleright \Phi_2 := \Phi_1^H \cup (\Phi_2^H \setminus \Phi_1^K) \rightarrow (\Phi_1^K \cup \Phi_2^K)$ Заметим, обозначение $\blacktriangleright$ подчёркивает некоммутативность операции, о чём речь пойдёт ниже, и позволяет сформулировать Лемму 1 [стр.97] в виде импликации $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathbb{F} \Rightarrow \Phi_1 \blacktriangleright \Phi_2 \in \mathbb{F}^{\mathbf{FB}}$, где $\mathbb{F} \mid \checkmark 2^R \rightarrow 2^R$ – произвольное множество ф.зависимостей.

Лемма 2 Связь операции $\blacktriangleright$ с аксиомой В2 [12, (1) Терм. 1 «В2-аксиомы»]

$$X \rightarrow Y \circ Z \rightarrow U \Rightarrow X \rightarrow Y \Rightarrow X \rightarrow Y \blacktriangleright Z \rightarrow U \Leftarrow Z \rightarrow U$$

Док-во. $X \rightarrow Y \circ Z \rightarrow U \Rightarrow Z \subseteq Y \Rightarrow Z \setminus Y = \emptyset \Rightarrow X \rightarrow Y \blacktriangleright Z \rightarrow U = X \rightarrow Y \cup U \Rightarrow \times$

Лемма 3 A, B, C – множества $\Rightarrow A \setminus (B \setminus C) \equiv (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

Док-во. Очевидно

Леммы 4 от (1) до (6). Свойства операции полного накопления

Здесь фигурируют подсхемы $X, Y, Z, U, W \mid \checkmark R$ схемы R и функциональные зависимости $\Phi_i \in 2^R \rightarrow 2^R \mid i \in [1, 0]$:

- (1) Операция $\blacktriangleright$ некоммутативна так как для $\Phi_1, \Phi_2 \in 2^R \rightarrow 2^R$ равенство $(\Phi_1 \blacktriangleright \Phi_2)^H = (\Phi_2 \blacktriangleright \Phi_1)^H$ не всегда выполняется.

Пример: [10, (рефлексия) в табл. F, стр.162]

$$(X \rightarrow Y) \blacktriangleright \overline{W} = X \cup (W \setminus Y) \rightarrow Y \cup W \quad \text{и} \quad \overline{W} \blacktriangleright (X \rightarrow Y) = X \cup W \rightarrow Y \cup W \quad (2)$$

Это означает, что $(X \rightarrow Y) \blacktriangleright \overline{W} = \overline{W} \blacktriangleright (X \rightarrow Y)$ только в случае $X \cup (W \setminus Y) = X \cup W$, что сомнительно ввиду независимости операнда Y от X и W .

- (2) Операция $\blacktriangleright$ ассоциативна, то есть

$$(\Phi_1 \blacktriangleright \Phi_2) \blacktriangleright \Phi_3 = \Phi_1 \blacktriangleright (\Phi_2 \blacktriangleright \Phi_3) \mid \Phi_i := X^i \rightarrow Y^i \mid i \in [1, 3]$$

$$\begin{aligned} \text{Док-во. } \Phi_1 \blacktriangleright \Phi_2 &= X^1 \cup (X^2 \setminus Y^1) \rightarrow Y^1 \cup Y^2 \Rightarrow (\Phi_1 \blacktriangleright \Phi_2) \blacktriangleright \Phi_3 = \\ &= X^1 \cup (X^2 \setminus Y^1) \cup (X^3 \setminus (Y^1 \cup Y^2)) \rightarrow Y^1 \cup Y^2 \cup Y^3 \quad . \\ \Phi_2 \blacktriangleright \Phi_3 &= X^2 \cup (X^3 \setminus Y^2) \rightarrow Y^2 \cup Y^3 \Rightarrow \Phi_1 \blacktriangleright (\Phi_2 \blacktriangleright \Phi_3) = X^1 \cup (X^2 \setminus Y^1) \cup \\ &\quad \cup (X^3 \setminus (Y^2 \cup Y^3)) \rightarrow Y^1 \cup Y^2 \cup Y^3 \end{aligned}$$

- (3) Вычисление $\Pi(k) := \Phi_1 \blacktriangleright \Phi_2 \blacktriangleright \dots \blacktriangleright \Phi_k \mid \Phi_i := X^i \rightarrow Y^i \mid i \in [1, k]$ с учётом ассоциативности $\blacktriangleright$

$\Pi(k)$

Опираясь на рекуррентную связь $\Pi(k) = \Pi(k-1) \blacktriangleright \Phi_k$, докажем индукцией по k равенство

$$\Pi(k) = \bigcup_{i \in [1, k]} (X^i \setminus \bigcup_{j \in [1, i[} Y^j) \rightarrow \bigcup_{i \in [1, k]} Y^i \quad (3)$$

База индукции строится на очевидном утверждении $\Pi(1) = X^1 \rightarrow Y^1$, в котором $X^1 \rightarrow Y^1$ совпадает с правой частью (3) для $k := 1$. Далее, исходя из (3) для $\Pi(k-1)$, осуществим индуктивный переход непосредственными вычислениями:

$$\begin{aligned} \Pi(k-1) \blacktriangleright \Phi_k &= \left(\bigcup_{i \in [1, k-1]} (X^i \setminus \bigcup_{j \in [1, i[} Y^j) \rightarrow \bigcup_{i \in [1, k-1]} Y^i \right) \blacktriangleright (X^k \rightarrow Y^k) = \\ &= \bigcup_{i \in [1, k-1]} (X^i \setminus \bigcup_{j \in [1, i[} Y^j) \cup (X^k \setminus \bigcup_{i \in [1, k-1]} Y^i) \rightarrow \left(\bigcup_{i \in [1, k-1]} Y^i \right) \cup Y^k = \Pi(k) \end{aligned}$$

- (4) Операция $\blacktriangleright$ идемпотентна, то есть $\Phi \blacktriangleright \Phi = \Phi \mid \Phi := X \rightarrow Y$

Док-во. $X \rightarrow Y \blacktriangleright X \rightarrow Y = X \cup (X \setminus Y) \rightarrow Y \cup Y = X \rightarrow Y$

- (5) Операция $\blacktriangleright$ сверх-идемпотентна

Идемпотентность операции $\blacktriangleright$ обобщается, когда в “произведениях”

$\Phi_1 \blacktriangleright \Phi_2 \blacktriangleright \dots \blacktriangleright \Phi_k \mid \Phi_i := X^i \rightarrow Y^i \mid i \in [1, k]$ есть совпадающие “сомножители”. Пусть к примеру $\Phi_p = \Phi_q \mid \{p, q \in [1, k] \text{ и } p < q\} \mid k \in 1 + \mathbb{Z}^+$ и $\Pi(k) := \Phi_1 \blacktriangleright \dots \blacktriangleright \Phi_{q-1} \blacktriangleright \Phi_q \blacktriangleright \Phi_{q+1} \dots \blacktriangleright \Phi_k$. Нашей целью является доказательство равенства $\Pi(k) := \Phi_1 \blacktriangleright \dots \blacktriangleright \Phi_{q-1} \blacktriangleright \Phi_{q+1} \dots \blacktriangleright \Phi_k$, выражающее свойство *сверх-идемпотентности* операции полного накопления.

Док-во. Конец ф.зависимости $\Pi(k)$, представленной равенством (3), проблем не представляет, ибо из равенства $\Phi_p = \Phi_q$ следует $Y^p = Y^q \Rightarrow \Pi^K(k) = \bigcup_{i \neq q} Y^i$. Перейдём к её началу:

$$\begin{aligned} T^i &:= X^i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} Y^j \mid i \in [1, k] \Rightarrow \Pi^H(k) = \bigcup_{i=1}^k T^i. \text{ Из } \Phi_p = \Phi_q \text{ следует } X^p = X^q =: \\ &=: X. \text{ Поскольку } p < q, \text{ то } \bigcup_{j=1}^{p-1} Y^j \subseteq \bigcup_{j=1}^{q-1} Y^j \Rightarrow T^q = X \setminus \bigcup_{j=1}^{q-1} Y^j \subseteq X \setminus \bigcup_{j=1}^{p-1} Y^j = \\ &= T^p \Rightarrow \text{подсхема } T^q \text{ входит в } \Pi^H(k) \text{ фиктивно и поэтому её можно из } \Pi^H(k) \\ &\text{удалить} \Rightarrow \Pi^H(k) = \bigcup_{i=1, i \neq q}^k (X^i \setminus \bigcup_{j=1, j \neq q}^{i-1} Y^j) \end{aligned} \quad (2)$$

В результате получим $\Pi(k) = \bigcup_{i=1, i \neq q}^k (X^i \setminus \bigcup_{j=1, j \neq q}^{i-1} Y^j) \rightarrow \bigcup_{i=1, i \neq q}^k Y^i = \bigtriangleright_{i=1, i \neq q}^k \Phi_i$

