Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. М. Леденева, О новом семействе нечетких операций, *Нечеткие системы и мягкие вычисления*, 2021, том 16, выпуск 2, 123–138

DOI: <https://doi.org/10.26456/fssc85>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 12:59:57

О НОВОМ СЕМЕЙСТВЕ НЕЧЕТКИХ ОПЕРАЦИЙ

Леденева Т.М.

Воронежский государственный университет, г. Воронеж

Поступила в редакцию 14.12.2021, после переработки 22.12.2021.

Данная статья представляет результаты исследования аддитивных генераторов в форме дробно-линейных функций. Определены ограничения на коэффициенты возрастающих и убывающих генераторов. Показано, что обратные функции при выполнении определенных условий также являются аддитивными генераторами. Для каждого случая найдены соответствующие треугольные нормы или конормы. Установлено, что треугольные нормы и конормы, полученные на основе дробно-линейных функций, а также двойственные им имеют одинаковую структуру. Определены значения параметров, при которых получаются известные семейства. По сути, предложено новое семейства двойственных треугольных норм и конорм, которое обобщает известные семейства.

Ключевые слова: треугольные нормы и конормы, аддитивные генераторы, дробно-линейные функции.

Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2021. Т. 16, № 2. С. 123–138.
<https://doi.org/10.26456/fssc85>

Введение

Целенаправленный подход для формирования различных нечетких операций стал возможным благодаря введению треугольных норм и конорм [1–3]. Они возникли как естественное обобщение классического “неравенства треугольника” при рассмотрении вероятностных метрических пространств, а соответствующие аксиомы были предложены в [4]. В дальнейшем можно выделить несколько направлений развития данной теории. Одно из них связано с теорией полугрупп и позволяет представить треугольные нормы и конормы с помощью ординальных сумм [1,3]. Другое направление базируется на теории функциональных уравнений [5], и его важнейшим результатом является представление треугольных норм и конорм с помощью аддитивных генераторов. Данное представление связано со свойством ассоциативности бинарных операций [6]. Наиболее известные параметрические семейства треугольных норм и конорм и соответствующие им аддитивные генераторы можно найти в [2,7]. Исследование треугольных норм и конорм в терминах их аддитивных генераторов лежит в основе ряда приложений, среди которых выделим следующие: конструирование нечетких алгебр; определение различных типов композиций нечетких отношений и видов транзитивности; определение специальных операций над нечеткими числами на основе

“принципа обобщения” Л. Заде; определение операций агрегирования. Заметим, что не существует единой процедуры для построения аддитивного генератора заданной треугольной нормы или конормы, однако, для некоторых классов треугольных норм и конорм такие подходы предлагаются (например, [8,9]). Заметим, что среди нечетких операций многочисленный класс составляют операции, представимые рациональными функциями, т.е. отношением двух многочленов или, в частном случае, многочленом. Цель статьи заключается в представлении результатов исследования аддитивных генераторов в форме дробно-линейных функций для нечетких бинарных операций из класса рациональных функций.

1. Постановка проблемы

Введем основные определения, базируясь на [3,7].

Треугольной нормой (*t-нормой*) называется коммутативная, ассоциативная и монотонная бинарная операция $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, такая, что для всех $x \in [0, 1]$ имеет место соотношение $T(x, 1) = x$.

Треугольной конормой (*t-конормой*) называется бинарная операция $S : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, которая для всех $x \in [0, 1]$ также является коммутативной, ассоциативной, монотонной, причем выполняется свойство $S(x, 0) = x$.

Треугольная норма моделирует операции типа умножения (пересечение нечетких множеств, конъюнкция), а конорма – операции типа сложения (объединение нечетких множеств, дизъюнкция). Системы $\langle [0, 1], T, \leq \rangle$ и $\langle [0, 1], S, \leq \rangle$ являются абелевыми полугруппами с нейтральным элементом 0 и 1 соответственно и отношением порядка $\leq$.

Важным свойством непрерывных и строго монотонных по обоим аргументам треугольных норм и конорм является свойство *архимедовости*, связанное с нарушением идемпотентности [7]. Архимедова треугольная норма удовлетворяет условию $T(x, x) < x$ (subidempotency), а конорма – условию $S(x, x) > x$ (superidempotency).

Невозрастающая функция $n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ называется *отрицанием*, если $n(0) = 1$ и $n(1) = 0$. Непрерывная, строго убывающая функция n называется *строгим* отрицанием. Строгое отрицание называется *сильным*, если $n(n(x)) = x$ для всех $x \in [0, 1]$. Сильное отрицание $N(x) = 1 - x$ называется *стандартным*.

Пары треугольных норм и конорм, для которых выполняются законы де Моргана

$$S(x, y) = n(T(n(x), n(y))), \quad T(x, y) = n(S(n(x), n(y))),$$

называются *двойственными*.

Примеры двойственных треугольных норм и конорм, полученных разными авторами, представлены в табл. 1.

Заметим, что пары (T_M, S_M) , (T_P, S_P) , (T_L, S_L) являются двойственными относительно стандартного отрицания N . Для пары (T_0, S_{-1}) “действует” отрицание $n_\tau(x) = \frac{1-x}{1+(\tau-1)x}$ ($\tau > 0$), для пары (T_α, S_β) – отрицание $n_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1-x}{(\beta-\alpha+1)x+\alpha}$, для пары (T_λ, S_λ) – $n_\lambda(x) = \frac{1-x}{1+\lambda x}$. Заметим, что при определенных значениях параметров каждая из функций отрицания может быть приведена к стандартному отрицанию N .

В приложениях чаще всего используются классические операции T_M и S_M , которые с математической точки зрения имеют хорошие характеристики. Из алгебраических свойств для них не выполняются только законы комплементарности.

