Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Буренков, А. Л. Горбунов, Точные оценки минимальной нормы операторов продолжения для пространств Соболева, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 1, 3–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/im103>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 11:26:49

УДК 517.518

В. И. Буренков, А. Л. Горбунов

Точные оценки минимальной нормы операторов продолжения для пространств Соболева

В статье рассматриваются операторы продолжения для пространств Соболева $W_p^l(\Omega)$, где Ω – область в $\mathbb{R}^n$ с границей класса Липшица. Для минимальной нормы оператора продолжения получена двухсторонняя оценка, точная по параметру гладкости l .

Библиография: 35 наименований.

Введение

В данной статье рассматриваются операторы продолжения

$$T: W_p^l(\Omega) \rightarrow W_p^l(\mathbb{R}^n),$$

действующие в пространстве Соболева $W_p^l(\Omega)$, где $n, l \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество класса Lip 1, состоящего из измеримых функций f , для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|f\|_{w_p^l(\Omega)}, \quad (1)$$

где

$$\|f\|_{w_p^l(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)},$$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, \dots, n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D^\alpha f = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f$ – обобщенная производная функции f .

Подробное изложение теории пространств Соболева дается в книгах [24], [34], [3]. Результаты изучения различных направлений задачи о продолжении функций из пространств Соболева можно найти в [19], [6], [34], [3], [15].

Предметом исследования в настоящей статье является оценка минимальной нормы операторов продолжения T для пространств $W_p^l(\Omega)$:

$$\inf_{T: W_p^l(\Omega) \rightarrow W_p^l(\mathbb{R}^n)} \|T\| = \inf_{T: W_p^l(\Omega) \rightarrow W_p^l(\mathbb{R}^n)} \sup_{\substack{f \in W_p^l(\Omega) \\ f \neq 0}} \frac{\|Tf\|_{W_p^l(\mathbb{R}^n)}}{\|f\|_{W_p^l(\Omega)}}. \quad (2)$$

Получение двусторонних оценок минимальной нормы операторов продолжения, точных по тому или иному параметру, описывающему пространство $W_p^l(\Omega)$, представляет особый интерес, так как ее точное значение можно найти только в немногих случаях. Один из подобных случаев рассмотрен С. Г. Михлиным в [30], где автор находит точное значение наименьшей нормы оператора продолжения

$$T: W_2^1(B_1) \rightarrow W_2^1(B_\varrho),$$

где B_ϱ – открытый шар радиуса $\varrho > 0$.

В работах Паукшто М. В., Мазы В. Г. и Поборчег С. В. получен ряд двусторонних оценок, точных по параметру, характеризующему область Ω .

В [31] доказана двусторонняя, точная по параметру α оценка минимальной нормы оператора продолжения

$$T: W_2^1(V_\alpha) \rightarrow W_2^1(B_1),$$

где $V_\alpha = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r < 1, 0 < \varphi < \alpha\}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, имеющая следующий вид:

$$C_1 \alpha^{-\frac{1}{2}} \leq \inf_{T: W_2^1(V_\alpha) \rightarrow W_2^1(B_1)} \|T\| \leq C_2 \alpha^{-\frac{1}{2}}.$$

Константы C_1 и C_2 не зависят от α .

Мазы В. Г. и Поборчий С. В. [20] вычислили двусторонние оценки минимальной нормы операторов продолжения

$$T: W_p^l(\Omega_\varepsilon) \rightarrow W_p^l(B_\varrho),$$

где $\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{x}{\varepsilon} \in \Omega\}$, Ω – ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$, $B_\varrho \supset \Omega$, $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$, $\varepsilon \leq \varrho \leq +\infty$. Норма в пространстве $W_p^l(\Omega_\varepsilon)$ выбирается в виде, отличном от (1), а именно она содержит L_p -нормы всех производных до порядка l включительно:

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega_\varepsilon)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq l} \|D^\alpha f\|_{W_p^l(\Omega_\varepsilon)}.$$