☞ **Определение 2** Замыкание $\mathbb{F}$ полным накоплением $=: \mathbb{F}^\blacktriangleright$

Для отображения $f: [1, k] \rightarrow \mathbb{F} \mid \{k \in 1 + \mathbb{Z}^+ \text{ и } \mathbb{F} \subset 2^R \rightarrow 2^R\} \mid \stackrel{\circ}{=} f \in \mathbb{F}^{[1, k]}$ [10, см. Обзн.18, стр.161] введём обозначение

$$\Pi(f, k) := \Pi(f, k, \blacktriangleright) := f(1) \blacktriangleright f(2) \blacktriangleright \dots \blacktriangleright f(k) \mid \Pi(f, 0) := \{\emptyset \rightarrow \emptyset\} \quad (4)$$

Ассоциативность операции $\blacktriangleright$ допускает возможность произвольной группировки сомножителей $f(i) \mid i \in [1, k]$, не искажающей их порядок в строке, а её сверх-идемпотентность позволяет ограничиться только инъективными отображениями f . На основе (4) определим замыкание $\mathbb{F}^\blacktriangleright$ множества $\mathbb{F}$ операцией полного накопления: $\mathbb{F}^\blacktriangleright := \{\Pi(f, k) \mid k \in \mathbb{Z}^+, f \in \mathbb{F}^{[1, k]}\} \Rightarrow \mathbb{F}^\blacktriangleright = \{\Pi(f, k) \mid k \in [0, \mu(\mathbb{F})], f \in \mathbb{F}^{[1, k]} \text{ и } f - \text{инъективно}\} \{\leftarrow; \langle 5 \rangle\} \Rightarrow \mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}^\blacktriangleright \leftarrow \leftarrow; \mathbb{F} \equiv \{\Pi(f, 1) \mid f \in \mathbb{F}^{\{1\}}\} \{\mathbb{F}^{\{1\}} \text{ в смысле [10, Обзн.18 \langle 1 \rangle «Показательная функция множеств», стр.161]} \} \Rightarrow \text{замыкание } \mathbb{F}^\blacktriangleright \text{ является расширением исходного множества } \mathbf{F3} - \mathbb{F}, \text{ что отмечено в нижеследующей лемме \langle 6 \rangle}.$

☞ [12, Обзн.8 «Результат вывода»]

☞ **Обозначение 2** $\{\mathbb{F} \stackrel{\mathbf{E}}{\Rightarrow}\}(()) = \mathbb{F}^{\mathbf{E}} = \max\{\mathbb{F} \stackrel{\mathbf{E}}{\Rightarrow}, \Rightarrow\} \mid \mathbf{E} \subset \mathbf{FB}$

⟨6⟩ Замкнутость операции $\blacktriangleright$ в замыкании $\mathbb{F}^{\mathbf{FB}}$ $\mid$ [12, Опр.2 « $\mathbb{F}^{\mathbf{E}}$ – замыкание $\mathbb{F} \subset 2^R \rightarrow 2^R \Rightarrow \mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}^\blacktriangleright \subseteq \mathbb{F}^{\mathbf{FB}} \equiv \mathbb{F}^{\mathbf{FB}}$ $\mid$ $\mathbb{F}$ аксиомами из $\mathbf{E}$ »]

Док-во. Полное накопление $\blacktriangleright$ всего лишь эмулирует одноимённое правило вывода $()$ [стр.97], полученное с помощью $\mathbf{F}$ -вывода [12, Обзн.4 «Стили вывода»]. Это означает, что любое её применение к какому-либо результату вывода из $\mathbb{F}^{\mathbf{FB}}$ не выведет его за пределы $\mathbb{F}^{\mathbf{FB}}$, то есть $\blacktriangleright$ замкнута в $\mathbb{F}^{\mathbf{FB}}$.

2.2 Чередующиеся последовательности вывода

Для удобства чтения статьи здесь мы цитируем [12, Главу 7] с одноименным названием с небольшим усовершенствованием, располагающим к пониманию смысла чередования $\mathbf{F3}$ в $\mathbf{ПВ}$.

Определения 3 Чередование ф.зависимостей в выводе $\approx$ [12, Опр. 16]

⟨1⟩ Операция $\sqsubseteq$ формирования чередующегося кортежа

²⁾ Абзац будет ещё раз использован в Лемме 9 ⟨3⟩ [стр.105]

Пусть T – некоторое множество. Имея два n -мерных кортежа, $t^i := \langle t_0^i, \dots, t_n^i \rangle \mid t^i \in T \mid \{i \in \langle 0, 1 \rangle \text{ и } n \in 1 + \mathbb{Z}^+\}$ [10, Обзн.10 « $\mathbb{Z}^+$ », стр.154], построим третий $t^0 \sqsubseteq t^1 := \langle t_0^0, t_0^1, t_1^0, t_1^1, \dots, t_n^0, t_n^1 \rangle$ размерности $2n$.

⟨2⟩ *Чередующийся отрезок вывода*

Отрезок вывода или даже последовательность вывода $\mathcal{A}$ ф.зависимости $\mathcal{A}_n \mid n := \mu(\mathcal{A}) - 1$ из заданного множества $\mathbb{A} \mid \mathbb{A} \subseteq 2^R \rightarrow 2^R$ называются *чередующимися*, если выполняются два условия: [12, Опр.10⟨1⟩ «Упорядоченность следования» и Обзн.7 «Начальные отрезки»]

⟨2.1⟩ $\vec{\mathbb{A}} = \left(\mathcal{A}_0 \rightarrow \left((\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_0) \cap \mathbb{A} \sqsubseteq \mathcal{A}' \setminus \mathbb{A} \right) \stackrel{\mathbf{B3}}{\Rightarrow} \mathcal{A}_n \right) \mid \mathcal{A}_0 \in \mathbb{A} \mid \mathbf{NB}$ счёт начинается с 0
Допускается отсутствие части $\mathbf{B3}$. В этом случае в предыдущей строке необходима замена $\mathcal{A}'$ на $\mathcal{A}$.

⟨2.2⟩ $\{\mathcal{A}_{2i}, \mathcal{A}_{2i+1}\} \stackrel{\mathbf{B2}}{\Rightarrow} \mathcal{A}_{2(i+1)} \mid i \in [0, \frac{n-1}{2}]$

⟨3⟩ Чередование в $\mathcal{A}$ констант и выводимых $\Phi\mathbf{Z}$ для наглядности представлено схемой:

В ней символ $\Rightarrow$ изображает всего-лишь один шаг следования/формирования в последовательности вывода $\mathcal{A}$ и является ребром графа $\{\mathcal{A} \cap \mathbb{A}^{\mathbf{FB}}, \Rightarrow\}$ [12, Опр.10⟨1⟩ «Упорядоченность следования»]. Вертикальные шаги выводов $\Downarrow$ предложенной выше схемы связывают $\Phi\mathbf{Z}$, между которыми имеет место одно-шаговое следование $\downarrow$. Горизонтальные выводы $\mathcal{A}_{2(i-1)} \stackrel{\mathbf{B2}}{\Rightarrow} \mathcal{A}_{2i} \mid i \in$

$[1, \frac{n-1}{2}]$ реализуются на протяжении двух шагов следования, послед-

ний из которых совмещён с вертикальным выводом вида $\mathcal{A}_{2i-1} \stackrel{\mathbf{B2}}{\Rightarrow} \mathcal{A}_{2i}$. В любом случае выводы удовлетворяют требованиям каскадности [12, Опр.12 «Частичная упорядоченность $\Rightarrow$ вывода»]

⟨4⟩ Имея в виду [12, (1) Терм. 1 « $\mathbf{B2}$ -аксиомы»], окончательным видом чередующейся последовательности может служить редуцированная форма вывода в виде строки

$$\mathcal{A}_0 \circ \mathcal{A}_1 \circ \mathcal{A}_3 \circ \dots \circ \mathcal{A}_{n-2} := \left(\dots \left((\mathcal{A}_0 \circ \mathcal{A}_1) \circ \mathcal{A}_3 \right) \circ \dots \right) \circ \mathcal{A}_{n-2} := (\sqsubseteq)$$

Таким образом в обозначении $\mathbf{ALT}$ -вывода мы приходим к “чёрному ящику” [12, Обзн.9], скрывающему использование промежуточных чётных $\Phi\mathbf{Z}$ $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_4, \dots, \mathcal{A}_{n-1}$. $\P$ [12, Теорема 4, Обзн.4 «Стили вывода»]

Теорема 1 $\mathbf{ALT}$ -редукция плотного $\mathbf{B12}$ -вывода

- ⟨1⟩ *Плотный $\mathbf{B12}$ -вывод $\mathcal{P}$ можно $\Phi\mathbf{Z}$ -привести в состояние, в котором каждая $\mathbf{AP}$ -ветвь, предусмотренная [12, Теоремой 3 « $\mathbf{AP}$ -декомпозиция плотного $\mathbf{B12}$ -вывода»], приобретает вид ⟨4⟩*
- ⟨2⟩ В результате получается дерево $\mathcal{Q}$, вершинами которого служат выявленные $\mathbf{AP}$ -ветви п.⟨1⟩, имеющие вид $\mathcal{A}$. В нём входящие гнёзда Δ имеют полустепень захода $d(\Delta, \mathcal{Q}) = \mu(\mathbb{A})$ ³ [11, Обзн.7⟨6⟩, стр.104], а внутренние в $\mathcal{Q}$ вершины Δ имеют исходящие полустепени $= 1$ ⁴.

