Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. I. Machtakova, Persecution of rigidly coordinated evaders in a linear problem with fractional derivatives and a simple matrix, *Izv. IMI UdGU*, 2019, Volume 54, 45–54

DOI: <https://doi.org/10.20537/2226-3594-2019-54-04>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.89.56.158

April 26, 2023, 12:54:24

УДК 517.977

© *А. И. Мачтакова***ПРЕСЛЕДОВАНИЕ ЖЕСТКО СКООРДИНИРОВАННЫХ УБЕГАЮЩИХ
В ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ПРОСТОЙ
МАТРИЦЕЙ**

В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается задача преследования группой преследователей группы убегающих, описываемая системой вида

$$D^{(\alpha)} z_{ij} = a z_{ij} + u_i - v,$$

где $D^{(\alpha)} f$ — производная по Капуто порядка $\alpha \in (0, 1)$ функции f . Предполагается, что все убегающие используют одно и то же управление. Целью преследователей является поимка заданного числа убегающих. Убегающие используют программные стратегии, преследователи — программные контрстратегии, причем каждый преследователь ловит не более одного убегающего. Множество допустимых управлений — шар единичного радиуса с центром в начале координат, целевые множества — начала координат. В терминах начальных позиций и параметров игры получено достаточное условие поимки.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, преследователь, убегающий, дробная производная.

DOI: 10.20537/2226-3594-2019-54-04

Введение

В теории дифференциальных игр хорошо известны задача преследования группой преследователей одного убегающего и задача уклонения от группы преследователей одного убегающего [1–6]. Естественным обобщением указанных задач является ситуация конфликтного взаимодействия группы преследователей и группы убегающих. Цель группы преследователей — поимка заданного числа убегающих, цель группы убегающих противоположна [4–15].

Были получены [7] достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего в дифференциальной игре со многими преследователями и убегающими при условии, что убегающие используют одно и то же управление. Задача простого преследования группы скоординированных убегающих без фазовых ограничений рассматривалась в [8, 9], с фазовыми ограничениями — в [10]. Задача преследования группы скоординированных убегающих в примере Л. С. Понтрягина рассматривалась в [11, 12], в линейных дифференциальных играх — в [13, 14]. Поимке двух скоординированных убегающих посвящены работы [15, 16]. Задача о поимке заданного числа убегающих в задаче простого преследования при условиях, что множество допустимых управлений — шар единичного радиуса с центром в нуле, терминальные множества — начала координат, убегающие используют программные стратегии, а каждый преследователь ловит не более одного убегающего, представлена в [17], где были получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи преследования. Общий случай задачи о поимке заданного числа убегающих в случае простого преследования рассматривался в [18]. Достаточные условия поимки заданного числа убегающих в стационарном примере Л. С. Понтрягина и линейных рекуррентных дифференциальных играх получены в [19, 20].

В данной работе рассматривается задача о поимке заданного числа жестко скоординированных убегающих при условии, что убегающие используют программные стратегии, каждый преследователь ловит не более одного убегающего, а движение всех участников описывается линейной системой с дробными производными и простой матрицей. Терминальные множества — начала координат. В терминах начальных позиций и параметров игры получены достаточные условия поимки.

§ 1. Постановка задачи

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ — абсолютно непрерывная функция, $\alpha \in (0, 1)$. Производной по Капуто порядка α функции f называется функция $D^{(\alpha)}f$ вида

$$(D^{(\alpha)}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^\alpha} ds, \quad \text{где } \Gamma(\beta) = \int_0^\infty e^{-s} s^{\beta-1} ds.$$

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра $G(n, m)$ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и m убегающих $E_1, \dots, E_m$.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$D^{(\alpha)}x_i = ax_i + u_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad u_i \in V. \quad (1.1)$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$D^{(\alpha)}y_j = ay_j + v, \quad y_j(0) = y_j^0, \quad v \in V. \quad (1.2)$$

Здесь $x_i, y_j, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, $V = \{v \mid \|v\| \leq 1\}$, $a \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0, 1)$. Кроме того, $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех i, j .

