Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Степин, Гидродинамическая задача Рэлея: теорема разложения по собственным функциям и устойчивость плоскопараллельных течений, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 6, 201–221

DOI: <https://doi.org/10.4213/im100>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 14:55:24

УДК 517.9

С. А. Степин

Гидродинамическая задача Рэлея: теорема разложения по собственным функциям и устойчивость плоскопараллельных течений

Задача Рэлея об устойчивости плоскопараллельного течения идеальной жидкости приводит к сингулярной и несамосопряженной краевой задаче, допускающей операторную формулировку в рамках модели Фридрихса. С использованием техники стационарной теории рассеяния и метода контурного интегрирования резольвенты выполнен спектральный анализ указанной задачи: доказана конечность множества собственных значений, изучены аналитические свойства функции Грина, построено разложение по собственным функциям непрерывного и точечного спектра. В качестве приложения получена временная асимптотика решения исходного нестационарного уравнения.

Библиография: 24 наименования.

Введение

В работе рассматривается задача об устойчивости движения несжимаемой идеальной жидкости в полосе $\{x \in \mathbb{R}, z \in [-1, 1]\}$. Предполагается, что поле скоростей основного стационарного течения направлено вдоль оси x и зависит только от z . Линеаризация уравнений движения идеальной жидкости относительно заданного стационарного течения с профилем скорости $u(z)$ и переход к представлению поля скоростей через функцию тока приводит к уравнению Рэлея

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}\right) - u'' \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями $\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, \pm 1, t) = 0$.

Для отыскания решений вида $\Psi(x, z, t) = \psi(z)e^{i\alpha(x-\lambda t)}$ рассмотрим краевую задачу (см. [1], [2])

$$(u - \lambda)(\psi'' - \alpha^2 \psi) - u'' \psi = 0, \quad (2)$$

$$\psi(-1) = \psi(1) = 0, \quad (3)$$

где λ – спектральный параметр, $\alpha \in \mathbb{R}$ – волновое число. Задача (2), (3) сингулярная и несамосопряженная; при этом в спектре имеется непрерывная компонента и, кроме того, могут быть вещественные и (или) невещественные собственные значения (с.з.). Операторная постановка рассматриваемой задачи приведена в § 1. В § 2 и § 3 показано, как строение точечного спектра задачи (2), (3) (в том числе, лежащего на непрерывном) определяется функцией $u(z)$.

Наряду с изучением структуры спектра колебательных режимов одним из основных вопросов в линейной теории устойчивости является построение разложения по собственным функциям (с.ф.). Аналитические средства (§ 3), которыми мы пользуемся при построении формулы разложения, основаны на применении метода

контурного интегрирования резольвенты и использовании формализма стационарной теории рассеяния (см. [3]–[5]). Формула разложения (§4) включает проектор на инвариантное подпространство, отвечающее точечному спектру задачи (2), (3) (с учетом с.з., лежащих на непрерывном спектре). Что касается собственно непрерывного спектра, то соответствующее слагаемое в разложении выражается посредством надлежащей регуляризации интеграла от разности предельных значений резольвенты. В §5 найдена временная асимптотика решения уравнения (1) (зависящего от x по закону $\exp(i\alpha x)$).

Настоящая работа продолжает исследование гидродинамической задачи Рэлея, начатое в статье [9] (из нее взяты используемые здесь предложения, приведенные ниже без доказательства). Буква C используется в тексте для обозначения различных констант.

§1. Операторная постановка задачи (2), (3)

Заменой $\varphi = \psi'' - \alpha^2 \psi$ задача (2), (3) сводится к спектральному анализу оператора H , действующего в $L_2(-1, 1)$ по формуле

$$H\varphi(z) = u(z)\varphi(z) - u''(z) \int_{-1}^1 \Gamma(z, z')\varphi(z') dz',$$

где Γ – функция Грина дифференциального оператора $\Delta_\alpha = \frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2$ с краевыми условиями (3).

Оператор $H = H_0 + V$ представляет собой возмущение оператора H_0 умножения на функцию $u(z)$ интегральным оператором V , ядро которого несимметрично и несимметризуемо (если u'' не сохраняет знак на $[-1, 1]$). Таким образом, операторная формулировка задачи (2), (3) (при условии достаточной гладкости функции u) укладывается в рамки несамосопряженной модели Фридрихса, что позволяет применить технику стационарной теории рассеяния. Обзор, посвященный разложениям по обобщенным собственным функциям для самосопряженных операторов и связи этой тематики с теорией рассеяния, см. в [6], [7].

Предполагая, что $u' > 0$ на $[-1, 1]$, дальнейшие рассуждения будем проводить в спектральном представлении оператора H_0 , где $u(z) = \omega$ принимается за новую независимую переменную. При этом оператор H , действующий теперь в $L_2(l)$, $l = [u(-1), u(1)]$, есть возмущение оператора умножения на “независимую” переменную ω интегральным оператором с ядром

$$v(\omega, \omega') = q(\omega)G(\omega, \omega'),$$

где

$$q(u(z)) = -u''(z) \cdot u'(z), \quad G(u(z), u(z')) = \frac{1}{u'(z)} \Gamma(z, z') \frac{1}{u'(z')}.$$

Известно (см. [5], [8]), что спектральные свойства операторов модели Фридрихса зависят от степени гёльдеровской гладкости ядра оператора возмущения. Введем в рассмотрение класс $\mathfrak{h}^\mu$, $0 < \mu < 1$, функций $\varphi: l \rightarrow \mathbb{C}$, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_\mu := \sup_{\omega \neq \omega'} \left(|\varphi(\omega)| + \frac{|\varphi(\omega) - \varphi(\omega')|}{|\omega - \omega'|^\mu} \right).$$

Поскольку ядро G удовлетворяет условию Липшица, нужные свойства гладкости ядра v определяются функцией u . Именно, если $u \in C^{2+\mu}[-1, 1]$, то соответствующее ядро $v: l \times l \rightarrow \mathbb{R}$ заведомо удовлетворяет условию Гёльдера с показателем μ по каждой переменной. Определим гёльдеровскую норму ядра v формулой

$$\|v\|_\mu := \sup_{\omega' \in l} \|v(\cdot, \omega')\|_\mu + \sup_{\omega \in l} \|v(\omega, \cdot)\|_\mu.$$

В теории возмущений линейных операторов наряду с резольвентой $R(\lambda) = (H - \lambda E)^{-1}$ рассматривается T -оператор $T(\lambda) := V - VR(\lambda)V$, удовлетворяющий уравнению Липмана–Швингера

$$T(\lambda) = V - VR_0(\lambda)T(\lambda),$$

где $R_0(\lambda) = (H_0 - \lambda E)^{-1}$ – оператор умножения на функцию $(\omega - \lambda)^{-1}$.

Решение этого уравнения ищется в виде интегрального оператора с ядром $t(\omega, \omega', \lambda)$ (так называемая t -матрица оператора H). Записанное в терминах ядер операторов $T(\lambda)$ и V уравнение принимает вид

$$t(\omega, \omega', \lambda) = v(\omega, \omega') - \int_l \frac{v(\omega, \tilde{\omega})t(\tilde{\omega}, \omega', \lambda)}{\tilde{\omega} - \lambda} d\tilde{\omega}. \quad (4)$$

Связь t -матрицы оператора H с функцией Грина задачи (2), (3) устанавливает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. При $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H)$ выполнено соотношение

$$t(u(z), u(z'), \lambda) = -\frac{u''(z)}{u'(z')} R(z, z', \lambda),$$

где $R(z, z', \lambda)$ – функция Грина дифференциального оператора $\frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2 - \frac{u''(z)}{u(z) - \lambda}$ с граничными условиями (3).

После того как при помощи уравнения (4) и предложения 1 будут изучены свойства T -оператора, сведения о строении резольвенты $R(\lambda)$ (необходимые для применения метода контурного интегрирования) могут быть получены из формулы

$$R(\lambda) = R_0(\lambda) - R_0(\lambda)T(\lambda)R_0(\lambda). \quad (5)$$

§ 2. Структура спектра задачи (2), (3) и оценка резольвенты вблизи вещественного собственного значения

Согласно теореме Вейля непрерывный спектр оператора H заполняет отрезок l ; в соответствии с этим будем говорить о непрерывном спектре задачи (2), (3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Обобщенной собственной функцией* (непрерывного спектра) задачи (2), (3) назовем функцию ψ_λ , $\lambda \in l$, удовлетворяющую уравнению (2) в интервалах $(-1, u^{-1}(\lambda))$ и $(u^{-1}(\lambda), 1)$, граничным условиям (3) и условию непрерывности в точке $z_\lambda = u^{-1}(\lambda)$.

Известно [10], что все с.з. задачи (2), (3) лежат в круге, диаметром которого служит отрезок l ; как следствие этого, вещественные с.з. принадлежат непрерывной компоненте спектра. С точки зрения построения разложения по с.ф. задачи (2), (3) особое значение имеет локализация точечного спектра, лежащего на непрерывном.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $c \in l$ – собственное значение задачи (2), (3), то $u''(u^{-1}(c)) = 0$ и соответствующая собственная функция не обращается в нуль в точке $z_c = u^{-1}(c)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Точки перегиба в профиле скорости $u(z)$ являются причиной неустойчивости плоскопараллельных течений идеальной жидкости [11]; в случае, когда u'' сохраняет знак, течение с профилем u (и с условием периодичности по переменной x) устойчиво по Ляпунову (см. [12]).

Определенную трудность при построении спектрального разложения методом контурного интегрирования резольвенты могут представлять точки накопления с.з.; кроме того, в несамосопряженных задачах встречаются такие эффекты, как спектральные особенности, т.е. полюсы ядра резольвенты на непрерывном спектре, не являющиеся с.з. [13]. В рассматриваемой задаче появление спектральных особенностей исключено: все особенности t -матрицы оператора H суть с.з.

Достаточное условие конечности точечного спектра задачи (2), (3) дает

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u \in C^{2+\mu_0}[-1, 1]$, $\mu_0 > 1/2$, причем $u' > 0$ и u'' имеет на $[-1, 1]$ конечное число нулей. Тогда множество собственных значений задачи (2), (3) конечно.