В [20] доказано, что

$$\inf_{T: W_p^l(\Omega_\varepsilon) \rightarrow W_p^l(B_\varrho)} \|T\| \sim \begin{cases} \varepsilon^{-\frac{n}{p}} \min \left\{ \varrho^{\frac{n}{p}}, 1 \right\}, & \text{если } lp > n, \\ \varepsilon^{-\frac{n}{p}} \min \left\{ \varrho^{\frac{n}{p}}, |\log_\varepsilon| \frac{1-p}{p} \right\}, & \text{если } lp = n, \\ \varepsilon^{-\frac{n}{p}} \min \left\{ \varrho^{\frac{n}{p}}, \varepsilon^{\frac{n}{p}-l} \right\}, & \text{если } lp < n, \end{cases} \quad (3)$$

где знак $\sim$ в выражении $A \sim B$ означает существование констант C_3 и C_4 , зависящих только от n, p, l, Ω и не зависящих от ε и ϱ таких, что верно двустороннее неравенство $C_3 B \leq A \leq C_4 B$.

В работе [32] исследуется асимптотическое (по l) поведение норм операторов продолжения типа Стейна [34] $S: W_2^l(\mathbb{R}_+) \rightarrow W_2^l(\mathbb{R})$.

Целью настоящей статьи является получение двусторонней оценки минимальной нормы операторов продолжения для пространств Соболева (с нормой в виде (1)), точной по порядку гладкости l .

В § 1, 2, 4, 5, 6 выводятся оценки элементов, определяющих оператор продолжения, который позволяет найти оценку сверху.

В § 1 вычисляются в некотором смысле неуплучшаемые оценки производных порядка не выше l функций из класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с определенными специальными свойствами.

§ 2 посвящен оценкам ядер, входящих в интегральное представление функций.

В одномерном случае для $\Omega = (a, b)$ в § 3 приводится двусторонняя оценка минимальной нормы операторов продолжения, точная как по порядку гладкости l , так и по длине интервала (a, b) .

В § 4 строится разбиение единицы и даются оценки производных порядка не выше l от элементов разбиения единицы.

В § 5 приводится двусторонняя оценка точной постоянной в неравенстве для L_p -нормы промежуточной производной, точная по порядку гладкости l .

В § 6 доказываются оценки сверху нормы оператора продолжения, построенного Буренковым В. И. в [6], [11].

Основной результат статьи содержится в § 7.

§ 1. Теоремы об оценках производных финитных функций

В этом параграфе строятся финитные бесконечно дифференцируемые ядра усреднения ω (т.е. $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\int_{\mathbb{R}^n} \omega(x) dx = 1$) с различными специальными свойствами и для них приводятся в определенном смысле неуплучшаемые оценки производных.

Обозначим через $B(x, r)$ открытый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в точке x ; $B_r := B(0, r)$. Для любого множества $\Omega \in \mathbb{R}^n$ будем обозначать через $\bar{\Omega}$ его замыкание, а через Ω^δ ($\delta > 0$) его δ -окрестность: $\Omega^\delta = \bigcup_{x \in \Omega} B(x, \delta)$.

Пусть $\delta > 0$ и ω – ядро усреднения. Положим $\omega_\delta(x) := \frac{1}{\delta^n} \omega\left(\frac{x}{\delta}\right)$ и обозначим через A_δ оператор усреднения с шагом δ : для $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$

$$(A_\delta f)(x) = (\omega_\delta * f)(x) = \frac{1}{\delta^n} \int_{\mathbb{R}^n} \omega\left(\frac{x-y}{\delta}\right) f(y) dy. \quad (1)$$

Отметим, что $A_\delta f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и

$$\text{supp } A_\delta f \subset \overline{(\text{supp } f)^\delta}. \quad (2)$$

1.1. Неотрицательные ядра усреднений, функции типа “шапочки”.