Таблица 1: Примеры двойственных треугольных норм и конорм

№	$T(x, y)$	$S(x, y)$
1	$T_M(x, y) = \min(x, y)$	$S_M(x, y) = \max(x, y)$
2	$T_P(x, y) = xy$	$S_P(x, y) = x + y - xy$
3	$T_L(x, y) = \max(0, x + y - 1)$	$S_L(x, y) = \min(1, x + y)$
4	$T_D(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x, y) \in [0, 1]^2 \\ \min(x, y), & \text{иначе} \end{cases}$	$S_D(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x, y) \in [0, 1]^2 \\ \max(x, y), & \text{иначе} \end{cases}$
5	$T_0(x, y) = \frac{xy}{x + y - xy}$	$S_{-1}(x, y) = \frac{x + y - 2xy}{1 - xy}$
6	$T_\alpha(x, y) = \frac{xy}{\alpha + (1 - \alpha)(x + y - xy)}, \alpha > 0$	$S_\beta(x, y) = \frac{(\beta - 1)xy + x + y}{1 + \beta xy}, \beta > -1$
7	$T_h(x, y) = \frac{xy}{h + (1 - h)(x + y - xy)}, h > 0$	$S_h(x, y) = \frac{x + y + (h - 2)xy}{h + (h - 1)xy}, h > 0$
8	$T_\lambda(x, y) = \max(0, x + y - 1 - \lambda(1 - x)(1 - y)), \lambda > -1$	$S_\lambda(x, y) = \min(1, x + y + \lambda xy), \lambda > -1$

Однако эти операции являются “жесткими”, что сказывается на качестве нечетких моделей, в частности, их чувствительности к исходной информации. Для остальных пар нечетких операций не выполняются законы дистрибутивности и идемпотентности. Наличие параметров позволяет обеспечить гибкость нечетких моделей и их адаптацию к конкретной задаче. Однако, как правило, необходимо дополнительное исследование для выявления оптимальных значений параметров.

Заметим, что треугольные нормы и конормы – коммутативные и ассоциативные операции. Коммутативность означает, что результат операции зависит только от значений аргументов и не зависит от их порядка. Под ассоциативностью понимается отсутствие иерархии среди аргументов. Известно, что ассоциативные операции представляются с помощью аддитивных генераторов [6].

Строго убывающая непрерывная функция $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, такая что $\varphi(1) = 0$, называется *убывающим генератором*.

Функция $\varphi^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, такая, что

$$\varphi^{(-1)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x < 0, \\ \varphi^{-1}(x), & \text{если } x \in [0, \varphi(0)], \\ 0, & \text{если } x > \varphi(0), \end{cases}$$

называется псевдообратной для φ .

Строго возрастающая непрерывная функция $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, такая что $\varphi(0) = 0$, называется *возрастающим генератором*.

Заметим, что в этом случае псевдообратная функция имеет вид

$$\varphi^{(-1)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \varphi^{-1}(x), & \text{если } x \in [0, \varphi(1)], \\ 1, & \text{если } x > \varphi(1), \end{cases}$$

В обоих случаях на $[0, 1]$ имеем $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$.

Для треугольных норм имеет место *теорема представления* [3,7], согласно которой бинарная операция $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ является архимедовой t -нормой тогда и только тогда, когда существует убывающий генератор t , такой что для всех $(x, y) \in [0, 1]^2$ имеет место выражение

$$T(x, y) = t^{(-1)}(t(x) + t(y)). \quad (1)$$

Для архимедовых треугольных конорм аналогичное выражение для $(x, y) \in [0, 1]^2$ имеет вид

$$S(x, y) = s^{(-1)}(s(x) + s(y)), \quad (2)$$

где s — возрастающий генератор.

Возрастающие и убывающие генераторы иначе называются *аддитивными* и определяются с точностью до положительной мультипликативной константы. Генератор, полученный после отбрасывания положительной мультипликативной константы, будем называть *основной формой* генератора.

Характеристика основных классов аддитивных генераторов — одна из наиболее важных проблем функционального представления нечетких операций [10]. Для решения данной проблемы ограничимся классом нечетких бинарных операций, представимых рациональными функциями — отношением многочленов или, в частном случае, многочленом, в которые все переменные входят не выше, чем в первой степени, т.е. вида

$$\tilde{F}(x, y) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy}{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 xy}, \quad (x, y \in [0, 1]).$$

С учетом коммутативности от $\tilde{F}(x, y)$ перейдем к следующему представлению:

$$F(x, y) = \frac{a_0 + a_1(x + y) + a_2 xy}{b_0 + b_1(x + y) + b_2 xy}. \quad (3)$$

Данный класс функций будем называть *RF-классом*. Некоторые результаты его исследования представлены в [11]. Установлено, что функция F ассоциативна и коммутативна при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} b_1 a_0 + a_1^2 = a_1 b_0 + a_2 a_0, \\ b_2 a_1 + b_1^2 = b_0 b_2 + a_2 b_1, \\ a_1 b_1 = a_0 b_2. \end{cases}$$

Показано, что для коммутативной и ассоциативной функции F существуют следующие типы аддитивных генераторов [12]:

$$\varphi_1(x) = c \cdot \frac{ax + b}{cx + d} + K, \quad \varphi_2(x) = c \cdot \ln \left| \frac{ax + b}{cx + d} \right| + K, \quad \varphi_3(x) = c \cdot \arctg \frac{ax + b}{cx + d} + K,$$

где c, K — некоторые константы.

