Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Рогонов, И. С. Солдатенко, Анализ сложенного нормального распределения случайной величины, *Нечеткие системы и мягкие вычисления*, 2021, том 16, выпуск 2, 111–122

DOI: <https://doi.org/10.26456/fssc84>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 12:10:53

АНАЛИЗ СЛОЖЕННОГО НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ¹

Рогонов С.А., Солдатенко И.С.

Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 01.12.2021, после переработки 23.12.2021.

Анализ поведения случайных величин после различных преобразований можно применять при решении многих нетривиальных задач. В частности, решения, которые невозможно выразить аналитически, с точки зрения практической применимости способны давать результаты с точностью, достаточной для вычислений, вынося невыразимую невязку аналитического решения далеко за рамки требуемой погрешности. В настоящей работе исследовано поведение модуля нормально распределенной случайной величины и выяснено, при каких условиях можно пренебречь операцией взятия абсолютного значения и аппроксимировать модуль случайной величины *похожим* распределением вероятностей.

Ключевые слова: задача стохастической оптимизации, модуль случайной величины, сложное нормальное распределение, коэффициенты асимметрии и эксцесса, тест нормальности выборки, библиотека SciPy.

Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2021. Т. 16, № 2. С. 111–122.
<https://doi.org/10.26456/fssc84>

Введение

В работах [1–3] были исследованы задачи оптимизации в условиях гибридной неопределенности возможно-вероятностного типа. Построены эквивалентные аналоги, позволяющие находить решение непрямым методом. В работе [2] показано, что очередность снятия принципов неопределенности не является коммутативной. В указанной работе вместо детерминированного аналога удалось построить только стохастический, из-за того, что случайные функции содержат модули нормальных случайных величин, что делает распределение асимметричным и не позволяет избавиться от вероятности методом, использованным ранее в этой же работе для другой модели. В настоящей работе мы продолжаем данное исследование и выясняем, при каких условиях можно пренебречь операцией взятия модуля и аппроксимировать модуль случайной величины *похожим* распределением вероятностей.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №20-01-00669).

© Рогонов С.А., Солдатенко И.С., 2021

1. Постановка задачи

В работе [1] был получен следующий стохастический аналог задачи возможно-вероятностного программирования:

$$k \rightarrow \min, \quad \mathbf{P} \left\{ \sum_{j=1}^n A_{0j}^-(\omega) x_j \leq k \right\} \geq p_0, \quad (1)$$

$$\begin{cases} \mathbf{P} \left\{ \sum_{j=1}^n A_{ij}^-(\omega) x_j \leq B_i^+(\omega) \right\} \geq p_i, & i = 1, \dots, m, \\ x \in X, \end{cases} \quad (2)$$

в котором

$$A_{ij}^-(\omega) = a_{ij}(\omega) + \hat{a}_{ij}\sigma_{ij}(\omega) - \hat{d}_{ij}|\sigma_{ij}(\omega)|\sqrt{-\ln \alpha_i},$$

$$B_i^+(\omega) = b_i(\omega) + \hat{b}_i\sigma_i(\omega) + \hat{d}_i|\sigma_i(\omega)|\sqrt{-\ln \alpha_i}, \quad B_0^+(\omega) \equiv 0,$$

где все $a_{ij}(\omega)$, $\sigma_{ij}(\omega)$, $b_i(\omega)$ и $\sigma_i(\omega)$ — независимые нормально распределенные случайные величины, а $\hat{a}_{ij}, \hat{d}_{ij} \in \mathbb{R}^n$, $\hat{b}_i, \hat{d}_i \in \mathbb{R}_+^n$. Подробную информацию об исходной модели возможно-вероятностного программирования и методе построения ее эквивалента см в [1–3].

Ввиду нелинейности операции взятия абсолютного значения становится аналитически неудобно работать с такого рода выражением над случайными величинами. Поставим задачу — выяснить, при каких условиях возможно пренебречь операцией взятия модуля и аппроксимировать случайную величину *похожим* законом распределения.