ТЕОРЕМА 1. а) Существует число $C_1 > 0$ и для любых $n, l \in \mathbb{N}$ существует функция $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) $\text{supp } \omega \subset B_1$;
- 2) $\int_{\mathbb{R}^n} \omega(x) dx = 1$;
- 3) $\omega(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$;
- 4) $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n: |\alpha| \leq l$

$$\|D^\alpha \omega\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq 2^n v_n^{-1} C_1^{|\alpha|} l^{|\alpha|}, \quad (3)$$

где $v_n = \pi^{\frac{n}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)\right)^{-1}$ – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

б) Для функции $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющей условиям 1)–3), нельзя подобрать числа $C_2 > 0$ и $\sigma < 1$ такие, чтобы для любого $l \in \mathbb{N}$ выполнялось условие

- 4') $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n: |\alpha| \leq l$

$$\|D^\alpha \omega\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_2^{|\alpha|} l^{\sigma|\alpha|}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем п. а). П. б) будет доказан в конце § 7. Пусть $\chi_1 = \frac{2^n}{v_n} \chi$, где χ – характеристическая функция множества $B_{\frac{1}{2}}$ и $g \in C_0^\infty(B_1)$ – ядро усреднения, $g \geq 0$. Рассмотрим функцию η ,

$$\eta(x) = \begin{cases} h(1 - |x|), & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

где $h = \left(\int_{B_1} (1 - |x|) dx \right)^{-1} = \frac{(n+1)}{v_n}$.

Для $\delta = \frac{1}{2(l+1)}$ положим $\omega = (A_\delta^l \chi_1) * g_\delta$, где A_δ^l – l -я степень оператора A_δ с ядром η .

Согласно (2) $\text{supp } \omega \subset \overline{(\dots (\text{supp } \chi_1)^\delta \dots)^\delta} = \overline{B_{\frac{1}{2}}}$, что доказывает п. 1).

П. 3) следует из неотрицательности ядра усреднения g .

Проверим п. 4). Пусть $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$: $|\alpha| < l$; тогда согласно свойствам свертки

$$\begin{aligned} \|D^\alpha \omega\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} &= \|D^\alpha (\chi_1 * \eta_\delta * \dots * \eta_\delta * g_\delta)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|(D_{i_1} \eta_\delta) * \dots * (D_{i_{|\alpha|}} \eta_\delta) * \eta_\delta \dots \eta_\delta * g_\delta * \chi_1\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (1) и неравенства

$$\|f * g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}, \quad (6)$$

$(l+1)$ раз примененного к (5), получаем следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \|D^\alpha \omega\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq 2^n v_n^{-1} \|D_{i_1} \eta_\delta\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \dots \|D_{i_{|\alpha|}} \eta_\delta\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \|\eta_\delta\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}^{l-|\alpha|} \|g_\delta\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \\ &= 2^n v_n^{-1} \|D_1 \eta_\delta\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}^{|\alpha|}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь мы учли сферическую симметрию функции η и тот факт, что $\|\eta_\delta\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = 1$ и $\|g_\delta\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = 1$.

Так как $D_1 \eta_\delta = \delta^{-1} (D_1 \eta)_\delta$, то из (7) получаем неравенство

$$\|D^\alpha \omega\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq 2^n v_n^{-1} (4 \|D_1 \eta\|_{L_1(B_1)})^{|\alpha|} l^{|\alpha|}. \quad (8)$$

Используя вид функции η и переходя к полярным координатам, получим оценку

$$\|D_1 \eta\|_{L_1(B_1)} = (n+1) v_n^{-1} \int_{|x| \leq 1} \frac{|x_1|}{|x|} dx \leq (n+1) \leq 2^n.$$

Последнее доказывает п. а) теоремы 1 ($C_1 = 8$).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Подобное теореме 1 утверждение можно сформулировать и о функциях типа “шапочки”.

ТЕОРЕМА 1'. а) Существует число $C_3 > 0$ и для любых $\delta > 0$, $n, l \in \mathbb{N}$ и любого множества $G \subset \mathbb{R}^n$ существует функция $\mu \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) $\text{supp } \mu \subset G^\delta$;
- 2) $\mu(x) = 1$, $x \in G$;
- 3) $0 \leq \mu(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}^n$;
- 4) $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$: $|\alpha| \leq l$

$$\|D^\alpha \mu\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_3^{n|\alpha|} \delta^{-|\alpha|} l^{|\alpha|}. \quad (9)$$

б) При выполнении условий 1)–3) в оценке, приведенной в 4), показатель степени l также нельзя заменить на $\sigma|\alpha|$, где $\sigma < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем п. а). П. б) доказывается в конце § 7.