В данной статье рассматриваются аддитивные генераторы в форме дробно-линейной функции [12, 13]. В этом случае генератор φ_1 порождает коммутативную и ассоциативную операцию F с коэффициентами

$$a_0 = bd^2, \quad a_1 = ad^2, \quad a_2 = 2adc - bc^2, \quad b_0 = ad^2 - 2bcd, \quad b_1 = -bc^2, \quad b_2 = -ac^2.$$

Цель статьи заключается в исследовании генераторов φ_1 , образующих класс LFAG (Linear Fractional Additive Generator), и соответствующих треугольных норм и конорм. При необходимости для обеспечения свойств треугольных норм и конорм в точках $(0, 0)$ и $(1, 1)$ осуществляется переход к функциям $T'(x, y) = \max\{0, T(x, y)\}$, $S'(x, y) = \min\{1, S(x, y)\}$.

2. Аддитивные генераторы в форме дробно-линейных функций

Функция $\varphi(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, где a, b, c, d — константы, удовлетворяющие условию $ad - bc \neq 0$, называется *дробно-линейной функцией*, а осуществляемое ею отображение φ — дробно-линейным отображением.

Дробно-линейная функция относится к простейшим однозначным функциям комплексного переменного. В дальнейшем будем рассматривать дробно-линейные функции с вещественными переменными. График дробно-линейной функции имеет вертикальную асимптоту $x = -\frac{d}{c}$ и горизонтальную асимптоту $y = \frac{a}{c}$. Для любой дробно-линейной функции $\varphi(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, удовлетворяющей условию $ad - bc \neq 0$, можно определить обратную дробно-линейную функцию

$$\varphi^{-1}(x) = \frac{dx - b}{-cx + a}. \quad (4)$$

Композицией дробно-линейных функций φ и ψ называется функция, получаемая последовательным применением к x сначала отображения ψ , а затем φ , т.е. $(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x))$. Пусть $\varphi(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ и $\psi(x) = \frac{mx+n}{px+t}$ — дробно-линейные функции, для которых $ad - bc \neq 0$ и $mt - pn \neq 0$ соответственно, тогда

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x)) = \frac{(am + bp)x + (an + bt)}{(cm + dp)x + (cn + dt)}.$$

Можно показать, что множество всех дробно-линейных функций с коэффициентами, удовлетворяющими условию $ad - bc \neq 0$, образует группу относительно операции композиции.

Перейдем к более общему виду функции φ , а именно

$$\varphi(x) = \frac{ax + b}{cx + d} + K, \quad (5)$$

где $x \neq -\frac{d}{c}$. Заметим, что аддитивные генераторы определяются с точностью до положительной мультипликативной константы. Однако такая константа может быть уже учтена в коэффициентах φ , поэтому нет необходимости вводить ее в формулу специально. Определим условия, при которых φ является возрастающим генератором. Условие $\varphi(0) = 0$ позволяет определить константу $K = -\frac{b}{d}$, и тогда φ будет иметь вид

$$\varphi(x) = \frac{(ad - bc)x}{d(cx + d)} = \frac{(ad - bc)x}{cdx + d^2}, \quad (6)$$

где $d \neq 0$, $x \neq -\frac{d}{c}$.

Функция (6) имеет вертикальную асимптоту $x = -\frac{d}{c}$ и горизонтальную асимптоту $y = \frac{ad-bc}{cd}$. Найдем $\varphi'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. При $ad - bc > 0$ функция φ строго возрастает на $(-\infty, -\frac{d}{c}) \cup (-\frac{d}{c}, \infty)$, при этом график функции состоит из двух ветвей — левой и правой. Заметим, что для того, чтобы функция (6) возрастала на $[0, 1]$, подходящими являются следующие положения асимптот:

$$\text{i) } \begin{cases} -\frac{d}{c} < 0, \\ \frac{ad-bc}{cd} > 0; \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} -\frac{d}{c} \geq 1, \\ \frac{ad-bc}{cd} < 0. \end{cases}$$

При $ad - bc > 0$ данные условия равносильны следующим: i) коэффициенты c и d имеют одинаковые знаки; ii) коэффициенты c и d имеют разные знаки,

причем если $d < 0$, то $c \in (0, -d]$; если $d > 0$, то $c \in [-d, 0)$. Заметим, что в первом случае правая ветвь, а во втором случае левая ветвь графика функции φ возрастают на $[0, 1]$.

Теперь определим условия, при которых (5) удовлетворяет определению убывающего генератора. В этом случае требуется $\varphi(1) = 0$, тогда $K = -\frac{a+b}{c+d}$ ($c+d \neq 0$), и, следовательно, функция (5) запишется в виде

$$\varphi(x) = \frac{(ad-bc)(x-1)}{(c+d)(cx+d)}. \quad (7)$$

Найдем $\varphi'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$, тогда функция (7) является убывающей на $(-\infty, -\frac{d}{c}) \cup (-\frac{d}{c}, \infty)$ при $ad-bc < 0$, а ее график также состоит из двух ветвей – левой и правой. Вертикальная асимптота имеет вид $x = -\frac{d^2+cd}{c^2+cd} = -\frac{d}{c}$, горизонтальная – $y = \frac{ad-bc}{c^2+cd}$. Для того, чтобы обеспечить убывание функции (7) на $[0, 1]$, положение асимптот должно удовлетворять одному из следующих условий:

$$\text{i)} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{d}{c} < 0, \\ \frac{ad-bc}{c^2+cd} < 0; \end{array} \right. \quad \text{ii)} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{d}{c} > 1, \\ \frac{ad-bc}{c^2+cd} > 0. \end{array} \right.$$

Условие i) выполняется, если c и d имеют одинаковые знаки. В этом случае на $[0, 1]$ убывает правая ветвь графика функции (7). В условии ii) первое неравенство строгое, так как $c+d \neq 0$. При $ad-bc < 0$ данное условие выполняется, если c и d имеют разные знаки, причем если $d > 0$, то $c \in (-d, 0)$; если $d < 0$, то $c \in (0, -d)$. При выполнении условия ii) левая ветвь графика функции (7) убывает на $[0, 1]$.