Доказательство теоремы будет приведено в § 3.

Применение техники контурного интегрирования потребует информации о поведении резольвенты в окрестности вещественных собственных значений. Отметим, что в теории гидродинамической устойчивости традиционно рассматриваются стационарные течения с аналитическими профилями скорости $u(z)$. При этом ядро Грина $R(z, z', \lambda)$ задачи (2), (3) аналитически продолжается по параметру λ из верхней (нижней) полуплоскости сквозь отрезок l непрерывного спектра всюду, кроме его концов. Ограничимся рассмотрением случая, когда на непрерывном спектре имеется только одно с.з. и притом простое (что это значит, уточним позднее). При изучении резольвенты $R(\lambda)$ в окрестности с.з. $c \in l$ будем предполагать, что функция $u(z)$ допускает аналитическое продолжение в некоторую комплексную окрестность точки $z_c \in [-1, 1]$.

Прежде чем приступить к исследованию поведения $R(\lambda)$ вблизи $c \in l$, сделаем необходимые приготовления. Введем в рассмотрение решения $y_1(z, \lambda)$ и $y_2(z, \lambda)$ уравнения

$$y'' - \alpha^2 y - \frac{u''(z)}{u(z) - \lambda} y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus l, \quad (2')$$

удовлетворяющие граничным условиям $y_1(-1, \lambda) = y_2(1, \lambda) = 0$, $y_1'(-1, \lambda) = y_2'(1, \lambda) = 1$, и обозначим через $\mathcal{W}(\lambda)$ вронскиан этих решений:

$$\mathcal{W}(\lambda) = y_1(z, \lambda)y_2'(z, \lambda) - y_1'(z, \lambda)y_2(z, \lambda) = y_1(1, \lambda) = -y_2(-1, \lambda).$$

Нули вронскиана, очевидно, суть с.з. задачи (2), (3). При сделанных относительно функции $u(z)$ предположениях (теорема 1) ядро Грина задачи (2), (3) имеет вне отрезка l лишь конечное число изолированных особенностей (полюсов), совпадающих с нулями $\mathcal{W}(\lambda)$. Согласно формуле (5) и предложению 1 строение резольвенты $R(\lambda)$ определяется аналитическими свойствами функции Грина

$$R(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{\mathcal{W}(\lambda)} \mathfrak{r}(x, \xi, \lambda),$$

где

$$\mathfrak{r}(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} y_1(x, \lambda)y_2(\xi, \lambda), & x \leq \xi, \\ y_1(\xi, \lambda)y_2(x, \lambda), & x \geq \xi. \end{cases}$$

В силу условия $u'(z) \neq 0$ для λ , достаточно близких к c , существует и единственно решение z_λ уравнения $u(z) = \lambda$. Как известно из аналитической теории дифференциальных уравнения [14], в окрестности регулярной особой точки z_λ уравнение (2') имеет линейно независимые решения вида

$$\begin{aligned} \varphi(z, \lambda) &= (z - z_\lambda)(1 + \alpha(z, \lambda)), \\ \chi(z, \lambda) &= 1 + \frac{u''(z_\lambda)}{u'(z_\lambda)}\varphi(z, \lambda) \ln(z - z_\lambda) + (z - z_\lambda)\beta(z, \lambda), \end{aligned}$$

где $\alpha(z, \lambda)$ и $\beta(z, \lambda)$ – аналитические функции от z , представимые сходящимися рядами по степеням $(z - z_\lambda)$, причем коэффициенты этих разложений непрерывно зависят от параметра λ (см., например, [15]).

Решение $\chi(z, \lambda)$ логарифмически ветвится и недифференцируемо в точке z_λ , однако оно гёльдеровски непрерывно в этой точке с произвольным показателем $\nu < 1$. Таким образом, составленное из этих решений ядро $\mathfrak{r}_\lambda(x, \xi) = \mathfrak{r}(x, \xi, \lambda)$ удовлетворяет условию Гёльдера по каждой переменной с любым показателем $\nu \in (0, 1)$ и равномерной оценкой нормы $\|\mathfrak{r}_\lambda\|_\nu$ для λ из достаточно малой окрестности точки c .

Равномерность оценки $\|\mathfrak{r}_\lambda\|_\nu$ проверяется с использованием:

- 1) локальных представлений для $\varphi(z, \lambda)$ и $\chi(z, \lambda)$ в окрестности z_λ ;
- 2) непрерывной зависимости от z и λ коэффициента $\frac{u''(z)}{u'(z) - \lambda}$ в (2'), когда z отделено от $z_\lambda = u^{-1}(\lambda)$.

Отметим, что после перехода к переменным $\omega, \omega' \in l = [a, b]$, $a = u(-1)$, $b = u(1)$, сохраняются свойства гёльдеровской гладкости ядра

$$r_\lambda(\omega, \omega') = r(\omega, \omega', \lambda) := \frac{1}{u'(u^{-1}(\omega))} \mathfrak{r}_\lambda(u^{-1}(\omega), u^{-1}(\omega')) \frac{1}{u'(u^{-1}(\omega'))}$$

и, кроме того, $r(a, \omega', \lambda) = r(b, \omega', \lambda) = r(\omega, a, \lambda) = r(\omega, b, \lambda) = 0$.

Поскольку вронскиан $\mathscr{W}$ имеет аналитическое продолжение из верхней (нижней) полуплоскости в некоторую комплексную окрестность точки c , можно говорить о производной $\mathscr{W}'(c \pm i0)$. Точка $c \in l$ является однократным с.з. задачи (2), (3), если $\mathscr{W}(c \pm i0) = 0$ и $\mathscr{W}'(c) \neq 0$ (ср. с леммой 2, приведенной ниже).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $c \in l$ – однократное собственное значение задачи (2), (3). Тогда для произвольных $f, g \in \mathfrak{h}^\mu$, $\mu > 0$, удовлетворяющих условиям $f(a)g(a) = f(b)g(b) = 0$, матричный элемент $(R(\lambda)f, g)$ резольвенты оператора H в некоторой комплексной окрестности точки c допускает оценку

$$|(R(\lambda)f, g)| \leq \frac{K}{|\lambda - c|}, \quad \lambda \notin l, \quad K - \text{const}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись соотношением (5) и предложением 1, запишем скалярное произведение $(R(\lambda)f, g)$ в виде

$$(R(\lambda)f, g) = \int_l \frac{f(\omega)\overline{g(\omega)}}{\omega - \lambda} d\omega - \frac{1}{\mathscr{W}(\lambda)} \int_l \frac{q(\omega)}{\omega - \lambda} \left(\int_l \frac{r(\omega, \omega', \lambda)}{\omega' - \lambda} f(\omega') d\omega' \right) \overline{g(\omega)} d\omega. \quad (6)$$

В дальнейшем неоднократно будет применяться следующая оценка (см. [16]): пусть $\varphi \in \mathfrak{H}^\nu$, $\nu > 0$, и $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$; тогда

$$\left| \int_l \frac{\varphi(\omega)}{\omega - \lambda} d\omega \right| \leq c_0(\nu) \|\varphi\|_\nu, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus l. \quad (7)$$

Условимся считать, что $\mu < 1/2$. На основании (7) первое слагаемое в (6) оценивается следующим образом:

$$\left| \int_l \frac{f(\omega) \overline{g(\omega)}}{\omega - \lambda} d\omega \right| \leq 2c_0(\mu) \|f\|_\mu \cdot \|g\|_\mu.$$

Рассмотрим второе слагаемое из (6) и покажем, что для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus l$, принадлежащих достаточно малой окрестности точки c , абсолютная величина интеграла

$$J(\lambda) = \int_l \frac{q(\omega)}{\omega - \lambda} \left(\int_l \frac{r(\omega, \omega', \lambda)}{\omega' - \lambda} f(\omega') d\omega' \right) \overline{g(\omega)} d\omega$$

допускает равномерную оценку сверху. Учитывая, что $q \in \mathfrak{H}^{\mu_0}$, $\mu_0 > 1/2$, имеем

$$|J(\lambda)| \leq 3c_0(\mu) \|q\|_\mu \cdot \|g\|_\mu \cdot \left\| \int_l \frac{r(\cdot, \omega', \lambda)}{\omega' - \lambda} f(\omega') d\omega' \right\|_\mu.$$

Проверим теперь справедливость неравенства

$$\left\| \int_l \frac{r(\cdot, \omega', \lambda)}{\omega' - \lambda} f(\omega') d\omega' \right\|_\mu \leq 4c_0(\mu) (1 + (b - a)^\mu) \|r_\lambda\|_\nu \cdot \|f\|_\mu,$$

где $\nu = 2\mu < 1$. Для этого предварительно заметим, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\omega_1 - \omega_2|^\mu} \|r(\omega_1, \cdot, \lambda) - r(\omega_2, \cdot, \lambda)\|_\mu \\ &= \frac{1}{|\omega_1 - \omega_2|^\mu} \sup_{\omega'_1 \neq \omega'_2} \left(|r(\omega_1, \omega'_1, \lambda) - r(\omega_2, \omega'_1, \lambda)| \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{|\omega'_1 - \omega'_2|^\mu} |r(\omega_1, \omega'_1, \lambda) - r(\omega_1, \omega'_2, \lambda) - r(\omega_2, \omega'_1, \lambda) + r(\omega_2, \omega'_2, \lambda)| \right) \\ & \leq ((b - a)^\mu + 2) \|r_\lambda\|_\nu, \end{aligned}$$

и выполним следующие оценки:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\omega_1 - \omega_2|^\mu} \left| \int_l \frac{r(\omega_1, \omega', \lambda) - r(\omega_2, \omega', \lambda)}{\omega' - \lambda} f(\omega') d\omega' \right| \\ & \leq \frac{2c_0(\mu)}{|\omega_1 - \omega_2|^\mu} \|r(\omega_1, \cdot, \lambda) - r(\omega_2, \cdot, \lambda)\|_\mu \|f\|_\mu \\ & \leq 2c_0(\mu) (2 + (b - a)^\mu) \|r_\lambda\|_\nu \|f\|_\mu, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_l \frac{r(\omega, \omega', \lambda)}{\omega' - \lambda} f(\omega') d\omega' \right| & \leq 2c_0(\mu) \|r(\omega, \cdot, \lambda)\|_\mu \cdot \|f\|_\mu \\ & \leq 2c_0(\mu) (b - a)^\mu \|r_\lambda\|_\nu \|f\|_\mu; \end{aligned}$$

здесь используется тот факт, что $\mathfrak{h}^\nu \hookrightarrow \mathfrak{h}^\mu$ для $\mu < \nu$ и, соответственно, $\|\cdot\|_\mu \leq (b-a)^{\nu-\mu} \|\cdot\|_\nu$.