Примем за основу случайную величину, подчиненную закону нормального распределения $X = N(\mu, \sigma^2)$. Данная величина имеет известные характеристики, в частности:

- математическое ожидание $E[X] = \mu$,
- дисперсия $D[X] = \sigma^2$,
- коэффициент асимметрии $A_s = 0$,
- коэффициент эксцесса $\gamma_2 = 0$.

Требуется проанализировать случайную величину, заданную следующим выражением $Z(\omega) = |X(\omega)|$. Распределение данной случайной величины известно как «*сложенное нормальное распределение*» [9–11] и имеет следующие характеристики:

- Математическое ожидание $E[Z] = \sigma \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \cdot [1 - 2\Phi(-\frac{\mu}{\sigma})]$.
Здесь $\Phi(x) = \frac{1}{2}[1 + \operatorname{erf}(\frac{x}{\sqrt{2}})]$ — функция стандартного нормального распределения вероятностей. Примем следующее обозначение: $\mu_z = E[Z]$.
- Дисперсия $D[Z] = \mu^2 + \sigma^2 - \mu_z^2$. Примем следующее обозначение: $\sigma_z = \sqrt{D[Z]}$.

Остальные характеристики Z , в частности коэффициенты асимметрии и эксцесса, будут вычислены с помощью производящей функции моментов:

$$M(t) = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t} \cdot \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma} + \sigma t\right) + e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} - \mu t} \cdot \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma} + \sigma t\right).$$

2. Коэффициенты асимметрии и эксцесса

Данные коэффициенты можно выразить через начальные моменты, а именно, коэффициент асимметрии выражается формулой

$$A_s = \frac{E[Z^3] - 3\mu_z \sigma_z^2 - \mu_z^3}{\sigma_z^3}.$$

Вместо коэффициента эксцесса γ_2 будет удобнее рассчитать его альтернативу g_2 , связанную с ним выражением $\gamma_2 = g_2 - 3$, так как в тестах на нормальность принято использовать именно g_2 :

$$g_2 = \frac{E[Z^4] - 4\mu_z E[Z^3] + 6\mu_z^2 \sigma_z^2 + 3\mu_z^4}{\sigma_z^4}.$$

Начальные моменты получим с помощью производящей функции моментов

$$E[Z^k] = \left. \frac{d^k}{dt^k} M(t) \right|_{t=0}.$$

Указанные выше вычисления произведены с помощью системы компьютерной алгебры SymPy [4] на языке программирования Python 3:

```
import sympy as sp

# введём общие символы
mu, sigma, x, t, Ez3, Ez4 = sp.symbols(['mu', 'sigma', 'x', 't',
'E[Z^{3}]', 'E[Z^{4}]'])

# дадим определение известным величинам
Fita = sp.Lambda(x, (sp.erf(x / sp.sqrt(2)) + 1) / 2)
mu_z = sp.Lambda((mu, sigma),
(sigma * sp.sqrt(2 / sp.pi) * sp.exp(-mu ** 2 / (2 * sigma ** 2)))
+ mu * (1 - 2 * Fita(-mu / sigma)))
sigma_z = sp.Lambda((mu, sigma), sp.sqrt(mu ** 2 + sigma ** 2 -
mu_z(mu, sigma) ** 2))

Mt = sp.Lambda((mu, sigma, t),
sp.exp(sigma ** 2 * t ** 2 / 2 + mu * t) *
Fita(mu / sigma + sigma * t)
+ sp.exp(sigma ** 2 * t ** 2 / 2 - mu * t) *
Fita(-mu / sigma + sigma * t))

# введём формулы коэффициентов асимметрии и эксцесса
skewness = sp.Lambda((mu, sigma, Ez3),
(Ez3 - 3 * mu * sigma ** 2 - mu ** 3) / sigma ** 3)
```

```
kurtosis = sp.Lambda((mu, sigma, Ez3, Ez4),
    (Ez4 - 4 * mu * Ez3 + 6 * mu ** 2 * sigma ** 2 + 3 * mu ** 4)
    / sigma ** 4)
```

```
# получим выражения для начальных моментов
```

```
ez3 = sp.diff(Mt(mu, sigma, t), t, 3).expand().subs(t, 0)
ez4 = sp.diff(Mt(mu, sigma, t), t, 4).expand().subs(t, 0)
```

```
# подставим начальные моменты в формулы коэффициентов
```

```
sk = skewness(mu, sigma, ez3)
ku = kurtosis(mu, sigma, ez3, ez4)
```

