А. Е. Мамонтов, Д. А. Прокудин, Разрешимость стационарной краевой задачи для уравнений движения однотемпературной смеси вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей,
Изв. РАН. Сер. матем., 2014, том 78, выпуск 3, 135–160

УДК 517.95

А. Е. Мамонтов, Д. А. Прокудин

Разрешимость стационарной краевой задачи для уравнений движения однотемпературной смеси вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей

Рассматривается краевая задача, описывающая стационарное движение двухкомпонентной смеси вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей в ограниченной области. За исключением постулата о совпадении фазовых температур (физически оправданного в определенных ситуациях), не делается никаких упрощающих предположений, т. е. сохранены все слагаемые в уравнениях, являющихся естественным обобщением модели Навье–Стокса–Фурье движения однокомпонентной среды. Доказано существование слабых обобщенных решений задачи.

Библиография: 29 наименований.

Ключевые слова: теорема существования, стационарная краевая задача, вязкая сжимаемая теплопроводная жидкость, гомогенная двухскоростная смесь, эффективный вязкий поток.

Введение

Описание движения многокомпонентных сред является интересной и сравнительно мало исследованной задачей как физики/механики, так и математики. Не существует общепринятого подхода к моделированию таких движений, равно как и развитой математической теории о существовании, единственности и свойствах решений начально-краевых задач, возникающих при этом моделировании. В цели настоящей статьи не входит подробный обзор этой проблематики в целом; в определенной степени представление о ней можно получить по монографиям [1], [2], а также обзору, приведенному в статье [3]. Наша цель – провести математическое исследование, однако ввиду физического происхождения задачи неизбежны краткие пояснения о механическом смысле тех или иных положений, которые мы будем делать по мере надобности.

В настоящей работе выбран один из многочисленных вариантов моделирования движения двухкомпонентных (бинарных) жидкостных смесей, а именно гомогенная смесь двух вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей, двухскоростная однотемпературная модель. Это означает, что в каждой точке пространства присутствуют обе компоненты (составляющие) смеси, которые находятся в одной фазе, но имеют каждая свою локальную скорость движения; взаимодействие между компонентами осуществляется через обмен импульсом и вязкое трение, а также посредством теплообмена (в теплопроводных моделях). Отметим, что с математических позиций как эта, так и многочисленные

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-00529) и Сибирского отделения РАН (интеграционный проект № 30).

прочие модели смесей исследованы весьма мало, в том числе по сравнению с аналогичной теорией для однокомпонентных сред. Подробности можно частично найти в упомянутом обзоре в [3], некоторые пояснения мы приведем далее. В связи с рассматриваемой в настоящей работе моделью (и смежными моделями) отметим, что до недавнего времени по бинарным двухскоростным смесям имелись лишь результаты для приближенных моделей, причем без учета температур [4]–[6], а в последние годы появились работы по полной модели: сначала баротропной [7], а затем теплопроводной (двухтемпературной) [8]. В последней работе имеется все же некоторое упрощение, а именно в уравнениях энергии выброшены члены, отвечающие за вязкое трение. Это связано не только с математическими трудностями (частично возникающими и в однокомпонентном случае), но и с физической корректностью модели (подробности см. в [3]). В настоящей работе рассматривается однотемпературная модель, в которой специфические для смесей физические неувязки в диссипативных членах не возникают и, тем самым, остаются только математические трудности, которые оказалось возможным преодолеть. Таким образом удается получить первый результат о математической корректности полной теплопроводной модели бинарной смеси для случая многомерных движений. В завершение обзора отметим, что в одномерном случае имеются результаты по теплопроводным смесям [9], [10], но они касаются приближенных моделей, причем с диагональной матрицей вязкостей.

При моделировании движения смесей имеется опасность загромождения записи ввиду появления дополнительных индексов (отвечающих за нумерацию составляющих смеси). Здесь существенное облегчение приносит инвариантная запись (исключающая явное упоминание компонент векторов и тензоров), которой мы будем строго придерживаться в течение всей статьи и правила которой мы здесь уточним во избежание разночтений. А именно, если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – векторы (“столбцы”) размерности n, а $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ – тензоры второго ранга (“матрицы”), действующие в $\mathbb{R}^n$, то

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i,\quad \mathbb{A}:\mathbb{B}=\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}B_{ij},\quad \operatorname{div}\boldsymbol{a}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial x_i};$$

$\mathbb{A}\boldsymbol{a}$ и $\operatorname{div}\mathbb{A}$ – векторы (“столбцы”) с компонентами

$$(\mathbb{A}\boldsymbol{a})_i=\sum_{j=1}^{n}A_{ij}a_j,\qquad (\operatorname{div}\mathbb{A})_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j};$$

и наконец, $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}$ – тензор с компонентами $(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})_{ij}=a_ib_j$.

§ 1. Постановка задачи и основной результат

Исследуемая модель смеси является естественным обобщением модели Навье–Стокса–Фурье движения однокомпонентной вязкой сжимаемой теплопроводной жидкости, в значительной степени изученной математически в последние два десятилетия (определенные результаты этой работы можно найти в монографиях [11]–[15]). Для формулировки модели движения смеси как обобщения однокомпонентной модели требуются значительные усилия, отраженные, например, в упомянутых монографиях [1], [2]. Возникающая при этом двухскоростная модель допускает определенные вариации. В частности, остается произвол в моделировании температурных эффектов: можно предполагать различие температур в разных составляющих смеси, а можно считать, что они совпадают. Последнее предположение используется в настоящей работе, оно оправдано в определенных физических условиях (см. об этом, например, [16]–[18]).

Не приводя все промежуточные рассуждения, связанные с построением модели, сразу сформулируем рассматриваемую в работе математическую задачу. Пусть смесь двух вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Предположения о числе составляющих смеси, трехмерности течения и его стационарности примем как несущественную конкретизацию задачи (соответствующие обобщения результата не представляют принципиальных трудностей). Искомыми являются следующие физические величины, описываемые пятью (с учетом размерностей векторов – девятью) функциями, определенными в Ω: скалярные поля плотностей $\rho_i \geqslant 0$ и векторные поля скоростей $\boldsymbol{u}^{(i)}$ для каждой компоненты смеси с номером $i = 1, 2$, а также скалярное поле температуры смеси $\theta > 0$. Для нахождения этих величин необходимо решить два уравнения неразрывности

$$\operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{u}^{(i)}) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad i = 1, 2, \tag{1.1}$$

два векторных (т. е. шесть скалярных) уравнения импульсов

$$\sum_{j=1}^{2} L_{ij}\boldsymbol{u}^{(j)} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{u}^{(i)} \otimes \boldsymbol{u}^{(i)}) + \nabla p_i = \rho_i \boldsymbol{f}^{(i)} + \boldsymbol{J}^{(i)} \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad i = 1, 2, \tag{1.2}$$

и одно уравнение для полной энергии смеси

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\biggl(\sum_{i=1}^{2} \rho_i E_i \boldsymbol{u}^{(i)}\biggr) + \operatorname{div}\biggl(\sum_{i=1}^{2} p_i \boldsymbol{u}^{(i)}\biggr) - \operatorname{div}\biggl(\sum_{i=1}^{2} \mathbb{P}^{(i)} \boldsymbol{u}^{(i)}\biggr) \\ = \sum_{i=1}^{2} \rho_i \boldsymbol{f}^{(i)} \cdot \boldsymbol{u}^{(i)} - 2 \operatorname{div} \boldsymbol{q} \quad \text{в} \quad \Omega.\end{gathered} \tag{1.3}$$

В уравнениях (1.1)–(1.3) использованы следующие обозначения: $\boldsymbol{f}^{(i)}$ – известные внешние массовые силы; p_i – давление i-й компоненты, для него предполагается выполнение определяющего соотношения

$$p_i = \rho_i^{\gamma} + \rho_i \theta, \qquad i = 1, 2, \tag{1.4}$$

в котором показатель адиабаты γ предполагается общим для двух компонент (что несущественно) и достаточно большим (точные требования будут приведены ниже и также допускают ослабление), характер уравнения (1.4) является достаточно стандартным в теории Навье–Стокса–Фурье (см., например, [19]–[21]); $\boldsymbol{J}^{(i)}$ – обмен импульсом между составляющими смеси, определяемый стандартным образом:

$$\boldsymbol{J}^{(i)} = (-1)^i a(\boldsymbol{u}^{(1)} - \boldsymbol{u}^{(2)}), \qquad i = 1, 2, \quad a = \text{const} > 0; \tag{1.5}$$

$\boldsymbol{q}$ – вектор потока тепла, определяемый законом Фурье

$$\boldsymbol{q} = -k(\theta)\nabla\theta \tag{1.6}$$

с коэффициентом теплопроводности, принятым в виде

$$k(\theta) = 1 + \theta^m, \tag{1.7}$$

где постоянная m будет конкретизирована позже; E_i – полная удельная энергия i-й компоненты смеси, определяемая как сумма кинетической и внутренней энергий:

$$E_i = \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}^{(i)}|^2 + U_i, \qquad i = 1, 2, \tag{1.8}$$

причем удельная внутренняя энергия U_i задана определяющим уравнением

$$U_i = \frac{1}{\gamma - 1}\rho_i^{\gamma-1} + \theta, \qquad i = 1, 2; \tag{1.9}$$

$\mathbb{P}^{(i)}$ – вязкая часть тензора напряжений i-й компоненты смеси, заданная определяющим уравнением

$$\mathbb{P}^{(i)} = \sum_{j=1}^{2} \widehat{\mathbb{P}}^{(ij)}, \quad \text{где} \quad \widehat{\mathbb{P}}^{(ij)} = \lambda_{ij} \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(j)}\mathbb{I} + 2\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{u}^{(j)}), \qquad i, j = 1, 2, \tag{1.10}$$

в котором (постоянные) коэффициенты вязкости λ_{ij} и μ_{ij} необходимо удовлетворяют определенным ограничениям, представленным далее, $\mathbb{I}$ – единичный тензор, а $\mathbb{D}(\boldsymbol{v}) = ((\nabla\otimes\boldsymbol{v}) + (\nabla\otimes\boldsymbol{v})^T)/2$ – тензор скоростей деформаций векторного поля $\boldsymbol{v}$ (верхний индекс T означает транспонирование); наконец, использовано обозначение для операторов Ламе

$$L_{ij} = -(\lambda_{ij} + \mu_{ij})\nabla \operatorname{div} - \mu_{ij}\Delta, \qquad i, j = 1, 2, \tag{1.11}$$

так что $\operatorname{div}\mathbb{P}^{(i)} = -\sum_{j=1}^{2} L_{ij}\boldsymbol{u}^{(j)}$, $i = 1, 2$. Термодинамические определяющие уравнения (1.4), (1.7) и (1.9) выбраны именно такими для определенности, они могут быть обобщены (естественно, в рамках фундаментальных ограничений, таких как соотношение Гиббса). Соотношения (1.5) и (1.10) являются распространенным вариантом моделирования динамики двухкомпонентных смесей и выражают сформулированные ранее принципы механического взаимодействия компонент; и наконец, (1.6) и (1.8) представляют собой стандартные физические законы.

К уравнениям (1.1)–(1.3) необходимо добавить краевые условия для скоростей и температуры, например:

$$\boldsymbol{u}^{(i)} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \qquad i = 1, 2 \tag{1.12}$$

(т. е. здесь граница $\partial\Omega$ области Ω предполагается неподвижной твердой стенкой, что, впрочем, нетрудно обобщить),

$$2k(\theta)\nabla\theta\cdot\boldsymbol{n} + L(\theta)(\theta - \widehat{\theta}) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \tag{1.13}$$

(т. е. происходит теплообмен с внешней средой, обладающей известным распределением температуры $\widehat{\theta} > 0$), а также дополнительные условия для плотностей, которые стандартно примем в виде

$$\int_{\Omega} \rho_i \, d\boldsymbol{x} = M_i, \quad i = 1, 2, \tag{1.14}$$

где положительные постоянные M_i выражают полные массы компонент смеси и предполагаются известными. В условиях (1.13) через $\boldsymbol{n}$ обозначена единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$, а коэффициент граничного теплообмена принимается в виде

$$L(\theta) = 1 + \theta^{m-1}. \tag{1.15}$$

Тем самым, предмет нашего исследования сформулирован – это краевая задача (1.1)–(1.15), которую далее будем называть *задачей* $\mathcal{H}$.

Как видно, предлагаемая модель движения бинарной смеси не является простым объединением двух систем Навье–Стокса–Фурье, описывающих движение каждой компоненты, поскольку между этими системами имеется взаимодействие в старших членах, а именно в слагаемых, отвечающих за вязкое трение между составляющими смеси. Коэффициенты вязкостей образуют две матрицы $\Lambda = \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^2$ и $M = \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^2$ (объемных и сдвиговых вязкостей), недиагональные компоненты которых отвечают за указанное взаимодействие. Важную роль играет также матрица полных вязкостей $N = \Lambda + 2M$ (с компонентами $\nu_{ij} = \lambda_{ij} + 2\mu_{ij}$). Если эти матрицы диагональны, взаимодействие систем происходит только через младшие члены, и соответствующая задача не представляет существенных новых математических трудностей по сравнению с однокомпонентным движением (хотя по-прежнему интересна физически). Мы будем рассматривать случай недиагональных матриц вязкостей, в котором нет возможности прямого переноса методов, развитых в теории Навье–Стокса–Фурье однокомпонентных жидкостей. С этим связан математический интерес к поставленной задаче, стимулировавший издание настоящей статьи.