Таким образом, установлено неравенство

$$|J(\lambda)| \leq 12c_0^2(\mu)(1 + (b-a)^\mu) \cdot \|q\|_\mu \cdot \|r_\lambda\|_\nu \cdot \|f\|_\mu \cdot \|g\|_\mu,$$

и теперь можно утверждать, что матричный элемент резольвенты допускает оценку

$$|(R(\lambda)f, g)| \leq 2c_0(\mu) \left(1 + \frac{6c_0(\mu)(1 + (b-a)^\mu)}{|\mathcal{W}(\lambda)|} \|q\|_\mu \|r_\lambda\|_\nu \right) \|f\|_\mu \|g\|_\mu,$$

причем $\|r_\lambda\|_\nu$ оценивается константой равномерно по λ из достаточно малой окрестности точки $c \in l$. Остается учесть, что $\mathcal{W}$ аналитически продолжается из верхней (нижней) полуплоскости в окрестность точки c , и воспользоваться условиями $\mathcal{W}(c) = 0$, $\mathcal{W}'(c \pm i0) \neq 0$. Предложение доказано.

Приведем теперь используемые в дальнейшем (см. §4) утверждения о геометрической и алгебраической кратностях вещественных с.з. задачи (2), (3). Под *алгебраической кратностью с.з.* $c \in l$ мы понимаем порядок нуля вронскиана $\mathcal{W}(\lambda)$ в точке $\lambda = c$; *геометрическая кратность с.з.* определяется как размерность соответствующего корневого подпространства [17]. Отметим, что с.з. задачи (2), (3) отвечает единственная (с точностью до числового множителя) с.ф. ψ . Рассмотрим вопрос о существовании присоединенной функции, т.е. решения уравнения

$$(u-c)(\eta'' - \alpha^2 \eta) - u''\eta = \psi'' - \alpha^2 \psi, \quad (8)$$

удовлетворяющего граничным условиям $\eta(-1) = \eta(1) = 0$.

ЛЕММА 1. *Собственному значению $c \in l$ задачи (2), (3) с собственной функцией ψ отвечает присоединенная функция в том и только том случае, если*

$$\int_{-1}^1 \frac{u''}{(u-c)^2} |\psi|^2 dz = 0. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что с.з. $c \in l$ отвечают собственная и присоединенная функции ψ и η . Разделим обе части уравнения (8) на $(u-c)$ и затем умножим скалярно в $L_2(-1, 1)$ на ψ ; в результате получим соотношение

$$\int_{-1}^1 \left(\eta'' - \alpha^2 \eta - \frac{u''}{u-c} \eta \right) \bar{\psi} dz = \int_{-1}^1 \frac{(\psi'' - \alpha^2 \psi)}{u-c} \bar{\psi} dz,$$

которое после интегрирования по частям и учета граничных условий записывается в следующей форме:

$$\int_{-1}^1 \eta \left(\bar{\psi}'' - \alpha^2 \bar{\psi} - \frac{u''}{u-c} \bar{\psi} \right) dz = \int_{-1}^1 \frac{u''}{(u-c)^2} |\psi|^2 dz.$$

Поскольку ψ — с.ф., отвечающая вещественному с.з. c , то левая часть здесь обращается в нуль и тем самым необходимость доказана.

Пусть ψ — с.ф., отвечающая с.з. $c \in l$, и выполнено соотношение (9). Отсюда с использованием предложения 2 выводится существование решения неоднородного уравнения

$$\eta'' - \alpha^2 \eta - \frac{u''}{u-c} \eta = \frac{u''}{(u-c)^2} \psi,$$

удовлетворяющего условию $\eta(-1) = 0$. Умножая скалярно обе части этого уравнения на с.ф. ψ и интегрируя по частям, получим равенство

$$-\bar{\psi}'(1)\eta(1) + \int_{-1}^1 \eta \left(\bar{\psi}'' - \alpha^2 \bar{\psi} - \frac{u''}{u-c} \bar{\psi} \right) dz = \int_{-1}^1 \frac{u''}{(u-c)^2} |\psi|^2 dz = 0,$$

откуда видно, что $\bar{\psi}'(1)\eta(1) = 0$.

В силу теоремы единственности $\psi'(1) \neq 0$. Таким образом, функция η удовлетворяет уравнению (8) и граничным условиям $\eta(-1) = \eta(1) = 0$, т.е. является присоединенной к собственной функции ψ . Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $c \in l$ – с.з. задачи (2), (3). Если $u'''(u^{-1}(c)) \neq 0$, то геометрическая кратность c равна 1.

В самом деле, согласно предложению 2, $u''(z_c) = 0$, $z_c = u^{-1}(c)$, в то время как $\psi(z_c) \neq 0$. Стало быть, равенство $u'''(z_c) = 0$ – необходимое условие для выполнения соотношения (9) (точнее, для существования соответствующего интеграла).

ПРИМЕР. Для $u(z) = \operatorname{th} az$, $a \operatorname{th} a = 1$, на непрерывном спектре задачи (2), (3) лежит с.з. $c = 0$ геометрической кратности 1 (это проверяется с использованием критерия [18] устойчивости течения, профиль которого имеет единственную точку перегиба).

ЛЕММА 2. Условие $\mathcal{W}'(c + i0) = 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы с.з. $c \in l$ задачи (2), (3) было геометрической кратности больше 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть c – вещественное с.з. задачи (2), (3), а ψ – соответствующая с.ф. Поскольку $u(z)$ аналитична в окрестности z_c и $u''(z_c) = 0$, то коэффициент при ψ в уравнении

$$\psi'' - \alpha^2 \psi - \frac{u''(z)}{u(z) - c} \psi = 0$$

не имеет особенностей в z_c , и на основании теоремы о монодромии это уравнение можно интегрировать вдоль кривой, получаемой из отрезка $[-1, 1]$ деформацией в нижнюю полуплоскость в окрестности точки z_c .

При таком способе интегрирования решение $\psi(z, \lambda)$ уравнения (2'), определенное условиями $\psi(-1, \lambda) = 0$, $\psi'(-1, \lambda) = 1$, аналитически зависит (согласно соответствующей теореме Пуанкаре) от параметра λ из достаточно малой комплексной окрестности точки $c \in l$. В силу теоремы Пеано (см., например, [19]) $\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}(z, c)$ удовлетворяет уравнению (8) и условию $\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}(-1, c) = 0$.

Предположим теперь, что с.з. $c \in l$ отвечает присоединенная функция $\eta(z, c)$. Тогда, очевидно, $\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}(z, c)$ совпадает с $\eta(z, c)$ с точностью до с.ф., принадлежащей с.з. c ; отсюда следует, что

$$\mathcal{W}'(c + i0) = \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}(1, c) = \eta(1, c) = 0.$$

Проведенное рассуждение допускает непосредственное обращение. А именно, равенство $\mathcal{W}'(c + i0) = 0$ означает, что решение $\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}(z, c)$ уравнения (8) наряду с условием $\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}(-1, c) = 0$ удовлетворяет граничному условию $\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}(1, c) = 0$ и, следовательно, представляет собой функцию, присоединенную к собственной функции ψ . Доказанная лемма устанавливает совпадение алгебраической и геометрической кратностей “простого” с.з. $c \in l$.

§ 3. Доказательство теоремы 1. Операторы преобразования для пары $H_0, H_0 + V$

Соответствующее оператору H уравнение (4) естественно рассматривать для значений λ , принадлежащих комплексной плоскости с разрезом вдоль l , т.е. пополнению $\mathbb{C} \setminus l$ относительно метрики $\rho(\lambda, \lambda')$, определяемой как точная нижняя грань длин кривых, соединяющих λ и λ' и не пересекающих отрезок l . Полученную таким образом поверхность с краем обозначим через Π . Считая ω' в (4) параметром, запишем это уравнение в следующем виде:

$$t_\lambda(\omega) = v(\omega) - K(\lambda)t_\lambda(\omega), \quad (4')$$

где $K(\lambda) = VR_0(\lambda)$, когда $\lambda \notin \partial\Pi$; если $\lambda = \omega \pm i0 \in \partial\Pi$, то для $\varphi \in \mathfrak{h}^\nu$, $\nu > 0$, имеем

$$K(\omega \pm i0)\varphi(\omega) = \text{v. p.} \int_l \frac{v(\omega, \omega')\varphi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \pm i\pi v(\omega, \omega)\varphi(\omega).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для каждого $\lambda \in \Pi$ и произвольного $\nu \in (0, \mu_0)$ оператор $K(\lambda): \mathfrak{h}^\nu \rightarrow \mathfrak{h}^\nu$ вполне непрерывен, причем в соответствующей операторной норме выполнена оценка

$$\|K(\lambda) - K(\lambda')\|_\nu \leq C(\nu, \varkappa)\rho(\lambda, \lambda')^\varkappa$$

для всех $\lambda, \lambda' \in \Pi$ и любого $\varkappa \in (0, \nu(\mu_0 - \nu)\mu_0^{-1})$.

Обозначим через Λ множество значений параметра $\lambda \in \Pi$, для которых соответствующее уравнению (4') однородное уравнение имеет нетривиальное решение в классе $\mathfrak{h}^\nu$, $\nu > 0$. Согласно [5] и [9] множество Λ замкнуто и совпадает с точечным спектром оператора H . На использовании этого утверждения основано

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Достаточно установить невозможность накопления невещественных с.з. к точкам непрерывного спектра; отсюда будет следовать конечность множества с.з., поскольку все они лежат в круге Говарда, диаметром которого служит отрезок l .