³) Для сравнения $d(\Psi, \mathcal{P}) = 2 \mid \Psi \in \Pi(\mathcal{P})$, так как $\stackrel{\mathbf{B2}}{\Rightarrow} \Psi \Leftarrow \stackrel{\mathbf{B2}}{\Leftarrow}$ [12, Терм.2 «Потенция $\Phi\mathbf{Z}$ в $\mathbf{PB}$ »]

⁴) Это характерно для суперпозиций функций в математике, изучаемых со школьной скамьи.

⟨3⟩ $\mathcal{Q}$ является острым конусом, для которого $\in \max \mathcal{Q} \equiv \mathcal{P}_{\mu(\mathcal{P})-1}$

Док-во вытекает из факта зафиксированного в Примечании ³⁾ [стр.100], из наличия линейного порядка $\Rightarrow$ в **АР**-ветвях а также отсутствия в них повторов **ФЗ** и исходящего гнездования.

2.3 Алгебраическая интерпретация аксиом вывода

Оформим [12, пункт ⟨3⟩ Теоремы 3 «**АР**-декомпозиция плотного **В12**-вывода»] в виде нжеследующего определения:

Определение 4 Сверх-плотный вывод

⌘ [12, Опр.15 ⟨2⟩ «Уплотнение последовательности вывода»]

Плотный вывод называется *сверх-плотным*, если в нём отсутствуют *исходящие гнездования* ($\hat{=}$ *повторные использования*) функциональных зависимостей

[12, Опр.2 « $\mathbb{F}^E$ – замыкание $\mathbb{F}$ аксиомами из **Е**»]

Лемма 5 Алгебраизация сверх-плотного **АР**-вывода

$\mathcal{A} \in \{\mathbb{F} \stackrel{\text{АР}}{\Rightarrow}\} \Rightarrow \mathcal{A}(()) \in \mathbb{F} \blacktriangleright \mathbf{V3} := (\mathbb{F} \blacktriangleright) \mathbf{V3}$ [12, Обзн.8 «Результат вывода»]

ВВ Отсутствие аргументов в выражении $\mathcal{A}(())$, то есть совокупности **ФЗ** используемых в выводе $\mathcal{A}$ означает, что они могут быть представлены в виде $\bar{C}\mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ – константы вывода $\mathcal{A}$. [12, Опр.4 ⟨3⟩ «Последовательность Вывода»]
Аргументы вывода необходимы только для расширения **ПВ** снизу за счёт представления их иными конусами вывода. Здесь необходимости в этом нет.

Док-во. Теорема 1⟨2⟩ позволяет **В12**-часть последовательности $\mathcal{A}$ представить

в виде $(\sqsubseteq) . \Rightarrow \{\{\text{[стр.98] Лемма 2} \Rightarrow\}\} \Rightarrow \mathcal{A}_{k+1} = \begin{cases} \mathcal{A}_k \blacktriangleright \mathcal{A}_{k-1} \Leftarrow \mathcal{A}_k \circ \mathcal{A}_{k-1} \\ \mathcal{A}_{k-1} \blacktriangleright \mathcal{A}_k \Leftarrow \mathcal{A}_k \circ \mathcal{A}_{k-1} \end{cases}$

С учётом ассоциативности операции полного накопления [см. Лемма 4⟨2⟩, стр.98] общий результат даётся выражением (5) для которого $\mathbb{A} = \{f(i) \mid i \in [1, n]\}$ но порядок в нём **ФЗ** может отличаться от $\Rightarrow$ в $\mathcal{A}$, что не влияет на ожидаемый результат. Мы предполагаем, что результаты аксиомы **В1** входят в $\mathbb{F}$ и при необходимости в $\mathbb{A}$, поэтому в утверждении $\mathcal{A}(()) \in \mathbb{F} \blacktriangleright \mathbf{V3}$ использование рефлексий скрыто. Вместе с тем [12, Определение *8 «**АР**-последовательность вывода»] предполагает возможность использования **В3** (проективность) только в конце **АР**-вывода, что учтено в резолютивной части леммы 5.

Теорема 2 Алгебраизация полного накопления

см. Теорема 3 [стр.107]

$$(\mathbb{F} \mathbf{V1}) \blacktriangleright \mathbf{V3} :=: \mathbb{F} \mathbf{V1} \blacktriangleright \mathbf{V3} \equiv \mathbb{F} \mathbf{FB} \mid \mathbb{F} \subseteq 2^R \rightarrow 2^R$$

Скажем то же самое словами: *Каждую последовательность вывода можно заменить функционально эквивалентным* [12, Опр.7 «символ **ФЗ**»] *ей выражением алгебры* $\{\mathbf{V1}, \blacktriangleright, \mathbf{V3}\}$ *и обратно.* [11, маркеры $\subseteq$ и $\supseteq$ см. в (3), стр.100]

Док-во. $\subseteq$ Согласно Лемме 4⟨6⟩ [стр.99] имеем $\mathbb{F} \mathbf{V1} \blacktriangleright \mathbf{V3} \subseteq \mathbb{F} \mathbf{FB}$.

$\supseteq$ Это утверждение является итоговым для всей статьи и ниже расположен путь доказательства, проходящий через утверждения цикла статей, перечисленных во Введении, начиная с уплотнения последовательности вывода $\mathcal{P} \in \{\mathbb{F} \Rightarrow \in \mathbb{F}^{\mathbf{FB}}\}$, до момента, предшествующего получению функционально эквивалентного ей алгебраического выражения.

Инструмент [12]	Декларация утверждений [12]
Определение 15	Уплотнение последовательности вывода, достигается [12, Леммой 3 $\langle 3 \rangle$ «Исходящее гнездование»]
Лемма 3	Сборка повторов и удаление тупиков
Лемма 5	Переставляемость аксиом: $\mathbf{B3} \Rightarrow \mathbf{B2} \mapsto \mathbf{B2} \Rightarrow \mathbf{B3}$
Следствие л-5	Плотный вывод $\mathcal{P}$ можно привести в состояние $\mathbf{B12} \Rightarrow \mathbf{B3}$
Теорема 3	АР -декомпозиция плотного B12 -вывода
Определение 15 $\langle 2 \rangle$	Сверх-плотный вывод тоже, что Опр.4, стр.101 NB отсутствие исходящего гнездования
Теорема 4 тоже, что	ALT -редукция плотного B12 -вывода $\langle 1 \rangle$ Приведение АР -ветвей B12 -вывода к виду $\mathcal{A}_0 \circ \dots \mathcal{A}_1 \circ \dots \mathcal{A}_3 \circ \dots \mathcal{A}_{n-2}$ $\langle 2 \rangle$ Замена B12 -вывода деревом с ветвями $\langle 1 \rangle$

Специальных требований к последовательности вывода $\mathcal{P}$ [12, Лемма 3 «Сборка повторов и удаление тупиков»] не предъявляет. Каждый шаг инструментальной таблицы использует в качестве начальных те условия, которые возникают в конце предыдущего действия. Её последняя строка предполагает замену всех конусов $\Delta_q^p \langle \Delta_t^{p+1}, \dots, \Delta_u^{p+1} \rangle$ из которых склеивается $\mathcal{P}$ [12, Теорема 3 «**АР**-декомпозиция плотного **B12**-вывода»], соответствующими выражениями в алгебре $\{\mathbf{B1}, \blacktriangleright, \mathbf{B3}\}$. В множестве $\mathbb{F}$ используемых ф.зависимостей рефлексий **B1** может не быть. Их возможному возникновению в сверх-уплотнённом выводе мы обязаны трансляции команды **F3** (аддитивность) на язык **B**-аксиом [12, Обзн. 6 «Рефлексия» **(F3)**]. В результате получим алгебраическое $\{\mathbf{B1}, \blacktriangleright, \mathbf{B3}\}$ -выражение, имеющее значение $\mathcal{P}(()) \Rightarrow \mathbb{F}^{\mathbf{B1} \blacktriangleright \mathbf{B3}} \supseteq \mathbb{F}^{\mathbf{FB}}$.