Пусть $\chi_{G^{\frac{\delta}{2}}}$ – характеристическая функция множества $G^{\frac{\delta}{2}}$. Взяв вместо χ_1 в доказательстве теоремы 1 функцию $\chi_{G^{\frac{\delta}{2}}}$, построим функцию

$$\mu = \left(A_\theta^l \chi_{G^{\frac{\delta}{2}}} \right) * g_\delta, \quad \theta = \frac{\delta}{2(l+1)}.$$

Условия 1)–3) следуют из свойств оператора усреднения.

Применяя неравенства (2), (3), получаем условие 4) с $C_3 = C_1$. Теорема 1' доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если условие 1) теоремы 1 заменить на условие

$$1') \quad \text{supp } \omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq 1, i = 1, \dots, n\},$$

то справедливо утверждение, аналогичное теореме 1 с оценкой производных, не зависящей от n .

ТЕОРЕМА 1''. а) Существует число $C_4 > 0$ и для любых $n, l \in \mathbb{N}$ существует функция $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющие условию 1'), условиям 2), 3) из теоремы 1 и условию

$$4'') \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n: |\alpha| \leq l$$

$$\|D^\alpha \omega\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_4^{n|\alpha|} l^{|\alpha|}. \quad (10)$$

б) Оценка в 4'') неумлучшаема в смысле, определенном в теореме 1, б).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем доказательство п. а); п. б) будет доказан в конце § 7.

Положим $\omega(x) = \prod_{i=1}^n \tilde{\omega}(x_i)$, где $\tilde{\omega}$ – определенная в теореме 1 функция для $n = 1$. Из п. 4) теоремы 1 следуют условия 1'), 2), 3), 4'') с константой $C_4 = 8$.

1.2. Ядра усреднения, ортогональные полиномам.

ТЕОРЕМА 2. а) Существует число $C_5 > 0$ и для любых $n, l \in \mathbb{N}$ существует функция $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) $\text{supp } \omega \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} < x_i < 1, i = 1, \dots, n \right\};$
- 2) $\int_{\mathbb{R}^n} \omega(x) dx = 1;$
- 3) $\forall \alpha \in N_0^n: |\alpha| \leq l$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega(x) x^\alpha dx = 0,$$

где $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n};$

- 4) $\forall \alpha \in N_0^n: |\alpha| \leq l$

$$\|D^\alpha \omega\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_5^{ln} l^{|\alpha|}. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если построена функция ψ одной переменной со свойствами 1)–4), то функцию ω можно определить следующим образом:

$$\omega(x) = \prod_{i=1}^n \psi(x_i).$$

Пусть $\hat{\omega}$ – функция из теоремы 1 для $n = 1$. Рассмотрим функцию $\tilde{\omega}$, определяемую равенством

$$\tilde{\omega}(x) = \frac{8}{l+1} \hat{\omega} \left(\frac{8x - 14l - 6}{l+1} \right). \quad (12)$$

Из теоремы 1 для $n = 1$ вытекают следующие свойства функции $\tilde{\omega}$:

- 1') $\text{supp } \tilde{\omega} \subset \left(\frac{3l+1}{2}, 2l+1 \right);$
- 2') $\int_{\mathbb{R}^1} \tilde{\omega}(x) dx = 1;$
- 3') $\forall k \in \mathbb{N}_0, k \leq l$

$$\|\tilde{\omega}^{(k)}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^1)} \leq 8^k l^k \left(\frac{8}{l+1} \right)^{k+1} \leq 4(64)^k.$$

Положим $\psi(x) = \sum_{k=1}^{l+1} a_k \tilde{\omega}(b_k x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, где $b_k = 2l + k$, а коэффициенты a_k определяются как решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{l+1} \frac{a_k}{b_k} = 1, \\ \sum_{k=1}^{l+1} \frac{a_k}{b_k^{m+1}} = 0, \quad m = 1, \dots, l. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx &= \sum_{k=1}^{l+1} a_k \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\omega}(b_k x) dx = 1, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) x^m dx &= \sum_{k=1}^{l+1} a_k \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\omega}(b_k x) x^m dx = 0, \quad m = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