Введем новые переменные $z_{ij} = x_i - y_j$. Тогда вместо систем (1.1), (1.2) получим систему

$$D^{(\alpha)}z_{ij} = az_{ij} + u_i - v, \quad z_{ij}(0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0. \quad (1.3)$$

Обозначим через $\text{int } X$, $\text{ri } X$, $\text{co } X$, $\text{aff } X$ соответственно внутренность, относительную внутренность, выпуклую оболочку и аффинную оболочку множества $X \subset \mathbb{R}^k$. Будем предполагать, что начальные позиции x_i^0 , $i \in I$, y_j^0 , $j \in J$ таковы, что любые $k+1$ точек из совокупности $\{x_i^0, i \in I, y_j^0, j \in J\}$ аффинно независимы.

Измеримая функция $v: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$ называется *допустимой*, если $v(t) \in V$ для всех $t \geq 0$.

О п р е д е л е н и е 2. В игре $G(n, m)$ *происходит поимка убегающего* E_s , если существует $T > 0$, при котором для любого допустимого управления $v(t)$, $t \in [0, +\infty)$, убегающих E_j , $j \in J$, найдутся допустимые управления $u_i(t, z_{ij}^0, i \in I, j \in J, v(t), t \in [0, +\infty))$, преследователей P_i , $i \in I$, момент $\tau \in [0, T]$, номер $r \in \{1, \dots, n\}$ такие, что $z_{rs}(\tau) = 0$.

О п р е д е л е н и е 3. В игре $G(n, m)$ *происходит поимка не менее q убегающих*, если существует $T > 0$, при котором для любого допустимого управления $v(t)$, $t \in [0, \infty)$, убегающих E_j , $j \in J$, найдутся допустимые управления $u_i(t) = u_i(t, z_{ij}^0, v, s \in [0, \infty))$, $i \in I$, преследователей P_i , $i \in I$, обладающие следующим свойством: существуют множества

$$M \subset J, \quad |M| = q, \quad N \subset I, \quad |N| = q$$

такие, что преследователь P_l , $l \in N$ не позднее момента T осуществляет поимку убегающего E_β , $\beta \in M$, причем если преследователь P_l ловит убегающего E_β , то остальные убегающие считаются им не пойманными.

§ 2. Вспомогательные результаты

О п р е д е л е н и е 4 (см. [21]). Векторы $a_1, a_2, \dots, a_s$ образуют положительный базис в $\mathbb{R}^k$, если для любого $x \in \mathbb{R}^k$ существуют положительные вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, такие, что

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_s a_s.$$

Л е м м а 1 (см. [9]). Пусть $a_1, \dots, a_s$ образуют положительный базис. Тогда для любых $b_l, b_{l+1}, \dots, b_s$ ($1 \leq l \leq s$) существует $\mu_0 > 0$, такое, что для всех $\mu > \mu_0$

$$a_1, \dots, a_{j-1}, b_l + \mu a_l, \dots, b_s + \mu a_s$$

образуют положительный базис.

Л е м м а 2 (см. [9]). Пусть $x_i \in \mathbb{R}^k$, $i = 1, \dots, n$, $y_j \in \mathbb{R}^k$, $j = 1, \dots, m$, и выполнены следующие условия:

- (1) $n + m \geq k + 2$;
- (2) в совокупности $\{x_i - y_j, y_r - y_q, r \neq q, x_s - x_l, s \neq l\}$ существуют k линейно независимых векторов.

Тогда $\text{ri co } \{x_i\} \cap \text{ri co } \{y_j\} \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\{x_i - y_j\}$ образуют положительный базис.