Для термодинамической согласованности сформулированной модели матрицы вязкостей должны удовлетворять определенным требованиям положительной или неотрицательной определенности (см. [3]). Здесь мы будем предполагать следующие, близкие к минимальным, требования:

$$M > 0, \qquad 3\Lambda + 2M \geqslant 0, \tag{1.16}$$

которые обеспечивают выполнение неравенств

$$\sum_{i=1}^{2} \mathbb{P}^{(i)} : (\nabla \otimes \boldsymbol{u}^{(i)}) \geqslant 0 \tag{1.17}$$

(соответствует неотрицательности производства энтропии) и

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega} L_{ij} \boldsymbol{u}^{(j)} \cdot \boldsymbol{u}^{(i)} \, d\boldsymbol{x} \geqslant C_0 \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} |\nabla \otimes \boldsymbol{u}^{(i)}|^2 \, d\boldsymbol{x} \tag{1.18}$$

(обеспечивает важное с математических позиций свойство эллиптичности), где

$$2C_0 = (\mu_{11} + \mu_{22}) - \sqrt{(\mu_{11} - \mu_{22})^2 + (\mu_{12} + \mu_{21})^2}.$$

Отметим, что из (1.16) следует $N > 0$. Кроме того, для упрощения применения метода эффективных вязких потоков (являющегося сердцевиной современной теории Навье–Стокса–Фурье) в рассматриваемом матричном случае сделаем дополнительное техническое предположение о треугольности матрицы полных вязкостей, а именно

$$\lambda_{12} + 2\mu_{12} = 0. \tag{1.19}$$

Оно нигде не используется во всем дальнейшем построении, за исключением упомянутого момента (см. этапы 4.2, 4.3 доказательства теоремы 1.3 в § 4). Однако вопрос о работоспособности метода эффективных вязких потоков в случае произвольных матриц вязкостей остается открытым и, возможно, критически трудным.

Целью статьи является построение слабого обобщенного решения задачи $\mathcal{H}$, которое понимается стандартно, вполне в духе теории однокомпонентных вязких газов. Для точности приведем строгое определение.

Определение 1.1. *Слабым обобщенным решением* задачи $\mathcal{H}$ называются пара неотрицательных функций $\rho_i \in L_{2\gamma}(\Omega)$, $i = 1, 2$, положительная функция $\theta \in W_2^1(\Omega) \cap L_{3m}(\Omega) \cap L_{2m}(\partial\Omega)$ и пара векторных полей $\boldsymbol{u}^{(i)} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $i = 1, 2$, удовлетворяющие условиям (1.1)–(1.15) в следующем смысле:

($\mathcal{H}1$) плотности ρ_i удовлетворяют уравнениям неразрывности (1.1) в том смысле, что для любых $\psi_i \in C^\infty(\overline{\Omega})$ выполняются интегральные тождества

$$\int_\Omega \rho_i \boldsymbol{u}^{(i)} \cdot \nabla \psi_i \, d\boldsymbol{x} = 0, \qquad i = 1, 2,$$

причем выполнены условия (1.14);

($\mathcal{H}2$) скорости $\boldsymbol{u}^{(i)}$ удовлетворяют уравнениям импульсов (1.2) (с определяющими уравнениями и обозначениями (1.4), (1.5), (1.10), (1.11)) в том смысле, что для любых векторных полей $\boldsymbol{\varphi}^{(i)} \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнены интегральные тождества

$$\sum_{j=1}^{2} \biggl(\mu_{ij} \int_\Omega (\nabla \otimes \boldsymbol{u}^{(j)}) \colon (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}^{(i)}) \, d\boldsymbol{x} + (\lambda_{ij} + \mu_{ij}) \int_\Omega (\operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(j)})(\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}^{(i)}) \, d\boldsymbol{x} \biggr)$$
$$- \int_\Omega (\rho_i \boldsymbol{u}^{(i)} \otimes \boldsymbol{u}^{(i)}) \colon (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}^{(i)}) \, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \rho_i^\gamma \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}^{(i)} \, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \rho_i \theta \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}^{(i)} \, d\boldsymbol{x}$$
$$= \int_\Omega (\rho_i \boldsymbol{f}^{(i)} + \boldsymbol{J}^{(i)}) \cdot \boldsymbol{\varphi}^{(i)} \, d\boldsymbol{x}, \qquad i = 1, 2$$

(краевые условия (1.12) выполнены в смысле функционального класса);

($\mathcal{H}3$) температура θ удовлетворяет уравнению энергии (1.3) (с определяющими уравнениями и обозначениями (1.6)–(1.9)) и краевому условию (1.13) (с определяющим уравнением (1.15)) в том смысле, что для любых $\eta \in C^\infty(\overline{\Omega})$ выполнено интегральное тождество

$$-\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \rho_i E_i \boldsymbol{u}^{(i)} \cdot \nabla \eta \, d\boldsymbol{x} - \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega p_i \boldsymbol{u}^{(i)} \cdot \nabla \eta \, d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \mathbb{P}^{(i)} \colon (\boldsymbol{u}^{(i)} \otimes \nabla \eta) \, d\boldsymbol{x}$$
$$= \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \rho_i \boldsymbol{f}^{(i)} \cdot \boldsymbol{u}^{(i)} \eta \, d\boldsymbol{x} + 2 \int_\Omega \boldsymbol{q} \cdot \nabla \eta \, d\boldsymbol{x} - \int_{\partial\Omega} L(\theta)(\theta - \widehat{\theta}) \eta \, d\sigma.$$

Замечание 1.2. Как известно из теории уравнений переноса и Навье–Стокса–Фурье (см., например, [22], [11], [13]), все слабые решения уравнений неразрывности в смысле п. ($\mathcal{H}1$) определения 1.1 автоматически являются так называемыми ренормализованными решениями, т. е. удовлетворяют ренормализованным уравнениям (1.1), формально получающимся из (1.1) умножением на $G'(\rho_i)$ для всех функций G определенного класса (а именно, обладающими достаточной гладкостью и свойствами роста в нуле и на бесконечности).

Основной результат статьи формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 1.3. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *– ограниченная область,* $\partial\Omega \in C^2$, *матрицы вязкостей удовлетворяют условиям* (1.16) *и* (1.19), $\gamma > 3$ *– показатель адиабаты,* $m > \frac{2}{3}\,\frac{6\gamma^2-7\gamma+3}{2\gamma^2-5\gamma+1}$ *– показатель роста коэффициента теплопроводности, остальные числовые параметры модели* (a, M_1, M_2) *произвольны (положительны). Тогда для любых входных данных* $\boldsymbol{f}^{(i)} \in C(\overline{\Omega})$, $i = 1, 2$, $\widehat{\theta} \in C^1(\partial\Omega)$, $\widehat{\theta} > 0$, *задача* $\mathcal{H}$ *имеет по крайней мере одно решение в смысле определения* 1.1.

Замечание 1.4. Наложенное в теореме 1.3 ограничение на γ выглядит достаточно обременительным и невыполнимым физически, однако, как показывает опыт развития теории Навье–Стокса–Фурье, его можно значительно ослабить. В настоящей работе мы видим свою задачу в преодолении принципиальных трудностей и потому не сосредоточиваемся на данном моменте. То же касается и других ограничений, налагаемых на m и классы входных данных.

Вся оставшаяся часть статьи посвящена доказательству теоремы 1.3. Первым этапом является построение решений регуляризованной задачи с одновременным получением оценок решений, равномерных по параметру регуляризации, это построение достаточно стандартное, хотя и громоздкое (этому посвящены § 2, 3). Второй этап состоит в предельном переходе по параметру регуляризации на основе полученных оценок – это принципиальный момент, представляющий основную трудность и потому требующий более подробного изложения (см. § 4). На определенных этапах доказательство изложено в конспективном стиле, поскольку в тех случаях оно аналогично ситуациям, рассмотренным в таких работах, как [8] и [21].

Упомянутая регуляризованная задача, которую будем называть *задачей* $\mathcal{H}_\varepsilon$, формулируется следующим образом: требуется найти функции ρ_i^ε, $\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}$ и θ^ε (здесь и далее верхний индекс ε не является степенью), удовлетворяющие следующим уравнениям, краевым и дополнительным условиям, содержащим параметр $\varepsilon \in (0, 1]$:

$$-\varepsilon\Delta\rho_i^\varepsilon + \operatorname{div}(\rho_i^\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}) + \varepsilon\rho_i^\varepsilon = \varepsilon\frac{M_i}{|\Omega|} \quad \text{в} \ \ \Omega, \qquad i = 1, 2, \tag{1.20}$$

$$\sum_{j=1}^{2} L_{ij}\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(j)} + \frac{\varepsilon}{2}\rho_i^\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)} + \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{M_i}{|\Omega|}\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)} + \frac{1}{2}\rho_i^\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)} + \frac{1}{2}\operatorname{div}(\rho_i^\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)} \otimes \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)})$$
$$+ \nabla(\rho_i^\varepsilon)^\gamma + \nabla(\rho_i^\varepsilon\theta_\varepsilon) = (-1)^i a(\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(1)} - \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(2)}) + \rho_i^\varepsilon \boldsymbol{f}^{(i)} \quad \text{в} \ \ \Omega, \quad i = 1, 2, \tag{1.21}$$

$$
\begin{aligned}
-2\operatorname{div}\left(k(\theta^\varepsilon)\frac{\varepsilon+\theta^\varepsilon}{\theta^\varepsilon}\nabla\theta^\varepsilon\right)+\sum_{i=1}^{2}[\operatorname{div}(\rho_i^\varepsilon\theta^\varepsilon\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)})+\rho_i^\varepsilon\theta^\varepsilon\operatorname{div}\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}-\mathbb{P}_\varepsilon^{(i)}:(\nabla\otimes\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)})]\\
=a|\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(1)}-\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(2)}|^2+\varepsilon\gamma\sum_{i=1}^{2}(\rho_i^\varepsilon)^{\gamma-2}|\nabla\rho_i^\varepsilon|^2 \quad \text{в} \ \ \Omega,
\end{aligned} \tag{1.22}
$$

$$
\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}=0, \quad \nabla\rho_i^\varepsilon\cdot\boldsymbol{n}=0 \quad \text{на} \ \ \partial\Omega, \qquad i=1,2, \tag{1.23}
$$

$$
2k(\theta^\varepsilon)\frac{\varepsilon+\theta^\varepsilon}{\theta^\varepsilon}\nabla\theta^\varepsilon\cdot\boldsymbol{n}+\varepsilon\ln\theta^\varepsilon+L(\theta^\varepsilon)(\theta^\varepsilon-\widehat{\theta})=0 \quad \text{на} \ \ \partial\Omega, \tag{1.24}
$$

$$
\int_\Omega\rho_i^\varepsilon\,d\boldsymbol{x}=M_i, \qquad i=1,2, \tag{1.25}
$$

где

$$
\mathbb{P}_\varepsilon^{(i)}=\sum_{j=1}^{2}\widehat{\mathbb{P}}_\varepsilon^{(ij)}, \quad \widehat{\mathbb{P}}_\varepsilon^{(ij)}=\lambda_{ij}\operatorname{div}\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(j)}\mathbb{I}+2\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(j)}), \qquad i,j=1,2, \tag{1.26}
$$

а $|\Omega|$ означает лебегову меру Ω. Как видно, задача $\mathcal{H}_\varepsilon$ представляет собой не что иное, как равномерно эллиптическую регуляризацию задачи $\mathcal{H}$ с дополнительными слагаемыми и граничными условиями, призванными сохранить полезные свойства исходной задачи, играющие важную роль в теории вязкого газа, например интегральную ортогональность конвективных членов скоростям. Условия (1.25) следуют из (1.20) и (1.23), но мы включаем их в формулировку задачи $\mathcal{H}_\varepsilon$ для единообразия с исходной задачей $\mathcal{H}$.

При анализе этой задачи иногда будет удобно вместо температуры θ^ε использовать функцию

$$
s^\varepsilon=\ln\theta^\varepsilon, \tag{1.27}
$$

в терминах которой соотношения (1.22) и (1.24) переписываются соответственно в виде

$$
\begin{aligned}
-2\operatorname{div}\big((1+e^{ms^\varepsilon})(\varepsilon+e^{s^\varepsilon})\nabla s^\varepsilon\big)=a|\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(1)}-\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(2)}|^2-\sum_{i=1}^{2}\big(\operatorname{div}(\rho_i^\varepsilon e^{s^\varepsilon}\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)})\\
+\rho_i^\varepsilon e^{s^\varepsilon}\operatorname{div}\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}-\mathbb{P}_\varepsilon^{(i)}:(\nabla\otimes\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)})-\varepsilon\gamma(\rho_i^\varepsilon)^{\gamma-2}|\nabla\rho_i^\varepsilon|^2\big) \quad \text{в} \ \ \Omega,
\end{aligned} \tag{1.28}
$$

$$
2(1+e^{ms^\varepsilon})(\varepsilon+e^{s^\varepsilon})\nabla s^\varepsilon\cdot\boldsymbol{n}+\varepsilon s^\varepsilon+L(e^{s^\varepsilon})(e^{s^\varepsilon}-\widehat{\theta})=0 \quad \text{на} \ \ \partial\Omega, \tag{1.29}
$$

при этом модифицированную задачу (1.20), (1.21), (1.28), (1.23), (1.29), (1.25) о поиске функций ρ_i^ε, $\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}$ $(i=1,2)$ и s^ε будем называть *задачей* $\widetilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$.

§ 2. Априорные оценки решений регуляризованной задачи

Решение задачи $\mathcal{H}_\varepsilon$ будем строить сильное, понимая под этим следующее

Определение 2.1. *Сильным обобщенным решением задачи* $\mathcal{H}_\varepsilon$ называются пара неотрицательных функций $\rho_i^\varepsilon\in W_p^2(\Omega)$, $i=1,2$, $p>3$, положительная функция $\theta^\varepsilon\in W_p^2(\Omega)$ и пара векторных полей $\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}\in W_p^2(\Omega)$, $i=1,2$, удовлетворяющие (1.25), уравнениям (1.20)–(1.22) п. в. в Ω и условиям (1.23), (1.24) п. в. на $\partial\Omega$.