$\triangleright$ и $\triangleright$ Усечения операции полного накопления

В любой функциональной зависимости $X \rightarrow Y$ пересечение начала X и конца Y неинформативно. Это можно вывести непосредственно из [10, Определение 9 «**Ф3** таблицы Π », стр.162]. В самом деле для отношения Π и кортежей $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2 \in \Pi$ импликация

$$\mathfrak{m}_1 \vdash (X \cap Y) = \mathfrak{m}_2 \vdash (X \cap Y) \Rightarrow \mathfrak{m}_1 \vdash (X \cap Y) = \mathfrak{m}_2 \vdash (X \cap Y)$$

являющаяся как бы частью упомянутого определения, бессодержательна. С помощью проективности **B3/F4** от $X \cap Y$ можно избавиться, приведя $X \rightarrow Y$ к виду $X \rightarrow Y \setminus X$ (в общем случае вывод $X \rightarrow Y \Rightarrow X \setminus A \rightarrow Y \setminus A$ не имеет места и в частности для $A := X \cap Y$). Вопрос об обратимости этой процедуры для некоторой совокупности ф.зависимостей $\mathbb{F} \mid \mathbb{F} \preceq 2^R \rightarrow 2^R$ решается ниже.

Определения 5 Коллективное использование операций

Пусть X^1, X^2, X^3 произвольные множества. Коллективное применение какой-либо унарной

$\alpha: X^1 \rightarrow X^2$ или бинарной операции $\omega: X^1 \times X^2 \rightarrow X^3$ к подмножествам $Y^1 \subsetneq X^1$ и $Y^2 \subsetneq X^2$ определяется равенствами:

$$\langle 1 \rangle Y^1 \alpha := \{y \alpha \mid y \in Y^1\} \equiv \bigcup_{y \in Y^1} y \alpha \quad \{ \{; \Rightarrow Y^1 \alpha \subseteq X^1 \alpha \subseteq X^2 \} \}$$

$$\langle 2 \rangle Y^1 \omega Y^2 := \{y^1 \omega y^2 \mid y^1 \in Y^1 \text{ и } y^2 \in Y^2\} \equiv \bigcup_{y^1 \in Y^1} y^1 \omega Y^2 \equiv \bigcup_{y^2 \in Y^2} Y^1 \omega y^2 \quad \{ \{; \Rightarrow Y^1 \omega Y^2 \subseteq X^1 \omega X^2 \subseteq X^3 \} \}$$

Данное определение делает осмысленным использование множеств в качестве операндов абстрактных операций: α – унарной и ω – бинарной.

Определение 6 Операция усечения[°] (верхняя точка с дыркой)

На множестве ф.зависимостей $2^R \rightarrow 2^R$ [10, Обзн.19 «ФЗ схемы R », стр.161] определим унарную операцию усечения: $\dot{\Phi} := \Phi^H \rightarrow \Phi^K \setminus \Phi^H \mid \Phi \in 2^R \rightarrow 2^R$. Из определения следует $\dot{\Phi}^H = \Phi^H$. Если $\mathbb{F} \mid \mathbb{F} \subset 2^R \rightarrow 2^R$ некоторое множество ФЗ, то в соответствии с Определением 5 будем писать $\dot{\mathbb{F}} := \{\dot{\Phi} \mid \Phi \in \mathbb{F}\}$. Таким образом операция усечения $\dot{}$, обладающая с очевидностью свойством идемпотентности $\dot{\dot{\Phi}} \equiv \dot{\Phi}$, является одной из возможных конкретизаций проективности **B3/F4**.

Определение 7 Эквивалентность множеств ф.зависимостей

- ⟨1⟩ Множества функциональных зависимостей $\mathbb{F}, \mathbb{G} \mid \mathbb{F} \subset 2^R \rightarrow 2^R$ эквивалентны, если $\mathbb{F}^{\mathbf{FB}} = \mathbb{G}^{\mathbf{FB}}$ [12, Опр.2 « $\mathbb{F}^{\mathbf{E}}$ – замыкание $\mathbb{F}$ аксиомами из $\mathbf{E}$ »]
- ⟨2⟩ **Обозначение:** $\mathbb{F} \sim \mathbb{G}$ – множества $\mathbb{F}$ и $\mathbb{G}$ эквивалентны

Лемма**6** Незаметность усечения в полном замыкании

$$\mathbb{F} \subset 2^R \rightarrow 2^R \implies \dot{\mathbb{F}} \sim \mathbb{F}$$

Док-во. $\subseteq$ Вложение $\dot{\mathbb{F}} \subseteq \mathbb{F}^{\mathbf{FB}}$ обеспечивается аксиомой **B3/F4**. $\implies$

$$\implies \dot{\mathbb{F}}^{\mathbf{FB}} \subseteq (\mathbb{F}^{\mathbf{FB}})^{\mathbf{FB}} = \mathbb{F}^{\mathbf{FB}}$$

$$\begin{aligned} \supseteq \Phi \in \mathbb{F} &\Rightarrow [10, \text{см. (рефлексия) в табл. F, стр.162}] \dot{\Phi} \blacktriangleright \overline{\dot{\Phi}^H} \in \dot{\mathbb{F}}^{\mathbf{FB}} \quad \{\Leftarrow \\ \Leftarrow; \dot{\mathbb{F}}^{\mathbf{FB}} \supseteq \emptyset^{\mathbf{B1}} \ni \overline{\Phi^H} \Leftarrow \} &\implies \{\{\Phi^K = (\Phi^H \cup \Phi^K) \setminus (\Phi^H \setminus \Phi^K) \text{ и } \dot{\Phi} \blacktriangleright \overline{\dot{\Phi}^H} = \Phi^H \rightarrow \Phi^H \cup \Phi^K = \\ = \overline{\Phi^H} \blacktriangleright \dot{\Phi} ; \Rightarrow \} &\implies \\ \Rightarrow \Phi = (\overline{\Phi^H} \blacktriangleright \dot{\Phi}) \setminus (\emptyset \rightarrow \Phi^H \setminus \Phi^K) &= (\overline{\Phi^H} \blacktriangleright \dot{\Phi}) \mathbf{B3} \quad (5) \\ \Rightarrow \Phi \in \dot{\mathbb{F}}^{\mathbf{FB}} ; \Rightarrow \dot{\mathbb{F}}^{\mathbf{FB}} \supseteq \mathbb{F} &\Rightarrow \times \end{aligned}$$

Определение 8 Теоретико-множественные манипуляции над ф.зависимостями

- ⟨1⟩ Распространим теоретико-множественные операции, обозначаемые ниже символом $*$, на ФЗ, производя их одновременно между подсхемами начала и конца: $\Phi * \Psi := \Phi^H * \Psi^H \rightarrow \Phi^K * \Psi^K$
- Пример: $\Phi \cup \Psi := \Phi^H \cup \Psi^H \rightarrow \Phi^K \cup \Psi^K$ или $\Phi \cap \Psi := \Phi^H \cap \Psi^H \rightarrow \Phi^K \cap \Psi^K$
- ⟨2⟩ Для любой пары ф.зависимостей $\Phi, \Psi \mid \Phi, \Psi \in 2^R \rightarrow 2^R$ определим их вложение друг в друга эквивалентностью $\Phi \subseteq \Psi \doteq \{\{\Phi^H \subseteq \Psi^H \text{ и } \Phi^K \subseteq \Psi^K\}\}$

Обозначение 3 Инверсия $\overleftrightarrow{\Theta}$ ф.зависимости Θ

$$\overleftrightarrow{\Theta} := \Theta^K \rightarrow \Theta^H \quad \{\{\overset{\leftarrow}{\Theta}^H := \Theta^K \text{ и } \overset{\leftarrow}{\Theta}^K := \Theta^H\}\}$$

Определение 9 Операция $\triangleright$ усечённого накопления

$$\Phi_1 \triangleright \Phi_2 := (\Phi_1 \blacktriangleright \Phi_2)^{\circ} \mid \Phi_1, \Phi_2 \in 2^R \rightarrow 2^R$$

$$\text{Sic!} \quad \Phi_1, \Phi_2 \in 2^R \rightarrow 2^R \Rightarrow \textcircled{1} \Phi_1 \triangleright \Phi_2 \in 2^R \rightarrow 2^R \text{ и } \textcircled{2} (\Phi_1 \triangleright \Phi_2)^H \equiv (\Phi_1 \blacktriangleright \Phi_2)^H \quad (6)$$

5)

Лемма 7 Вычисление усечённого накопления

$$\left. \begin{aligned} \langle 1 \rangle \quad \Theta, \Omega \in 2^R \rightarrow 2^R &\Rightarrow \Theta \triangleright \Omega = \dot{\Theta} \cup (\dot{\Omega} \setminus \overleftrightarrow{\Theta}) = \dot{\Theta} \cup (\dot{\Omega} \setminus \overleftrightarrow{\dot{\Theta}}) \\ \langle 2 \rangle \quad \Theta, \Omega \in 2^R \rightarrow 2^R &\Rightarrow \Theta \triangleright \Omega = \Theta \cup (\Omega \setminus \overleftrightarrow{\Theta}) \end{aligned} \right\} \in 2^R \rightarrow 2^R$$