Определитель системы, определяющей a_k , сводится к определителю Вандермонда и имеет вид

$$\Delta = \prod_{q=1}^{l+1} b_q^{-1} \prod_{1 \leq j < i \leq l+1} (b_i^{-1} - b_j^{-1}).$$

Согласно правилу Крамера $a_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$, где определитель Δ_k после разложения по k -у столбцу также сводится к определителю Вандермонда:

$$\Delta_k = (-1)^{k+1} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq k}}^{l+1} b_q^{-2} \prod_{\substack{1 \leq j < i \leq l+1 \\ i \neq k, j \neq k}} (b_i^{-1} - b_j^{-1}).$$

$$\text{Следовательно, } |a_k| = \left| b_k^{l+1} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{l+1} (b_k - b_i)^{-1} \right|.$$

Подставляя значение b_k в последнюю формулу, получаем оценку

$$|a_k| \leq \frac{(4l)^{l+1}}{(k-1)!(l-k+1)!} \leq (8e)^l \frac{l!}{(k-1)!(l-k+1)!}.$$

Отсюда следует неравенство

$$|a_k| \leq (16e)^l. \quad (13)$$

Так как $\psi^{(m)}(x) = \sum_{k=1}^{l+1} b_k^m a_k \tilde{\omega}^{(m)}(b_k x)$, то при $m \leq l$ из (13) и свойства 3') получим оценку производной

$$|\psi^{(m)}(x)| \leq \sum_{k=1}^{l+1} (4l)^m (16e)^l 4(64)^m \leq l^m (2^{15}e)^l,$$

т.е. при $n = 1$ справедливо неравенство (11) с $C_5 = 2^{15}e$.

Далее, согласно 1')

$$\text{supp } \psi \subset \bigcup_{k=1}^{l+1} \text{supp } \tilde{\omega}(b_k x) \subset \bigcup_{k=1}^{l+1} \left(\frac{3l+1}{2b_k}, \frac{2l+1}{b_k} \right) \subset \left(\frac{1}{2}, 1 \right).$$

Теорема 2 доказана.

§ 2. Интегральное представление

Пусть $-\infty < a_j < b_j < +\infty$, $j = 1, \dots, n$, $\Pi_i = \{x \in \mathbb{R}^i : a_j < x_j < b_j, j = 1, \dots, i\}$, $\Pi \equiv \Pi_n$.

ЛЕММА 1. Для любой функции $f \in C(\overline{\Pi})$, $D_1^l f \in C(\overline{\Pi}), \dots, D_n^l f \in C(\overline{\Pi})$, $l \in \mathbb{N}$, существуют многочлен $P \in L_\infty(\Pi \times \Pi)$ степени не выше $l-1$ по каждой

переменной и функции $Q_i \in L_\infty(\Pi_i \times \Pi_i)$, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяющие условиям

$$|P(x_1, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n)| \leq C_1^{ln} \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)^{-1}, \quad (1)$$

$$|Q_i(x_1, \dots, x_i; \xi_1, \dots, \xi_i)| \leq C_1^{ln} l^{-l} \left(\prod_{j=1}^{i-1} (b_j - a_j)^{-1} \right) (b_i - a_i)^{l-1} \quad (2)$$

с некоторой абсолютной постоянной $C_1 > 0$, такие, что имеет место представление

$$f(x) = \int_{\Pi} P(x, \xi) f(\xi) d\xi + \sum_{i=1}^n \int_{\Pi_i} Q_i(x_1, \dots, x_i; \xi_1, \dots, \xi_i) \times (D_i^l f)(\xi_1, \dots, \xi_i, x_{i+1}, \dots, x_n) d\xi_1 \dots d\xi_i. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $n = 1$. Пусть $-\infty < a < b < +\infty$ и $f \in C^l([a, b])$; тогда согласно [6] функция f при любом $x \in [a, b]$ представляется в виде

$$f(x) = \int_a^b p(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_a^b q(x, \xi) f^{(l)}(\xi) d\xi, \quad (4)$$

где

$$p(x, \xi) = \sum_{m=0}^{l-1} \alpha_m (x - \xi)^m \lambda^{(m)}(\xi), \quad (5)$$

$$\alpha_m = \frac{1}{m!} \sum_{j=m}^{l-1} (-1)^j C_j^m, \quad (6)$$

$$q(x, \xi) = \frac{(x - \xi)^{l-1}}{(l-1)!} \Lambda(x, \xi), \quad (7)$$

а измеримая функция Λ такова, что $|\Lambda(x, \xi)| \leq 1$.