3. Возрастающие генераторы и соответствующие треугольные конормы

С учетом замены в (6) $ad-bc = m$, $cd = r$, $d^2 = l$, рассмотрим функцию

$$\varphi_{\uparrow}(x) = \frac{mx}{rx+l}, \quad (8)$$

где $m > 0$, $l > 0$, $x \neq -\frac{l}{r}$.

При $r \neq 0$ данная функция имеет следующие асимптоты: $x = -\frac{l}{r}$ (вертикальная асимптота), $y = \frac{m}{r}$ (горизонтальная асимптота). С учетом изложенных выше рассуждений для функции (6), получим, что функция (8) является возрастающим генератором при выполнении одного из следующих условий, определяющих положение асимптот:

$$\text{i)} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{l}{r} < 0, \\ \frac{m}{r} > 0; \end{array} \right. \quad \text{ii)} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{l}{r} \geq 1, \\ \frac{m}{r} < 0. \end{array} \right.$$

В случае i) правая ветвь, а в случае ii) левая ветвь графика $\varphi_{\uparrow}$ возрастает на $[0, 1]$, при этом для сужения $\varphi_{\uparrow}|_{[0,1]}$ функции $\varphi_{\uparrow}$ на $[0, 1]$ имеем $D(\varphi_{\uparrow}|_{[0,1]}) = [0, 1]$, $E(\varphi_{\uparrow}|_{[0,1]}) = [0, \frac{m}{r+l}]$, где $\frac{m}{r+l} = \varphi_{\uparrow}(1)$. Анализ условий i) и ii) позволяет сформулировать следующее утверждение.

Лемма 1. Функция $\varphi_{\uparrow}$, где $x \neq -\frac{l}{r}$, $m > 0$, является возрастающим генератором при выполнении одного из следующих условий: а) $l, r > 0$ или б) $r < 0$, $l \in [-r, \infty)$.

При исследовании функции вида (8) важно привести ее к виду, когда $l > 0$, а затем анализировать коэффициент r .

Доказана следующая

Теорема 1. *Возрастающий генератор $\varphi_{\uparrow}$, удовлетворяющий условиям леммы 1, при $r \in [-l, l]$ порождает треугольную конорму вида*

$$S_{\varphi_{\uparrow}}(x, y) = S_{(r, l)}(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y-2xy}{1-xy}, & \text{если } l = -r, \\ \min \left\{ 1, \frac{x+y+2\frac{r}{l}xy}{1-(\frac{r}{l})^2xy} \right\}, & \text{если } -l < r \leq l. \end{cases} \quad (9)$$

Для функции (8) обратная функция, согласно формуле (4), имеет вид

$$\varphi_{\downarrow}^{-1}(x) = \frac{lx}{-rx + m}, \quad (10)$$

где коэффициенты l, r, m удовлетворяют приведенным выше условиям i) и ii).

Псевдообратная функция имеет вид

$$\varphi_{\uparrow}^{(-1)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{lx}{-rx+m}, & \text{если } x \in \left[0, \frac{m}{r+l}\right], \\ 1, & \text{если } x > \frac{m}{r+l}. \end{cases}$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть функция $\varphi_{\uparrow}$, где $x \neq -\frac{l}{r}$, является возрастающим генератором, тогда $\varphi_{\uparrow}^{-1} = \frac{lx}{-rx+m}$, где $x \neq \frac{m}{r}$, также является возрастающим генератором, если $r \in [-l, m]$.*

Заметим, что функция $\varphi_{\uparrow}^{-1}$ удовлетворяет условию $\varphi_{\uparrow}^{-1}(0) = 0$, имеет вертикальную асимптоту $x = \frac{m}{r}$ и горизонтальную асимптоту $y = -\frac{l}{r}$. Условия, определяющие подходящее положение асимптот имеют следующий вид:

$$\text{i)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{m}{r} < 0, \\ -\frac{l}{r} > 0; \end{array} \right. \quad \text{ii)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{m}{r} \geq 1, \\ -\frac{l}{r} < 0. \end{array} \right.$$

Так как $\varphi_{\uparrow}$ возрастающий генератор, то для него выполняются условия из леммы 1. Рассмотрим, каким образом они влияют на определение $\varphi_{\uparrow}^{-1}$ как возрастающего генератора. Если $l, r > 0$, то на $[0, 1]$ возрастает правая ветвь графика $\varphi_{\uparrow}$. При переходе к $\varphi_{\uparrow}^{-1}$ горизонтальная асимптота $y = \frac{m}{r}$ функции $\varphi_{\uparrow}$ переходит в вертикальную асимптоту $x = \frac{m}{r}$ функции $\varphi_{\uparrow}^{-1}$. Тогда при $l, r > 0$ имеет место случай ii) при $m \geq r$, причем на $[0, 1]$ возрастает левая ветвь графика функции $\varphi_{\uparrow}^{-1}$. Если для возрастающего генератора $\varphi_{\uparrow}$ выполняются ограничения $r < 0, l > -r$, то на $[0, 1]$ возрастает левая ветвь графика функции $\varphi_{\uparrow}$. При переходе к $\varphi_{\uparrow}^{-1}$ вертикальная асимптота $x = -\frac{l}{r}$ функции $\varphi_{\uparrow}$ преобразуется в горизонтальную асимптоту $y = -\frac{l}{r}$ функции $\varphi_{\uparrow}^{-1}$, а горизонтальная асимптота $y = \frac{m}{r}$ преобразуется в вертикальную асимптоту $x = \frac{m}{r}$ для функции $\varphi_{\uparrow}^{-1}$. Чтобы на $[0, 1]$ возрастала правая ветвь графика $\varphi_{\uparrow}^{-1}$, необходимо потребовать, чтобы выполнялись неравенства i). При $m > 0$ данные неравенства справедливы для $l > 0, r < 0$. Сравнивая с соответствующим условием для функции $\varphi_{\uparrow}$, окончательно получим, что при $m > 0, r < 0, l > -r$ функция $\varphi_{\uparrow}^{-1}$ является возрастающим генератором. Таким образом, если для функции $\varphi_{\uparrow}$ на $[0, 1]$ “работает” правая ветвь графика, то для