С тем же успехом можно говорить о построении сильного решения задачи $\widetilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$, понимая под ним следующее

Определение 2.2. *Сильным обобщенным решением задачи* $\widetilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ называются пара неотрицательных функций $\rho_i^\varepsilon \in W_p^2(\Omega)$, $i = 1, 2$, $p > 3$, функция $s^\varepsilon \in W_p^2(\Omega)$ и пара векторных полей $\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)} \in W_p^2(\Omega)$, $i = 1, 2$, удовлетворяющие условию (1.25), уравнениям (1.20), (1.21), (1.28) п. в. в Ω и условиям (1.23), (1.29) п. в. на $\partial\Omega$.

В самом деле, очевидно, что определения 2.1, 2.2 эквивалентны при замене (1.27).

Условимся через C_k, $k \in \mathbb{N}$, обозначать величины, зависящие от следующих объектов:

$$\|\boldsymbol{f}^{(i)}\|_{C(\overline{\Omega})},\ \lambda_{ij},\ \mu_{ij},\ M_i, \quad i,j = 1,2; \quad \|\widehat{\theta}\|_{C(\partial\Omega)},\ \min_{\partial\Omega}\widehat{\theta},\ m,\ \gamma,\ a; \quad \Omega, \tag{2.1}$$

и только от них, причем принимающие конечные положительные значения при всех данных задачи $\mathcal{H}$, удовлетворяющих условиям теоремы 1.3 (и тем самым обеспечивающих вполне определенность объектов в (2.1)). Величины C_k послужат костяком вышеупомянутых равномерных по ε оценок; особенно важно, что C_k не зависят от ε. Все объекты в (2.1) являются числовыми, кроме Ω. Зависимость оценок от геометрии области мы не конкретизируем, хотя это интересный прикладной вопрос. В случае, если какая-либо величина семейства $\{C_k\}$ имеет дополнительные аргументы, будем явно выписывать их в скобках.

Целью здесь и в § 3 является доказательство следующих двух утверждений.

Лемма 2.3. *В условиях теоремы* 1.3 *для произвольного* $\varepsilon \in (0, 1]$ *любое сильное решение задачи* $\mathcal{H}_\varepsilon$ *удовлетворяет неравенству* (*см.* (1.27))

$$\sum_{i=1}^{2}\big(\|\rho_i^\varepsilon\|_{L_{2\gamma}(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon\|_{L_{\frac{6\gamma}{\gamma+3}}(\Omega)}\big) + \|\theta^\varepsilon\|_{L_{3m}(\Omega)} \\ + \|\nabla\theta^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} + \int_{\partial\Omega}(e^{s^\varepsilon} + e^{-s^\varepsilon})\,d\sigma + \|\nabla s^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} + \|\theta^\varepsilon\|_{L_{2m}(\partial\Omega)} \leqslant C_1. \tag{2.2}$$

Теорема 2.4. *В условиях теоремы* 1.3 *при любых* $\varepsilon \in (0, 1]$ *задача* $\mathcal{H}_\varepsilon$ *имеет по крайней мере одно сильное решение.*

Доказательство леммы 2.3. Предположим, что мы располагаем набором функций, описанным в определении 2.1, и докажем для него оценку (2.2). Далее до конца § 3 во избежание загромождения формул не будем выписывать индекс ε у величин, зависящих от этого параметра, таких как ρ_i^ε, $\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}$, $i = 1, 2$, θ^ε, s^ε и т. д.

Этап 1: *вывод двух основных интегральных тождеств.* Умножим обе части уравнений (1.21) скалярно на $\boldsymbol{u}^{(i)}$, проинтегрируем по Ω и просуммируем по $i=1,2$. Это приведет нас к первому из основных интегральных тождеств

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \mathbb{P}^{(i)} : (\nabla\otimes\boldsymbol{u}^{(i)})\,d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \rho_i|\boldsymbol{u}^{(i)}|^2\,d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon}{2|\Omega|}\sum_{i=1}^{2}M_i\int_\Omega|\boldsymbol{u}^{(i)}|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&\qquad + \varepsilon\frac{\gamma}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\rho_i^\gamma\,d\boldsymbol{x} + \varepsilon\gamma\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\rho_i^{\gamma-2}|\nabla\rho_i|^2\,d\boldsymbol{x} + a\int_\Omega|\boldsymbol{u}^{(1)}-\boldsymbol{u}^{(2)}|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&= \frac{\varepsilon}{|\Omega|}\,\frac{\gamma}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{2}M_i\int_\Omega\rho_i^{\gamma-1}\,d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\rho_i\theta\operatorname{div}\boldsymbol{u}^{(i)}\,d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\rho_i\boldsymbol{f}^{(i)}\cdot\boldsymbol{u}^{(i)}\,d\boldsymbol{x}.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Если умножить уравнение (1.22) на $(1-1/\theta)$, проинтегрировать по Ω и сложить с (2.3), то получим второе основное интегральное тождество

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\frac{\mathbb{P}^{(i)} : (\nabla\otimes\boldsymbol{u}^{(i)})}{\theta}\,d\boldsymbol{x} + 2\int_\Omega k(\theta)\frac{\varepsilon+\theta}{\theta}|\nabla\ln\theta|^2\,d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega}L(\theta)\frac{\widehat{\theta}}{\theta}\,d\sigma\\
&\quad + \int_{\partial\Omega}L(\theta)\theta\,d\sigma + a\int_\Omega\frac{|\boldsymbol{u}^{(1)}-\boldsymbol{u}^{(2)}|^2}{\theta}\,d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\rho_i|\boldsymbol{u}^{(i)}|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&\quad + \frac{\varepsilon}{2|\Omega|}\sum_{i=1}^{2}M_i\int_\Omega|\boldsymbol{u}^{(i)}|^2\,d\boldsymbol{x} + \varepsilon\frac{\gamma}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\rho_i^\gamma\,d\boldsymbol{x} + \varepsilon\gamma\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\frac{\rho_i^{\gamma-2}}{\theta}|\nabla\rho_i|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&\quad + \varepsilon\int_{\partial\Omega}(s^-e^{s^-}+s^+)\,d\sigma\\
&= \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega(\rho_i\boldsymbol{u}^{(i)}\cdot\nabla s - \boldsymbol{u}^{(i)}\cdot\nabla\rho_i)\,d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega}L(\theta)(1+\widehat{\theta})\,d\sigma\\
&\quad + \frac{\varepsilon}{|\Omega|}\,\frac{\gamma}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{2}M_i\int_\Omega\rho_i^{\gamma-1}\,d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\rho_i\boldsymbol{f}^{(i)}\cdot\boldsymbol{u}^{(i)}\,d\boldsymbol{x} + \varepsilon\int_{\partial\Omega}(s^+e^{-s^+}+s^-)\,d\sigma,
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

где использованы обозначения для положительной $z^+=z\chi(z)$ и отрицательной $z^-=-z\chi(-z)$ частей произвольной величины z (здесь χ – функция Хевисайда), отметим при этом очевидные свойства $(z\varphi(z))^+=z^+\varphi(z^+)$ и $(z\varphi(z))^-=z^-\varphi(z^-)$, верные для любой положительной функции φ. В левых частях полученных тождеств (2.3) и (2.4) ввиду (1.17) содержатся только неотрицательные слагаемые.

Этап 2: *предварительная оценка плотностей* (*с помощью оператора Боговского*). Рассмотрим функции $\boldsymbol{\varphi}^{(i)}\in\mathring{W}_2^1(\Omega)$, являющиеся решениями задач

$$
\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}^{(i)} = \rho_i^\gamma - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\rho_i^\gamma\,d\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{\varphi}^{(i)}|_{\partial\Omega}=0
$$

при $i=1,2$. В рассматриваемых нами условиях такие функции существуют и удовлетворяют оценкам (см., например, [13], [23])

$$
\|\boldsymbol{\varphi}^{(i)}\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C_2\|\rho_i\|^\gamma_{L_{2\gamma}(\Omega)}, \qquad i=1,2. \tag{2.5}
$$

Используем эти функции в качестве тестовых для (1.21) (т. е. умножим уравнение (1.21) скалярно на $\boldsymbol{\varphi}^{(i)}$ и проинтегрируем по Ω) и получим равенства

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \rho_i^{2\gamma}\,d\boldsymbol{x} &= \frac{1}{|\Omega|}\left(\int_\Omega \rho_i^\gamma\,d\boldsymbol{x}\right)^2 + \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \rho_i^\gamma\,d\boldsymbol{x}\int_\Omega \rho_i\theta\,d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \rho_i^{\gamma+1}\theta\,d\boldsymbol{x} \\
&+ \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega \rho_i\boldsymbol{u}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\varphi}^{(i)}\,d\boldsymbol{x} + \varepsilon\frac{M_i}{2|\Omega|}\int_\Omega \boldsymbol{u}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\varphi}^{(i)}\,d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega (\rho_i(\boldsymbol{u}^{(i)}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}^{(i)})\cdot\boldsymbol{\varphi}^{(i)}\,d\boldsymbol{x} \\
&+ \sum_{j=1}^2\left(\mu_{ij}\int_\Omega (\nabla\otimes\boldsymbol{u}^{(j)}) : (\nabla\otimes\boldsymbol{\varphi}^{(i)})\,d\boldsymbol{x} + (\lambda_{ij}+\mu_{ij})\int_\Omega (\operatorname{div}\boldsymbol{u}^{(j)})(\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}^{(i)})\,d\boldsymbol{x}\right) \\
&- \frac{1}{2}\int_\Omega (\rho_i\boldsymbol{u}^{(i)}\otimes\boldsymbol{u}^{(i)}) : (\nabla\otimes\boldsymbol{\varphi}^{(i)})\,d\boldsymbol{x} \\
&- \int_\Omega \boldsymbol{J}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\varphi}^{(i)}\,d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \rho_i\boldsymbol{f}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\varphi}^{(i)}\,d\boldsymbol{x}, \qquad i=1,2.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Используя (1.25), (2.5) и элементарные неравенства (Юнга с малым множителем и Гёльдера), мы можем оценить все слагаемые в правой части (2.6) через левую часть и нормы θ и $\boldsymbol{u}^{(j)}$ и в итоге получить оценки

$$\|\rho_i\|_{L_{2\gamma}(\Omega)} \leqslant C_3\left(1 + \|\theta\|^{\frac{1}{\gamma-1}}_{L_{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}(\Omega)} + \sum_{j=1}^2 \|\boldsymbol{u}^{(j)}\|^{\frac{2}{\gamma-1}}_{W_2^1(\Omega)}\right), \qquad i=1,2, \tag{2.7}$$

при этом используется ограничение $\gamma \geqslant 3$.

Этап 3: *предварительная оценка температуры*. Оценим слагаемые в правой части тождества (2.4). Для этого сначала представим интегралы в первой сумме в следующем виде (что нетрудно сделать с помощью (1.20)):

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\rho_i\boldsymbol{u}^{(i)}\cdot\nabla s - \boldsymbol{u}^{(i)}\cdot\nabla\rho_i)\,d\boldsymbol{x} &= \int_\Omega\left(\varepsilon\nabla\rho_i\cdot\nabla s - \varepsilon\frac{|\nabla\rho_i|^2}{\rho_i+\delta_1}\right)d\boldsymbol{x} - \varepsilon\frac{M_i}{|\Omega|}\int_\Omega s\,d\boldsymbol{x} \\
&+ \int_\Omega\left(\varepsilon\rho_i s - \varepsilon\rho_i\ln(\rho_i+\delta_1) + \varepsilon\frac{M_i}{|\Omega|}\ln(\rho_i+\delta_1)\right)d\boldsymbol{x} + \delta_1\int_\Omega (\operatorname{div}\boldsymbol{u}^{(i)})\ln(\rho_i+\delta_1)\,d\boldsymbol{x},
\end{aligned} \tag{2.8}$$

где $\delta_1 \in (0,1]$ – произвольный параметр. Суммируя элементарные неравенства

$$\begin{aligned}
\varepsilon\int_\Omega \nabla\rho_i\cdot\nabla s\,d\boldsymbol{x} &\leqslant \frac{\varepsilon\gamma}{2}\int_\Omega \frac{(\rho_i+\delta_1)^{\gamma-2}}{\theta}|\nabla\rho_i|^2\,d\boldsymbol{x} \\
&\qquad + \varepsilon\int_\Omega \frac{|\nabla\rho_i|^2}{\rho_i+\delta_1}\,d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega \theta^{\frac{1}{\gamma-1}}|\nabla s|^2\,d\boldsymbol{x}, \\
-\varepsilon\frac{M_i}{|\Omega|}\int_\Omega s\,d\boldsymbol{x} &\leqslant \frac{\varepsilon}{4}\int_{\partial\Omega} s^- e^{s^-}\,d\sigma + \frac{1}{4}\|\nabla s\|^2_{L_2(\Omega)} + C_4, \\
\int_\Omega\left(\varepsilon\rho_i\ln\theta - \varepsilon\rho_i\ln(\rho_i+\delta_1) + \varepsilon\frac{M_i}{|\Omega|}\ln(\rho_i+\delta_1)\right)d\boldsymbol{x} &\leqslant \|\rho_i\theta\|_{L_1(\Omega)} + C_5, \\
\delta_1\int_\Omega (\operatorname{div}\boldsymbol{u}^{(i)})\ln(\rho_i+\delta_1)\,d\boldsymbol{x} &\leqslant \int_\Omega |\operatorname{div}\boldsymbol{u}^{(i)}|(\rho_i+1)\,d\boldsymbol{x} \\
&\leqslant \|\boldsymbol{u}^{(i)}\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\rho_i\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{|\Omega|}{2},
\end{aligned}$$