В дальнейшем там, где появляется оператор $H = H_0 + V$, отвечающий задаче (2), (3), мы будем иногда писать $H(\alpha)$, подразумевая зависимость от параметра α ядра $v(\alpha)$ оператора возмущения V ; зависимость от α также будет указываться в обозначении введенного выше оператора $K(\lambda) = K(\lambda, \alpha)$.

Допустим, что при $\alpha = \alpha_0$ происходит накопление невещественных с.з. $\lambda_n(\alpha_0)$ задачи (2), (3) (оператора $H(\alpha_0)$):

$$\lambda_n(\alpha_0) \rightarrow c \in l, \quad n \rightarrow \infty;$$

пусть для определенности $\text{Im } \lambda_n(\alpha_0) > 0$.

Ввиду замкнутости множества Λ точка накопления c является с.з. оператора $H(\alpha_0)$ и, как следствие, отвечает нулю $z_c = u^{-1}(c)$ функции $u''(z)$ (см. предложение 2). При этом для всех $\alpha \neq \alpha_0$, принадлежащих достаточно малой $\mathbb{R}$ -окрестности $O(\alpha_0)$, значение c перестает быть с.з. (и, тем более, точкой накопления с.з.) для соответствующей задачи (2), (3). Последнее справедливо благодаря дискретности спектра оператора Штурма–Лиувилля $-\frac{d^2}{dz^2} + \frac{u''(z)}{u(z)-c}$ с нулевыми условиями на концах отрезка $[-1, 1]$ (ср. [20]).

Предположим, что z_c — изолированный нуль u'' , и проследим за поведением с.з. $\{\lambda_n(\alpha)\}$ в зависимости от вещественного параметра $\alpha \in O(\alpha_0)$. С этой целью выберем и зафиксируем:

1) сегмент $\sigma = [c - \varepsilon, c + \varepsilon] \subset l$ такой, что $u^{-1}(\sigma)$ не содержит других нулей функции $u''(z)$, кроме z_c ;

2) простую открытую дугу $\gamma \subset \{\lambda : \operatorname{Im} \lambda > 0\}$, состоящую из точек резольвентного множества оператора $H(\alpha_0)$ и образующую вместе с сегментом σ замкнутый контур $\Gamma = \sigma \cup \gamma$.

Покажем, что для некоторого $\delta > 0$ и всех $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$\inf_{\alpha \in O(\alpha_0)} \rho(\lambda_n(\alpha), c \pm \varepsilon + i0) \geq \delta.$$

Предполагая противное, выберем сходящуюся последовательность $\{\alpha_k\} \subset O(\alpha_0)$, $\alpha_k \rightarrow \alpha^*$, $k \rightarrow \infty$, такую, что при $\alpha = \alpha_k$ некоторое с.з. $\lambda_{n_k}(\alpha)$ попадает в $\frac{1}{k}$ -окрестность точки λ_0 , где $\lambda_0 = c - \varepsilon + i0$ или $\lambda_0 = c + \varepsilon + i0$. Для сокращения записи положим $\tilde{\lambda}_k = \lambda_{n_k}$. Обозначим через $\varphi_k \in \mathfrak{h}^\nu$, $\nu > 0$, решение уравнения

$$\varphi_k + K(\tilde{\lambda}_k, \alpha_k) \varphi_k = 0, \quad (10)$$

нормированное условием $\|\varphi_k\|_\nu = 1$, и рассмотрим последовательность элементов

$$\tilde{\varphi}_k = -K(\lambda_0, \alpha^*) \varphi_k.$$

В силу компактности оператора $K(\lambda, \alpha)$ в пространстве $\mathfrak{h}^\nu$, $\nu \in (0, \mu_0)$, из последовательности $\tilde{\varphi}_k$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу $\varphi_0 \in \mathfrak{h}^\nu$; будем считать, что сама последовательность $\tilde{\varphi}_k$ сходится к φ_0 . Используя представление

$$\varphi_k = \tilde{\varphi}_k - [K(\tilde{\lambda}_k, \alpha_k) - K(\lambda_0, \alpha_k)] \varphi_k - [K(\lambda_0, \alpha_k) - K(\lambda_0, \alpha^*)] \varphi_k, \quad (11)$$

убедимся, что одновременно с $\tilde{\varphi}_k$ последовательность φ_k сходится к элементу φ_0 , так что $\|\varphi_0\|_\nu = 1$.

Учитывая в предложении 4 зависимость оператор-функции $K(\lambda)$ от параметра α , имеем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|K(\lambda, \alpha)\|_\nu &\leq C(\nu) \|v(\alpha)\|_{\mu_0}, \\ \|K(\lambda, \alpha) - K(\lambda', \alpha)\|_\nu &\leq C(\nu, \varkappa) \|v(\alpha)\|_{\mu_0} \cdot \rho(\lambda, \lambda')^\varkappa, \end{aligned}$$

где $\nu \in (0, \mu_0)$, $\varkappa \in (0, \nu(\mu_0 - \nu)\mu_0^{-1})$. Согласно этим оценкам выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \|[K(\tilde{\lambda}_k, \alpha_k) - K(\lambda_0, \alpha_k)] \varphi_k\|_\nu &\leq C(\nu, \varkappa) \|v(\alpha_k)\|_{\mu_0} \cdot \rho(\tilde{\lambda}_k, \lambda_0)^\varkappa, \\ \|[K(\lambda_0, \alpha_k) - K(\lambda_0, \alpha^*)] \varphi_k\|_\nu &\leq C(\nu) \|v(\alpha_k) - v(\alpha^*)\|_{\mu_0}, \end{aligned}$$

откуда видно, что соответствующие слагаемые в (11) с ростом k исчезают в норме $\mathfrak{h}^\nu$ (при этом мы используем непрерывную относительно гёльдеровской нормы $\|\cdot\|_{\mu_0}$ зависимость ядра v от параметра α). Сходимость $\varphi_k \rightarrow \varphi_0$ позволяет перейти в (10) к пределу при $k \rightarrow \infty$. В результате получаем соотношение

$$\varphi_0 + K(\lambda_0, \alpha^*) \varphi_0 = 0,$$

означающее, что точка λ_0 является вещественным с.з. оператора $H(\alpha^*)$ и соответствующей задачи (2), (3). Применяя предложение 2, приходим к следующему

заключению: $u''(u^{-1}(\lambda_0)) = 0$, что находится в противоречии со способом построения контура Γ . Тем самым установлена отделенность с.з. $\{\lambda_n(\alpha)\}$, $\alpha \in O(\alpha_0)$, от точек $c \pm \varepsilon$.

Доказанное позволяет вместо открытой дуги γ рассматривать ее замкнутый сегмент $\gamma' \subset \gamma$ такой, что концы γ' принадлежат δ -окрестностям точек $c \pm \varepsilon$. Выберем окрестность $\tilde{O}(\alpha_0) \subset O(\alpha_0)$ так, чтобы все точки сегмента γ' принадлежали резольвентному множеству оператора $H(\alpha)$, $\alpha \in \tilde{O}(\alpha_0)$. Далее, согласно известным результатам аналитической теории возмущений дискретного спектра [21] для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\inf_{\alpha \in \tilde{O}(\alpha_0)} \text{dist}(\lambda_n(\alpha), \sigma) > 0.$$

В противном случае аналогично предыдущему может быть показано, что при некотором $\alpha \in \tilde{O}(\alpha_0)$, $\alpha \neq \alpha_0$, на отрезке σ появляется с.з. задачи (2), (3); однако появление с.з. в точке c при $\alpha \neq \alpha_0$, $\alpha \in O(\alpha_0)$ невозможно ввиду дискретности спектра оператора $-\frac{d^2}{dz^2} + \frac{u''}{u-c}$, в то время как в остальных точках отрезка σ такая возможность исключается предложением 2.

Таким образом, установлено, что при $\alpha \in \tilde{O}(\alpha_0)$

$$\text{dist}(\lambda_n(\alpha), \Gamma) > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

т.е. все с.з. $\lambda_n(\alpha)$ остаются внутри контура Γ и, стало быть, имеют точку накопления – с.з., принадлежащее $\sigma \subset l$. Это противоречит предположению об изолированности нуля $z_c = u^{-1}(c)$ функции $u''(z)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение о конечности точечного спектра задачи (2), (3) в случае, когда функция u (задающая профиль стационарного течения) гладкая и имеет конечное число точек перегиба, содержится в [11] и основано на изучении механизма возникновения невещественных с.з. при изменении параметра α .

При построении операторов преобразования для пары H_0 , $H_0 + V$ потребуются свойства гладкости t -матрицы $t(\omega, \omega', \lambda)$. Если $\lambda \in \mathbb{C} \setminus l$, эти свойства следуют, например, из предложения 1 и продолжаются вплоть до краев разреза $\partial\Pi$ (с использованием предложения 4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для каждого $\lambda \in \Pi \setminus \Lambda$ уравнение (4) имеет единственное решение $t(\omega, \omega', \lambda)$ и при любом $\mu \in (0, \mu_0)$ справедлива оценка

$$|t(\omega_1, \omega'_1, \lambda) - t(\omega_2, \omega'_2, \lambda)| \leq C(\lambda, \mu)(|\omega_1 - \omega_2|^\mu + |\omega'_1 - \omega'_2|^\mu);$$

для всех $\lambda, \lambda' \in \Pi \setminus \Lambda$ и произвольного $\nu \in (0, \mu_0)$ верно неравенство

$$|t(\omega, \omega', \lambda) - t(\omega, \omega', \lambda')| \leq C(\lambda, \lambda', \nu)\rho(\lambda, \lambda')^\nu.$$

Константы в этих оценках равномерно ограничены, если λ и λ' отделены от Λ .