В результате получились следующие выражения

$$A_s = \frac{\mu^3 \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}\mu}{2\sigma}\right)}{\sigma^3} - \frac{\mu^3}{\sigma^3} + \frac{\sqrt{2}\mu^2 e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{\pi}\sigma^2} + \frac{3\mu \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}\mu}{2\sigma}\right)}{\sigma} - \frac{3\mu}{\sigma} + \frac{2\sqrt{2}\mu e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{\pi}},$$

$$g_2 = -\frac{4\mu^4 \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}\mu}{2\sigma}\right)}{\sigma^4} + \frac{4\mu^4}{\sigma^4} - \frac{4\sqrt{2}\mu^3 e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{\pi}\sigma^3} - \frac{12\mu^2 \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}\mu}{2\sigma}\right)}{\sigma^2} + \frac{12\mu^2}{\sigma^2} - \frac{8\sqrt{2}\mu e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{\pi}\sigma} + 3.$$

Нетрудно заметить, что данные выражения несколько упрощаются, если ввести $\alpha = \frac{\mu}{\sigma}$:

```
a = s.symbols(['alpha'])
```

```
sk_ = sk.subs(mu, a * sigma).simplify()
ku_ = ku.subs(mu, a * sigma).simplify()
```

$$A_s = \alpha^3 \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}\alpha}{2}\right) - \alpha^3 + \frac{\sqrt{2}\alpha^2 e^{-\frac{\alpha^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} + 3\alpha \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}\alpha}{2}\right) - 3\alpha + \frac{2\sqrt{2}\alpha e^{-\frac{\alpha^2}{2}}}{\sqrt{\pi}},$$

$$g_2 = -4\alpha^4 \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}\alpha}{2}\right) + 4\alpha^4 - \frac{4\sqrt{2}\alpha^3 e^{-\frac{\alpha^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} - 12\alpha^2 \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}\alpha}{2}\right) + 12\alpha^2 - \frac{8\sqrt{2}\alpha e^{-\frac{\alpha^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} + 3.$$

Из полученных выражений следует, что коэффициенты асимметрии и эксцесса не зависят от среднеквадратичного отклонения, и единственным влияющим на распределение фактором является сдвиг среднего относительно нуля в **сигмах**.

3. Тесты нормальности выборки

Существует большое количество тестов выборки на нормальность. Рассмотрим наиболее популярный из них — комбинированный тест, а также его составные компоненты — тесты асимметрии и эксцесса.

3.1 Тест асимметрии выборки

Тест асимметрии выборки основан на работе [5]. Идея метода заключается в получении характеристики случайной выборки на основе её коэффициента асимметрии с известным законом распределения. В частности, путём вычислений получается характеристика, имеющая стандартное нормальное распределение.

В данном разделе приведём только адаптированный код на Python 3, применяемый в дальнейшем для численных экспериментов. За основу взята реализация `skewtest` из библиотеки SciPy.

```
# вводимые для расчёта характеристики
b2 = sp.Symbol('b_2', real=True) # коэфф. асимметрии
n = sp.Symbol('n', integer=True, positive=True) # размер сл. выборки

# промежуточные вычисления
y = b2 * sp.sqrt(((n + 1) * (n + 3)) / (6 * (n - 2)))
beta2 = (3 * (n ** 2 + 27 * n - 70) * (n + 1) * (n + 3) /
         ((n - 2) * (n + 5) * (n + 7) * (n + 9)))
W2 = -1 + sp.sqrt(2 * (beta2 - 1))
delta = 1 / sp.sqrt(sp.log(W2) / 2)
alpha = sp.sqrt(2 / (W2 - 1)).simplify()

# формула характеристики выборки на основе коэфф. асимметрии
skew_zscore = (delta * sp.log(y / alpha +
                             sp.sqrt((y / alpha) ** 2 + 1))).simplify()
```

3.2 Тест эксцесса выборки

Данный тест основан на работе [6]. Его идея заключается в получении характеристики случайной выборки на основе её коэффициента эксцесса с известным законом распределения. В частности, путём вычислений получается характеристика, имеющая стандартное нормальное распределение.