Функция λ имеет вид

$$\lambda(\xi) = \frac{1}{b-a} \omega \left(\frac{\xi - a}{b-a} \right),$$

где $\omega \in C_0^\infty(0, 1)$ и $\int_0^1 \omega(x) dx = 1$.

Выбрав в качестве ω функцию, удовлетворяющую условиям теоремы 1, получим, что существует такое число $C_2 \geq 1$, что при любых $m \leq l$ для любых $\xi \in [a, b]$

$$|\lambda^{(m)}(\xi)| \leq C_2^m l^m (b-a)^{-m-1}. \quad (8)$$

Из (5)–(8) вытекают следующие оценки: для любых $x, \xi \in [a, b]$

$$|p(x, \xi)| \leq C_3^l (b-a)^{-1}, \quad (9)$$

где $C_3 = 2eC_2$ (достаточно воспользоваться тем, что $|\alpha_m| \leq \frac{2^l}{m!}$ и $\sum_{m=0}^{l-1} \frac{l^m}{m!} \leq e^l$),
и

$$|q(x, \xi)| \leq \frac{(b-a)^{l-1}}{(l-1)!} \leq e^{2l} l^{-l} (b-a)^{l-1} \quad (10)$$

(мы учли, что $\frac{l^l}{(l-1)!} \leq \frac{(2l)^{l-1}}{(l-1)!} \leq e^{2l}$).

Согласно [6] представление (3) имеет место для функций P и Q_i вида

$$\begin{aligned} P(x, \xi) &= p_1(x_1, \xi_1) \dots p_n(x_n, \xi_n), \\ Q_i(x, \xi) &= p_1(x_1, \xi_1) \dots p_{i-1}(x_{i-1}, \xi_{i-1}) q_i(x_i, \xi_i), \end{aligned}$$

где при определении функций p_j и q_j вместо функции λ рассматривается функция

$$\lambda_j(\xi) = \frac{1}{b_j - a_j} \omega\left(\frac{\xi - a_j}{b_j - a_j}\right).$$

Отсюда согласно (9), (10) следует доказательство леммы 1 (с $C_1 = C_3 e^2$).

ЗАМЕЧАНИЕ. В одномерном случае наряду с (9) и (10) нам понадобится еще следующая оценка для производных многочлена $p(x, \xi)$: существует такое число $C_4 > 0$, что при $0 \leq s \leq l-1$ для любых $-\infty < x, \xi < +\infty$

$$\left| \frac{\partial^s p}{\partial x^s}(x, \xi) \right| \leq C_4^l l^s (1 + |x - \xi|^{l-1-s}) (1 + (b-a)^{-l+1}) (b-a)^{-1} \quad (11)$$

(при $s = 0$ для $x, \xi \in [a, b]$ из (11) следует (9)).

Действительно,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^s p}{\partial x^s}(x, \xi) \right| &= \left| \sum_{m=s}^{l-1} \frac{\alpha_m m!}{(m-s)!} (x - \xi)^{m-s} \lambda^{(m)}(\xi) \right| \\ &\leq 2^l \sum_{m=s}^{l-1} \frac{(C_2 l)^m}{(m-s)!} |x - \xi|^{m-s} (b-a)^{-m-1} \\ &\leq 2^l (1 + |x - \xi|^{l-1-s}) (1 + (b-a)^{-l+1}) (b-a)^{-1} \sum_{m=s}^{l-1} \frac{(C_2 l)^m}{(m-s)!} \\ &\leq 2^l e^{C_2 l} (C_2 l)^s (1 + |x - \xi|^{l-1-s}) (1 + (b-a)^{-l+1}) (b-a)^{-1}, \end{aligned}$$

откуда и следует (11) (с $C_4 = 2C_2 e^{C_2}$).