Док-во. ⟨1⟩ В силу $\textcircled{2}(6)$ установка первого равенства сводится к вычислению конца $(\Theta \triangleright \Omega)^K$ последней ф.зависимости цепочки

$$\begin{aligned} \Theta \triangleright \Omega &= (\Theta \blacktriangleright \Omega)^H \rightarrow (\Theta \triangleright \Omega)^K = \Theta^H \cup (\Omega^H \setminus \Theta^K) \rightarrow (\Theta \triangleright \Omega)^K = \dot{\Theta} \cup (\dot{\Omega} \setminus \overleftrightarrow{\Theta})^H \rightarrow (\Theta \triangleright \Omega)^K \\ \times \Rightarrow \text{Опр.9} &\Rightarrow (\Theta \triangleright \Omega)^K = (\Theta \blacktriangleright \Omega)^K \setminus (\Theta \blacktriangleright \Omega)^H = (\Theta^K \cup \Omega^K) \setminus (\Theta^H \cup (\Omega^H \setminus \Theta^K)) = ((\Theta^K \cup \Omega^K) \setminus \\ \setminus (\Omega^H \setminus \Theta^K)) \setminus \Theta^H &= \{[\text{стр.98}] \text{ Лемма 3} ; \Rightarrow\} = (((\Theta^K \cup \Omega^K) \setminus \Omega^H) \cup ((\Theta^K \cup \Omega^K) \cap \Theta^K)) \setminus \Theta^H = \\ &= ((\Theta^K \setminus \Omega^H) \cup (\Omega^K \setminus \Omega^H) \cup \Theta^K) \setminus \Theta^H = (\Theta^K \cup (\Omega^K \setminus \Omega^H)) \setminus \Theta^H = \dot{\Theta} \cup (\dot{\Omega} \setminus \overleftrightarrow{\Theta})^H = \\ &= (\dot{\Theta} \cup (\dot{\Omega} \setminus \overleftrightarrow{\dot{\Theta}}))^K ; \Rightarrow \text{первое равенство.} \end{aligned}$$

5) 1. Обобщение в Лемме 9 (2.2), стр.105

2. [10, Обзн.21 «Класс $2^R \rightarrow 2^R \dots$ », стр.162]

Для второго равенства внесение усечения $\overset{\circ}{\Theta}$ под знак инвертирования $\overleftarrow{\Theta}$ на конец зависимости $\Psi := \overset{\circ}{\Theta} \cup (\overset{\circ}{\Omega} \setminus \overleftarrow{\Theta})$ не влияет. Он остаётся прежним как для $\Phi := \overset{\circ}{\Theta} \cup (\overset{\circ}{\Omega} \setminus \overleftarrow{\Theta})$. Поэтому на основе достигнутого требуется вычислить всего лишь Ψ^H : $\Psi^H = \Theta^H \cup (\Omega^H \setminus (\Theta^K \setminus \Theta^H)) = \{\{\text{Лемма 3} \Rightarrow\}\} = \Theta^H \cup (\Omega^H \setminus \Theta^K) \cup (\Omega^H \cap \Theta^H) = \Theta^H \cup (\Omega^H \setminus \Theta^K) = \Phi^H$; $\Rightarrow \Psi = \Phi \Rightarrow \times$
 $\langle 2 \rangle \Leftarrow \{\{\Leftarrow; \langle 1 \rangle\}\} \overset{\circ}{\Theta} = \Theta$ и $\overset{\circ}{\Omega} = \Omega \Leftarrow \Theta, \Omega \in 2^R \rightarrow 2^R \Leftarrow \times$

Лемма 8 *Незаметность усечения операндов в усечённом накоплении*

$$\Phi_1, \Phi_2 \in 2^R \rightarrow 2^R \implies \overset{\circ}{\Phi}_1 > \overset{\circ}{\Phi}_2 \equiv \Phi_1 > \Phi_2$$

Док-во. Для $\Phi_1 := X \rightarrow Y$ и $\Phi_2 := Z \rightarrow V$ в соответствии с Опр.6 [стр.103] имеем $\overset{\circ}{\Phi}_1 = X \rightarrow Y \setminus X$, $\overset{\circ}{\Phi}_2 = Z \rightarrow V \setminus Z$ и $\overset{\circ}{\Phi}_1, \overset{\circ}{\Phi}_2 \in 2^R \rightarrow 2^R$; $\Rightarrow \{\{\text{Лемма 7}\langle 2 \rangle \Rightarrow\}\} \overset{\circ}{\Phi}_1 > \overset{\circ}{\Phi}_2 = X \cup (Z \setminus (Y \setminus X)) \rightarrow (Y \setminus X) \cup ((V \setminus Z) \setminus X)$; $\Rightarrow (\overset{\circ}{\Phi}_1 > \overset{\circ}{\Phi}_2)^K = (Y \cup (V \setminus Z)) \setminus X$ и $(\overset{\circ}{\Phi}_1 > \overset{\circ}{\Phi}_2)^H = X \cup (Z \setminus (Y \setminus X)) = \{\{\text{Лемма 3} \Rightarrow\}\} = X \cup (Z \setminus Y) \cup (Z \cap X) = X \cup (Z \setminus Y)$; $\Rightarrow \overset{\circ}{\Phi}_1 > \overset{\circ}{\Phi}_2 = X \cup (Z \setminus Y) \rightarrow (Y \cup (V \setminus Z)) \setminus X = \Phi_1 > \Phi_2 \Leftarrow$; Лемма 7 $\langle 1 \rangle$. Ещё раз обращаем внимание на разницу между входным и выходным условиями: $\Phi_1, \Phi_2 \in 2^R \rightarrow 2^R$, но $\Phi_1 > \Phi_2 \in 2^R \rightarrow 2^R$.

Определение 10 *Операция накопления $\triangleright$*

$$\Theta \triangleright \Omega := \Theta \cup (\Omega \setminus \overleftarrow{\Theta}) =: \Omega \triangleleft \Theta \mid \Theta, \Omega \in 2^R \rightarrow 2^R \quad \overline{\boxtimes} \quad [\text{см. Лемма 4, стр.98}]$$

Леммы 9 $\{\{\text{Sic!}(\textcircled{1} \div \textcircled{6}) \text{ и } \langle 1 \rangle \div \langle 4 \rangle\}\}$. *Свойства операций накопления $\triangleright$ и $\triangleright$*

- ① Операция усечённого накопления $>$ замкнута на множестве $2^R \rightarrow 2^R$ разделяющихся зависимостей, что следует из (6)① и подтверждено Леммой 7 [стр.103].
- ② Операции $\triangleright$ и $>$ определены на $2^R \rightarrow 2^R$ и совпадают на множестве $2^R \rightarrow 2^R$ разделяющихся ф.зависимостей: $\Theta > \Omega = \Theta \triangleright \Omega \mid \Theta, \Omega \in 2^R \rightarrow 2^R$
- ③ $\Theta, \Omega \in 2^R \rightarrow 2^R \Rightarrow \begin{cases} (\Theta > \Omega)^H \equiv (\Theta \triangleright \Omega)^H \equiv (\Theta \blacktriangleright \Omega)^H \Leftarrow; \text{Определения 6, 9, 10} \\ (\Theta > \Omega)^K \subseteq (\Theta \triangleright \Omega)^K \subseteq (\Theta \blacktriangleright \Omega)^K \Leftarrow; \text{то же и Лемма 7}\langle 1 \rangle \end{cases}$
см. далее [Лемма 10, стр.106]

④ *Взаимодействие рефлексии с однотипной ФЗ:*

$$\overline{Z} > Z \rightarrow U = Z \rightarrow U \setminus Z \quad \text{и} \quad \overline{Z} \triangleright Z \rightarrow U = Z \rightarrow U \cup Z$$

⑤ *Операции $>$ и $\triangleright$ некоммутативны*

① *Операции $>$ и $\triangleright$ ассоциативны*

$$\langle 1.1 \rangle (\Phi_1 > \Phi_2) > \Phi_3 = \Phi_1 > (\Phi_2 > \Phi_3) \Leftarrow \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \in 2^R \rightarrow 2^R$$

Док-во. Из Определения 9 [стр.103] операции $>$ и Леммы 8 выводим:

$$\begin{aligned} (\Phi_1 > \Phi_2) > \Phi_3 &= (\Phi_1 > \Phi_2) \overset{\circ}{>} \overset{\circ}{\Phi}_3 = (\Phi_1 \blacktriangleright \Phi_2) \overset{\circ}{>} \overset{\circ}{\Phi}_3 = (\Phi_1 \blacktriangleright \Phi_2) \overset{\circ}{>} \overset{\circ}{\Phi}_3 = \\ &= (\Phi_1 \blacktriangleright \Phi_2) > \Phi_3 = ((\Phi_1 \blacktriangleright \Phi_2) \blacktriangleright \Phi_3) = (\Phi_1 \blacktriangleright (\Phi_2 \blacktriangleright \Phi_3)) = \Phi_1 > (\Phi_2 \blacktriangleright \Phi_3) = \\ &= \overset{\circ}{\Phi}_1 > (\Phi_2 \blacktriangleright \Phi_3) = \overset{\circ}{\Phi}_1 > (\Phi_2 > \Phi_3) = \overset{\circ}{\Phi}_1 > (\Phi_2 > \Phi_3) = \Phi_1 > (\Phi_2 > \Phi_3) \end{aligned}$$