выведем оценку правой части (2.8), переходя в которой к пределу при $\delta_1 \to 0$, получим

$$\int_\Omega (\rho_i \boldsymbol{u}^{(i)} \cdot \nabla s - \boldsymbol{u}^{(i)} \cdot \nabla \rho_i)\, d\boldsymbol{x} \leqslant \frac{\varepsilon\gamma}{2} \int_\Omega \frac{\rho_i^{\gamma-2}}{\theta} |\nabla \rho_i|^2\, d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2} \int_\Omega \theta^{\frac{1}{\gamma-1}} |\nabla s|^2\, d\boldsymbol{x}$$
$$+ \frac{\varepsilon}{4} \int_{\partial\Omega} s^- e^{s^-}\, d\sigma + \frac{1}{4} \|\nabla s\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\rho_i \theta\|_{L_1(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}^{(i)}\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \frac{1}{2} \|\rho_i\|^2_{L_2(\Omega)} + C_6.$$

Последний интеграл в правой части (2.4) оценивается следующим образом:

$$\varepsilon \int_{\partial\Omega} (s^+ e^{-s^+} + s^-)\, d\sigma \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \int_{\partial\Omega} s^- e^{s^-}\, d\sigma - \varepsilon \int_{\partial\Omega} s^- d\sigma + 2|\partial\Omega|,$$

и после простых оценок оставшихся интегралов выведем из (2.4) неравенство

$$\int_\Omega \frac{1+\theta^m}{\theta^2} |\nabla \theta|^2\, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} \Big(L(\theta)\theta + \frac{\widehat{\theta}}{\theta} + \varepsilon |s| \Big) d\sigma$$
$$\leqslant C_7 \Big(\sum_{i=1}^2 \|\boldsymbol{u}^{(i)}\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \sum_{i=1}^2 \|\rho_i\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\rho_i \theta\|_{L_1(\Omega)} + 1 \Big). \tag{2.9}$$

Здесь содержится оценка для $\theta^{m/2}$ в $W_2^1(\Omega)$, а значит, и в $L_6(\Omega)$, и после дополнительных элементарных преобразований получаем неравенство (учитывая, что $m > 2$)

$$\|\theta\|^m_{L_{3m}(\Omega)} \leqslant C_8 \Big(\sum_{i=1}^2 \|\boldsymbol{u}^{(i)}\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \sum_{i=1}^2 \|\rho_i\|^2_{L_2(\Omega)} + 1 \Big). \tag{2.10}$$

Этап 4: *оценки температуры и скоростей через плотности*. Оценим интегралы в правой части соотношения (2.3), сохранив при этом в левой части только первый и четвертый интегралы (причем четвертый – временно, только для оценки первого интеграла в правой части). Используя (1.18) и элементарные неравенства, легко получим оценку

$$\sum_{i=1}^2 \|\boldsymbol{u}^{(i)}\|^2_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C_9 \Big(\sum_{i=1}^2 \|\rho_i\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^2 \|\rho_i \theta\|^2_{L_2(\Omega)} + 1 \Big), \tag{2.11}$$

а поскольку с помощью (1.25) можно оценить нормы

$$\|\rho_i \theta\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \delta_2 \|\theta\|^m_{L_{3m}(\Omega)} + C_{10}(\delta_2) \|\rho_i\|^{\frac{2\gamma}{2\gamma-1} \cdot \frac{3m+2}{3(m-2)}}_{L_{2\gamma}(\Omega)} \tag{2.12}$$

(с произвольным $\delta_2 > 0$), то из (2.11) для всех $\delta_3 > 0$ получаем

$$\sum_{i=1}^2 \|\boldsymbol{u}^{(i)}\|^2_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \delta_3 \|\theta\|^m_{L_{3m}(\Omega)} + C_{11}(\delta_3) \Big(\sum_{i=1}^2 \|\rho_i\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^2 \|\rho_i\|^{\frac{2\gamma}{2\gamma-1} \cdot \frac{3m+2}{3(m-2)}}_{L_{2\gamma}(\Omega)} + 1 \Big), \tag{2.13}$$

где первую сумму в скобках можно отбросить ввиду $\frac{3m+2}{3(m-2)} > 1$ и (1.25). Теперь из (2.10) получаем

$$\|\theta\|^m_{L_{3m}(\Omega)} \leqslant C_{12}\biggl(\sum_{i=1}^{2} \|\rho_i\|_{L_{2\gamma}(\Omega)}^{\frac{2\gamma}{2\gamma-1}\cdot\frac{3m+2}{3(m-2)}} + 1\biggr), \tag{2.14}$$

а тогда из (2.13) получаем также и

$$\sum_{i=1}^{2} \|\boldsymbol{u}^{(i)}\|^2_{W^1_2(\Omega)} \leqslant C_{13}\biggl(\sum_{i=1}^{2} \|\rho_i\|_{L_{2\gamma}(\Omega)}^{\frac{2\gamma}{2\gamma-1}\cdot\frac{3m+2}{3(m-2)}} + 1\biggr). \tag{2.15}$$

Этап 5: *завершение оценок.* Ввиду неравенства $3m > 2\gamma/(2\gamma-1)$ оценку (2.7) можно замкнуть с использованием (2.14) и (2.15):

$$\sum_{i=1}^{2} \|\rho_i\|_{L_{2\gamma}(\Omega)} \leqslant C_{14}\biggl(\sum_{i=1}^{2} \|\rho_i\|_{L_{2\gamma}(\Omega)}^{\frac{2\gamma}{(2\gamma-1)(\gamma-1)}\cdot\frac{3m+2}{3(m-2)}} + 1\biggr),$$

и поскольку показатель степени нормы в правой части меньше единицы, это позволяет заключить, что $\sum_{i=1}^{2} \|\rho_i\|_{L_{2\gamma}(\Omega)} \leqslant C_{15}$, а тогда из (2.14) и (2.15) следует оценка $\sum_{i=1}^{2} \|\boldsymbol{u}^{(i)}\|_{W^1_2(\Omega)} + \|\theta\|_{L_{3m}(\Omega)} \leqslant C_{16}$. Теперь в силу (2.12) оценена и левая часть неравенства (2.9), что означает, в том числе, и оценку $\theta^{m/2}$ в $W^1_2(\Omega)$, а значит, и в $L_4(\partial\Omega)$. Все это ввиду элементарного анализа показывает, что в оценке (2.2) осталось обосновать только присутствие градиентов плотностей. Для этого приведем следующее неравенство [11], вытекающее из (1.20), второго равенства в (1.23) и (1.25):

$$\sum_{i=1}^{2} \|\varepsilon\nabla\rho_i\|_{L_{\frac{6\gamma}{\gamma+3}}(\Omega)} \leqslant C_{17}\biggl(\sum_{i=1}^{2} \|\rho_i\boldsymbol{u}^{(i)}\|_{L_{\frac{6\gamma}{\gamma+3}}(\Omega)} + 1\biggr),$$

после чего требуемое следует из уже полученных оценок. Лемма доказана.

§ 3. Разрешимость регуляризованной задачи (доказательство теоремы 2.4)

Ввиду сделанных в начале § 2 наблюдений достаточно доказать существование сильного решения задачи $\widetilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$. Это решение будет построено нами как неподвижная точка оператора $\boldsymbol{\Psi}$, сформированного ниже. Условимся, что в настоящем параграфе показатель $p > 3$ произволен, и введем обозначение $B_p(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in W^2_p(\Omega)\colon \boldsymbol{v}|_{\partial\Omega} = 0\}$.

Этап 1: *формирование основного оператора.* Определим сначала несколько “промежуточных” операторов, суперпозицией которых и будет оператор $\boldsymbol{\Psi}$.

Первыми определим пару операторов $\mathcal{R}_i$, $i = 1, 2$, действующих по закону $\mathcal{R}_i\colon \boldsymbol{w} \mapsto r$, где $\boldsymbol{w} \in B_p(\Omega)$, а r – решение задачи

$$-\varepsilon\Delta r + \operatorname{div}(r\boldsymbol{w}) + \varepsilon r = \varepsilon\frac{M_i}{|\Omega|}, \qquad \nabla r\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0;$$

тогда $r = \mathcal{R}_i(\boldsymbol{w})$ не отрицательно [13] и удовлетворяет (1.25). Ввиду стандартных свойств эллиптических краевых задач (см., например, [24], [25]) операторы $\mathcal{R}_i\colon B_p(\Omega) \to W_p^2(\Omega)$ непрерывны, поскольку

$$\|\mathcal{R}_i(\boldsymbol{v}) - \mathcal{R}_i(\boldsymbol{w})\|_{W_p^2(\Omega)} \leqslant A_1\big(p, \varepsilon, \|\boldsymbol{v}\|_{C^1(\overline{\Omega})}, \|\boldsymbol{w}\|_{C^1(\overline{\Omega})}, \Omega, M_1, M_2\big)\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\|_{W_p^2(\Omega)}.$$

Вторым вспомогательным оператором является $\mathcal{U}\colon \mathbf{g} \mapsto \mathbf{h}$, где $\mathbf{g} = (\boldsymbol{g}^{(1)}, \boldsymbol{g}^{(2)})$ с компонентами $\boldsymbol{g}^{(i)} \in L_p(\Omega)$, а $\mathbf{h} = (\boldsymbol{h}^{(1)}, \boldsymbol{h}^{(2)})$ состоит из решений задач

$$\sum_{j=1}^{2} L_{ij}\boldsymbol{h}^{(j)} = \boldsymbol{g}^{(i)}, \quad \boldsymbol{h}^{(i)}|_{\partial\Omega} = 0, \qquad i = 1, 2.$$

Очевидно, что $\mathcal{U}\colon L_p(\Omega) \to B_p(\Omega)$ непрерывно.

Третьим вспомогательным оператором является $\mathcal{S}\colon (d, b, t) \mapsto z$, где $(d, b, t) \in L_p(\Omega) \times C^1(\overline{\Omega}) \times W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$, причем $b > 0$, а z – решение задачи

$$-\operatorname{div}(b\nabla z) = d, \qquad (b\nabla z \cdot \boldsymbol{n} + \varepsilon z)|_{\partial\Omega} = t.$$

Снова из общей теории имеем неравенство

$$\|\mathcal{S}(d, b, t)\|_{W_p^2(\Omega)} \leqslant A_2\Big(\|b\|_{C^1(\overline{\Omega})}, \min_{\overline{\Omega}} b, p, \Omega\Big)\Big(\|d\|_{L_p(\Omega)} + \|t\|_{W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)}\Big), \tag{3.1}$$

т. е. $\mathcal{S}\colon L_p(\Omega) \times C^1(\overline{\Omega}) \times W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega) \to W_p^2(\Omega)$, а применяя эту же оценку к разности двух задач, т. е. рассматривая $z_k = \mathcal{S}(d_k, b_k, t_k)$, $k = 1, 2$, и замечая, что

$$(z_2 - z_1) = \mathcal{S}\bigg((d_2 - d_1) + \operatorname{div}((b_2 - b_1)\nabla z_1), b_2, (t_2 - t_1) - (b_2 - b_1)\frac{\partial z_1}{\partial \boldsymbol{n}}\bigg),$$

из (3.1) получаем оценку

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{S}(d_2, b_2, t_2) - \mathcal{S}(d_1, b_1, t_1)\|_{W_p^2(\Omega)} \\
&\quad\leqslant A_3\Big(\|b_1\|_{C^1(\overline{\Omega})}, \|b_2\|_{C^1(\overline{\Omega})}, \min_{\overline{\Omega}} b_1, \min_{\overline{\Omega}} b_2, p, \Omega, \|d_1\|_{L_p(\Omega)}, \|t_1\|_{W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)}\Big) \\
&\qquad\qquad \times \Big(\|d_2 - d_1\|_{L_p(\Omega)} + \|t_2 - t_1\|_{W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)} + \|b_2 - b_1\|_{C^1(\overline{\Omega})}\Big),
\end{aligned}$$

т. е. непрерывность оператора $\mathcal{S}$ в этих же пространствах.