Л е м м а 3 (см. [9]). Пусть $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\}$ — множество точек $\mathbb{R}^k$, причем $n + m \geq k + 2$, любые $k + 1$ точек аффинно независимы и $\text{co } \{x_1, \dots, x_n\} \cap \text{co } \{y_1, \dots, y_m\} \neq \emptyset$. Тогда существуют множества $I \subset \{1, \dots, n\}$, $J \subset \{1, \dots, m\}$ такие, что $|I| + |J| = k + 2$,

$$\text{ri co } \{x_1, \dots, x_n\} \cap \text{ri co } \{y_1, \dots, y_m\} \neq \emptyset$$

и состоит из единственной точки.

Л е м м а 4 (см. [9]). Пусть $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\}$ — множество точек $\mathbb{R}^k$, причем $n + m = k + 2$, любые $k + 1$ точек аффинно независимы и, кроме того,

$$\text{ri co } \{x_i\} \cap \text{ri co } \{y_j\} \neq \emptyset, \quad x_{n+1} - y_{\beta_0} = \mu(y_{\beta_0} - y_1) = -\mu(y_1 - y_{\beta_0})$$

при некотором $\mu > 0$, $\beta_0 \in \{2, \dots, m\}$. Тогда

$$\text{ri co } \{x_i, i = 1, \dots, n\} \cap \text{ri co } \{y_j, j = 2, \dots, m\} \neq \emptyset.$$

Введем следующие обозначения:

$$\lambda(h, v) = \sup\{\lambda \geq 0 \mid -\lambda h \in V - v\}, \quad E_\rho(z, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{\Gamma(l\rho^{-1} + \mu)}$$

— обобщенная функция Миттаг-Леффлера.

Л е м м а 5. Пусть векторы $b_1, \dots, b_n$ образуют положительный базис в $\mathbb{R}^k$, $a < 0$, $\alpha \in (0, 1)$. Тогда существует $T > 0$ такое, что для любой допустимой функции $v(\cdot)$ найдется номер q , для которого справедливо неравенство

$$E_{1/\alpha}(aT^\alpha, 1) - \int_0^T (T - \tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(T - \tau)^\alpha, \alpha) \lambda(b_q, v(\tau)) d\tau \leq 0.$$

Доказательство. Так как $\alpha \in (0, 1)$, то в силу теоремы 4.1.1 [22, с. 101] следует, что $E_{1/\alpha}(z, \mu)$ не имеет отрицательных корней при $\mu \in [\alpha, +\infty)$. Кроме того, $E_{1/\alpha}(z, \mu) \geq 0$ для всех $z \geq 0, \mu \geq 0$. Значит $E_{1/\alpha}(z, \mu) \geq 0$ для всех $z \in \mathbb{R}^1, \mu \in [\alpha, \infty)$.

Определим функции

$$h_i(t, v(\cdot)) = \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t - \tau)^\alpha, \alpha) \lambda(b_i, v(\cdot)) d\tau.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \max_{i \in I} h_i(t, v(\cdot)) &\geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(t, v(\cdot)) = \frac{1}{n} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t - \tau)^\alpha, \alpha) \sum_{i=1}^n \lambda(b_i, v(\cdot)) d\tau \\ &\geq \frac{1}{n} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t - \tau)^\alpha, \alpha) \max_{i \in I} \lambda(b_i, v(\cdot)) d\tau. \end{aligned}$$

Так как $b_1, \dots, b_n$ образуют положительный базис, то [21] существует $\delta > 0$ такое, что

$$\min_{v \in V} \max_{i \in I} \lambda(b_i, v(\cdot)) \geq \delta.$$

Кроме того, в силу [23, гл. 3, формула (1.15)]

$$\int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t - \tau)^\alpha, \alpha) d\tau = t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha + 1).$$

Поэтому

$$\max_{i \in I} h_i(t, v(\cdot)) \geq \frac{\delta}{n} t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha + 1).$$

Рассмотрим функцию $H_0(t) = E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - \frac{\delta t^\alpha}{n} E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha + 1)$.