Следствие $\Phi_1 > \dots > \Phi_k \equiv (\Phi_1 \blacktriangleright \dots \blacktriangleright \Phi_k)$

$$\langle 1.2 \rangle (\Theta \triangleright \Omega) \triangleright \Psi = \Theta \triangleright (\Omega \triangleright \Psi) \Leftarrow \Theta, \Omega, \Psi \in 2^R \rightarrow 2^R$$

$$\begin{aligned} \text{Док-во. } (\Theta \triangleright \Omega) \triangleright \Psi &= (\Theta \cup (\Omega \setminus \overleftarrow{\Theta})) \triangleright \Psi = (\Theta \cup (\Omega \setminus \overleftarrow{\Theta})) \cup (\Psi \setminus \overleftarrow{\Theta \cup (\Omega \setminus \overleftarrow{\Theta})}) = \\ &= \Theta \cup (\Omega \setminus \overleftarrow{\Theta}) \cup (\Psi \setminus (\overleftarrow{\Theta} \cup (\overleftarrow{\Omega} \setminus \overleftarrow{\Theta}))) = \Theta \cup (\Omega \setminus \overleftarrow{\Theta}) \cup ((\Psi \setminus (\overleftarrow{\Omega} \setminus \overleftarrow{\Theta})) \setminus \overleftarrow{\Theta}) = \\ &= \{\{\text{стр.98} \text{ Лемма 3} \Rightarrow\}\} = \Theta \cup (\Omega \setminus \overleftarrow{\Theta}) \cup ((\Psi \setminus \overleftarrow{\Omega}) \cup (\Psi \cap \overleftarrow{\Theta})) \setminus \overleftarrow{\Theta} = \\ &= \{\{\Psi \cap \overleftarrow{\Theta} \setminus \overleftarrow{\Theta} \subseteq \overleftarrow{\Theta} \Rightarrow\}\} = \Theta \cup (\Omega \setminus \overleftarrow{\Theta}) \cup (\Psi \setminus (\overleftarrow{\Omega} \cup \overleftarrow{\Theta})) = \\ &= \Theta \cup ((\Omega \cup (\Psi \setminus \overleftarrow{\Omega})) \setminus \overleftarrow{\Theta}) = \Theta \triangleright (\Omega \cup (\Psi \setminus \overleftarrow{\Omega})) = \Theta \triangleright (\Omega \triangleright \Psi) \end{aligned}$$

② *Вычисление $\Pi(k, \epsilon) := \Phi_1 \epsilon \Phi_2 \epsilon \dots \epsilon \Phi_k \mid i \in [1, k]$ с учётом ассоциативности $\epsilon \in \{\triangleright, >\}$*

$\Pi(k, \epsilon)$

$$\langle 2.1 \rangle \Pi(k, \triangleright) = \bigcup_{i \in [1, k]} (\Phi_i \setminus \bigcup_{j \in [1, i]} \overleftarrow{\Phi_j})$$

$\Pi(k, \triangleright)$

Док-во. Требуемое равенство устанавливается рутинным применением мат.индукции, базой которой может быть значение $k := 1$ и даже $k := 2$, для которого вполне пригодно равенство

$$\Theta \triangleright \Omega \triangleright \Psi = \Theta \cup (\Omega \setminus \overleftarrow{\Theta}) \cup (\Psi \setminus (\overleftarrow{\Omega} \cup \overleftarrow{\Theta})) ,$$

установленное в п. **1.2**.

$$\langle 2.2 \rangle \quad \Pi(k, \triangleright) = \bigcup_{i \in [1, k]} (\dot{\Phi}_i \setminus \bigcup_{j \in [1, i[} \overleftarrow{\Phi_j^{\delta(j)}}) =: \Psi \left| \Phi_j^{\delta(j)} := \begin{cases} \Phi_j & \Leftarrow \delta(j) := 0 \\ \dot{\Phi}_j & \Leftarrow \delta(j) := 1 \end{cases} \right.$$

Док-во существенно опирается на ассоциативность операции усечённого накопления, в соответствии с которой достаточно установить порядок вычисления $\Pi(k, \triangleright)$ парами скобок в количестве $k-1 \mid 0 < k$:

$$\Pi(k) := \Pi(k, \triangleright) := \Phi_k \triangleright (\Phi_{k-1} \triangleright \dots \triangleright (\Phi_3 \triangleright (\Phi_2 \triangleright \Phi_1)) \dots)$$

Перенумерация **ФЗ** делает доказательство удобнее, но требует внесения поправок в целеполагание: $\Pi(k, \triangleright) = \bigcup_{i=1}^k (\dot{\Phi}_i \setminus \bigcup_{j=i+1}^k \overleftarrow{\Phi_j^{\delta(j)}}) \in 2^R \rightarrow 2^R$.

Результат будет получен методом математической индукции, использующую базу $2^R \rightarrow 2^R \ni \Phi_2 \triangleright \Phi_1 = \dot{\Phi}_2 \cup (\dot{\Phi}_1 \setminus \overleftarrow{\Phi_2^{\delta(2)}}) \{ \Leftarrow; \text{Лемма 7(1) [стр.103]} \}$, рекуррентное соотношение $\Pi(k) = \Phi_k \triangleright \Pi(k-1)$ и *Индук-*

тивное Предположение (ИП) $2^R \rightarrow 2^R \ni \Pi(k-1) = \bigcup_{i=1}^{k-1} (\dot{\Phi}_i \setminus \bigcup_{j=i+1}^{k-1} \overleftarrow{\Phi_j^{\delta(j)}})$:

Лемма 7(1) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow 2^R \rightarrow 2^R \ni \Phi_k \triangleright \Pi(k-1) = \dot{\Phi}_k \cup (\dot{\Pi}(k-1) \setminus \overleftarrow{\Phi_k^{\delta(k)}}) = \\ & \quad \{ \{ \text{ИП} \mid \Pi(k-1) \in 2^R \rightarrow 2^R \Rightarrow \} \} = \\ & = \dot{\Phi}_k \cup (\Pi(k-1) \setminus \overleftarrow{\Phi_k^{\delta(k)}}) = \dot{\Phi}_k \cup \left(\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} (\dot{\Phi}_i \setminus \bigcup_{j=i+1}^{k-1} \overleftarrow{\Phi_j^{\delta(j)}}) \right) \setminus \overleftarrow{\Phi_k^{\delta(k)}} \right) = \\ & = \dot{\Phi}_k \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} (\dot{\Phi}_i \setminus \bigcup_{j=i+1}^k \overleftarrow{\Phi_j^{\delta(j)}}) \right) = \bigcup_{i=1}^k (\dot{\Phi}_i \setminus \bigcup_{j=i+1}^k \overleftarrow{\Phi_j^{\delta(j)}}) = \Pi(k) \in 2^R \rightarrow 2^R \end{aligned}$$

$$\text{Следствие: } \Pi(k, \triangleright) = \bigcup_{i \in [1, k]} (\dot{\Phi}_i \setminus \bigcup_{j \in [1, i[} \overleftarrow{\Phi_j^{\delta(j)}}) = \bigcup_{i \in [1, k]} (\dot{\Phi}_i \setminus \bigcup_{j \in [1, i[} \overleftarrow{\Phi_j^{\delta(j)}})$$

⑥ Операции $\triangleright$ и $\triangleright$ идемпотентны, то есть $\Phi \epsilon \Phi = \Phi \mid \epsilon \in \{ \triangleright, \triangleright \}$ и $\Phi \in 2^R \rightarrow 2^R$

③ Операции $\triangleright$ и $\triangleright$ сверх-идемпотентны: Как и для операции полного накопления $\blacktriangleright$, если в “произведении” $\Pi(k, \epsilon) := \Phi_1 \epsilon \Phi_2 \epsilon \dots \epsilon \Phi_k \mid \{ \{ i \in [1, k] \text{ и } \epsilon \in \{ \triangleright, \triangleright \} \} \}$ есть совпадающие “сомножители”, к примеру $\Phi_p = \Phi_q \mid \{ \{ q \in [1, k] \text{ и } p \in [1, q] \} \}$, то $\Pi(k, \epsilon) = \Phi_1 \epsilon \dots \epsilon \Phi_{q-1} \epsilon \Phi_{q+1} \epsilon \dots \epsilon \Phi_k$

Док-во. Уточним обозначение $\Pi(k, \epsilon) \mid \epsilon \in \{ \triangleright, \triangleright \}$, заменив k на кортеж $\Phi := \langle \Phi_1, \dots, \Phi_k \rangle$ [10, см. Обзн.12 «Кортеж», стр.154] ф.зависимостей. Это позволит написать $\Pi(\Phi, \triangleright) = \Pi(\dot{\Phi}, \triangleright)$ [см. Опр.5, стр.102]. Факт сверх-идемпотентности был установлен для $\Pi^H(\Phi, \blacktriangleright)$ в Лемме 4(5) [стр. 98]. Здесь $\Pi^K(\Phi, \epsilon)$ имеет ту же структуру, что $\Pi^H(\Phi, \blacktriangleright)$, а также $\Pi^H(\Phi, \epsilon)$, где отсутствие разделения выражений в (2.1) и (2.2) на «начало» «конец», характерного для функциональных зависимостей, способствует применить её к $\Pi^K(\Phi, \epsilon)$. Это означает, что при наличии повтора $\Phi_p = \Phi_q$ для выявления сверх-идемпотентности конца $\Pi^K(\Phi, \epsilon)$ можно применить ту же логическую схему, которая в Лемме 4(5) выделена левой вертикалью, но поменяв ней местами буквы X и Y , которые привязываются к местным условиям назначениями $X_i := (\Phi_i^\delta)^K$ и $Y_i := (\Phi_i^\delta)^H \mid i \in [1, k]$, где символ δ служит признаком усечения, как и в (2.2).