В этом разделе приведём только адаптированный код на Python 3, применяемый в дальнейшем для численных экспериментов. За основу взята реализация `kurtosistest` из библиотеки SciPy.

```
# вводимые для расчёта характеристики
b2 = sp.Symbol('b_2', real=True) # коэфф. эксцесса
n = sp.Symbol('n', integer=True, positive=True) # размер сл. выборки

# промежуточные вычисления
E = 3 * (n - 1) / (n + 1)
varb2 = 24 * n * (n - 2) * (n - 3) / ((n + 1) * (n + 1) * (n + 3) *
                                     (n + 5))
x_ = (b2 - E) / sp.sqrt(varb2)
sqrtbeta1 = (6 * (n * n - 5 * n + 2) / ((n + 7) * (n + 9))
            * sp.sqrt((6 * (n + 3) * (n + 5)) / (n * (n - 2) * (n - 3))))

A = 6 + 8 / sqrtbeta1 * (2 / sqrtbeta1 + sp.sqrt(1 + 4 /
```



```

    p = 2 * norm.sf(np.abs(score))
    return np.array([p, 1-p])

npvskew_probe = np.vectorize(skew_probe, signature='(2)->(2)')

# тест на основе эксцесса
def kurt_probe(pos):
    alpha, size = pos

    kurtosis_value = float(ku_.subs(a, alpha).evalf())

    score = float(kurt_zscore.subs([(b2, kurtosis_value),
                                   (n, size)]).evalf())
    p = 2 * norm.sf(np.abs(score))
    return np.array([p, 1-p])

npvkurt_probe = np.vectorize(kurt_probe, signature='(2)->(2)')

# комбинированный тест
def omnibus_probe(pos):
    alpha, size = pos

    skewness_value = float(sk_.subs(a, alpha).evalf())
    kurtosis_value = float(ku_.subs(a, alpha).evalf())

    score = float(omnibus_zscore.subs([(s, skewness_value),
                                       (k, kurtosis_value), (n, size)]).evalf())
    p = chi2.sf(np.abs(score), 2)
    return np.array([p, 1-p])

npvomnibus_probe = np.vectorize(omnibus_probe, signature='(2)->(2)')

```

Визуализируем полученные карты значений с помощью библиотеки PyPlot (Рис. 1-3).

Карты выполнены в линейном масштабе по оси OX (значение α) и в логарифмическом масштабе по оси OY (значение n).

Проанализируем карты значений p -value. Во-первых нетрудно заметить, что тест на основе асимметрии самодостаточен, что логично, так как модуль нормально распределённой случайной величины в первую очередь нарушает симметрию исходного распределения. Во-вторых, в тестах на основе эксцесса красная зона больше, что свидетельствует о повышенной жесткости данного теста, но самодостаточным этот тест назвать нельзя, так как он обладает явно выраженными артефактами как в области нулевого сдвига, так и на всём протяжении для $n < 1000$. Комбинированный тест берёт лучшее от обоих, устраняя артефакты в области нуля, смягчая неверные оценки в области $n < 1000$, и при этом повышая строгость и чувствительность теста, что видно как по площади красной зоны, так и по узкой полоске перехода от красной зоны к зелёной.

По графику можно оценить, аппроксимировать и экстраполировать положе-

Рис. 1: Тест асимметрии выборки для сложного нормального распределения

Рис. 2: Тест эксцесса выборки для сложного нормального распределения

ние границы перехода, но необходимость в этом отсутствует, так в реальных практических задачах редко (если вообще) используются выборки из более чем 10^{15} значений.