§ 3. Двусторонняя оценка минимальной нормы операторов продолжения для пространств Соболева в одномерном случае

3.1. Оценка сверху.

ЛЕММА 2. Для любых $l \in \mathbb{N}$ существует такой оператор продолжения T , что для любых $1 \leq p \leq +\infty$ $T: W_p^l(-\infty, 0) \rightarrow W_p^l(-\infty, +\infty)$, причем

$$\|T\|_{W_p^l(-\infty, 0) \rightarrow W_p^l(-\infty, +\infty)} \leq 8^l. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим оператор продолжения по схеме Хестенса следующим образом: для любой функции $f \in W_p^l(-\infty, 0)$

$$(Tf)(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-\infty, 0), \\ \sum_{k=1}^l \alpha_k f(-\beta_k x), & x \in (0, +\infty), \end{cases} \quad (2)$$

где $\beta_k > 0$ и

$$\sum_{k=1}^l \alpha_k (-\beta_k)^s = 1, \quad s = 0, \dots, l-1. \quad (3)$$

Решение системы (3) записывается в виде

$$\alpha_k = (-1)^{l-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^l (1 + \beta_j)(\beta_k - \beta_j)^{-1}.$$

Положим

$$\beta_k = \frac{k}{l}, \quad k = 1, \dots, l, \quad (4)$$

тогда

$$\alpha_k = \frac{(-1)^{k-1} k}{l+k} C_{2l}^l C_l^k, \quad k = 1, \dots, l. \quad (5)$$

Из (5) следует, что

$$|\alpha_k| \leq \frac{k}{l} 4^l C_l^k. \quad (6)$$

Согласно (4) и (6)

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{W_p^l(0, +\infty)} &= \|Tf\|_{L_p(0, +\infty)} + \|(Tf)^{(l)}\|_{L_p(0, +\infty)} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^l |\alpha_k| \beta_k^{-\frac{1}{p}} \right) \|f\|_{L_p(-\infty, 0)} + \left(\sum_{k=1}^l |\alpha_k| \beta_k^{l-\frac{1}{p}} \right) \|f^{(l)}\|_{L_p(-\infty, 0)} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^l |\alpha_k| \beta_k^{-\frac{1}{p}} \right) \|f\|_{W_p^l(-\infty, 0)} \\ &\leq 4^l \sum_{k=1}^l \left(\frac{k}{l} \right)^{1-\frac{1}{p}} C_l^k \|f\|_{W_p^l(-\infty, 0)} \leq (8^l - 1) \|f\|_{W_p^l(-\infty, 0)}. \end{aligned}$$

Обозначим через $f^{(k)}(-0)$ и соответственно через $(Tf)^{(k)}(+0)$ граничные значения в точке 0 производных функций $f \in W_p^l(-\infty, 0)$ и $Tf \in W_p^l(0, +\infty)$ (при $k \leq l-1$ они существуют).

Согласно условию (3)

$$(Tf)^{(k)}(+0) = f^{(k)}(-0), \quad k = 0, \dots, l-1,$$

поэтому $Tf \in W_p^l(-\infty, +\infty)$. Кроме того,

$$\|Tf\|_{W_p^l(-\infty, +\infty)} \leq \|f\|_{W_p^l(-\infty, 0)} + \|Tf\|_{W_p^l(0, +\infty)} \leq 8^l \|f\|_{W_p^l(-\infty, 0)},$$

что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ. Для любых $l \in \mathbb{N}$, $-\infty < a < b < +\infty$ существует такой оператор продолжения T , что для любых $1 \leq p \leq +\infty$ $T: W_p^l(a, b) \rightarrow W_p^l(2a - b, 2b - a)$, причем

$$\|T\|_{W_p^l(a, b) \rightarrow W_p^l(2a - b, 2b - a)} \leq 2 \cdot 8^l. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим оператор продолжения следующим образом: для любой функции $f \in W_p^l(a, b)$

$$(Tf)(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^l \alpha_k f(a + \beta_k(a - x)), & x \in (2a - b, a), \\ f(x), & x \in (a, b), \\ \sum_{k=1}^l \alpha_k f(b + \beta_k(b - x)), & x \in (b, 2b - a). \end{cases} \quad (8)$$

После оценок, аналогичных проведенным в доказательстве леммы 2, приходим к неравенству

$$\|Tf\|_{W_p^l(2a - b, 2b - a)} \leq \left(1 + 2 \sum_{k=1}^l |\alpha_k| \beta_k^{-\frac{1}{p}}\right) \|f\|_{W_p^l(a, b)},$$

откуда и следует неравенство (7).