NB Сверх-идемпотентность операции $\triangleright$ можно вывести из Леммы 8(2) [стр.104]

☞ **Определение 11** Замыкание $\mathbb{F}$ накоплением $\epsilon \in \{\triangleright \triangleright \blacktriangleright\}$ $=: \mathbb{F}^\epsilon$

$\Pi(f, k, \epsilon)$

Распространим Определение 2 [стр.99] на все операции накопления, сделав третий аргумент в (5) [стр.99] свободным: $\Pi(f, k, \epsilon) := f(1)\epsilon f(2)\epsilon \dots \epsilon f(k) \mid \epsilon \in \{\triangleright \triangleright \blacktriangleright\}$. Так же как и в (5) ассоциативность операции ϵ допускает возможность неиспользования в $\Pi(f, k, \epsilon)$ скобок, группирующих сомножители в правой части, а её сверх-идемпотентность позволяет ограничиться только инъективными отображениями $f: [1, k] \rightarrow \mathbb{F} \mid \{k \in 1+\mathbb{Z}^+ \text{ и } \mathbb{F} \overset{R}{\subset} 2^R \rightarrow 2^R\}$. Теперь, обобщая (5), замыкание $\mathbb{F} \mid \overset{R}{\subset} 2^R \rightarrow 2^R$ накоплением $\epsilon \in \{\triangleright \triangleright \blacktriangleright\}$ определим формулой: $\mathbb{F}^\epsilon := \{\Pi(f, k, \epsilon) \mid k \in [0, \mu(\mathbb{F})], f \in \mathbb{F}^{[1, k]} \text{ и } f - \text{инъективно} \mid \Pi(f, 0, \epsilon) := \emptyset\}$. Поскольку $\mathbb{F} \equiv \{\Pi(f, 1, \epsilon) \mid f \in \mathbb{F}^{\{1\}}\}$, то $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}^\epsilon$, т.е. замыкание $\mathbb{F}^\epsilon$ является расширением исходного множества ф.зависимостей $\mathbb{F}$.

(4) Замкнутость операций $\triangleright$ и $\blacktriangleright$ в замыкании:

$$\mathbb{F} \overset{R}{\subset} 2^R \rightarrow 2^R \Rightarrow \mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}^\epsilon \subseteq \mathbb{F}^{\mathbf{FB}} \equiv \mathbb{F}^{\mathbf{FB}\epsilon} \mid \epsilon \in \{\triangleright, \triangleright\}$$

Док-во. Лемма 10, следующая ниже, не зависит от текущего утверждения и ссылки из неё на предшествующие утверждения настоящей работы отсутствуют. Это даёт нам право использовать её результаты здесь: Лемма 10(3) $\Rightarrow \epsilon \mathbb{F}^\epsilon \in \mathbb{F}^{\blacktriangleright \mathbf{B3}} \subseteq \mathbb{F}^{\mathbf{FB}}$. В истинный предикат $\epsilon \mathbb{F}^\epsilon \in \mathbb{F}^{\blacktriangleright \mathbf{B3}}$ подставим $\mathbb{F}^{\mathbf{FB}}$ вместо $\mathbb{F}$ $\Rightarrow \mathbb{F}^{\mathbf{FB}\epsilon} \subseteq \mathbb{F}^{\mathbf{FB}\blacktriangleright \mathbf{B3}} = \mathbb{F}^{\mathbf{FB}}$ $\Rightarrow \mathbb{F}^{\mathbf{FB}\epsilon} = \mathbb{F}^{\mathbf{FB}}$ $\Rightarrow$ (4)

Лемма 10 Монотонность алгебры $\{\triangleright \triangleright \blacktriangleright\}$ [обобщение Леммы 9③, стр.104]

$$\begin{array}{l} \langle 1 \rangle (\Phi_1 \triangleright \dots \triangleright \Phi_k)^H \equiv (\Phi_1 \triangleright \dots \triangleright \Phi_k)^H \equiv (\Phi_1 \blacktriangleright \dots \blacktriangleright \Phi_k)^H \\ \langle 2 \rangle (\Phi_1 \triangleright \dots \triangleright \Phi_k)^K \subseteq (\Phi_1 \triangleright \dots \triangleright \Phi_k)^K \subseteq (\Phi_1 \blacktriangleright \dots \blacktriangleright \Phi_k)^K \\ \langle 3 \rangle \Phi_1 \triangleright \dots \triangleright \Phi_k \equiv (\Phi_1 \blacktriangleright \dots \blacktriangleright \Phi_k) \cdot \mathbf{B3} \text{ и } \Phi_1 \triangleright \dots \triangleright \Phi_k \equiv (\Phi_1 \triangleright \dots \triangleright \Phi_k) \cdot \mathbf{B3} \end{array} \quad \begin{array}{l} \Leftarrow; \\ \left[\begin{array}{l} (2), \text{ Леммы } 9\textcircled{3}, \\ \langle 2.1 \rangle, \\ \text{[стр.104]} \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \langle 2.2 \rangle \\ \end{array}$$

Лемма 11 Инварианты накоплений

NB первый инвариант представлен в Лемме 10(1)

$$S(\epsilon) := \Pi^H(\Phi, \epsilon) \cup \Pi^K(\Phi, \epsilon) = \bigcup_{i=1}^k (\Phi_i^H \cup \Phi_i^K) =: T \mid \epsilon \in \{\blacktriangleright \triangleright \triangleright\} \text{ и } k := \mu(\Phi)$$

Док-во. Для накоплений $\epsilon \in \{\blacktriangleright \triangleright \triangleright\}$ проведём отдельные вычисления, начинающиеся словом $S(\epsilon) =$, и примем обозначения $X^i := \Phi_i^H$, $Y^i := \Phi_i^K$, с целью лучшего восприятия громоздких выкладок, которые представим без использования обобщающих объединений “от ... / до ...”:

⚡ Продолжение и концовку доказательства см. в вертикальном тексте на следующей стр.

$$\begin{array}{l}
S(\blacktriangleright) = X^1 \cup (X^2 \setminus Y^1) \cup (X^3 \setminus (Y^1 \cup Y^2)) \cup (X^4 \setminus (Y^1 \cup Y^2 \cup Y^3)) \cup \dots \cup (X^k \setminus (Y^1 \cup \dots \cup Y^{k-1})) \cup T \\
\quad \cup Y^1 \quad \cup Y^2 \quad \cup Y^3 \quad \cup Y^{k-1} \quad \cup Y^k \\
S(\triangleright) = X^1 \cup (X^2 \setminus Y^1) \cup (X^3 \setminus (Y^1 \cup Y^2)) \cup (X^4 \setminus (Y^1 \cup Y^2 \cup Y^3)) \cup \dots \cup (X^k \setminus (Y^1 \cup \dots \cup Y^{k-1})) \cup T \\
\quad \cup Y^1 \cup (Y^2 \setminus X^1) \cup (Y^3 \setminus (X^1 \cup X^2)) \cup (Y^4 \setminus (X^1 \cup X^2 \cup X^3)) \cup \dots \cup (Y^k \setminus (X^1 \cup \dots \cup X^{k-1})) = T \\
S(\triangleright) = X^1 \cup (X^2 \setminus Y^1) \cup (X^3 \setminus (Y^1 \cup Y^2)) \cup (X^4 \setminus (Y^1 \cup Y^2 \cup Y^3)) \cup \dots \cup (X^k \setminus (Y^1 \cup \dots \cup Y^{k-1})) \cup T \\
\quad \cup Y^1 \cup (Y^2 \setminus X^1) \cup (Y^3 \setminus (X^1 \cup X^2)) \cup (Y^4 \setminus (X^1 \cup X^2 \cup X^3)) \cup \dots \cup (Y^k \setminus (X^1 \cup \dots \cup X^{k-1})) = T
\end{array}$$

Колонки, связывающие Y^i и X^i $| i \in [1, k]$ наклонной чертой обозначают разность $Y^i \setminus X^i = \overset{\circ}{\Phi}_i^K$.