функции $\varphi_{\uparrow}^{-1}$ – левая и наоборот. Для сужения $\varphi_{\uparrow}^{-1}|_{[0,1]}$ функции $\varphi_{\uparrow}^{-1}$ на $[0, 1]$ имеем $D\left(\varphi_{\uparrow}^{-1}|_{[0,1]}\right) = [0, 1]$, $E\left(\varphi_{\uparrow}^{-1}|_{[0,1]}\right) = \left[0, \frac{l}{m-r}\right]$, где $\frac{l}{m-r} = \varphi_{\uparrow}^{-1}(1)$.

Псевдообратная функция для $\varphi_{\uparrow}^{-1}$ имеет вид

$$\left(\varphi_{\uparrow}^{-1}\right)^{(-1)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{mx}{rx+l}, & \text{если } x < \frac{l}{m-r}, \\ 1, & \text{если } x \geq \frac{l}{m-r}. \end{cases}$$

Доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Функция $\varphi_{\uparrow}^{-1}$ при выполнении условий $l > 0$, $m > 0$, $m < l$, $r \in [-l, m]$ порождает треугольную t -конорму

$$S_{\varphi_{\uparrow}^{-1}}(x, y) = S_{(r,m)}(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y-2xy}{1-xy}, & \text{если } r = m, \\ \min\left\{1, \frac{x+y-2\frac{r}{m}xy}{1-\frac{r^2}{m^2}xy}\right\}, & \text{если } -m < r < m. \end{cases} \quad (11)$$

4. Убывающие генераторы и соответствующие треугольные нормы

С учетом обозначений $ad - bc = u$, $c^2 + cd = v$, $d^2 + cd = w$ от функции (7) перейдем к функции вида

$$\varphi_{\downarrow}(x) = \frac{u(x-1)}{vx+w}, \quad (12)$$

где $u < 0$ и $v + w = c^2 + 2cd + d^2 = (c + d)^2 > 0$, $x \neq -\frac{w}{v}$.

Рассмотрим случай $u \neq 0$, $v \neq 0$, $w \neq 0$. Функция $\varphi_{\downarrow}$ имеет вертикальную асимптоту $x = -\frac{w}{v}$ и горизонтальную асимптоту $y = \frac{u}{v}$. Для обеспечения ее убывания на $[0, 1]$ подходящими являются следующие положения асимптот:

$$\text{i)} \begin{cases} -\frac{w}{v} \geq 1, \\ \frac{u}{v} > 0; \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} -\frac{w}{v} \leq 0, \\ \frac{u}{v} < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим подробно каждый случай. В случае i) при $u < 0$ второе неравенство справедливо при $v < 0$. Если $v < 0$, то из первого неравенства получим, что $v \geq -w$, но с учетом того, что $v + w > 0$, неравенство будет строгим, поэтому $v > -w$. Следовательно, $w > 0$ и тогда для случая i) получим следующие ограничения на параметры: $u < 0$, $w > 0$, $v \in (-w, 0)$. При выполнении данных условий левая ветвь графика функции (12) убывает на $[0, 1]$. Рассмотрим теперь случай ii). Из второго неравенства следует, что при $u < 0$ имеет место $v > 0$. Тогда из первого неравенства следует, что $w \geq 0$. Так как в (12) $v + w > 0$, то $v > -w$. Окончательно получим следующие условия для коэффициентов $\varphi_{\downarrow}$: $u < 0$, $v > 0$, $w \geq 0$. При их выполнении правая ветвь графика функции $\varphi_{\downarrow}$ убывает на $[0, 1]$.

Для сужения $\varphi_{\downarrow}|_{[0,1]}$ функции $\varphi_{\downarrow}$ на $[0, 1] \subset (-\infty, -\frac{w}{v})$ имеем $D\left(\varphi_{\downarrow}|_{[0,1]}\right) = [0, 1]$, $E\left(\varphi_{\downarrow}|_{[0,1]}\right) = \left[0, -\frac{u}{w}\right]$, где $-\frac{u}{w} = \varphi_{\downarrow}(0)$. Если $w = 0$, то при $u < 0$ $E(\varphi_{\downarrow}) = [0, \infty)$.

Обобщая приведенные выше рассуждения, сформулируем следующее утверждение.

Лемма 3. Функция $\varphi_{\downarrow}$, где $x \neq -\frac{w}{v}$, является убывающим генератором при выполнении следующих условий: $u < 0, w \geq 0, v \in (-w, \infty)$.

Псевдообратная функция имеет вид

$$\varphi_{\downarrow}^{(-1)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x < 0, \\ \frac{wx+u}{-vx+u}, & \text{если } x \in [0, -\frac{u}{w}], \\ 0, & \text{если } x > -\frac{u}{w}, \end{cases}$$

где $x \neq -\frac{w}{v}, u < 0, w \geq 0, v \in (-w, \infty), -\frac{u}{v} = \varphi_{\downarrow}(0)$.