Так как $a < 0$, то при $t \rightarrow +\infty$ справедливы следующие асимптотические оценки [22, формула (1.2.4)]

$$E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) = -\frac{1}{at^\alpha \Gamma(1 - \alpha)} + O\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right), \quad E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha + 1) = -\frac{1}{at^\alpha} + O\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right).$$

Поэтому $H_0(t) = -\frac{1}{at^\alpha \Gamma(1 - \alpha)} + \frac{\delta}{an} + O\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right)$ и, следовательно, $\lim_{t \rightarrow \infty} H_0(t) = \frac{\delta}{an} < 0$.

Значит существует момент $T > 0$, для которого $H_0(T) < 0$.

Пусть $v(\cdot)$ — произвольная допустимая функция, $q \in \{1, 2, \dots, n\}$, для которого

$$\max_{i \in I} h_i(T, v(\cdot)) = h_q(T, v(\cdot)).$$

Тогда $E_{1/\alpha}(aT^\alpha, 1) - h_q(T, v(\cdot)) \leq H_0(T) < 0$.

Лемма доказана. □

§ 3. Достаточное условие поимки одного убегающего

Теорема 1. Пусть $a \leq 0$, $\text{int co} \{x_i^0\} \cap \text{co} \{y_i^0\} \neq \emptyset$. Тогда в игре $G(n, m)$ происходит поимка хотя бы одного убегающего.

Доказательство. Случай $a = 0$ рассмотрен в [24]. Пусть $a < 0$. Из условия теоремы следует, что $n + m \geq k + 2$. Согласно лемме 3, существуют множества $I \subset \{1, \dots, n\}$, $J \subset \{1, \dots, m\}$ такие, что

$$\text{ri co } \{x_i^0, i \in I\} \cap \text{ri co } \{y_j^0, j \in J\} \neq \emptyset$$

и $|I| + |J| = k + 2$. Будем считать, что $I = \{1, \dots, q\}$, $J = \{1, \dots, l\}$, причем $q + l = k + 2$.

По лемме 2 набор $\{z_{i,j}^0, i \in I, j \in J\}$ образует положительный базис. Если $|J| = 1$, то поимка следует из теоремы 1 (см. [25]). Считаем, что $|J| \geq 2$.

Обозначим $c_\beta^\gamma = y_\beta^0 - y_\gamma^0$. Тогда $z_{i,\gamma}^0 = z_{i,1}^0 + c_1^\gamma$ для всех $i \in I, \gamma \in J, \gamma \neq 1$. Поэтому $\{z_{i,1}^0, i \in I, c_1^\gamma, \gamma \in J, \gamma \neq 1\}$ образует положительный базис.

Так как $n \geq k + 1$, то $q + \gamma - 1 \in \{q + 1, \dots, n\}$ для всех $\gamma \in J, \gamma \neq 1$.

В силу леммы 1, набор $\{z_{i,1}^0, i \in I, z_{q+\gamma-1,1}^0 + \mu c_1^\gamma, \gamma \in J, \gamma \neq 1\}$ образует положительный базис при некотором $\mu > 1$.

Решение системы (1.3) представимо в виде [26, формула (19)]

$$z_{ij}(t) = E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1)z_{ij}^0 + \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t - \tau)^\alpha, \alpha)(u_i(\tau) - v(\tau)) d\tau. \quad (3.4)$$

Задаем стратегии преследователей P_i следующим образом:

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(z_{i,1}^0, v(t))z_{i,1}^0, \quad i \in I,$$

$$u_{q+\gamma-1}(t) = v(t) - \lambda(z_{q+\gamma-1,1}^0 + \mu c_1^\gamma, v(t))(z_{q+\gamma-1,1}^0 + \mu c_1^\gamma), \quad \gamma \in J, \quad \gamma \neq 1.$$