В работе автора [9] в предположении $\sigma_p(H) \cap \sigma_c(H) = \emptyset$ с помощью t -матрицы построены волновые операторы для пары H_0 , $H_0 + V$

$$U^\pm \varphi(\omega) = \varphi(\omega) - \int_l \frac{t(\omega, \omega', \omega' \pm i0)}{\omega - \omega' \mp i0} \varphi(\omega') d\omega'. \quad (12)$$

На этом пути рассматривается семейство интегральных операторов

$$Y(\varepsilon, \delta) \varphi(\omega) = \int_l \frac{t(\omega, \omega', \omega' + i\varepsilon)}{\omega - \omega' - i\delta} \varphi(\omega') d\omega',$$

определенных на плотном в $L_2(l)$ множестве $\mathfrak{H}$ гёльдеровски гладких функций. Благодаря свойствам t -матрицы (предложение 5) и предположению $\sigma_p(H) \cap l = \emptyset$ оператор $Y(\varepsilon, \delta): \mathfrak{H} \rightarrow L_2(l)$ сильно непрерывно зависит от параметров ε и δ , изменяющихся в достаточно малых полукрестностях значений ± 0 . Это позволяет придать точный смысл формулам (12) и затем продолжить $U^\pm = E - Y(\pm 0, \pm 0): \mathfrak{H} \rightarrow L_2(l)$ по непрерывности до ограниченных операторов во всем $L_2(l)$. Определенные таким образом операторы $U^\pm$ представляют собой сплетающие операторы для пары $H_0, H_0 + V$, т.е. $HU^\pm = U^\pm H_0$.

В случае когда у оператора H имеются с.з., принадлежащие непрерывной компоненте спектра, этот подход неприменим. Препятствием здесь служат сингулярности t -матрицы по переменной λ , и формулам (12) удастся придать смысл лишь для тех $\varphi \in \mathfrak{H}$, которые обращаются в нуль в окрестности множества $\Lambda \cap l$. Отметим, что в самосопряженной модели Фридрихса [22] ввиду симметричности t -матрицы: $t(\omega, \omega', \lambda) = \bar{t}(\omega', \omega, \bar{\lambda})$, операторы $U^\pm$ изометричны и, таким образом, продолжаются как ограниченные операторы на все $L_2(l)$, даже если $\sigma_p(H) \cap \sigma_c(H) \neq \emptyset$. В рассматриваемой нами несамосопряженной ситуации можно формально построить операторы преобразования для пары $H_0, H_0 + V$, однако теперь эти операторы будут, вообще говоря, неограниченными (ср. [13]). Тем не менее формализм стационарной теории рассеяния будет использован (см. § 4) при выводе формулы разложения по с.ф. оператора H и задачи (2), (3). Сделаем для этого необходимые приготовления.

Введем в рассмотрение “двойственный” к $Y(\varepsilon, \delta)$ оператор $Z(\varepsilon, \delta)$, заданный на элементах $\varphi \in \mathfrak{H}$ формулой

$$Z(\varepsilon, \delta)\varphi(\omega) = \int_l \frac{t(\omega, \omega', \omega - i\varepsilon)}{\omega' - \omega + i\delta} \varphi(\omega') d\omega'.$$

С помощью известных оценок преобразования Гильберта гёльдеровских функций (см. [5, лемма 3.1]) и с использованием свойств t -матрицы устанавливается, что для $\omega \notin \Lambda \cap l$ интеграл $Z(\varepsilon, \delta)\varphi(\omega)$ непрерывно зависит от параметров ε и δ (изменяющихся в достаточно малых полукрестностях значений ± 0) и, таким образом, при $\omega \in l \setminus \Lambda$ существуют предельные значения

$$Z(\pm 0, \pm 0)\varphi(\omega) = \text{v. p.} \int_l \frac{t(\omega, \omega', \omega \mp i0)}{\omega' - \omega} \varphi(\omega') d\omega' \mp i\pi t(\omega, \omega, \omega \mp i0)\varphi(\omega). \quad (13)$$

Предложение 5 и оценка граничных значений сингулярных интегралов типа Коши из [16] позволяют утверждать, что $Z(\pm 0, \pm 0)\varphi(\omega)$ удовлетворяют условию Гёльдера, когда $\omega \in l \setminus \Lambda$; если при этом значения ω отделены от $\Lambda \cap l$, то соответствующие константы гёльдеровости допускают равномерные оценки. Все предшествующие заключения, относящиеся к $Z(\varepsilon, \delta)$, справедливы для оператора $Y^*(\varepsilon, \delta)$, действующего на элементах $\varphi \in \mathfrak{H}$ по формуле

$$Y^*(\varepsilon, \delta)\varphi(\omega) = \int_l \frac{\bar{t}(\omega', \omega, \omega + i\varepsilon)}{\omega' - \omega + i\delta} \varphi(\omega') d\omega'.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Формулами (13) можно доопределить $Z(\pm 0, \pm 0)\varphi(\omega)$ на исключительном множестве $l \cap \Lambda$. В самом деле, согласно предложению 2 и лемме 2 отношение $\frac{u''(u^{-1}(\cdot))}{\mathcal{W}(\cdot)}$ имеет в точке $c \in l \cap \Lambda$ устранимую особенность; отсюда и из локального в окрестности $\omega = c$ представления

$$t(\omega, \omega', \omega \pm i0) = -\frac{1}{u'(u^{-1}(\omega))} \frac{u''(u^{-1}(\omega))}{\mathcal{W}(\omega \pm i0)} \mathfrak{r}(u^{-1}(\omega), u^{-1}(\omega'), \omega \pm i0)$$

видно, что ядра $t(\omega, \omega', \omega \pm i0)$ продолжают по непрерывности в точку $\omega = c$ с равномерной оценкой гёльдеровской нормы.

§ 4. Разложение по собственным функциям

Цель этого параграфа – построение разложения по с.ф. непрерывного и точечного спектра задачи (2), (3).

Перечислим ограничения, которые в дальнейшем налагаются на профиль скорости стационарного течения: $u(z) \in C^{2+\mu_0}[-1, 1]$, $\mu_0 > 1/2$, удовлетворяет условию $u'(z) > 0$, $z \in [-1, 1]$; множество $\mathfrak{Z} = \{z \in [-1, 1] : u''(z) = 0\}$ конечно; для каждого $z_0 \in \mathfrak{Z}$ функция $u(z)$ допускает аналитическое продолжение в некоторую комплексную окрестность точки z_0 , причем $u'''(z_0) \neq 0$.

Изложенный в настоящей работе подход к доказательству теоремы разложения использует основные этапы конструкции из [9], где формула разложения получена при условии $\sigma_p(H) \cap \sigma_c(H) = \emptyset$. Ниже основное внимание будет уделено особенностям спектрального разложения, связанным с присутствием точечного спектра на непрерывном. Для простоты все рассмотрения будут проводиться в случае, когда $\sigma_p(H) \cap l = \{c\}$, т.е. у задачи (2), (3) на непрерывном спектре имеется единственное с.з.

В рассматриваемой ситуации найдутся числа $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\delta \in (0, \delta_0)$, $\delta < \varepsilon$, контур

$$\Gamma = \{\lambda \in \Pi : \text{dist}(\lambda, \partial\Pi) = \delta, \text{dist}(\lambda, c \pm i0) \geq \varepsilon\} \cup \\ \cup \{\lambda \in \Pi : \text{dist}(\lambda, c \pm i0) = \varepsilon, \text{dist}(\lambda, \partial\Pi) \geq \delta\}$$

состоит из точек резольвентного множества оператора H и не содержит внутри себя других с.з., кроме $c \in l$. С помощью интеграла Рисса построим проектор

$$E - P = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\lambda) d\lambda; \quad (14)$$

здесь P – оператор проектирования на линейную оболочку корневых функций оператора H , отвечающих его невещественным с.з., вдоль инвариантного подпространства, соответствующего непрерывному спектру. Перейдем в (14) к скалярной форме записи:

$$2\pi i((E - P)f, g) = \int_{l \setminus \sigma} ([R(\tau + i\delta) - R(\tau - i\delta)]f, g) d\tau \\ + i\delta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} ([R(a - \delta e^{i\varphi}) - R(b + \delta e^{i\varphi})]f, g) e^{i\varphi} d\varphi \\ - i\varepsilon \int_{\theta}^{\pi-\theta} ([R(c + \varepsilon e^{i\varphi}) - R(c - \varepsilon e^{i\varphi})]f, g) e^{i\varphi} d\varphi, \quad (15)$$

где $f, g \in \mathfrak{H}$, $\sigma = (c - \sqrt{\varepsilon^2 - \delta^2}, c + \sqrt{\varepsilon^2 - \delta^2})$, $\theta = \arcsin \frac{\delta}{\varepsilon}$. Формула разложения будет получена из соотношения (15) в результате предельного перехода при $\delta \downarrow 0$ и $\varepsilon \downarrow 0$. Эта процедура сводится к вычислению разности предельных значений резольвенты на краях разреза $\partial\Pi$ и вычленению в отдельное слагаемое “вычета” в точке $\lambda = c$ в виде проектора на соответствующее собственное подпространство.

ЛЕММА 3. Если $f, g \in \mathfrak{H}$, то для всех $\tau \in (a, b)$, $\tau \neq c$, существует предел

$$\lim_{\delta \downarrow 0} ([R(\tau + i\delta) - R(\tau - i\delta)]f, g) \\ = 2\pi i[E - Z(+0, +0)]f(\tau) \cdot \overline{[E - Y^*(+0, +0)]g(\tau)}. \quad (16)$$

Зафиксируем $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и выполним в (15) предельный переход при $\delta \downarrow 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $f, g \in \mathfrak{H}$, причем $f(a)g(a) = f(b)g(b) = 0$. Тогда для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ справедливо равенство эрмитовых форм

$$\begin{aligned} ((E - P)f, g) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - c| = \varepsilon} (R(\lambda)f, g) d\lambda \\ &+ \left(\int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^b \right) [E - Z(+0, +0)]f(\tau) \cdot \overline{[E - Y^*(+0, +0)]g(\tau)} d\tau. \end{aligned} \quad (17)$$

Доказательство повторяет аргументацию соответствующего утверждения из [9]. На этом пути используется оценка

$$|(R(\lambda)f, g)| \leq C(\lambda) \cdot \|f\|_\nu \cdot \|g\|_\nu, \quad \lambda \in \Pi \setminus \Lambda,$$

справедливая для $f, g \in \mathfrak{h}^\nu$, $\nu > 0$, $f(a)g(a) = f(b)g(b) = 0$, и равномерная по $\lambda \in \Pi$, $\text{dist}(\lambda, \Lambda) \geq \varepsilon > 0$. Как следствие, второе слагаемое в правой части (15) исчезает при $\delta \downarrow 0$. Для перехода к пределу в первом слагаемом достаточно заметить, что сходимость в (16) равномерная по $\tau \in l$, если значения τ отделены от точек a , b и c . Наконец, третье слагаемое в пределе $\delta \downarrow 0$ превращается в интеграл от $(R(\lambda)f, g)$ по окружности $\gamma_c(\varepsilon) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - c| = \varepsilon\}$.