Доказано следующее утверждение.

Теорема 3. Убывающий генератор $\varphi_{\downarrow}$, где $x \neq -\frac{w}{v}, u < 0, w \geq 0, v \in (-w, \infty)$ порождает треугольную норму

$$T_{\varphi_{\downarrow}}(x, y) = T_{(v, w)}(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y-xy}, & \text{если } w = 0, v > 0, \\ \max\{0, x+y-1\}, & \text{если } w > 0, v = 0, \\ \max\left\{0, \frac{w^2(x+y-1) + (v^2+2vw)xy}{(w^2+2vw)+v^2(x+y-xy)}\right\}, & \text{если } w > 0, v \in \left(-\frac{w}{2}, 0\right) \cup (0, \infty). \end{cases} \quad (13)$$

Заметим, что в (13) последнюю формулу можно преобразовать к виду

$$T_{\varphi_{\downarrow}}(x, y) = T_{(v, w)}(x, y) = \max\left\{0, \frac{w^2(x+y-1) + ((w+v)^2 - w^2)xy}{((w+v)^2 - v^2) + v^2(x+y-xy)}\right\}. \quad (14)$$

По формуле (4) для функции $\varphi_{\downarrow}$ найдем обратную функцию

$$\varphi_{\downarrow}^{-1}(x) = \frac{wx+u}{-vx+u},$$

при этом в соответствии с определением $\varphi_{\downarrow}$ имеют место следующие ограничения: $u < 0, v + w > 0, x \neq -\frac{w}{v}$.

Доказано следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть функция $\varphi_{\downarrow}$ является убывающим генератором, и выполняются условия из леммы 3, тогда обратная функция $\varphi_{\downarrow}^{-1}$ при $w = -u$ (в этом случае имеем $u < 0, v \in (u, \infty)$) также является убывающим генератором, и только для $v \in (\frac{u}{2}, \infty)$ данный генератор порождает треугольную норму, которая имеет следующий вид:

$$T_{\varphi_{\downarrow}^{-1}}(x, y) = T_v(x, y) = \begin{cases} \max\{0, x+y-1\}, & \text{если } v = 0, \\ \max\left\{0, \frac{u^2(x+y-1) + (v^2-2uv)xy}{(u^2-2uv)+v^2(x+y-xy)}\right\}, & \text{если } v \in \left(\frac{u}{2}, 0\right) \cup (0, \infty). \end{cases} \quad (15)$$

5. Обсуждение результатов

В данной статье определены условия для коэффициентов, при которых дробно-линейная функция является возрастающим или убывающим генератором. Формула (8) представляет общий вид возрастающего генератора, а (12) — убывающего. Здесь константы, стоящие в числителе формул, положительны, поэтому можно перейти к основной форме генераторов, отбросив их.

Связь между возрастающим и убывающим генераторами определяется следующими утверждениями [7]:

1. Пусть φ — убывающий генератор, тогда функция $\psi(x) = \varphi(0) - \varphi(x)$ для $x \in [0, 1]$ является возрастающим генератором, для которого $\psi(1) = \varphi(0)$, при этом $\psi^{-1}(x) = \varphi^{-1}(\varphi(0) - x)$ для $x \in \mathbb{R}$.
2. Пусть ψ — возрастающий генератор, тогда функция $\varphi(x) = \psi(1) - \psi(x)$ для $x \in [0, 1]$ является убывающим генератором, для которого $\varphi(0) = \psi(1)$, при этом $\varphi^{-1}(x) = \psi^{-1}(\psi(1) - x)$ для $x \in \mathbb{R}$.

Проверим выполнимость приведенных утверждений.

Рассмотрим возрастающий генератор $\varphi(x) = \frac{x}{rx+l}$, где $r > 0$ или $r < 0$ и $l \in [0, -r)$. Для него по формуле (8) найдем $\varphi^{-1}(x) = \frac{lx}{-rx+1}$. В соответствии с утверждением 1) составим функцию

$$\psi(x) = \varphi(1) - \varphi(x) = \frac{1}{r+l} - \frac{x}{rx+l} = \frac{l(1-x)}{(r+l)(rx+l)}. \quad (16)$$

Здесь $l > 0$ и $(lr+r^2) + (lr+l^2) = (r+l)^2 > 0$, т.е. коэффициенты (16) удовлетворяют определению убывающего генератора. Заметим, что $\psi(0) = \varphi(1)$. По формуле (4) для (16) найдем

$$\psi^{-1}(x) = \frac{l(r+l)x-l}{-r(r+l)x-l}. \quad (17)$$

С другой стороны, согласно утверждению 1), получим формулу

$$\psi^{-1}(x) = \varphi^{-1}(\varphi(1) - x) = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{r+l} - x\right) = \frac{l(r+l)x-l}{-r(r+l)x-l},$$

которая совпадает с (17).

Рассмотрим теперь убывающий генератор $\psi(x) = \frac{1-x}{vx+w}$, где $w > 0$, $w+v > 0$. На основе (4) получим $\psi^{-1}(x) = \frac{wx-1}{-vx-v}$. Согласно утверждению 2), составим

$$\varphi(x) = \psi(0) - \psi(x) = \frac{1}{w} + \frac{1-x}{vx+w} = \frac{x(v+w)}{-vwx+w^2}, \quad (18)$$

где $vw+w^2 = w(v+w) > 0$ и, следовательно, φ удовлетворяет определению возрастающего генератора. Заметим, что $\varphi(1) = \psi(0)$. По формуле (4) для (18) получим

$$\varphi^{-1}(x) = \frac{w^2x}{-vwx+(v+w)}.$$

Теперь найдем φ^{-1} по формуле из утверждения 2). Итак, получим формулу

$$\varphi^{-1}(x) = \psi^{-1}(\psi(0) - x) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{w} - x\right) = \frac{x(v+w)}{-vwx+w^2},$$

которая совпадает с (18).