Подставим заданные управления преследователей в систему (3.4). Получаем

$$\begin{aligned} z_{i1}(t) &= z_{i1}^0 \left(E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t - \tau)^\alpha, \alpha) \lambda(z_{i1}^0, v(\tau)) d\tau \right), \\ z_{q+\gamma-1,1}(t) &= \\ &= z_{q+\gamma-1,1}^0 \left(E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t - \tau)^\alpha, \alpha) \lambda(z_{q+\gamma-1,1}^0 + \mu c_1^\gamma, v(\tau)) d\tau \right) - \\ &\quad - \mu c_1^\gamma \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t - \tau)^\alpha, \alpha) \lambda(z_{q+\gamma-1,1}^0 + \mu c_1^\gamma, v(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Обозначим

$$h_i(t) = E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t - \tau)^\alpha, \alpha) \lambda(z_{i1}^0, v(\tau)) d\tau,$$

$$h_{q+\gamma-1}^0(t) = \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t - \tau)^\alpha, \alpha) \lambda(z_{q+\gamma-1,1}^0 + \mu c_1^\gamma, v(\tau)) d\tau,$$

$$h_{q+\gamma-1}(t) = E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - h_{q+\gamma-1}^0(t).$$

Тогда из системы (1.3) получаем

$$z_{i1} = z_{i1}^0 h_i(t), \quad (3.5)$$

$$z_{q+\gamma-1,1}(t) = z_{q+\gamma-1,1}^0 h_{q+\gamma-1}(t) - \mu c_1^\gamma h_{q+\gamma-1}^0(t).$$

По лемме 5 существует момент T и номер s такие, что $h_s(T) = 0$. Если $s \in I$, то $z_{s1}(T) = 0$ и в игре $G(n, m)$ произойдет поимка убегающего E_s . Если $h_{q+\gamma_0-1}(T) = 0$ при некотором $\gamma_0 \in J, \gamma_0 \neq 1$, то

$$z_{q+\gamma_0-1,1}(T) = -\mu c_1^{\gamma_0} h_{q+\gamma_0-1}^0(T).$$

Покажем, что

$$\text{ri co } \{x_i(T), i \in I\} \cap \text{ri co } \{y_j(T), j \in J\} \neq \emptyset. \quad (3.6)$$

Из (3.5) имеем $z_{i1}^0 = \frac{z_{i1}(T)}{h_i(T)}$. Кроме того

$$z_{i\gamma}(t) - z_{i1}(t) = E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1)(z_{i\gamma}^0 - z_{i1}^0).$$

Поэтому для всех $\gamma \in J$, $\gamma \neq 1$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} z_{i\gamma}^0 &= z_{i1}^0 + \frac{z_{i\gamma}(T) - z_{i1}(T)}{E_{1/\alpha}(aT^\alpha, 1)} = \frac{z_{i1}(T)}{h_i(T)} + \frac{z_{i\gamma}(T) - z_{i1}(T)}{E_{1/\alpha}(aT^\alpha, 1)} = \\ &= \frac{E_{1/\alpha}(aT^\alpha, 1) - h_i(T)}{h_i(T)E_{1/\alpha}(aT^\alpha, 1)} z_{i1}(T) + \frac{z_{i\gamma}(T)}{E_{1/\alpha}(aT^\alpha, 1)}. \end{aligned}$$

По условию, система $\{z_{ij}^0, i \in I, j \in J\}$ образует положительный базис. Следовательно, положительный базис образует набор

$$\left\{ \frac{z_{i1}(T)}{h_i(T)}, \frac{E_{1/\alpha}(aT^\alpha, 1) - h_i(T)}{h_i(T)E_{1/\alpha}(aT^\alpha, 1)} z_{i1}(T) + \frac{z_{i\gamma}(T)}{E_{1/\alpha}(aT^\alpha, 1)} \right\}.$$

Так как $h_i(T) > 0$, $E_{1/\alpha}(aT^\alpha, 1) > 0$ и $E_{1/\alpha}(aT^\alpha, 1) > h_i(T)$ при $a < 0$, то система векторов $\{z_{ij}(T), i \in I, j \in J\}$ образует положительный базис.