ТЕОРЕМА 2. Для произвольных $f, g \in \mathfrak{H}$, удовлетворяющих условиям $f(a) \times g(a) = f(b)g(b) = 0$, существует предел

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\gamma_c(\varepsilon)} (R(\lambda)f, g) d\lambda &= -\pi i \left[\frac{1}{\mathcal{W}'(c + i0)} \int_l \frac{\phi_c^+(\omega')}{\omega' - c - i0} f(\omega') d\omega' \right. \\ &\left. + \frac{1}{\mathcal{W}'(c - i0)} \int_l \frac{\phi_c^+(\omega')}{\omega' - c + i0} f(\omega') d\omega' \right] \int_l \frac{q(\omega)}{\omega - c} \phi_c^-(\omega) \overline{g(\omega)} d\omega, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\phi_c^\pm(\omega) = \frac{\psi_c^\pm(u^{-1}(\omega))}{u'(u^{-1}(\omega))}$, ψ_c^+ (ψ_c^-) — с.ф. задачи (2), (3), отвечающая с.з. $c \in l$, с условием нормировки $\frac{d\psi_c^+}{dz}(1) = 1$ ($\frac{d\psi_c^-}{dz}(-1) = 1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f, g \in \mathfrak{h}^\nu$, $\nu > 0$, $f(a)g(a) = f(b)g(b) = 0$. Заметим прежде всего, что вместо интеграла от $(R(\lambda)f, g)$ по окружности γ_c достаточно рассматривать интегралы по дугам $\gamma_c^\pm = \{\lambda = c + \varepsilon \exp i(\pm \frac{\pi}{2} + \theta), \theta \in (-\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon)\}$. Действительно, согласно предложению 3 имеем

$$|(R(\lambda)f, g)| \leq \frac{K}{|\lambda - c|},$$

и, следовательно, интегралы от $(R(\lambda)f, g)$ по $\gamma_c \setminus \gamma_c^\pm$ суть величины порядка $O(\varepsilon)$, когда $\varepsilon \downarrow 0$.

Воспользуемся представлением (6) для матричного элемента резольвенты $(R(\lambda)f, g)$. Ввиду равномерности оценки (7) по $\lambda \in \Pi$ результат интегрирования первого слагаемого $(R_0(\lambda)f, g)$ по $\gamma_c^\pm$ в пределе $\varepsilon \downarrow 0$ дает нулевой вклад.

Рассмотрим теперь второе слагаемое $(R_0(\lambda)T(\lambda)R_0(\lambda)f, g) = J(\lambda) \nearrow \mathcal{W}(\lambda)$, когда $\lambda \in \gamma_c^\pm$ и $\varepsilon \downarrow 0$. Для наших целей запишем интегральное выражение $J(\lambda)$ в

следующем виде:

$$\begin{aligned} J(\lambda) = & \int_l \left[\frac{q(\omega)}{\omega - \lambda} - \frac{q(\omega)}{\omega - c} \right] \left(\int_l \frac{r(\omega, \omega', \lambda)}{\omega' - \lambda} f(\omega') d\omega' \right) \overline{g(\omega)} d\omega \\ & + \int_l \frac{q(\omega)}{\omega - c} \left(\int_l \frac{r(\omega, \omega', \lambda) - r(\omega, \omega', c)}{\omega' - \lambda} f(\omega') d\omega' \right) \overline{g(\omega)} d\omega \\ & + \int_l \frac{q(\omega)}{\omega - c} \left(\int_l \frac{r(\omega, \omega', c)}{\omega' - \lambda} f(\omega') d\omega' \right) \overline{g(\omega)} d\omega, \end{aligned}$$

и изучим поведение при $\varepsilon \downarrow 0$ каждого из слагаемых в отдельности. Первое слагаемое допускает следующую (основанную на использовании неравенства (7)) оценку:

$$\begin{aligned} & \left| \int_l \left[\frac{q(\omega)}{\omega - \lambda} - \frac{q(\omega)}{\omega - c} \right] \left(\int_l \frac{r(\omega, \omega', \lambda)}{\omega' - \lambda} f(\omega') d\omega' \right) \overline{g(\omega)} d\omega \right| \\ & \leq C(\nu) \|r_\lambda\|_\nu \cdot \int_l \left| \frac{q(\omega)}{\omega - \lambda} - \frac{q(\omega)}{\omega - c} \right| d\omega \cdot \|f\|_\nu \cdot \|g\|_\nu, \end{aligned}$$

где, как уже отмечалось, норма $\|r_\lambda\|_\nu$ равномерно ограничена для всех λ из достаточно малой окрестности с.з. c . При этом ввиду аналитичности $u(z)$ в окрестности точки z_c и равенства $u''(z_c) = 0$ (предложение 2) для всех $\lambda \in \gamma_c^\pm$ имеем

$$\left| \frac{q(\omega)}{\omega - \lambda} - \frac{q(\omega)}{\omega - c} \right| = \frac{|\lambda - c| \cdot |q(\omega) - q(c)|}{|\omega - \lambda| \cdot |\omega - c|} \leq C \frac{\varepsilon}{|\omega - \lambda|}.$$

Здесь $\varepsilon \sin \varepsilon \leq |\operatorname{Im} \lambda| \leq \varepsilon$ и, следовательно, при $\varepsilon \downarrow 0$

$$\int_l \left| \frac{q(\omega)}{\omega - \lambda} - \frac{q(\omega)}{\omega - c} \right| d\omega = O(\varepsilon \ln \varepsilon).$$

Тем самым установлено, что рассматриваемое слагаемое исчезает в пределе $\varepsilon \downarrow 0$ равномерно для всех $\lambda \in \gamma_c^\pm$.

Оценка второго слагаемого основана на следующем наблюдении: для произвольного $\nu \in (0, 1)$ равномерно по $\lambda \in \gamma_c^\pm$ имеем

$$\|r_\lambda - r_c\|_\nu = o(1), \quad \varepsilon \downarrow 0. \quad (19)$$

В связи с этим напомним, что ядро r_λ составлено из решений $y_1(\cdot, \lambda)$ и $y_2(\cdot, \lambda)$; последнее суть линейные комбинации решений $\varphi(\cdot, \lambda)$ и $\chi(\cdot, \lambda)$ уравнения (2), допускающих (см. §2) локальные представления в виде сходящихся рядов в окрестности регулярной особой точки $z_\lambda = u^{-1}(\lambda)$. Проверка (19) сводится к подсчету пределов решений $y_1(\cdot, \lambda)$ и $y_2(\cdot, \lambda)$ как элементов гильбертовского класса $\mathfrak{h}^\nu$, когда $\lambda \in \gamma_c^\pm$, $\varepsilon \downarrow 0$. Единственную сложность при этом представляет слагаемое в $\chi(\cdot, \lambda)$, содержащее логарифм, однако, поскольку $u''(z_c) = 0$, достаточно заметить, что

$$\left\| \frac{u''(z_\lambda)}{u'(z_\lambda)} \varphi(z, \lambda) \ln(z - z_\lambda) \right\|_\nu = O(|u''(z_\lambda)|) = o(1), \quad \lambda \rightarrow c.$$

Используя неравенство (7), выполним оценку

$$\begin{aligned} & \left| \int_l \frac{q(\omega)}{\omega - c} \left(\int_l \frac{r(\omega, \omega', \lambda) - r(\omega, \omega', c)}{\omega' - \lambda} f(\omega') d\omega' \right) \overline{g(\omega)} d\omega \right| \\ & \leq C(\nu) \cdot \|r_\lambda - r_c\|_\nu \cdot \|f\|_\nu \cdot \|g\|_\nu, \end{aligned}$$

откуда с учетом (19) следует, что рассматриваемое слагаемое становится равномерно малым для $\lambda \in \gamma_c^\pm$, когда $\varepsilon \downarrow 0$.

Для перехода к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$ в третьем слагаемом

$$\begin{aligned} \int_l \frac{q(\omega)}{\omega - c} \left(\int_l \frac{r(\omega, \omega', c)}{\omega' - \lambda} f(\omega') d\omega' \right) \overline{g(\omega)} d\omega \\ = \int_l \frac{q(\omega)}{\omega - c} \phi_c^-(\omega) \overline{g(\omega)} d\omega \int_l \frac{\phi_c^+(\omega')}{\omega' - \lambda} f(\omega') d\omega', \end{aligned}$$

где $\lambda \in \gamma_c^\pm$, применим известную формулу

$$\lim_{\lambda \rightarrow c} \int_l \frac{\phi_c^+(\omega')}{\omega' - \lambda} f(\omega') d\omega' = \text{v. p.} \int_l \frac{\phi_c^+(\omega')}{\omega' - c} f(\omega') d\omega' \pm i\pi \phi_c^+(c) f(c);$$

здесь знак, + или -, перед последним слагаемым выбирается в соответствии с тем, из какой полуплоскости (верхней или нижней) λ приближается к точке $c \in l$. В результате установим, что при $\varepsilon \downarrow 0$ у выражения $J(\lambda)$ существуют равномерные по $\lambda \in \gamma_c^\pm$ пределы

$$J(c \pm i0) = \int_l \frac{q(\omega)}{\omega - c} \phi_c^-(\omega) \overline{g(\omega)} d\omega \left[\text{v. p.} \int_l \frac{\phi_c^+(\omega')}{\omega' - c} f(\omega') d(\omega') \pm i\pi \phi_c^+(c) f(c) \right].$$