Рис. 3: Комбинированный тест на основании асимметрии и эксцесса для сложного нормального распределения

Заключение

Полученный в рамках данной статьи результат применим для дальнейшего исследования задачи возможно-вероятностного программирования из [1–3], так как позволяет аппроксимировать модуль нормально распределённой случайной величины другим нормальным распределением со скорректированными значениями среднего и дисперсии согласно формулам для сложного нормального распределения из раздела 1. При этом полученная аппроксимация будет обладать достаточной точностью для вычислений на заданном масштабе случайной выборки.

Список литературы

- [1] Yazenin A., Soldatenko I. On the Problem of Possibilistic-Probabilistic Optimization with Constraints on Possibility/Probability // *Advances in Intelligent Systems and Computing*. Eds. by Giove S., Masulli F., Fuller R.. Series: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 11291. Cham: Springer, 2019. Pp. 43–54.
- [2] Язенин А.В., Солдатенко И.С. Задача возможно-вероятностной оптимизации с ограничениями по возможности/необходимости – вероятности и вероятности – возможности/необходимости // *Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте. Сборник научных трудов X-й Международной научно-технической конференции, ИММВ-2021 (Коломна, 17-20 мая 2021 г.). В 2-х томах. Т. 1. Смоленск: Универсум, 2021. С. 271–283.*

- [3] Солдатенко И.С., Язенин А.В. Об очередности принципов снятия неопределенности в задачах возможно-вероятностного программирования и эволюционном методе их решения // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики, АППМИМ-2021. Сборник трудов Международной научной конференции. Воронеж: Воронежский государственный университет, 2021. (в печати)
- [4] Библиотека символьных математических вычислений SymPy [Электронный ресурс]. URL: <https://www.sympy.org/en/index.html>.
- [5] D'agostino R.B., Belanger A.J., D'agostino Jr. R.B. A suggestion for using powerful and informative tests of normality // The American Statistician. 1990. Vol. 44, № 4. Pp. 316–321. <https://doi.org/10.1080/00031305.1990.10475751>
- [6] Anscombe F.J., Glynn W.J. Distribution of the kurtosis statistic b_2 for normal samples // Biometrika. 1983. Vol. 70, № 1. Pp. 227–234. <https://doi.org/10.1093/biomet/70.1.227>
- [7] D'agostino R.B. An omnibus test of normality for moderate and large size samples // Biometrika. 1971. Vol. 58, № 2. Pp. 341–348. <https://doi.org/10.1093/biomet/58.2.341>
- [8] D'agostino R., Pearson E.S. Tests for departure from normality. Empirical results for the distributions of b^2 and $\sqrt{b_1}$ // Biometrika. Vol. 60. 1973. Pp. 613–622. <https://doi.org/10.1093/biomet/60.3.613>
- [9] Leone F.C., Nelson L.S., Nottingham R.B. The Folded Normal Distribution // Technometrics. 1961. Vol. 3, № 4. Pp. 543–550. <https://doi.org/10.1080/00401706.1961.10489974>
- [10] Nelson L.S. The Folded Normal Distribution // Journal of Quality Technology. 1980. Vol. 12, № 4. Pp. 236–238.
- [11] Elandt R.C. The Folded Normal Distribution: Two Methods of Estimating Parameters from Moments // Technometrics. 1961. Vol. 3, № 4. Pp. 551–562. <https://doi.org/10.1080/00401706.1961.10489975>

Образец цитирования

Рогонов С.А., Солдатенко И.С. Анализ сложного нормального распределения случайной величины // Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2021. Т. 16, № 2. С. 111–122. <https://doi.org/10.26456/fssc84>

Сведения об авторах

1. Рогонов Степан Алексеевич

аспирант кафедры информационных технологий Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

2. Солдатенко Илья Сергеевич

доцент кафедры информационных технологий Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ. E-mail: soldis@tversu.ru

ANALYSIS OF THE FOLDED NORMAL DISTRIBUTION OF A RANDOM VARIABLE

Rogonov Stepan Alekseyevich

PhD student at Information Technologies department,
Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU.

Soldatenko Ilia Sergeyevich

Associate Professor at the Department of Information Technologies,
Tver State University
Russia, 170100, Tver, Zhelyabova str., 33, TverSU.
E-mail: soldis@tversu.ru

Received 01.12.2021, revised 23.12.2021.