Наконец, четвертый набор операторов $\mathcal{G}^{(1)}$, $\mathcal{G}^{(2)}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{T}$ определим следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^{(i)}(\mathbf{w}, y) = &-\frac{\varepsilon}{2} r_i \boldsymbol{w}^{(i)} - \frac{\varepsilon}{2}\frac{M_i}{|\Omega|}\boldsymbol{w}^{(i)} - \frac{1}{2} r_i(\boldsymbol{w}^{(i)} \cdot \nabla)\boldsymbol{w}^{(i)} - \frac{1}{2}\operatorname{div}(r_i \boldsymbol{w}^{(i)} \otimes \boldsymbol{w}^{(i)}) \\
&- \nabla r_i^{\gamma} - \nabla(r_i e^y) + (-1)^i a(\boldsymbol{w}^{(1)} - \boldsymbol{w}^{(2)}) + r_i \boldsymbol{f}^{(i)}, \qquad i = 1, 2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\mathbf{w}, y) = &-\sum_{i=1}^{2}\operatorname{div}(r_i e^y \boldsymbol{w}^{(i)}) - \sum_{i=1}^{2} r_i e^y \operatorname{div}\boldsymbol{w}^{(i)} + a|\boldsymbol{w}^{(1)} - \boldsymbol{w}^{(2)}|^2 \\
&+ \sum_{i=1}^{2}\bigg(\sum_{j=1}^{2}(\lambda_{ij}\operatorname{div}\boldsymbol{w}^{(j)}\mathbb{I} + 2\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{w}^{(j)}))\bigg) : (\nabla \otimes \boldsymbol{w}^{(i)}) + \varepsilon\gamma\sum_{i=1}^{2} r_i^{\gamma-2}|\nabla r_i|^2,
\end{aligned}$$

$$\mathcal{B}(y) = 2(1 + e^{my})(\varepsilon + e^y),$$

$$\mathcal{T}(y) = -(1 + e^{(m-1)y})(e^y - \widehat{\theta})|_{\partial\Omega},$$

где $\mathbf{w} = (\boldsymbol{w}^{(1)}, \boldsymbol{w}^{(2)}) \in B_p(\Omega)$, $r_i = \mathcal{R}_i(\boldsymbol{w}^{(i)}) \in W_p^2(\Omega)$, $i = 1, 2$, $y \in W_p^2(\Omega)$. Легко видеть, что $\mathcal{G}^{(i)}\colon B_p(\Omega) \times W_p^2(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$, $i = 1, 2$, $\mathcal{D}\colon B_p(\Omega) \times W_p^2(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$, $\mathcal{B}\colon W_p^2(\Omega) \to C^1(\overline{\Omega})$, $\mathcal{T}\colon W_p^2(\Omega) \to C^1(\partial\Omega)$. Более того, нетрудно проверяются следующие свойства: $\mathcal{G}^{(i)}$, $i = 1, 2$, и $\mathcal{D}$ определены, ограничены и непрерывны как операторы из $C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$ в $C(\overline{\Omega})$, а потому компактны (вполне непрерывны) как операторы из $B_p(\Omega) \times W_p^2(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$; $\mathcal{B}$ определен, ограничен и непрерывен как оператор из $C^1(\overline{\Omega})$ в $C^1(\overline{\Omega})$, а потому компактен (вполне непрерывен) как оператор из $W_p^2(\Omega)$ в $C^1(\overline{\Omega})$; $\mathcal{T}$ определен, ограничен и непрерывен как оператор из $C^1(\partial\Omega)$ в $C^1(\partial\Omega)$, а потому компактен (вполне непрерывен) как оператор из $W_p^2(\Omega)$ в $W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$, при этом соответствующие оценки зависят только от p и объектов (2.1).

В итоге положим $\boldsymbol{\Psi} = (\mathcal{U} \circ (\mathcal{G}^{(1)}, \mathcal{G}^{(2)}), \mathcal{S} \circ (\mathcal{D}, \mathcal{B}, \mathcal{T}))$, т. е. для любых $(\mathbf{u}, s) = ((\boldsymbol{u}^{(1)}, \boldsymbol{u}^{(2)}), s) \in B_p(\Omega) \times W_p^2(\Omega)$ полагаем

$$\boldsymbol{\Psi}((\mathbf{u}, s)) = \bigl\{\mathcal{U}(\mathcal{G}^{(1)}(\mathbf{u}, s), \mathcal{G}^{(2)}(\mathbf{u}, s)), \mathcal{S}(\mathcal{D}(\mathbf{u}, s), \mathcal{B}(s), \mathcal{T}(s))\bigr\}.$$

По построению оператор $\boldsymbol{\Psi}\colon B_p(\Omega) \times W_p^2(\Omega) \to B_p(\Omega) \times W_p^2(\Omega)$ вполне определен, непрерывен и компактен (т. е. вполне непрерывен), и искомое сильное решение задачи $\widetilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ имеет вид $(\mathcal{R}_1(\boldsymbol{u}^{(1)}), \mathcal{R}_2(\boldsymbol{u}^{(2)}), s, \boldsymbol{u}^{(1)}, \boldsymbol{u}^{(2)})$, где $(\mathbf{u}, s)$ – неподвижная точка $\boldsymbol{\Psi}$.

Этап 2: *оценки решений операторного уравнения*. Для применения принципа Лерэ–Шаудера [26] остается получить равномерную по параметру $\lambda \in (0, 1]$ априорную оценку решений операторного уравнения $\lambda\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{u}, s) = (\mathbf{u}, s)$ в пространстве $W_p^2(\Omega)$, т. е. оценить в этом пространстве предполагаемое решение $(\rho_1, \rho_2, s, \boldsymbol{u}^{(1)}, \boldsymbol{u}^{(2)})$ краевой задачи $\widetilde{\mathcal{H}}_\varepsilon^{(\lambda)}$ равномерно по $\lambda \in (0, 1]$, где задача $\widetilde{\mathcal{H}}_\varepsilon^{(\lambda)}$ состоит из соотношений (индекс λ у величин, зависящих от λ, не выписываем)

$$\sum_{j=1}^{2} L_{ij}\boldsymbol{u}^{(j)} + \frac{\lambda\varepsilon}{2}\rho_i\boldsymbol{u}^{(i)} + \frac{\lambda\varepsilon}{2}\,\frac{M_i}{|\Omega|}\boldsymbol{u}^{(i)} + \frac{\lambda}{2}\rho_i(\boldsymbol{u}^{(i)} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}^{(i)} + \frac{\lambda}{2}\operatorname{div}(\rho_i\boldsymbol{u}^{(i)} \otimes \boldsymbol{u}^{(i)})$$
$$+\lambda\nabla(\rho_i)^\gamma + \lambda\nabla(\rho_i e^s) = (-1)^i\lambda a(\boldsymbol{u}^{(1)} - \boldsymbol{u}^{(2)}) + \lambda\rho_i\boldsymbol{f}^{(i)} \quad \text{в} \ \ \Omega, \qquad i = 1, 2, \tag{3.2}$$

$$-2\operatorname{div}\bigl((1 + e^{ms})(\varepsilon + e^s)\nabla s\bigr) = \Pi \quad \text{в} \ \ \Omega, \tag{3.3}$$

$$2(1 + e^{ms})(\varepsilon + e^s)\nabla s \cdot \boldsymbol{n} = \widehat{\Pi} \quad \text{на} \ \ \partial\Omega \tag{3.4}$$

в совокупности с (1.20), (1.23) и (1.25). Здесь использованы обозначения

$$\Pi = \lambda a|\boldsymbol{u}^{(1)} - \boldsymbol{u}^{(2)}|^2$$
$$- \lambda\sum_{i=1}^{2}\bigl(\operatorname{div}(\rho_i e^s\boldsymbol{u}^{(i)}) + \rho_i e^s\operatorname{div}\boldsymbol{u}^{(i)} - \mathbb{P}^{(i)}\colon(\nabla \otimes \boldsymbol{u}^{(i)}) - \varepsilon\gamma(\rho_i)^{\gamma-2}|\nabla\rho_i|^2\bigr), \tag{3.5}$$

где тензоры $\mathbb{P}^{(i)}$ определены в (1.10), и

$$\widehat{\Pi} = -\varepsilon s - \lambda L(e^s)(e^s - \widehat{\theta}\,). \tag{3.6}$$

Требуемые оценки частично аналогичны полученным в § 2, отличия состоят в наличии параметра λ, необходимости оценки более сильных норм и допустимости вхождения параметра ε в мажорирующие величины, в связи с чем схема получения оценок корректируется. Условимся через B_k, $k \in \mathbb{N}$, обозначать величины, аналогичные $\{C_k\}$ (т. е. зависящие от (2.1)), с той разницей, что для них допускается еще и зависимость от величин $\varepsilon > 0$ и $p > 3$ (критическим теперь является отсутствие зависимости от λ). По ходу оценок будем использовать как обозначение s, так и θ, подразумевая связь между ними по формуле (1.27).

Этап 2.1: *вывод двух основных интегральных неравенств* (аналог этапа 1 доказательства леммы 2.3). Аналогично выводу тождества (2.3), умножим обе части уравнений (3.2) скалярно на $\boldsymbol{u}^{(i)}$, проинтегрируем по Ω и просуммируем по $i = 1, 2$, но теперь еще и разделим на λ. Это приведет нас к тождеству, совпадающему с (2.3), с тем отличием, что первое слагаемое будет с множителем $1/\lambda \geqslant 1$. Воспользовавшись (1.17), мы можем убрать этот множитель и получить полный аналог (2.3) с тем отличием, что вместо знака равенства будет стоять знак $\leqslant$. Обозначим это неравенство (2.3)$'$. Аналогично выводу тождества (2.4), умножим (3.3) на $(1 - 1/\theta)$, проинтегрируем по Ω, разделив на λ, и сложим с (2.3)$'$. Снова используя знакоопределенность интегралов, появившихся с множителем $1/\lambda \geqslant 1$, и заменяя этот множитель единицей, получим полный аналог (2.4) с тем отличием, что вместо знака равенства будет стоять знак $\leqslant$. Обозначим это неравенство (2.4)$'$.

Этап 2.2: *предварительная оценка температуры* (аналог этапа 3 доказательства леммы 2.3). Действуя, как при выводе оценки (2.9), т. е. оценивая выражения в правой части (2.4)$'$ точно так же, как в лемме 2.3, на этот раз воспользуемся наличием в левой части интегралов от ρ_i^γ для того, чтобы избавиться от $\|\rho_i\|_{L_2(\Omega)}$ в правой части. Это приведет нас к оценке

$$\|\theta\|^m_{L_{3m}(\Omega)} \leqslant B_1\biggl(\sum_{i=1}^{2} \|\boldsymbol{u}^{(i)}\|^2_{W_2^1(\Omega)} + 1\biggr). \tag{3.7}$$

Этап 2.3: *окончательные оценки младших норм* (аналог этапов 4, 5 доказательства леммы 2.3). Действуя аналогично выводу оценки (2.11), как и на предыдущем этапе, воспользуемся наличием в левой части (2.3)$'$ интегралов от ρ_i^γ для того, чтобы избавиться от $\|\rho_i\|_{L_2(\Omega)}$ в правой части. Это приведет нас к оценке

$$\sum_{i=1}^{2}\bigl(\|\boldsymbol{u}^{(i)}\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|\rho_i\|^\gamma_{L_\gamma(\Omega)}\bigr) \leqslant B_2\biggl(\sum_{i=1}^{2} \|\rho_i\theta\|^2_{L_2(\Omega)} + 1\biggr). \tag{3.8}$$

Используя очевидное неравенство

$$\|\rho_i\theta\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{2B_2}\|\rho_i\|^\gamma_{L_\gamma(\Omega)} + \frac{1}{4B_1B_2}\|\theta\|^m_{L_{3m}(\Omega)} + B_3,$$

мы можем из (3.7) и (3.8) получить оценку левой части (3.8) величиной $B_4 := 4B_2B_3 + 2B_2 + 1$, а значит, и левой части (3.7) величиной $B_5 := B_1 + B_1B_4$.

Поскольку, как уже отмечалось, справедлив аналог оценки (2.9), получаем аналог оценки (2.2):

$$\sum_{i=1}^{2}(\|\rho_i\|_{L_\gamma(\Omega)}+\|\boldsymbol{u}^{(i)}\|_{W_2^1(\Omega)})+\|\theta\|_{L_{3m}(\Omega)}+\|\nabla\theta\|_{L_2(\Omega)} \\ +\int_{\partial\Omega}(e^s+e^{-s})\,d\sigma+\|\nabla s\|_{L_2(\Omega)}+\|\theta\|_{L_{2m}(\partial\Omega)}\leqslant B_6. \tag{3.9}$$

Этап 2.4: *вспомогательные построения*. Введем обозначения

$$\boldsymbol{\alpha}^{(i)}=\frac{1}{2|\Omega|}\int_\Omega \rho_i(\boldsymbol{u}^{(i)}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}^{(i)}\,d\boldsymbol{x},\quad i=1,2,$$

$$\boldsymbol{H}^{(i)}=\lambda\biggl(-\frac{\varepsilon}{2}\rho_i\boldsymbol{u}^{(i)}-\frac{\varepsilon M_i}{2|\Omega|}\boldsymbol{u}^{(i)}+(-1)^i a(\boldsymbol{u}^{(1)}-\boldsymbol{u}^{(2)})+\rho_i\boldsymbol{f}^{(i)}-\boldsymbol{\alpha}^{(i)}\biggr),\quad i=1,2,$$

$$\Phi(z)=\int_0^z(1+e^{my})(\varepsilon+e^y)\,dy$$

и отметим, что $\mathrm{sgn}\Phi(z)=\mathrm{sgn}z$, $|\Phi(z)|\leqslant 2+\varepsilon|z|+e^{(m+1)z}\chi(z)$. Обозначим через $\mathbb{V}^{(i)}$, $i=1,2$, решения краевых задач

$$\operatorname{div}\mathbb{V}^{(i)}=\frac{1}{2}\rho_i(\boldsymbol{u}^{(i)}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}^{(i)}-\boldsymbol{\alpha}^{(i)},\qquad \mathbb{V}^{(i)}|_{\partial\Omega}=0, \tag{3.10}$$

и положим

$$\mathbb{G}^{(i)}=\lambda\biggl(-\rho_i^\gamma\mathbb{I}-\rho_i\theta\mathbb{I}-\frac{1}{2}\rho_i\boldsymbol{u}^{(i)}\otimes\boldsymbol{u}^{(i)}-\mathbb{V}^{(i)}\biggr),\qquad i=1,2.$$

В этих обозначениях уравнения (3.2) принимают вид $\sum_{j=1}^2 L_{ij}\boldsymbol{u}^{(j)}=\boldsymbol{H}^{(i)}+\operatorname{div}\mathbb{G}^{(i)}$, а задача (3.3), (3.4) записывается в виде (см. обозначения (3.5), (3.6))

$$-2\Delta\Phi(s)=\Pi,\qquad 2\nabla\Phi(s)\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega}=\widehat{\Pi}. \tag{3.11}$$