Используя лемму 3, получаем (3.6). Так как $z_{q+\gamma_0-1,1}(T) = -\mu c_1^{\gamma_0} h_{q+\gamma_0-1}^0$ и выполнено условие (3.6), то согласно лемме 4 имеем

$$\text{ri co } \{x_i(T), i \in I, x_{q+\gamma_0-1}(T)\} \cap \text{ri co } \{y_j(T), j \in J, j \neq 1\} \neq \emptyset.$$

Считаем, что $\gamma_0 = 2$. Далее полагаем $I = \{1, 2, \dots, q+1\}$, $J = \{2, \dots, l\}$. Для полученных множеств I, J справедливо условие (3.6), при этом число убегающих, участвующих в данном условии, уменьшилось на 1. Принимая момент T за начальный, будем повторять рассуждения до тех пор, пока число убегающих не станет равным 1. Получим, что $\text{ri co } \{x_i(\tau), i \in I\} \cap \text{ri co } \{y_j(\tau), j \in J\} \neq \emptyset$ в некоторый момент $\tau > 0$, причем $|I| = k+1$, $|J| = 1$. Теперь поимка следует из теоремы 1 (см. [25]).

§ 4. Достаточное условие поимки заданного числа убегающих

Теорема 2. Пусть $a \leq 0$ и для каждого $s \in \{0, \dots, q-1\}$ выполнено следующее условие: для любого множества $N \subset I$, $|N| = n-s$, найдется множество $M \subset J$, $|M| = q-s$, такое что

$$\text{int co } \{x_i^0, i \in N\} \cap \text{co } \{y_j^0, j \in M\} \neq \emptyset.$$

Тогда в игре $G(n, m)$ происходит поимка не менее q убегающих.

Доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству соответствующей теоремы работы [17] с использованием теоремы 1.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 18-51-41005).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
2. Черноусько Ф.Л. Одна задача уклонения от многих преследователей // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 14–24.
3. Рихсиев Б.Б. Дифференциальные игры с простым движением. Ташкент: Фан, 1989.
4. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992.
5. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.
6. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмуртского университета, 2009.
7. Сатимов Н., Маматов М.Ш. О задачах преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих // ДАН Узб. ССР. 1983. Т. 4. С. 3–6.
8. Петров Н.Н. Простое преследование жесткосоединенных убегающих // Автоматика и телемеханика. 1997. № 12. С. 89–96. <http://mi.mathnet.ru/at2745>
9. Вагин Д.А., Петров Н.Н. Простое преследование жесткосоединенных убегающих // Известия РАН. Теория и системы управления. 2001. № 5. С. 75–79.
10. Вагин Д.А., Петров Н.Н. Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 238–245.
11. Вагин Д.А., Петров Н.Н. Преследование группы убегающих в примере Понтрягина // Прикладная математика и механика. 2004. Т. 68. Вып. 4. С. 623–628.
12. Благодатских А.И. Две нестационарные задачи преследования жестко скоординированных убегающих // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. № 1. С. 47–60. <https://doi.org/10.20537/vm080104>
13. Благодатских А.И. Многократная поимка жестко скоординированных убегающих // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 46–57. <https://doi.org/10.20537/vm160104>
14. Петров Н.Н., Соловьева Н.А. Задача преследования группы скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. № 6. С. 29–37.
15. Виноградова М.Н. О поимке двух убегающих в задаче простого преследования с фазовыми ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 4. С. 3–8. <https://doi.org/10.20537/vm110401>
16. Виноградова М.Н., Петров Н.Н., Соловьева Н.А. Поимка двух скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 1. С. 41–48. <http://mi.mathnet.ru/timm897>
17. Петров Н.Н., Прокопенко В.А. Об одной задаче преследования группы убегающих // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 4. С. 724–726. <http://mi.mathnet.ru/de6186>
18. Сахаров Д.В. О двух дифференциальных играх простого группового преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 1. С. 50–59. <https://doi.org/10.20537/vm120106>
19. Петров Н.Н., Соловьева Н.А. К задаче группового преследования в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Итоги науки и техники. Серия Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2017. Т. 132. С. 81–85. <http://mi.mathnet.ru/into171>
20. Петров Н.Н. Об одной задаче преследования группы убегающих // Автоматика и телемеханика. 1996. № 6. С. 48–54. <http://mi.mathnet.ru/at3222>
21. Петров Н.Н. Об управляемости автономных систем // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617. <http://mi.mathnet.ru/de328>
22. Попов А.Ю., Седлецкий А.М. Распределение корней функций Миттаг-Леффлера // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 40. С. 3–171. <http://mi.mathnet.ru/cmfd182>

23. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.
24. Бичурина А.И. Преследование группы жестко скоординированных убегающих в одной линейной задаче с дробными производными // Известия Института математики и информатики Удмуртского университета. 2017. Т. 50. С. 13–20. <https://doi.org/10.20537/2226-3594-2017-50-02>
25. Петров Н.Н. Одна задача группового преследования с дробными производными и фазовыми ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 1. С. 54–59. <https://doi.org/10.20537/vm170105>
26. Чикрий А.А., Матичин И.И. Об аналоге формулы Коши для линейных систем произвольного дробного порядка // Доповіді Національної академії наук України. 2007. № 1. С. 50–55. <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/1877>

Поступила в редакцию 15.08.2019

Мачтакова Алёна Игоревна, магистрант, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: bichurina.alyona@yandex.ru

Цитирование: А. И. Мачтакова. Преследование жестко скоординированных убегающих в линейной задаче с дробными производными и простой матрицей // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2019. Т. 54. С. 45–54.

Keywords: differential game, group persecution, pursuer, evader, fractional derivatives.

MSC2010: 91A23, 49N70

DOI: 10.20537/2226-3594-2019-54-04

In the finite-dimensional Euclidean space, the problem of pursuit of a group of evaders by a group of pursuers is considered, which is described by a system of the form

$$D^{(\alpha)} z_{ij} = az_{ij} + u_i - v,$$

where $D^{(\alpha)} f$ is the Caputo derivative of the order $\alpha \in (0, 1)$ of the function f . It is assumed that all evaders use the same control. The goal of the pursuers is to catch at least one of the evaders. The evaders use piecewise-program strategies, and the pursuers use piecewise-program counterstrategies. Every pursuer catches not more than one evader. The set of admissible controls is a ball of unit radius with the center at the origin, the target sets are the origin. In terms of initial positions and game parameters, a sufficient conditions for the capture are obtained.

Funding. This work was funded by RFBR, project number 18–51–41005.