The analysis of the behavior of random variables after various transformations can be used in the practical solution of many non-trivial problems. In particular, solutions that cannot be expressed purely analytically, from the point of view of practical applicability, are able to give results with accuracy sufficient for real calculations, taking the inexpressible discrepancy of the analytical solution far beyond the actual error. In this paper, the behavior of the modulus of a normally distributed random variable is investigated and it is found out under what conditions it is possible to neglect the operation of taking an absolute value and approximate the modulus of a random variable with a *similar* probability distribution.

Keywords: stochastic optimization problem, absolute value of a random variable, folded normal distribution, skewness and kurtosis coefficients, normality test, SciPy library.

Citation

Rogonov S.A., Soldatenko I.S., “Analysis of the folded normal distribution of a random variable”, *Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya [Fuzzy Systems and Soft Computing]*, **16**:2 (2021), 111–122 (in Russian). <https://doi.org/10.26456/fssc84>

References

- [1] Yazenin A., Soldatenko I., “On the Problem of Possibilistic-Probabilistic Optimization with Constraints on Possibility/Probability”, *Advances in Intelligent Systems and Computing*. V.11291, Lecture Notes in Computer Science, eds. Giove S., Masulli F., Fuller R., Springer, Cham, 2019, 43–54.
- [2] Yazenin A.V., Soldatenko I.S., “The problem of possibility-probability optimization with constraints on the possibility/necessity-probability and probability-possibility/necessity”, *Integrirovannye modeli i myagkie vychisleniya v iskusstvennom intellekte. Sbornik nauchnykh trudov X-j Mezhdunarodnoj nauchno-tehnicheskoy konferentsii*, V 2-kh tomakh. V. 1, IMM-2021 (Kolomna, 17-20 maya 2021 g.), Universum, Smolensk, 2021, 271–283 (in Russian).

- [3] Soldatenko I.S., Yazenin A.V., “On the order of principles of removing uncertainty in the problems of probabilistic programming and the evolutionary method of their solution”, *Aktualnye problemy prikladnoj matematiki, informatiki i mekhaniki* [Actual problems of applied mathematics, computer science and mechanics], Proceedings of the International Scientific Conference, APPMIM-2021, Voronezh State University, Voronezh, 2021 (to appear) (in Russian).
- [4] *SimPy Library of symbolic mathematical calculations* (in Russian), <https://www.sympy.org/en/index.html>.
- [5] D’agostino R.B., Belanger A.J., D’agostino Jr. R.B., “A suggestion for using powerful and informative tests of normality”, *The American Statistician*, **44**:4 (1990), 316–321, <https://doi.org/10.1080/00031305.1990.10475751>.
- [6] Anscombe F.J., Glynn W.J., “Distribution of the kurtosis statistic b_2 for normal samples”, *Biometrika*, **70**:1 (1983), 227–234, <https://doi.org/10.1093/biomet/70.1.227>.
- [7] D’agostino R.B., “An omnibus test of normality for moderate and large size samples”, *Biometrika*, **58**:2 (1971), 341–348, <https://doi.org/10.1093/biomet/58.2.341>.
- [8] D’agostino R., Pearson E.S., “Tests for departure from normality. Empirical results for the distributions of b^2 and $\sqrt{b_1}$ ”, *Biometrika*. V.60, 1973, 613–622, <https://doi.org/10.1093/biomet/60.3.613>.
- [9] Leone F.C., Nelson L.S., Nottingham R.B., “The Folded Normal Distribution”, *Technometrics*, **3**:4 (1961), 543–550, <https://doi.org/10.1080/00401706.1961.10489974>.
- [10] Nelson L.S., “The Folded Normal Distribution”, *Journal of Quality Technology*, **12**:4 (1980), 236–238.
- [11] Elandt R.C., “The Folded Normal Distribution: Two Methods of Estimating Parameters from Moments”, *Technometrics*, **3**:4 (1961), 551–562, <https://doi.org/10.1080/00401706.1961.10489975>.