Этап 2.5: *оценки старших норм*. Путь от (3.9) к требуемой оценке функций $(\rho_1,\rho_2,s,\boldsymbol{u}^{(1)},\boldsymbol{u}^{(2)})$ в $W_p^2(\Omega)$ представляет собой цепочку оценок (константами B_k) норм в следующей последовательности:

$$\|\boldsymbol{u}^{(i)}\|_{L_6(\Omega)},\quad \|\rho_i\|_{L_\infty(\Omega)},\quad \|\rho_i\boldsymbol{u}^{(i)}\|_{L_6(\Omega)},\quad \|\boldsymbol{H}^{(i)}\|_{L_6(\Omega)}, \tag{3.12}$$

$$\|\boldsymbol{u}^{(i)}\|_{W_3^1(\Omega)},\quad \|\boldsymbol{u}^{(i)}\|_{L_{4p}(\Omega)},\quad \|\rho_i\|_{W_{4p}^1(\Omega)},\quad \|\rho_i\|_{W_3^2(\Omega)},\quad \|\boldsymbol{H}^{(i)}\|_{L_{4p}(\Omega)}, \tag{3.13}$$

$$\|\boldsymbol{u}^{(i)}\|_{W^1_{\min\{2p,3m\}}(\Omega)},\ \|\boldsymbol{u}^{(i)}\|_{C(\overline{\Omega})},\ \|\rho_i\|_{W^2_{\min\{2p,3m\}}(\Omega)},\ \|\nabla\rho_i\|_{C^{\delta_4}(\overline{\Omega})}\quad (\exists\,\delta_4>0), \tag{3.14}$$

$$\|\Phi(s)\|_{W_2^1(\Omega)},\quad \|\theta^{m+1}\|_{L_6(\Omega)},\quad \|\theta^m\nabla\theta\|_{L_2(\Omega)}, \tag{3.15}$$

$$\|\Phi(s)\|_{W_2^2(\Omega)},\quad \|s\|_{C(\overline{\Omega})},\quad \|\theta\|_{C(\overline{\Omega})},\quad \|\nabla s\|_{L_6(\Omega)},\quad \|\nabla\theta\|_{L_6(\Omega)},\quad \|\boldsymbol{H}^{(i)}\|_{C(\overline{\Omega})}, \tag{3.16}$$

$$\|\boldsymbol{u}^{(i)}\|_{W_6^2(\Omega)},\quad \|\boldsymbol{u}^{(i)}\|_{C^{3/2}(\overline{\Omega})},\quad \|\rho_i\|_{C^2(\overline{\Omega})}, \tag{3.17}$$

$$\|\Phi(s)\|_{W_6^2(\Omega)},\quad \|\theta\|_{W_3^2(\Omega)},\quad \|s\|_{W_3^2(\Omega)},\quad \|\nabla\theta\|_{C(\overline{\Omega})},\quad \|\nabla s\|_{C(\overline{\Omega})}, \tag{3.18}$$

$$\|\boldsymbol{u}^{(i)}\|_{W_p^2(\Omega)},\quad \|\Phi(s)\|_{W_p^2(\Omega)},\quad \|\theta\|_{W_p^2(\Omega)},\quad \|s\|_{W_p^2(\Omega)} \tag{3.19}$$

(здесь всюду $i = 1, 2$), где горизонтальные переходы (внутри каждой из приведенных групп) достаточно тривиальны (следуют из полученных к соответствующему моменту оценок, теорем вложения, стандартных свойств эллиптических задач и свойств функции Φ). Поясним по порядку все переходы между строками.

Из оценок (3.9), (3.12) и свойств задачи (3.10) (см. [13], [23]) следуют оценки для $\|\mathbb{V}^{(i)}\|_{W^1_{3/2}(\Omega)}$, $i = 1, 2$, и, следовательно, для $\|\mathbb{G}^{(i)}\|_{L_3(\Omega)}$, $i = 1, 2$, что приводит нас в начало (3.13).

Снова пользуясь (3.10), из (3.13) получаем оценки для $\|\mathbb{V}^{(i)}\|_{L_{4p}(\Omega)}$, $i = 1, 2$, которые уже без труда дают начало (3.14).

Непосредственно из (3.9) мы имеем оценки

$$\|\Phi(s)\|_{L_{\frac{2m}{m+1}}(\partial\Omega)} \leqslant B_7, \qquad \int_{\partial\Omega} \Phi(s)\widehat{\Pi} d\sigma \leqslant B_8, \tag{3.20}$$

а после (3.14) оценена и норма $\|\Pi\|_{L_2(\Omega)}$. Из (3.11) следует тождество, правую часть которого можно оценить с помощью второго неравенства в (3.20):

$$2\int_\Omega |\nabla\Phi(s)|^2\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \Phi(s)\Pi\, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} \Phi(s)\widehat{\Pi} d\sigma \leqslant B_9\|\Phi(s)\|_{L_2(\Omega)} + B_8,$$

и теперь первая оценка в (3.20) позволяет прийти к началу (3.15).

После (3.15) величины s и θ^β для всех $\beta \in [1, m+1]$ оценены в $W^1_2(\Omega)$, а значит, и в $W^{1/2}_2(\partial\Omega)$, откуда $\|\widehat{\Pi}\|_{W^{1/2}_2(\partial\Omega)} \leqslant B_{10}$, так что (3.11) дает начало (3.16).

Переход от (3.16) к (3.17) следует из оценки $\|\operatorname{div}\mathbb{G}^{(i)}\|_{L_6(\Omega)} \leqslant B_{11}$.

После (3.17) имеем оценки для $\|\Pi\|_{L_6(\Omega)}$, для s и θ^β (для всех $\beta \geqslant 1$) в $W^1_6(\Omega)$, а значит, и в $W^{5/6}_6(\partial\Omega)$, откуда $\|\widehat{\Pi}\|_{W^{5/6}_6(\partial\Omega)} \leqslant B_{12}$, так что (3.11) дает (3.18).

Переход от (3.18) к (3.19) следует из оценки $\|\operatorname{div}\mathbb{G}^{(i)}\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant B_{13}$. Внутри (3.19) в случае $p > 6$ необходимо еще раз проанализировать задачу (3.11).

Теорема доказана.

§ 4. Предельный переход при $\varepsilon \to 0$ и доказательство теоремы 1.3

Построив на основании теоремы 2.4 решения $(\rho^\varepsilon_1, \rho^\varepsilon_2, \theta^\varepsilon, \boldsymbol{u}^{(1)}_\varepsilon, \boldsymbol{u}^{(2)}_\varepsilon)$ задач $\mathcal{H}_\varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0, 1]$ в смысле определения 2.1, мы можем применить к ним лемму 2.3, и поэтому из указанного семейства решений ввиду оценки (2.2) можно выделить последовательность (которую мы обозначим так же, т. е. не будем уточнять значения параметра $\varepsilon \to 0$) такую, что при $\varepsilon \to 0$ имеют место сходимости (напомним обозначение (1.27))

$$\begin{gathered}
\rho^\varepsilon_i \xrightarrow{w} \rho_i \quad \text{в} \;\; L_{2\gamma}(\Omega), \qquad i = 1, 2,\\
\boldsymbol{u}^{(i)}_\varepsilon \xrightarrow{w} \boldsymbol{u}^{(i)} \quad \text{в} \;\; W^1_2(\Omega), \qquad i = 1, 2,\\
\theta^\varepsilon \xrightarrow{w} \theta \quad \text{в} \;\; W^1_2(\Omega),\; L_{3m}(\Omega),\; L_{2m}(\partial\Omega),\\
s^\varepsilon \xrightarrow{w} s \quad \text{в} \;\; W^1_2(\Omega),\\
(\rho^\varepsilon_i)^\gamma \xrightarrow{w} \overline{\rho^\gamma_i} \quad \text{в} \;\; L_2(\Omega), \qquad i = 1, 2,
\end{gathered} \tag{4.1}$$

где $((\rho_1,\rho_2),(\boldsymbol{u}^{(1)},\boldsymbol{u}^{(2)}),\theta,s,(\overline{\rho_1^\gamma},\overline{\rho_2^\gamma}))$ – некоторый элемент пространства

$$(L_{2\gamma}(\Omega))^2\times(\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))^2\times(W_2^1(\Omega)\cap L_{3m}(\Omega)\cap L_{2m}(\partial\Omega))\times W_2^1(\Omega)\times(L_2(\Omega))^2,$$

и, следовательно,

$$\begin{gathered}\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}\to\boldsymbol{u}^{(i)}\quad\text{в}\quad L_{q_1}(\Omega)\qquad\forall\,q_1\in[1,6),\quad i=1,2,\\ \theta^\varepsilon\to\theta\quad\text{в}\quad L_{q_2}(\Omega)\qquad\forall\,q_2\in[1,3m),\\ \theta^\varepsilon|_{\partial\Omega}\to\theta|_{\partial\Omega}\quad\text{в}\quad L_{q_3}(\Omega)\qquad\forall\,q_3\in[1,2m),\\ s^\varepsilon\to s\quad\text{в}\quad L_{q_4}(\Omega)\qquad\forall\,q_4\in[1,6),\end{gathered}$$

при этом очевидны соотношения $\theta=e^s$ (а значит, $\theta>0$), $\rho_i\geqslant0$, $i=1,2$, и (1.14). Таким образом, для доказательства теоремы 1.3 остается проверить выполнение интегральных тождеств, выписанных в определении 1.1. Далее чертой сверху так же, как и в (4.1), будем обозначать слабый предел соответствующей последовательности (наличие которого обеспечивается полученными оценками, естественно, после выделения подпоследовательности, которое подразумевается при этом сразу выполненным).

Этап 1: *предельные переходы – полный в уравнениях неразрывности и частичный в уравнениях импульсов.* Умножая (1.20) на ρ_i^ε и интегрируя по Ω с учетом (1.23), ввиду (2.2) получаем оценки $\|\sqrt{\varepsilon}\nabla\rho_i^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}\leqslant C_{18}$, $i=1,2$, что с учетом оценок для $\nabla\rho_i^\varepsilon$, содержащихся в (2.2), дает

$$\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon\to0\quad\text{в}\quad L_{q_5}(\Omega)\qquad\forall\,q_5\in\Big[1,\frac{6\gamma}{\gamma+3}\Big),\qquad i=1,2.$$

Теперь предельный переход в уравнениях (1.20) становится тривиальным, и мы приходим к п. ($\mathcal{H}1$) определения 1.1. Умножая уравнения (1.21) скалярно на $\boldsymbol{\varphi}^{(i)}\in C_0^\infty(\Omega)$ и интегрируя по Ω, мы получаем слабые формулировки краевых задач (1.21), (1.23), в которых с учетом полученных оценок и сходимостей можно перейти к пределу и получить тождества, отличающиеся от приведенных в п. ($\mathcal{H}2$) определения 1.1 только тем, что вместо выражений ρ_i^γ в них стоят $\overline{\rho_i^\gamma}$. Таким образом, для обоснования ($\mathcal{H}2$) остается доказать равенства

$$\overline{\rho_i^\gamma}=\rho_i^\gamma,\qquad i=1,2 \tag{4.2}$$

(эквивалентные сильной сходимости плотностей).

Этап 2: *частичный предельный переход в уравнении энергии.* Непосредственно в краевой задаче (1.22), (1.24), т. е. в соответствующем ей интегральном тождестве, предельный переход не приведет к успеху ввиду наличия слагаемого $\sum_{i=1}^2\mathbb{P}_\varepsilon^{(i)}:(\nabla\otimes\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)})$, которое ограничено равномерно по ε только в пространстве $L_1(\Omega)$, не являющемся слабо полным, так что возникнет проблема, аналогичная доказательству равенства (4.2) (однако которая, в отличие от (4.2), пока не нашла своего решения). Поэтому преобразуем указанное слагаемое по формуле

$$\sum_{i=1}^2\mathbb{P}_\varepsilon^{(i)}:(\nabla\otimes\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)})=\sum_{i=1}^2\big[\operatorname{div}(\mathbb{P}_\varepsilon^{(i)}\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)})-\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}\cdot\operatorname{div}\mathbb{P}_\varepsilon^{(i)}\big], \tag{4.3}$$

в которой, в свою очередь, последнее слагаемое выразим из (1.21) с привлечением ренормализованных (а именно, умноженных на $\frac{\gamma(\rho_i^\varepsilon)^{\gamma-1}}{\gamma-1}$) уравнений (1.20). В терминах интегральных тождеств это означает следующее. Возьмем любую функцию $\eta \in C^\infty(\overline{\Omega})$ и заметим, что из (1.20) и (1.23) следуют соотношения (для $i = 1, 2$)

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{\Omega}{\simeq} \operatorname{div}\left(\frac{\varepsilon\gamma}{\gamma-1}(\rho_i^\varepsilon)^{\gamma-1}\eta\nabla\rho_i^\varepsilon - \frac{1}{\gamma-1}\eta(\rho_i^\varepsilon)^\gamma \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}\right) \\
&= \varepsilon\gamma\eta(\rho_i^\varepsilon)^{\gamma-2}|\nabla\rho_i^\varepsilon|^2 + (\rho_i^\varepsilon)^\gamma\eta\operatorname{div}\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)} + \frac{\varepsilon\gamma}{\gamma-1}(\rho_i^\varepsilon)^{\gamma-1}\nabla\rho_i^\varepsilon\cdot\nabla\eta \\
&\quad + \frac{\varepsilon\gamma}{\gamma-1}\eta(\rho_i^\varepsilon)^\gamma - \frac{\varepsilon\gamma}{\gamma-1}\frac{M_i}{|\Omega|}\eta(\rho_i^\varepsilon)^{\gamma-1} - \frac{1}{\gamma-1}(\rho_i^\varepsilon)^\gamma\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}\cdot\nabla\eta,
\end{aligned}
$$

где $\overset{\Omega}{\simeq}$ означает совпадение с точностью до разности, исчезающей при интегрировании по Ω (поскольку эта разность есть дивергенция от исчезающего на $\partial\Omega$ векторного поля). Тем самым, получено представление

$$
\begin{aligned}
\varepsilon\gamma\sum_{i=1}^2\int_\Omega(\rho_i^\varepsilon)^{\gamma-2}|\nabla\rho_i^\varepsilon|^2\eta\,d\boldsymbol{x} &= \sum_{i=1}^2\int_\Omega\biggl(-(\rho_i^\varepsilon)^\gamma\eta\operatorname{div}\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)} - \frac{\varepsilon\gamma}{\gamma-1}(\rho_i^\varepsilon)^{\gamma-1}\nabla\rho_i^\varepsilon\cdot\nabla\eta \\
&\quad - \frac{\varepsilon\gamma}{\gamma-1}\eta(\rho_i^\varepsilon)^\gamma + \frac{\varepsilon\gamma}{\gamma-1}\frac{M_i}{|\Omega|}\eta(\rho_i^\varepsilon)^{\gamma-1} + \frac{1}{\gamma-1}(\rho_i^\varepsilon)^\gamma\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}\cdot\nabla\eta\biggr)\,d\boldsymbol{x}. \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

Теперь сложим три интегральных равенства:

1) равенство (1.22) после умножения на η и интегрирования по Ω с учетом условия (1.24) (интегральная формулировка (1.22), (1.24));

2) равенство (1.21) после умножения на $\boldsymbol{\varphi}^{(i)} = \eta\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}$, интегрирования по Ω с учетом (1.23) и суммирования по $i = 1, 2$ (интегральное представление для последнего слагаемого в (4.3));

3) равенство (4.4), которое означает использование ренормализованных уравнений (1.20).