Теорема 3 Алгебраизация накоплений

см. Теорема 2 [стр.101]

$$\mathbb{F}^{B1\epsilon B3} \equiv \mathbb{F}^{FB} \mid \{ \{ \epsilon \in \{ \triangleright \blacktriangleright \} \text{ и } \mathbb{F} \preceq 2^R \rightarrow 2^R \} \}$$

Док-во. Значение $\epsilon := \blacktriangleright$ было рассмотрено в Теореме 2. В остатке $\epsilon := \triangleright$.

Лемма 10(3) $\Rightarrow \mathbb{F}^{B1\triangleright B3} \subseteq \mathbb{F}^{B1\blacktriangleright B3}$. Поэтому сосредоточимся на доказательстве противоположного включения

$$\mathbb{F}^{B1\blacktriangleright B3} \supseteq \mathbb{F}^{B1\triangleright B3} \ni \Pi(\Phi, \blacktriangleright),$$

которое даётся выражением

$$\Pi(\Phi, \blacktriangleright) = \overline{\Pi^H(\Phi, \triangleright)} \triangleright \Pi(\Phi, \triangleright) \cdot B3 \in \mathbb{F}^{B1\triangleright B3} \quad (\star)$$

с последующими комментариями:

$$[\text{стр.104}] \text{ Лемма 9} \oplus \Rightarrow \overline{\Pi^H(\Phi, \triangleright)} \triangleright \Pi(\Phi, \triangleright) =$$

$$= \Pi^H(\Phi, \triangleright) \rightarrow \Pi^H(\Phi, \triangleright) \cup \Pi^K(\Phi, \triangleright) =$$

$$= \{ [\text{стр.106}] \text{ Леммы 10(1) и 11} \Rightarrow \} =$$

$$= \Pi^H(\Phi, \blacktriangleright) \rightarrow \bigcup_{i=1}^k (\Phi_i^H \cup \Phi_i^K) =$$

$$= \Pi(\Phi, \blacktriangleright) \cup (\emptyset \rightarrow \bigcup_{i=1}^k \Phi_i^H) \quad [\text{см. Опр.8, стр.103}]$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow (\star) \Rightarrow$ Теорема 3.

⁶⁾ [10, (рефлексия) в табл. F, стр.162]

Заключение

Теорема 3 завершает решение задачи, поставленной в Д Е К Л А Р А Ц И И см. [9, § 3.3 «Постановка задачи алгебраизации вывода», стр.67] и [12].

Список литературы

- [1] Дейт К.Д. Введение в системы Баз Данных. М., СПб.: Издательский дом Вильямс, 2001.

- [2] Кон П. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968.
- [3] Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. М.: Физматлит, 1962.
- [4] Мейер Д. Теория реляционных баз данных. М.: Мир, 1987.
- [5] Поморцев Л.А. Вычисление моментов порядковых статистик последовательных сумм симметрически зависимых случайных величин // Труды Московского математического общества. 1983. Т. 46. С. 201–242.
- [6] Поморцев Л.А. Комбинаторно-симметрический анализ многомерных случайных блужданий // Дискретная математика. 1991. Т. 3, № 1. С. 21–41.
- [7] Поморцев Л.А. Алгебраическая интерпретация полноты аксиом вывода // Фундаментальная и прикладная математика. 2002. Т. 8, № 1. С. 195–219.
- [8] Поморцев Л.А. Алгебры функциональных зависимостей в теории реляционных баз данных // Труды Института Системного анализа РАН. Динамика неоднородных систем. 2007. Т. 29, № 1. С. 169–183.
- [9] Поморцев Л.А., Цурков В.И. Алгебраизация вывода функциональных зависимостей реляционных баз данных // Известия РАН. Теория и системы управления. 2019. № 2. С. 58–74. <https://doi.org/10.1134/S000233881902015X>
- [10] Поморцев Л.А., Цурков В.И. СИНТЕЗ-АНАЛИЗ последовательностей вывода функциональных зависимостей таблиц // Известия РАН. Теория и системы управления. 2020. Т. 6. С. 152–176.
- [11] Поморцев Л.А., Цурков В.И. Перестройка порядков каскадно упорядоченного множества // Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2020. Т. 15, № 2. С. 96–115. <https://doi.org/10.26456/fssc65>
- [12] Поморцев Л.А., Цурков В.И. Гигиена последовательностей вывода // Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2021. Т. 16, № 1. С. 34–57. <https://doi.org/10.26456/fssc78>

Образец цитирования

Поморцев Л.А. Алгебраический аппарат последовательностей вывода // Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2021. Т. 16, № 2. С. 96–110. <https://doi.org/10.26456/fssc80>

Сведения об авторах

1. Поморцев Леонид Александрович

доцент кафедры информатики Московского технического университета связи и информатики.

Россия, 123423, г. Москва, Северо-Западный Административный Округ, ул. Народно-Ополчения, д. 32, МТУСИ. E-mail: brickfactory.org@mail.ru

ALGEBRAIC APPARATUS OF A SEQUENCES OF THE DERIVATION

Pomortsev Leonid Alexandrovitch

Associate Professor of the Department of Informatics, Moscow Technical University
of Communications and Informatics

*Russia, 123423, Moscow, North-Western Administrative District, 32 Narodny
Opolcheniya str., MTUSI.*

E-mail: brickfactory.org@mail.ru

Received 13.09.2021, revised 01.10.2021.

The offered work is aimed at eradication of shortcomings of the Sequences of the Derivation (**SD**) inherent in programs of computers. The establish of the problem and the previous researches **SD** make the content of works [10-12]. At the final stage of this article **SD** are replaced with algebraic expressions which is Functionally Equivalent (**FE**) to them on which entrance the same Functional Dependences (**FD**), as in initial **SD**. The result of work answering her purpose contains in the Theorem 3.

Keywords: finite, syllogism, analysis, synthesis, database table, relation, attribute, scheme, key of table, functional dependence, graph, logical scheme, cortege, projection, nesting, D-algebra, **PO**, **POS**, **RDB**, **TRDB**.

Citation

Pomortsev L.A., "Algebraic apparatus of a Sequences of the Derivation", *Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya [Fuzzy Systems and Soft Computing]*, **16:2** (2021), 96–110 (in Russian). <https://doi.org/10.26456/fssc80>

References

- [1] Dejt K.D., *Vvedenie v sistemy Baz Danykh [Introduction to Database Systems]*, Izdatelskij dom Vilyams, M., SPb., 2001 (in Russian).
- [2] Kon P., *Universalnaya algebra [Universal algebra]*, Mir Publ., Moscow, 1968 (in Russian).
- [3] Kurosh A.G., *Lektsii po obshchej algebre [Lectures on general algebra]*, Fizmatlit Publ., Moscow, 1962 (in Russian).
- [4] Mejer D., *Teoriya relyatsionnykh baz danykh [The theory of relational databases]*, Mir Publ., Moscow, 1987 (in Russian).
- [5] Pomortsev L.A., "Calculation of moments of ordinal statistics of consecutive sums of symmetrically dependent random variables", *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva [Proceedings of the Moscow Mathematical Society]*, **46** (1983), 201–242 (in Russian).

- [6] Pomortsev L.A., “Combinatorial-symmetric analysis of multidimensional random walks”, *Diskretnaya matematika [Discrete mathematics]*, **3**:1 (1991), 21–41 (in Russian).
- [7] Pomortsev L.A., “Algebraic interpretation of the completeness of the axioms of inference”, *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika [Fundamental and Applied Mathematics]*, **8**:1 (2002), 195–219 (in Russian).
- [8] Pomortsev L.A., “Functional dependency algebras in relational database theory”, *Trudy Instituta Sistemnogo analiza RAN. Dinamika neodnorodnykh sistem [Proceedings of the Institute of System Analysis of the Russian Academy of Sciences. Dynamics of inhomogeneous systems]*, **29**:1 (2007), 169–183 (in Russian).
- [9] Pomortsev L.A., Tsurkov V.I., “Algebraization of inferring functional dependencies in relational databases”, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, **58**:2 (2019), 212–228, <https://doi.org/10.1134/S000233881902015X>.
- [10] Pomortsev L.A., Tsurkov V.I., “SYNTHESIS AND ANALYSIS OF sequences of output of functional dependencies of tables”, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, **6** (2020), 152–176.
- [11] Pomortsev L.A., Tsurkov V.I., “Order alteration in a cascade-ordered set”, *Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya [Fuzzy Systems and Soft Computing]*, **15**:2 (2020), 96–115 (in Russian), <https://doi.org/10.26456/fssc65>.
- [12] Pomortsev L.A., Tsurkov V.I., “Hygiene of derivation sequences”, *Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya [Fuzzy Systems and Soft Computing]*, **16**:1 (2021), 34–57 (in Russian), <https://doi.org/10.26456/fssc78>.