REFERENCES

1. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by several objects, *Cybernetics*, 1976, vol. 12, no. 3, pp. 484–485. <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01070036>
2. Chernous'ko F.L. A problem of evasion from many pursuers, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1976, vol. 40, issue 1, pp. 11–20. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(76\)90105-2](https://doi.org/10.1016/0021-8928(76)90105-2)
3. Rikhsiev B.B. *Differentsial'nye igry s prostym dvizheniem* (Differential games with simple motion), Tashkent: Fan, 1992.
4. Chikrii A. *Conflict-controlled processes*, Dordrecht: Springer, 1997. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-1135-7>
5. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* (Mathematical methods of control over multiple processes), Moscow: Moscow State University, 1990.
6. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009.
7. Satimov N., Mamatov M.Sh. On problems of pursuit and evasion away from meeting and differential games between groups of pursuers and evaders, *Dokl. Akad. Nauk UzSSR*, 1983, no. 4, pp. 3–6 (in Russian).
8. Petrov N.N. Simple pursuit after a group of evaders, *Automation and Remote Control*, 1997, vol. 58, no. 12, pp. 1914–1919.
9. Vagin D.A., Petrov N.N. A problem of the pursuit of a group of rigidly connected evaders, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2001, vol. 40, no. 5, pp. 749–753.
10. Vagin D.A., Petrov N.N. A problem of group pursuit with phase constraints, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, vol. 66, no. 2, pp. 225–232. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(02\)00027-8](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(02)00027-8)
11. Vagin D.A., Petrov N.N. Pursuit of a group of evaders in the Pontryagin example, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2004, vol. 68, no. 4, pp. 555–560. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2004.07.008>
12. Blagodatskikh A.I. Two non-stationary pursuit problems of a rigidly connected evaders, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2008, issue 1, pp. 47–60 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm080104>

13. Blagodatskikh A.I. Multiple capture of rigidly coordinated evaders, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 1, pp. 46–57 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm160104>
14. Petrov N.N., Solov'eva N.A. Problem of pursuit of a group of coordinated evaders in linear recurrent differential games, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2012, vol. 51, issue 6, pp. 770–778. <https://doi.org/10.1134/S1064230712060081>
15. Vinogradova M.N. On the capture of two evaders in a simple pursuit–evasion problem with phase restrictions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2011, issue 4, pp. 3–8 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm110401>
16. Vinogradova M.N., Petrov N.N., Solov'eva N.A. Capture of two cooperative evaders in linear recurrent differential games, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2013, vol. 19, no. 1, pp. 41–48 (in Russian). <http://mi.mathnet.ru/eng/timm897>
17. Petrov N.N., Prokopenko V.A. On a problem of the pursuit of a group of evaders, *Differ. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 4, pp. 725–726 (in Russian). <http://mi.mathnet.ru/eng/de6186>
18. Sakharov D.V. On two differential games of simple group pursuit, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2012, issue 1, pp. 50–59 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm120106>
19. Petrov N.N., Solov'eva N.A. Problem of group pursuit in linear recurrent differential games, *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 230, issue 5, pp. 732–736. <https://doi.org/10.1007/s10958-018-3779-z>
20. Petrov N.N. On a group pursuit problem, *Automation and Remote Control*, 1996, vol. 56, no. 6, pp. 808–813.
21. Petrov N.N. About controllability of autonomous systems, *Differ. Uravn.*, 1968, vol. 4, no. 4, pp. 606–617 (in Russian). <http://mi.mathnet.ru/eng/de328>
22. Popov A.Yu., Sedletskii A.M. Distribution of roots of Mittag-Leffler functions, *Journal of Mathematical Sciences*, 2011, vol. 190, issue 2, pp. 209–409. <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1255-3>
23. Dzhrbashyan M.M. *Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funktsii v kompleksnoi oblasti* (Integral transformation and representation functions in complex area), M.: Nauka, 1966.
24. Bichurina A.I. Persecution of a group of rigidly coordinated evaders in a linear problem with fractional derivatives, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2017, vol. 50, pp. 13–20 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/2226-3594-2017-50-02>
25. Petrov N.N. One problem of group pursuit with fractional derivatives and phase constraints, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 1, pp. 54–59 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm170105>
26. Chikrii A.A., Machikhin I.I. On an analogue of the Cauchy formula for linear systems of any fractional order, *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky*, 2007, no. 1, pp. 50–55 (in Russian). <https://zbmath.org/?q=an:1126.91011>

Received 15.08.2019

Machtakova Alena Igorevna, Master Student, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.

E-mail: bichurina.alyona@yandex.ru

Citation: A.I. Machtakova. Persecution of rigidly coordinated evaders in a linear problem with fractional derivatives and a simple matrix, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2019, vol. 54, pp. 45–54.