Данная процедура дает интегральное тождество

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{i=1}^2\int_\Omega\rho_i^\varepsilon\left[\frac12|\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}|^2 + \frac{1}{\gamma-1}(\rho_i^\varepsilon)^{\gamma-1} + \theta^\varepsilon\right]\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}\cdot\nabla\eta\,d\boldsymbol{x} \\
&\qquad - \sum_{i=1}^2\int_\Omega[(\rho_i^\varepsilon)^\gamma + \rho_i^\varepsilon\theta^\varepsilon]\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}\cdot\nabla\eta\,d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^2\int_\Omega\mathbb{P}_\varepsilon^{(i)} : (\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}\otimes\nabla\eta)\,d\boldsymbol{x} \\
&= \sum_{i=1}^2\int_\Omega\rho_i^\varepsilon\boldsymbol{f}^{(i)}\cdot\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}\eta\,d\boldsymbol{x} - 2\int_\Omega k(\theta^\varepsilon)\frac{\varepsilon+\theta^\varepsilon}{\theta^\varepsilon}\nabla\theta^\varepsilon\cdot\nabla\eta\,d\boldsymbol{x} \\
&\qquad - \varepsilon\int_{\partial\Omega}(\ln\theta^\varepsilon)\eta\,d\sigma - \int_{\partial\Omega}L(\theta^\varepsilon)(\theta^\varepsilon - \widehat{\theta})\eta\,d\sigma - \frac{\varepsilon\gamma}{\gamma-1}\sum_{i=1}^2\int_\Omega(\rho_i^\varepsilon)^\gamma\eta\,d\boldsymbol{x} \\
&\qquad + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\sum_{i=1}^2 M_i\int_\Omega(\rho_i^\varepsilon)^{\gamma-1}\eta\,d\boldsymbol{x} - \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^2\int_\Omega\rho_i^\varepsilon|\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}|^2\eta\,d\boldsymbol{x} \\
&\qquad - \frac{\varepsilon}{2|\Omega|}\sum_{i=1}^2\int_\Omega|\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}|^2\eta\,d\boldsymbol{x} - \frac{\varepsilon\gamma}{\gamma-1}\sum_{i=1}^2\int_\Omega(\rho_i^\varepsilon)^{\gamma-1}\nabla\rho_i^\varepsilon\cdot\nabla\eta\,d\boldsymbol{x},
\end{aligned}
$$

соответствующее регуляризованной краевой задаче для уравнения энергии, модифицированной с использованием (4.3). Переходя в нем к пределу, получим ($\mathcal{H}3$) с точностью до еще не доказанных соотношений (4.2), что, таким образом, является последним препятствием для завершения доказательства теоремы 1.3.

Этап 3: *доказательство коммуникативных соотношений для эффективных вязких потоков.* Рассмотрим так называемые эффективные вязкие потоки компонент смеси

$$F_i = p_i - \sum_{j=1}^{2} \nu_{ij} \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(j)}, \qquad i = 1, 2,$$

соответствующие величины для регуляризованной задачи

$$F_i^{\varepsilon} = (\rho_i^{\varepsilon})^{\gamma} + \rho_i^{\varepsilon}\theta^{\varepsilon} - \sum_{j=1}^{2} \nu_{ij} \operatorname{div} \boldsymbol{u}_{\varepsilon}^{(j)}, \qquad i = 1, 2, \tag{4.5}$$

и их слабые пределы в $L_2(\Omega)$

$$\overline{F_i} = \overline{\rho_i^{\gamma}} + \rho_i\theta - \sum_{j=1}^{2} \nu_{ij} \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(j)}, \qquad i = 1, 2.$$

Соотношения (4.2) эквивалентны тому, что $\overline{F_i} = F_i$, $i = 1, 2$ (что, впрочем, в отличие от плотностей, не эквивалентно сильной сходимости F_i, которую мы докажем уже на данном этапе).

Этап 3.1: *предварительные построения.* Будем использовать оператор Δ^{-1}, действующий по формуле

$$(\Delta^{-1}v)(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{v(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|},$$

применяя его к функциям $v \in L_{q_6}(\Omega)$, $q_6 > 3/2$, продолженным нулем за пределы Ω. При этом $\Delta^{-1}\colon L_{q_6}(\Omega) \to W^2_{q_6}(\Omega)$ и $\Delta \circ \Delta^{-1} = I$. Нам также потребуется оператор Comm, действующий по формуле

$$\operatorname{Comm}(\beta, \zeta) = (\nabla \otimes \nabla\Delta^{-1}\beta)\zeta - \beta(\nabla \otimes \nabla\Delta^{-1}\zeta),$$

о котором известно (см. [11], [12], [27], [28]) следующее: если $\beta_k \xrightarrow{w} 0$ в $L_{q_7}(\Omega)$, $\zeta_k \xrightarrow{w} 0$ в $L_{q_8}(\Omega)$, где $q_7^{-1} + q_8^{-1} < 1$, то $\operatorname{Comm}(\beta_k, \zeta_k) \xrightarrow{w} 0$ в $L_{q_9}(\Omega)$, где $q_9^{-1} = q_7^{-1} + q_8^{-1}$.

Для любой функции $\alpha \in W_1^2(\Omega)$, исчезающей вблизи $\partial\Omega$, легко проверить соотношения (см. обозначения (1.26))

$$(\operatorname{div} \widehat{\mathbb{P}}_{\varepsilon}^{(ij)}) \cdot \nabla\alpha + \nu_{ij}(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_{\varepsilon}^{(j)})\Delta\alpha \overset{\Omega}{\simeq} 0, \qquad i, j = 1, 2,$$

в которых, в частности, можно взять $\alpha = \tau\Delta^{-1}\omega_{\varepsilon}$, где $\tau \in C_0^{\infty}(\Omega)$, $\omega_{\varepsilon} \in L_{q_6}(\Omega)$, и в результате получить

$$\begin{aligned} \tau(\operatorname{div} \widehat{\mathbb{P}}_{\varepsilon}^{(ij)}) \cdot \nabla\Delta^{-1}\omega_{\varepsilon} + \tau\nu_{ij}(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_{\varepsilon}^{(j)})\omega_{\varepsilon} \overset{\Omega}{\simeq} -\nu_{ij}(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_{\varepsilon}^{(j)}) \\ \times \big[2\nabla\tau \cdot \nabla\Delta^{-1}\omega_{\varepsilon} + \Delta\tau\Delta^{-1}\omega_{\varepsilon}\big] + \widehat{\mathbb{P}}_{\varepsilon}^{(ij)} \colon [\nabla \otimes (\nabla\tau\Delta^{-1}\omega_{\varepsilon})], \qquad i, j = 1, 2. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Пусть теперь

$$\omega_\varepsilon \xrightarrow{w} 0 \quad \text{в} \quad L_{q_6}(\Omega) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{4.7}$$

Суммируя (4.6) по $j = 1, 2$, получим

$$\tau(\operatorname{div} \mathbb{P}_\varepsilon^{(i)}) \cdot \nabla\Delta^{-1}\omega_\varepsilon + \tau\omega_\varepsilon \sum_{j=1}^{2} \nu_{ij}(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(j)}) \overset{\Omega,\varepsilon}{\simeq} 0, \qquad i = 1, 2, \tag{4.8}$$

где $\overset{\Omega,\varepsilon}{\simeq}$ означает совпадение с точностью до разности, исчезающей после интегрирования по Ω и перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$ (поскольку эта разность есть сумма дивергенции от исчезающего на $\partial\Omega$ векторного поля и слагаемых, содержащих младшие производные от решения, но старшие производные от τ).

Умножая (1.20) на τ, после элементарных преобразований получим тождества

$$\begin{aligned} \nabla\Delta^{-1} \operatorname{div}(\tau\rho_i^\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}) &= \tau\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon + \varepsilon\nabla\Delta^{-1}\left(\frac{\tau M_i}{|\Omega|} - \tau\rho_i^\varepsilon\right) \\ &+ \left[\varepsilon\rho_i^\varepsilon\nabla\tau + \nabla\Delta^{-1}(\rho_i^\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)} \cdot \nabla\tau - 2\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon \cdot \nabla\tau - \varepsilon\rho_i^\varepsilon\Delta\tau)\right], \qquad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Умножая (1.20) на $\frac{\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}}{2}$ и складывая с (1.21), получим представления

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \mathbb{P}_\varepsilon^{(i)} &= -\nabla[(\rho_i^\varepsilon)^\gamma + \rho_i^\varepsilon\theta_\varepsilon] - \operatorname{div}(\rho_i^\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)} \otimes \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}) \\ &+ \left[(-1)^i a(\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(1)} - \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(2)}) + \rho_i^\varepsilon \boldsymbol{f}^{(i)}\right] + \frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}\Delta\rho_i^\varepsilon - \varepsilon\rho_i^\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}, \qquad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Этап 3.2: *предел эффективных вязких потоков, умноженных на произвольные функции.* Преобразуем выражения $F_i^\varepsilon\omega_\varepsilon\tau$, пользуясь сначала представлениями (4.5), а затем соотношениями (4.8) и (4.10):

$$\begin{aligned} -F_i^\varepsilon\omega_\varepsilon\tau \overset{\Omega,\varepsilon}{\simeq} &[(-1)^i a(\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(1)} - \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(2)}) + \rho_i^\varepsilon \boldsymbol{f}^{(i)}]\tau\nabla\Delta^{-1}\omega_\varepsilon - \varepsilon\tau\rho_i^\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)} \cdot \nabla\Delta^{-1}\omega_\varepsilon \\ &+ \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)} \cdot \operatorname{Comm}(\omega_\varepsilon, \tau\rho_i^\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}) + \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}\omega_\varepsilon\nabla\Delta^{-1} \operatorname{div}(\tau\rho_i^\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}) \\ &- \varepsilon(\nabla\rho_i^\varepsilon)\frac{\tau}{2} \cdot [(\nabla \otimes \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)})\nabla\Delta^{-1}\omega_\varepsilon] - \varepsilon(\nabla\rho_i^\varepsilon)\frac{\tau}{2} \cdot [(\nabla \otimes \nabla\Delta^{-1}\omega_\varepsilon)\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}], \end{aligned}$$

и привлекая (4.9), окончательно получаем

$$\begin{aligned} -F_i^\varepsilon\omega_\varepsilon\tau \overset{\Omega,\varepsilon}{\simeq} &\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)} \cdot \operatorname{Comm}(\omega_\varepsilon, \tau\rho_i^\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}) + [(-1)^i a(\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(1)} - \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(2)}) + \rho_i^\varepsilon \boldsymbol{f}^{(i)}]\tau\nabla\Delta^{-1}\omega_\varepsilon \\ &- \left[\frac{\tau}{2}(\nabla \otimes \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)})\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon + \tau\varepsilon\rho_i^\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}\right] \cdot \nabla\Delta^{-1}\omega_\varepsilon - \frac{\tau}{2}[(\nabla \otimes \nabla\Delta^{-1}\omega_\varepsilon)\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}] \cdot \varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon \\ &+ \omega_\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)} \cdot \left[\varepsilon\nabla\Delta^{-1}\left(\frac{\tau M_i}{|\Omega|} - \tau\rho_i^\varepsilon\right) + \tau\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon\right], \qquad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{4.11}$$

При условии $q_6 > \frac{6\gamma}{4\gamma-3}$ правая часть (4.11) сходится к нулю слабо в $L_{1+\delta_5}(\Omega)$ с некоторым $\delta_5 > 0$, поэтому

$$\int_\Omega F_i^\varepsilon\omega_\varepsilon\tau\, d\boldsymbol{x} \to 0 \qquad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \quad i = 1, 2. \tag{4.12}$$

Этап 3.3: *сильная сходимость эффективных вязких потоков и коммуникативные соотношения*. Для любой компактной подобласти $\Omega_1 \Subset \Omega$ возьмем функцию τ такую, что $\tau = 1$ на Ω_1, причем $\tau \geqslant 0$ в Ω. Пользуясь соотношениями (4.7) и (4.12) при $q_6 = 2$, $\omega_\varepsilon = F_i^\varepsilon - \overline{F_i}$, получаем при $i = 1, 2$

$$\int_{\Omega_1} |F_i^\varepsilon - \overline{F_i}|^2\, d\boldsymbol{x} \leqslant \int_\Omega |F_i^\varepsilon - \overline{F_i}|^2 \tau\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega F_i^\varepsilon \omega_\varepsilon \tau\, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \omega_\varepsilon \overline{F_i} \tau\, d\boldsymbol{x} \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0,$$

что ввиду произвольности Ω_1 означает $F_i^\varepsilon \to \overline{F_i}$ в $L_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$, а значит (ввиду ограниченности F_i^ε в $L_2(\Omega)$), и в $L_{q_{10}}(\Omega)$ с любым $q_{10} < 2$. Отсюда следует, что если $z_\varepsilon \overset{w}{\to} z$ в $L_{q_{11}}(\Omega)$ с некоторым $q_{11} > 2$, то $z_\varepsilon F_i^\varepsilon \overset{w}{\to} z\overline{F_i}$ в $L_{q_{12}}(\Omega)$ с любым $q_{12} < \frac{2q_{11}}{2+q_{11}}$, что означает выполнение коммуникативного соотношения $\overline{zF_i} = \overline{z}\,\overline{F_i}$. В частности, можно взять $z_\varepsilon = \rho_j^\varepsilon$ с произвольным $j = 1, 2$, $q_{11} = 2\gamma$, $q_{12} = 1$, что влечет соотношения

$$\int_\Omega \rho_j^\varepsilon \biggl((\rho_i^\varepsilon)^\gamma + \rho_i^\varepsilon \theta^\varepsilon - \sum_{k=1}^{2} \nu_{ik} \operatorname{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(k)} \biggr) d\boldsymbol{x} \to \int_\Omega \rho_j \biggl(\overline{\rho_i^\gamma} + \rho_i \theta - \sum_{k=1}^{2} \nu_{ik} \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(k)} \biggr) d\boldsymbol{x} \tag{4.13}$$

при $\varepsilon \to 0$, $i, j = 1, 2$.