Таким образом, для генераторов из класса дробно-линейных функций утверждения 1) и 2) выполняются, что и ожидалось.

В предыдущих разделах установлено, что возрастающий генератор порождает треугольные конормы, структура которых может быть представлена формулой

$$S_\rho(x, y) = \min \left\{ 1, \frac{x+y+2\rho xy}{1-\rho^2 xy} \right\}, \quad (19)$$

где параметр ρ может быть выражен различными способами через параметры исходных генераторов (формулы (9), (11)).

Убывающий генератор порождает треугольные нормы вида

$$T_{\tau}(x, y) = \max \left\{ 0, \frac{\tau^2(x + y - 1) + (1 + 2\tau)xy}{(\tau^2 + 2\tau) + (x + y - xy)} \right\}, \quad (20)$$

где, как и в предыдущем случае, параметр τ может иметь различное представление в зависимости от параметров порождающих генераторов (формулы (13), (14), (15)).

Обобщая приведенные рассуждения, можно сформулировать следующие утверждения, в которых используется основная форма возрастающих и убывающих генераторов LFAG.

Теорема 5. *Треугольная конорма представима в виде*

$$S_{\rho}(x, y) = \min \left\{ 1, \frac{x + y + 2\rho xy}{1 - \rho^2 xy} \right\}$$

тогда и только тогда, когда основная форма возрастающего генератора имеет вид $s_{\rho}(x) = \frac{x}{\rho x + 1}$, где $\rho \in (-1, 1]$.

На рис. 1 представлены графики поверхностей треугольных конорм при различных значениях параметра ρ .

(1) $\rho = -1$

(2) $\rho = -0.5$

(3) $\rho = 0$

(4) $\rho = 0.5$

(5) $\rho = 0.99$

(6) $\rho \in \{-1, -0.5, 0, 0.5, 1\}$

Рис. 1: S_{ρ} и генератор s_{ρ} при различных значениях параметра ρ

Теорема 6. Треугольная норма представима в виде

$$T_{\tau}(x, y) = \max \left\{ 0, \frac{\tau^2 (x + y - 1) + (1 + 2\tau) xy}{(\tau^2 + 2\tau) + (x + y - xy)} \right\}$$

тогда и только тогда, когда убывающий генератор имеет вид $t_{\tau}(x) = \frac{1-x}{1+\frac{1}{\tau}x}$, где $\tau \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$.

На Рис. 2 представлены графики поверхностей треугольных норм при различных значениях параметра τ .

(7) $\tau = -10$

(8) $\tau = -2$

(9) $\tau = 0$

(10) $\tau = 5$

(11) $\tau = 10$

(12) $\tau \in \{-0.5, -2, -10, 10, 2, 0.5, 0.1\}$

Рис. 2: T_{τ} и генератор t_{τ} при различных значениях параметра τ

Анализ показал, что конорма S_{ρ} и норма T_{τ} являются двойственными относительно стандартного отрицания $N(x) = 1 - x$, если $\rho = -\frac{1}{1+\tau}$, при этом $\rho \in (-1, 1)$, $\tau \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$. Установлено, что других операций отрицания с учетом существующих ограничений на параметры ρ и τ для данной пары не существует.

Таким образом, аддитивные генераторы в форме дробно-линейных функций порождают следующие семейства треугольных норм и конорм:

$$(S_{\rho}^{LFA})_{\rho \in [-1, 1]} = \begin{cases} S_{-1}(x, y) = \frac{x+y-2xy}{1-xy}, & \text{if } \rho = -1, \\ S_M(x, y) = \min\{1, x+y\}, & \text{if } \rho = 0, \\ S_{\rho}(x, y) = \min\left\{1, \frac{x+y+2\rho xy}{1-\rho^2 xy}\right\}, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$(T_{\tau}^{LFAG})_{\tau \in (-\infty, -2) \cup [0, \infty)} = \begin{cases} T_0(x, y) = \frac{xy}{x+y-xy}, \text{ if } \tau = 0, \\ T_M = \max\{0, x+y-1\}, \text{ if } \tau \rightarrow \pm\infty, \\ T_{\tau}(x, y) = \max\left\{0, \frac{\tau^2(x+y-1)+(1+2\tau)xy}{(\tau^2+2\tau)+(x+y-xy)}\right\}, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что данный класс нечетких операций, порожденных генераторами LFAG, обобщает хорошо известные семейства, полученные другими исследователями.

Заключение

В статье исследован класс аддитивных генераторов в форме дробно-линейных функций. Практическое значение полученных результатов заключается в том, что задавая возрастающие или убывающие генераторы с учетом установленных ограничений на параметры можно получить соответствующие им треугольные нормы и конормы. Установлено, что для данного класса генераторов треугольные нормы и конормы имеют определенную структуру, формула которой в общем случае не сводится к известным семействам нечетких операций. Заметим, что некоторые известные семейства треугольных норм и конорм являются частными случаями S_{ρ}^{LFAG} и T_{τ}^{LFAG} .