Для завершения доказательства воспользуемся аналитичностью вронскиана $\mathcal{W}(\lambda)$ в полукрестностях точек $c \pm i0 \in \Pi$; при этом (согласно лемме 2) $\mathcal{W}(c) = 0$, $\mathcal{W}'(c \pm i0) \neq 0$. Ввиду равномерности вычисленных пределов $J(c \pm i0)$ вклад интегралов от $J(\lambda)/\mathcal{W}(\lambda)$ по дугам $\gamma_c^\pm$ при $\varepsilon \downarrow 0$ равен сумме двух “полувычетов”

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\gamma_c^\pm} \frac{1}{\mathcal{W}(\lambda)} J(\lambda) d\lambda = \frac{\pi i}{\mathcal{W}'(c \pm i0)} J(c \pm i0).$$

В итоге для произвольных $f, g \in \mathfrak{H}$, $f(a)g(a) = f(b)g(b) = 0$, имеем утверждение теоремы:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\gamma_c(\varepsilon)} (R(\lambda)f, g) d\lambda = -\pi i \left(\frac{J(c + i0)}{\mathcal{W}'(c + i0)} + \frac{J(c - i0)}{\mathcal{W}'(c - i0)} \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Простое вычисление показывает, что $\frac{q(\omega)}{\omega - c} \phi_c^-(\omega) \in L_2(l)$ есть с.ф. оператора $H = H_0 + V$, отвечающая с.з. $\lambda = c \in l$. Сопряженный оператор $H^* = H_0 + V^*$, как нетрудно убедиться, имеет в точке $\lambda = c$ спектральную особенность, т.е. сингулярность ядра резольвенты, не являющуюся с.з.

Формулу (18) следует рассматривать как подсчет спектрального проектора на (одномерное) собственное подпространство оператора H , отвечающее с.з. $c \in l$:

$$p_c = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\gamma_c(\varepsilon)} R(\lambda) d\lambda.$$

Теорема 2 позволяет выполнить предельный переход при $\varepsilon \downarrow 0$ в соотношении (17) и, таким образом, регуляризовать расходящийся интеграл по непрерывному спектру от скачка резольвенты

$$\int_l ([R(\tau + i0) - R(\tau - i0)]f, g) d\tau.$$

Для этого достаточно заметить, что в (17) левая часть не зависит от ε ; согласно теореме 2 при $\varepsilon \downarrow 0$ существует предел первого слагаемого в правой части и, стало быть, во втором слагаемом допустим предельный переход. В результате получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Если $f, g \in \mathfrak{H}$ и $f(a)g(a) = f(b)g(b) = 0$, то справедливо равенство эрмитовых форм

$$\begin{aligned} ((E - P)f, g) &= (p_c f, g) \\ &+ \text{v. p.} \int_l [E - Z(+0, +0)]f(\tau) \cdot \overline{[E - Y^*(+0, +0)]g(\tau)} d\tau. \end{aligned} \quad (20)$$

Это предложение при специальном выборе $g(\cdot) = g(\omega, \cdot) = u'(u^{-1}(\omega))G(\omega, \cdot)$ приводит к формуле разложения по с.ф. непрерывного и точечного спектра задачи (2), (3). Положим $f = \Delta_\alpha h \circ u^{-1}$, где $h \in C^{2+\nu}[-1, 1]$, $\nu > 0$, и учтем, что $g(\omega, \cdot) \in \text{Lip}$, $g(\omega, a) = g(\omega, b) = 0$. Для таких f и g соотношение (20) принимает вид

$$\begin{aligned} (E - \Delta_\alpha^{-1} P \Delta_\alpha)h(u^{-1}(\omega)) &= \Delta_\alpha^{-1} p_c \Delta_\alpha h(u^{-1}(\omega)) \\ &+ \text{v. p.} \int_l [E - Z(+0, +0)]\Delta_\alpha h \circ u^{-1}(\tau) \cdot \overline{[E - Y^*(+0, +0)]g(\omega, \tau)} d\tau. \end{aligned} \quad (21)$$

Непосредственной проверкой устанавливается (ср. [9, лемма 9]), что

$$\psi_\tau(\cdot) = \overline{[E - Y^*(+0, +0)]g(u(\cdot), \tau)} = -\frac{1}{u''(\cdot)}t(u(\cdot), \tau, \tau + i0), \quad \tau \in l \setminus \Lambda,$$

суть полный набор с.ф. непрерывного спектра задачи (2), (3).

ЗАМЕЧАНИЕ. Несмотря на то обстоятельство, что оператор p_c является неограниченным проектором в $L_2(l)$, в формуле разложения (21) целесообразно объединить в одно слагаемое члены, содержащие ограниченный проектор P и одномерный оператор p_c ; отметим, что $P + p_c$ — также проектор.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $u(z) \in C^{2+\mu_0}[-1, 1]$, $\mu_0 > 1/2$, удовлетворяет условию $u'(z) > 0$, $z \in [-1, 1]$; предполагается, что множество $\mathfrak{Z} = \{z \in [-1, 1] : u''(z) = 0\}$ конечно и для каждого $z_0 \in \mathfrak{Z}$ функция $u(z)$ продолжается аналитически в некоторую комплексную окрестность точки z_0 , причем $u'''(z_0) \neq 0$.

Тогда:

- i) точечный спектр Λ задачи (2), (3) конечен и с.з., принадлежащие отрезку $l = [u(-1), u(1)]$, однократные;
- ii) для всех $\lambda \in \Pi \setminus \Lambda$ уравнение (5) разрешимо и

$$\psi_\tau(\cdot) = -\frac{1}{u''(\cdot)}t(u(\cdot), \tau, \tau + i0), \quad \tau \in l \setminus \Lambda,$$

суть обобщенные с.ф. непрерывного спектра задачи (2), (3);

- iii) произвольная функция $h \in C^{2+\nu}[-1, 1]$, $\nu > 0$, удовлетворяющая условиям $h(-1) = h(1) = 0$, представима в виде

$$h = \text{v. p.} \int_l [W(h'' - \alpha^2 h)](\tau) \psi_\tau d\tau + Qh, \quad (22)$$

где Qh принадлежит подпространству точечного спектра задачи (2), (3), W — интегральный оператор, действующий по формуле

$$W\varphi(\tau) = \text{v. p.} \int_l \frac{t(\tau, \omega, \tau - i0)}{\tau - \omega} \varphi(\omega) d\omega + (1 + i\pi t(\tau, \tau, \tau - i0))\varphi(\tau).$$

§ 5. Асимптотика по времени решения нестационарного уравнения Рэлея

Рассмотрим эволюционное уравнение (1), в котором Ψ зависит от x гармонически, т.е. переменная x отделяется в виде $\exp(i\alpha x)$. С использованием разложения (22) будет получена явная формула для решения начально-краевой задачи

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\alpha u\right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \alpha^2 \psi\right) - i\alpha u'' \psi = 0, \quad (23)$$

$$\psi(-1, t) = \psi(1, t) = 0, \quad \psi(z, 0) = h(z), \quad (24)$$

где $z \in [-1, 1]$, $t \geq 0$. Формулировку соответствующего утверждения приведем в случае, когда спектр u (2), (3) чисто непрерывный (ср. [23]).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $u \in C^{2+\mu_0}[-1, 1]$, $\mu_0 > 1/2$, $u' > 0$, причем спектральная задача (2), (3) не имеет с.з.

Тогда для произвольной $h \in C^{2+\nu}[-1, 1]$, $\nu > 0$, $h(\pm 1) = 0$, начально-краевая задача (23), (24) разрешима и решение представимо в виде

$$\psi(z, t) = \int_l [W(h'' - \alpha^2 h)](\lambda) \psi_\lambda(z) e^{-i\alpha \lambda t} d\lambda, \quad (25)$$

где ψ_λ , $\lambda \in l$, — обобщенные с.ф. (2), (3), W — интегральный оператор из теоремы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу свойств с.ф. $\psi_\lambda(z)$ непрерывного спектра, $\psi(z, t)$, очевидно, удовлетворяет граничным условиям $\psi(-1, t) = \psi(1, t) = 0$ и, кроме того, согласно теореме 3 выполняется начальное условие

$$\psi(z, 0) = \int_l [W(h'' - \alpha^2 h)](\lambda) \psi_\lambda(z) d\lambda = h(z).$$

Проверку применимости дифференциального оператора Δ_α к интегралу (25) проведем по следующей схеме. Будем считать $\psi(z, t)$ регулярной обобщенной функцией и выполним дифференцирование в обобщенном смысле. Применяя Δ_α к правой части (25) под знаком интеграла (с учетом непрерывности операции дифференцирования в классе обобщенных функций), получим

$$\Delta_\alpha \psi(z, t) = \int_l [W(h'' - \alpha^2 h)](\lambda) \Delta_\alpha \psi_\lambda(z) e^{-i\alpha \lambda t} d\lambda.$$

Далее, из явной формулы для с.ф. непрерывного спектра

$$\psi_\lambda(z) = -\frac{1}{u''(z)} t(u(z), \lambda, \lambda + i0), \quad \lambda \in l,$$

и из уравнения (4) на t -матрицу видно, что

$$\Delta_\alpha \psi_\lambda(z) = (1 - i\pi t(\lambda, \lambda, \lambda + i0)) \delta(u(z) - \lambda) - \frac{t(u(z), \lambda, \lambda + i0)}{u(z) - \lambda}.$$

Как следствие имеем

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha \psi(z, t) &= (1 - i\pi t(u(z), u(z), u(z) + i0)) [W(h'' - \alpha^2 h)](u(z)) e^{-i\alpha u(z)t} \\ &\quad - \text{v. p.} \int_l [W(h'' - \alpha^2 h)](\lambda) \frac{t(u(z), \lambda, \lambda + i0)}{u(z) - \lambda} e^{-i\alpha \lambda t} d\lambda. \end{aligned} \quad (26)$$

Согласно предложению 5 ядро $t(\omega, \omega', \lambda)$ удовлетворяет условию Гёльдера по каждой переменной, причем соответствующие константы гёльдеровости допускают равномерные по λ оценки, если $\text{dist}(\lambda, \Lambda) \geq \delta > 0$; отсюда непосредственно следует (ср. [3]), что при сделанном предположении ($\Lambda = \emptyset$) класс $\mathfrak{H}$ инвариантен относительно операторов преобразования U^+ и W , в частности $W(h'' - \alpha^2 h) \in \mathfrak{H}$, если $h \in C^{2+\nu}[-1, 1]$, $\nu > 0$. Остается заметить, что $\Delta_\alpha \psi(z, t)$ есть результат применения волнового оператора U^+ к $[W(h'' - \alpha^2 h)](\lambda)e^{-i\alpha\lambda t}$ и, стало быть, $\Delta_\alpha \psi(\cdot, t) \in \mathfrak{H}$. Таким образом, функция $\psi(z, t)$ дважды непрерывно дифференцируема по z и справедлива формула (26).