Этап 4: *предельный переход в давлениях* (доказательство (4.2), т. е. сильной сходимости плотностей). Соотношения (4.13) аналогичны соотношению, возникающему в теории однокомпонентной среды, отличие же состоит не только в числе соотношений (четыре вместо одного), но и в принципиально новом явлении – возникновении смешанных (разноименных) произведений $\rho_j \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(k)}$, $j \neq k$, которые, в отличие от одноименных ($j = k$), не допускают анализа с помощью уравнений неразрывности.

Этап 4.1: *ренормализация и исключение* $\rho_i \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(i)}$. Согласно замечанию 1.2 выполнены ренормализованные уравнения (1.1). В частности, для функций $G_{\delta_6}(\rho_i) = \rho_i \ln(\rho_i + \delta_6)$ с любым $\delta_6 > 0$ выполнены (в $W_{q_{13}}^{-1}(\Omega)$ с любым $q_{13} \in \bigl[1, \frac{6\gamma}{\gamma+3}\bigr)$) уравнения

$$\operatorname{div}(G_{\delta_6}(\rho_i)\boldsymbol{u}^{(i)}) + \bigl(\rho_i G'_{\delta_6}(\rho_i) - G_{\delta_6}(\rho_i)\bigr) \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(i)} = 0, \qquad i = 1, 2$$

(получаемые формальным “умножением” (1.1) на $G'_{\delta_6}(\rho_i)$), “интегрируя” которые по Ω (т. е. действуя на тестовую функцию, равную 1) и переходя к пределу при $\delta_6 \to 0$, получаем

$$\int_\Omega \rho_i \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(i)}\, d\boldsymbol{x} = 0, \qquad i = 1, 2. \tag{4.14}$$

Аналогичная процедура с уравнениями (1.20) (при этом умножение на $G'_{\delta_6}(\rho_i^\varepsilon)$ и интегрирование по Ω производятся на самом деле, и необходимо перед предельным переходом по δ_6 провести элементарные оценки) с последующим предельным переходом по $\varepsilon \to 0$ приводит к неравенствам

$$\int_\Omega \overline{\rho_i \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(i)}}\, d\boldsymbol{x} \leqslant 0, \qquad i = 1, 2. \tag{4.15}$$

Благодаря (4.14) и (4.15) в соотношениях (4.13) фактически присутствуют только разноименные произведения $\rho_j \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(k)}$, $j \neq k$ (хотя соотношения принимают вид неравенств). В частности, при $i = j = 1$ соотношение (4.13) принимает вид

$$\int_\Omega \overline{\rho_1(\rho_1^\gamma + \rho_1\theta - \nu_{12} \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(2)})}\, d\boldsymbol{x} \leqslant \int_\Omega \rho_1(\overline{\rho_1^\gamma} + \rho_1\theta - \nu_{12} \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(2)})\, d\boldsymbol{x}. \qquad (4.16)$$

Этап 4.2: *доказательство* (4.2) *при* $i = 1$. Пользуясь (1.19), мы можем вовсе исключить скорости из (4.16) и тем самым свести проблему к ситуации, аналогичной теории уравнений однокомпонентной среды, так что дальнейшие действия на данном этапе повторяют приемы из этой теории. А именно, ввиду монотонности функции $z \mapsto z^\gamma + z\theta$ для любой $v \in L_{2\gamma}(\Omega)$, $v \geqslant 0$, имеем поточечное неравенство $(\rho_1^\varepsilon - v)((\rho_1^\varepsilon)^\gamma + \rho_1^\varepsilon\theta - v^\gamma - v\theta) \geqslant 0$, которое после интегрирования по Ω и предельного перехода по $\varepsilon \to 0$ принимает вид

$$\int_\Omega \overline{\rho_1(\rho_1^\gamma + \rho_1\theta)}\, d\boldsymbol{x} \geqslant \int_\Omega v(\overline{\rho_1^\gamma} + \rho_1\theta)\, d\boldsymbol{x} + \int_\Omega (\rho_1 - v)(v^\gamma + v\theta)\, d\boldsymbol{x}. \qquad (4.17)$$

Вычитая (4.17) из (4.16) и полагая $v = \rho_1 + \lambda\psi$ с любыми $\psi \in L_{2\gamma}(\Omega)$, $\psi \geqslant 0$, и $\lambda \in \mathbb{R}^+$, получаем неравенство

$$\int_\Omega (\overline{\rho_1^\gamma} + \rho_1\theta)\psi\, d\boldsymbol{x} \leqslant \int_\Omega \big[(\rho_1 + \lambda\psi)^\gamma + (\rho_1 + \lambda\psi)\theta\big]\psi\, d\boldsymbol{x},$$

переходя в котором к пределу при $\lambda \to 0$ и пользуясь поточечным свойством слабых пределов $\overline{\rho_1^\gamma} \geqslant \rho_1^\gamma$ [29], получаем $(\overline{\rho_1^\gamma} - \rho_1^\gamma)\psi = 0$, что ввиду произвольности ψ означает требуемое. Как одно из следствий, получаем, что сходимость $\rho_1^\varepsilon \to \rho_1$ сильная в $L_\gamma(\Omega)$, а значит (ввиду ограниченности в $L_{2\gamma}(\Omega)$), и в $L_{q_{14}}(\Omega)$ при всех $q_{14} \in [1, 2\gamma)$.

Этап 4.3: *коммуникативное соотношение для* $\rho_2 \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(1)}$. Пользуясь повторно условием (1.19), доказанным соотношением (4.2) при $i = 1$ и сильной сходимостью ρ_1^ε, мы можем записать (4.13) при $i = 1$, $j = 2$ в виде

$$\int_\Omega \overline{\rho_2 \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(1)}}\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \rho_2 \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(1)}\, d\boldsymbol{x}. \qquad (4.18)$$

Этап 4.4: *доказательство* (4.2) *при* $i = 2$. Запишем (4.13) при $i = j = 2$, снова пользуясь (4.14) и (4.15):

$$\int_\Omega \overline{\rho_2(\rho_2^\gamma + \rho_2\theta - \nu_{21} \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(1)})}\, d\boldsymbol{x} \leqslant \int_\Omega \rho_2(\overline{\rho_2^\gamma} + \rho_2\theta - \nu_{21} \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(1)})\, d\boldsymbol{x},$$

но в этот раз исключим скорости, пользуясь (4.18). Дальнейшие рассуждения буквально повторяют этап 4.2 с заменой ρ_1 на ρ_2.

Тем самым, соотношения (4.2), а значит, и теорема 1.3 доказаны.

Список литературы

1. Р. И. Нигматулин, *Динамика многофазных сред*, ч. 1, Наука, М., 1987.
2. K. L. Rajagopal, L. Tao, *Mechanics of mixtures*, Ser. Adv. Math. Appl. Sci., **35**, World Scientific, River Edge, NJ, 1995.

3. A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, "Viscous compressible multi-fluids: modeling and multi-D existence", *Methods Appl. Anal.*, **20**:2 (2013), 179–196.
4. J. Frehse, S. Goj, J. Málek, "On a Stokes-like system for mixtures of fluids", *SIAM J. Math. Anal.*, **36**:4 (2005), 1259–1281.
5. J. Frehse, S. Goj, J. Málek, "A uniqueness result for a model for mixtures in the absence of external forces and interaction momentum", *Appl. Math.*, **50**:6 (2005), 527–541.
6. J. Frehse, W. Weigant, "On quasi-stationary models of mixtures of compressible fluids", *Appl. Math.*, **53**:4 (2008), 319–345.
7. Н. А. Кучер, Д. А. Прокудин, "Анализ разрешимости краевой задачи для уравнений смесей вязких сжимаемых жидкостей", *Вестн. Кемер. гос. ун-та*, **1**:45 (2011), 32–38.
8. Н. А. Кучер, А. Е. Мамонтов, Д. А. Прокудин, "Стационарные решения уравнений динамики смесей вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей", *Сиб. матем. журн.*, **53**:6 (2012), 1338–1353; англ. пер.: N. A. Kucher, A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, "Stationary solutions to the equations of dynamics of mixtures of heat-conductive compressible viscous fluids", *Siberian Math. J.*, **53**:6 (2012), 1075–1088.
9. А. А. Папин, *Краевые задачи двухфазной фильтрации*, АлтГУ, Барнаул, 2009.
10. А. Н. Петров, "Корректность начально-краевых задач для одномерных уравнений взаимопроникающего движения совершенных газов", *Динамика неоднородной жидкости*, т. 56, Динамика сплошной среды, Ин-т гидродинамики, Новосибирск, 1982, 105–121.
11. P.-L. Lions, *Mathematical topics in fluid mechanics*, v. 2: *Compressible Models*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., **10**, Oxford University Press, New York, 1998.
12. E. Feireisl, *Dynamics of viscous compressible fluids*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., **26**, Oxford University Press, Oxford, 2004.
13. A. Novotný, I. Straškraba, *Introduction to the mathematical theory of compressible flow*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., **27**, Oxford University Press, Oxford, 2004.
14. E. Feireisl, A. Novotný, *Singular limits in thermodynamics of viscous fluids*, Adv. Math. Fluid Mech., Birkhäuser, Basel, 2009.
15. P. Plotnikov, J. Sokolowski, *Compressible Navier–Stokes equations. Theory and shape optimization*, IMPAN Monogr. Mat. (N. S.), **73**, Birkhäuser, Basel, 2012.
16. О. В. Воинов, В. В. Пухначев, "Термокапиллярное движение в газожидкостной смеси", *Прикладная механика и техническая физика*, **21**:5 (1980), 38–45.
17. Б. Т. Жумагулов, В. Н. Монахов, *Гидродинамика нефтедобычи*, КазгосИНТИ, Алматы, 2001.
18. S. K. Gard, J. W. Prichett, "Dynamics of gas-fluidized beds", *J. Appl. Phys.*, **46**:10 (1975), 4493–4500.
19. A. Novotný, M. Pokorný, "Steady compressible Navier–Stokes–Fourier system for monoatomic gas and its generalizations", *J. Differential Equations*, **251**:1 (2011), 270–315.
20. P. B. Mucha, M. Pokorný, "On the steady compressible Navier–Stokes–Fourier system", *Comm. Math. Phys.*, **288**:1 (2009), 349–377.
21. P. B. Mucha, M. Pokorný, "Weak solutions to equations of steady compressible heat conducting fluids", *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **20**:5 (2010), 785–813.
22. R. J. DiPerna, P.-L. Lions, "Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces", *Invent. Math.*, **98**:3 (1989), 511–547.
23. М. Е. Боговский, "О решении некоторых задач векторного анализа, связанных с операторами div и grad", Тр. сем. С. Л. Соболева, **1**, Ин-т матем. СО АН СССР, Новосибирск, 1980, 5–40.

24. S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, "Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I", *Comm. Pure Appl. Math.*, **12**:4 (1959), 623–727.
25. S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, "Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II", *Comm. Pure Appl. Math.*, **17**:1 (1964), 35–92.
26. Д. Гилбарг, Н. С. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989; пер. с англ.: D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Grundlehren Math. Wiss., **224**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
27. R. R. Coifman, Y. Meyer, "On commutators of singular integrals and bilinear singular integrals", Trans. Amer. Math. Soc., **212**, 1975, 315–331.
28. L. Tartar, "Compensated compactness and applications to partial differential equations", *Nonlinear analysis and mechanics*, Res. Notes in Math., **39**, Pitman, Boston, MA, 1979, 136–212.
29. И. Экланд, Р. Темам, *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*, Мир, М., 1979; пер. с англ.: I. Ekeland, R. Temam, *Convex analysis and variational problems*, Studies in Mathematics and its Applications, **1**, North-Holland, Amsterdam–Oxford; Elsevier, New York, 1976.

Александр Евгеньевич Мамонтов
(Alexander E. Mamontov)
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева
СО РАН, г. Новосибирск
E-mail: mamont@hydro.nsc.ru

Поступило в редакцию
26.02.2013

Дмитрий Алексеевич Прокудин
(Dmitry A. Prokudin)
Кемеровский государственный университет
E-mail: daprokudin@kemsu.ru