Список литературы

- [1] Klement E.P., Mesiar R., Pap E. Triangular norms. Position paper I: basic analytical and algebraic properties // Fuzzy Sets and Systems. 2004. Vol. 143. Pp. 5–26.
- [2] Klement E.P., Mesiar R., Pap E. Triangular norms. Position paper II: general constructions and parameterized families // Fuzzy Sets and Systems. 2004. Vol. 145, № 3. Pp. 411–438.
- [3] Klement E.P., Mesiar R., Pap E. Triangular norms. Position paper III: continuous t-norms, Fuzzy Set and Systems // Fuzzy Sets and Systems. 2004. Vol. 145, № 3. Pp. 439–454.
- [4] Schweizer B., Sklar A. Probabilistic Metric Spaces. New York: North-Holland, 1983.
- [5] Aczel J. Lectures on Functional Equations and their Applications. New York: Academic Press, 1966.
- [6] Ling C.M. Representation of associative function // Publicationes Mathematicae Debrecen. 1995. Vol. 12. Pp. 189–212.
- [7] Klir G.J., Yuan B. Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications. Prentice Hall, 1995. 574 p.
- [8] Navara M., Petrik M., Sarkoci P. Explicit formulas for generators of triangular norms // Publicationes Mathematicae Debrecen. 2010. Vol. 77, № 1-2. Pp. 171–191.
- [9] Ouyang Y. On the construction of boundary weak triangular norms through additive generators // Nonlinear Analysis. 2007. Vol. 66. Pp. 125–130.

- [10] Klement E.P., Mesiar R., Pap E. Problems on triangular norms and related operators // Fuzzy Sets and Systems. 2004. Vol. 145. Pp. 471–479.
- [11] Леденева Т.М. Некоторые аспекты представления нечетких операторов отношением двух многочленов // Известия высших учебных заведений. Математика. 1997. № 11. С. 33–40.
- [12] Ledeneva T.M. Analysis of additive generators of fuzzy operations represented by rational functions // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 973. ID 012037. <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/973/1/012037>
- [13] Ledeneva T. Additive generators of fuzzy operations in the form of linear fractional functions // Fuzzy Sets and Systems. 2020. Vol. 386. Pp. 1–24.

Образец цитирования

Леденева Т.М. О новом семействе нечетких операций // Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2021. Т. 16, № 2. С. 123–138. <https://doi.org/10.26456/fssc85>

Сведения об авторах

1. Леденева Татьяна Михайловна

зав. кафедрой вычислительной математики и прикладных информационных технологий Воронежского государственного университета.

Россия, 394006, г. Воронеж, Университетская площадь, д. 1, ВГУ.

E-mail: ledeneva-tm@yandex.ru

ABOUT A NEW FAMILY OF FUZZY OPERATIONS

Ledeneva Tatyana Mikhaylovna

Head of the Department of Computational Mathematics and Applied Information

Technologies, Voronezh State University

Russia, 394006, Voronezh, 1 University Square, VSU.

E-mail: ledeneva-tm@yandex.ru

Received 14.12.2021, revised 22.12.2021.

This article presents the results of the study of additive generators in the form of fractional linear functions. Restrictions on the coefficients of increasing and decreasing generators are determined. It is shown that inverse functions under certain conditions are also additive generators. For each case, the corresponding triangular norms or conorms are found. It is established that triangular norms and conorms obtained on the basis of fractional linear functions, as well as dual ones, have the same structure. The values of the parameters at which the known families are obtained are determined. In fact, a new family of dual triangular norms and conorms is proposed, which generalizes the known families.

Keywords: triangular norms and conorms, additive generators, fractional linear functions.

Citation

Ledeneva T.M., “About a new family of fuzzy operations”, *Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya [Fuzzy Systems and Soft Computing]*, **16**:2 (2021), 123–138 (in Russian). <https://doi.org/10.26456/fssc85>

References

- [1] Klement E.P., Mesiar R., Pap E., “Triangular norms. Position paper I: basic analytical and algebraic properties”, *Fuzzy Sets and Systems*, **143** (2004), 5–26.
- [2] Klement E.P., Mesiar R., Pap E., “Triangular norms. Position paper II: general constructions and parameterized families”, *Fuzzy Sets and Systems*, **145**:3 (2004), 411–438.
- [3] Klement E.P., Mesiar R., Pap E., “Triangular norms. Position paper III: continuous t-norms, Fuzzy Set and Systems”, *Fuzzy Sets and Systems*, **145**:3 (2004), 439–454.
- [4] Schweizer B., Sklar A., *Probabilistic Metric Spaces*, North-Holland, New York, 1983.
- [5] Aczel J., *Lectures on Functional Equations and their Applications*, Academic Press, New York, 1966.
- [6] Ling C.M., “Representation of associative function”, *Publicationes Mathematicae Debrecen*, **12** (1995), 189–212.

- [7] Klir G.J., Yuan B., *Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications*, Prentice Hall, 1995, 574 pp.
- [8] Navara M., Petrik M., Sarkoci P., “Explicit formulas for generators of triangular norms”, *Publicationes Mathematicae Debrecen*, **77**:1-2 (2010), 171–191.
- [9] Ouyang Y., “On the construction of boundary weak triangular norms through additive generators”, *Nonlinear Analysis*, **66** (2007), 125–130.
- [10] Klement E.P., Mesiar R., Pap E., “Problems on triangular norms and related operators”, *Fuzzy Sets and Systems*, **145** (2004), 471–479.
- [11] Ledeneva T.M., “Certain aspects of representation of fuzzy operators in the form of a ratio of two polynomials”, *Russian Mathematics*, **41**:11 (1997), 31–38.
- [12] Ledeneva T.M., “Analysis of additive generators of fuzzy operations represented by rational functions”, *Journal of Physics: Conference Series*, **973** (2018), 012037, <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/973/1/012037>.
- [13] Ledeneva T., “Additive generators of fuzzy operations in the form of linear fractional functions”, *Fuzzy Sets and Systems*, **386** (2020), 1–24.