Поддействуем на обе части соотношения (26) операцией $\frac{\partial}{\partial t} + i\alpha u$. Первое слагаемое в правой части (26), очевидно, дифференцируемо по переменной t ; для проверки дифференцируемости второго слагаемого, представляющего собой главное значение несобственного интеграла, достаточно убедиться в локально равномерной (по переменной t) сходимости интеграла от продифференцированного подынтегрального выражения. В результате несложных вычислений получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\alpha u(z) \right) \Delta_\alpha \psi(z, t) &= -i\alpha \int_t [W(h'' - \alpha^2 h)](\lambda) t(u(z), \lambda, \lambda + i0) e^{-i\alpha\lambda t} d\lambda \\ &= i\alpha u''(z) \int_t [W(h'' - \alpha^2 h)](\lambda) \psi_\lambda(z) e^{-i\alpha\lambda t} d\lambda \\ &= i\alpha u''(z) \psi(z, t). \end{aligned}$$

Этой выкладкой подтверждается дифференцируемость $\Delta_\alpha \psi(z, t)$ по t и одновременно устанавливается, что $\psi(z, t)$ удовлетворяет уравнению (23). Теорема доказана.

В качестве приложения формулы (25) вычислим асимптотику функции тока возмущения стационарного течения с профилем скорости $u(z)$ при $t \rightarrow \infty$. Предположения, относящиеся к стационарному течению, сформулированы в терминах “невозмущенной” функции тока $\psi_0(z)$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\psi_0 \in C^{3+\mu_0}[-1, 1]$, $\mu_0 > 1/2$, $\psi_0'' > 0$, и соответствующая спектральная задача (2), (3) с $u = \psi_0'$ не имеет с.з. При условии, что начальное возмущение принадлежит классу $C^{2+\nu}[-1, 1]$, $0 < \nu < \mu_0$, для функции тока возмущенного течения справедлива асимптотика $\psi_0(z) + O(1/t^\nu)$, когда $t \rightarrow \infty$.

В самом деле, решение $\psi(z, t)$ задачи (23), (24) согласно формуле (25) есть преобразование Фурье функции

$$f(\lambda) = -\frac{1}{u''(z)} t(u(z), \lambda, \lambda + i0) [W(h'' - \alpha^2 h)](\lambda),$$

удовлетворяющей условию Гёльдера с показателем $\nu \in (0, \mu_0)$, если $h \in C^{2+\nu}[-1, 1]$. Используя простое соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha\lambda t} f(\lambda) d\lambda = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha\lambda t} f\left(\lambda - \frac{\pi}{\alpha t}\right) d\lambda,$$

запишем представление (25) для $\psi(z, t)$ в виде

$$\psi(z, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha\lambda t} \left(f(\lambda) - f\left(\lambda - \frac{\pi}{\alpha t}\right) \right) d\lambda,$$

где $f \in \mathfrak{h}^\nu$. Отсюда немедленно следует нужная асимптотическая оценка для составляющей функции тока, которая соответствует возмущению стационарного течения: $\psi(z, t) = O(1/t^\nu)$ при фиксированном $z \in [-1, 1]$ и $t \rightarrow \infty$.

Изложенная выше (в случае чисто непрерывного спектра собственных частот) схема метода Фурье применима также и в общей ситуации, т.е. с учетом точечного спектра задачи (2), (3). А именно, в предположениях теоремы 3 решение задачи (23), (24) представимо в виде суперпозиции нормальных волн:

$$\psi(z, t) = \text{v. p.} \int_l [W(h'' - \alpha^2 h)](\lambda) \psi_\lambda(z) e^{-i\alpha\lambda t} d\lambda + \sum_{\lambda \in \Lambda} p(\lambda) \psi_\lambda(z) e^{-i\alpha\lambda t}, \quad (27)$$

где $h \in C^{2+\nu}[-1, 1]$, $\nu > 0$, $h(\pm 1) = 0$. Здесь $\{\psi_\lambda, \lambda \in l \cup \Lambda\}$ – набор с.ф. непрерывного и точечного спектра задачи (2), (3); коэффициенты $p(\lambda)$ в разложении (27) определяются из соотношения

$$Qh = \sum_{\lambda \in \Lambda} p(\lambda) \psi_\lambda.$$

Сделаем несколько замечаний, касающихся асимптотики решения $\psi(z, t)$ при $t \rightarrow \infty$. При этом для простоты ограничимся случаем, когда на непрерывном спектре имеется одно (и притом простое) с.з. $c \in l$. Анализ подынтегрального выражения в первом слагаемом правой части (27) с учетом формулы для с.ф. непрерывного спектра (теорема 3) показывает, что характер особенности в точке c определяется порядком сингулярности t -матрицы. В рассматриваемом случае (с.з. c простое) имеем

$$[W(h'' - \alpha^2 h)](\lambda) \psi_\lambda = \frac{k(\lambda)}{\lambda - c},$$

где гладкость $k(\lambda)$ зависит от свойств профиля $u(z)$ и степени гладкости начальных данных; в частности, $k \in \mathfrak{h}^\nu$, если $u \in C^{2+\mu_0}[-1, 1]$, $\mu_0 > 1/2$, и $h \in C^{2+\nu}[-1, 1]$, $\nu \in (0, \mu_0)$. В этих предположениях вычисляется асимптотика (ср. [24])

$$\text{v. p.} \int_l e^{-i\alpha\lambda t} k(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda - c} = -i\pi k(c) + O\left(\frac{1}{t^\nu}\right), \quad t \rightarrow \infty; \quad (28)$$

здесь

$$k(c) = \frac{1}{\mathcal{W}'(c + i0)} [W(h'' - \alpha^2 h)](c) \frac{1}{u'(u^{-1}(c))} \mathfrak{r}(z, u^{-1}(c), c + i0).$$

Остальные слагаемые в правой части (27) осциллируют по t с амплитудами $p(\lambda) \psi_\lambda(z) \exp(\alpha \operatorname{Im} \lambda t)$, $\lambda \in \Lambda$. Качественное отличие асимптотики (28) от поведения слагаемого $p(c) \psi_c(z) e^{-i\alpha c t}$ при $t \rightarrow \infty$ оправдывает отщепление собственного подпространства, принадлежащего с.з. $c \in l$ (предложение 7), и включение соответствующего слагаемого в проектор Q (теорема 3).

Автор благодарит А. Г. Костюченко и В. Б. Лидского за обсуждение результатов настоящей работы и полезные замечания.

Список литературы

1. *Линь Ц. Ц.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: ИЛ, 1958.
2. *Drazin P. G., Reid W. H.* Hydrodynamic stability. Cambridge Univ. Press, 1993.
3. *Фридрихс К. О.* Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1969.
4. *Ладыженская О. А., Фаддеев Л. Д.* К теории возмущений непрерывного спектра // ДАН СССР. 1958. Т. 120. № 6. С. 1187–1190.
5. *Фаддеев Л. Д.* О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра // Тр. МИАН. 1964. Т. 73. С. 292–313.
6. *Poerschke T., Stolz G., Weidmann J.* Expansions in generalized eigenfunctions of self-adjoint operators // Math. Z. 1989. V. 202. P. 397–408.
7. *Poerschke T., Stolz G.* On eigenfunction expansions and scattering theory // Math. Z. 1993. V. 212. P. 337–357.
8. *Дынькин Е. М., Набоко С. Н., Яковлев С. И.* Граница конечности сингулярного спектра в самосопряженной модели Фридрихса // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 2. С. 77–90.
9. *Степин С. А.* Несамосопряженная модель Фридрихса в теории гидродинамической устойчивости // Функц. анализ и его прилож. 1995. Т. 29. № 2. С. 22–35.
10. *Howard L. N.* Note on a paper of John Miles // J. Fluid Mech. 1961. V. 10. № 4. P. 509–512.
11. *Фаддеев Л. Д.* К теории устойчивости стационарных плоско-параллельных течений идеальной жидкости // Записки научн. семинаров ЛОМИ. 1971. Т. 21. С. 164–172.
12. *Арнольд В. И.* Об условиях нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости // ДАН СССР. 1965. Т. 162. № 5. С. 975–978.
13. *Лянцэ В. Э.* О дифференциальном операторе со спектральными особенностями // Матем. сб. 1964. Т. 64. № 4. С. 521–561; Т. 65. № 1. С. 47–103.
14. *Коддингтон Э. Л., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.
15. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Т. 1. М.: Физматгиз, 1963.
16. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. М.–Л.: Физматгиз, 1956.
17. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // ДАН СССР. 1951. Т. 77. № 1. С. 11–14.
18. *Rosenbluth N. M., Simon A.* Necessary and sufficient condition for the stability of plane parallel inviscid flow // Phys. fl. 1964. V. 7. № 4. P. 557–558.
19. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
20. *Mises R. von, Friedrichs K. O.* Fluid dynamics // Applied Math. Sciences. V. 5. Springer-Verlag, 1971.
21. *Kato T.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
22. *Yafaev D. R.* Mathematical scattering theory // Translations of Math. Monographs. V. 105. AMS, 1992.
23. *Степин С. А.* Устойчивость решения задачи Коши для уравнения Рэлея // УМН. 1991. Т. 46. № 6. С. 170–171.
24. *Федорюк М. В.* Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.

Поступило в редакцию
11.V.1995