ЗАМЕЧАНИЕ. Из приведенных доказательств следует, что наряду с неравенством (7) выполняются также неравенства

$$\|T\|_{L_p(a, b) \rightarrow L_p(2a - b, 2a + b)} \leq 2 \cdot 8^l \quad (9)$$

и

$$\|T\|_{w_p(a, b) \rightarrow w_p(2a - b, 2a + b)} \leq 2 \cdot 8^l. \quad (10)$$

ЛЕММА 3. Существует число $C_1 > 0$ и для любых $l \in \mathbb{N}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ существует такой оператор продолжения T , что для любых $1 \leq p \leq +\infty$ $T: W_p^l(a, b) \rightarrow W_p^l(-\infty, +\infty)$, причем

$$\|T\|_{W_p^l(a, b) \rightarrow W_p^l(-\infty, +\infty)} \leq C_1^l \left(1 + \frac{l^l}{(b - a)^l}\right). \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $b - a = \infty$, то неравенство (11) следует из неравенства (1). Пусть теперь $-\infty < a < b < +\infty$. Рассмотрим оператор T , определяемый равенством (8), и доопределим Tf вне интервала $(2a - b, 2b - a)$ нулем. Обозначим через φ функцию типа “шапочки”, удовлетворяющую условиям теоремы 1' для $G = (a, b)$ и $\delta = b - a$; тогда, в частности, для некоторого $C_2 > 0$ для любых $k \in \mathbb{N}_0$: $k \leq l$

$$\|\varphi^{(k)}\|_{L_\infty(-\infty, \infty)} \leq \left(\frac{C_2 l}{b - a}\right)^k. \quad (12)$$

Определим оператор продолжения T_1 равенством

$$(T_1 f)(x) = (Tf)(x) \varphi(x), \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (13)$$

Прежде всего, согласно (9)

$$\|T_1 f\|_{L_p(-\infty, +\infty)} \leq 2 \cdot 8^l \|f\|_{L_p(a, b)}. \quad (14)$$

Для оценок производных $(T_1 f)^{(l)}$ нам понадобится следующее неравенство для норм промежуточных производных [8]:

$$\begin{aligned} \|g^{(k)}\|_{L_p(a, b)} &\leq C_3^l \left(\left(\frac{k}{b-a} \right)^k \|g\|_{L_p(a, b)} + \left(\frac{b-a}{l-k} \right)^{l-k} \|g^{(l)}\|_{L_p(a, b)} \right) \\ &\leq C_3^l \left(\left(\frac{k}{b-a} \right)^k + \left(\frac{b-a}{l-k} \right)^{l-k} \right) \|g\|_{W_p^l(a, b)}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $C_3 > 0$ – абсолютная постоянная.

Из (12), (15) и (7) следует, что

$$\begin{aligned} \|(T_1 f)^{(l)}\|_{L_p(-\infty, +\infty)} &\leq \sum_{k=0}^l C_l^k \|\varphi^{(l-k)}\|_{L_\infty(-\infty, +\infty)} \|(Tf)^{(k)}\|_{L_p(2a-b, 2b-a)} \\ &\leq C_3^l \left(\sum_{k=0}^l C_l^k \left(\frac{C_2 l}{b-a} \right)^{l-k} \left[\left(\frac{k}{3(b-a)} \right)^k + \left(\frac{3(b-a)}{l-k} \right)^{l-k} \right] \right) \|Tf\|_{W_p^l(2a-b, 2b-a)} \\ &\leq C_3^l \left[\left(\sum_{k=0}^l C_l^k 3^{-k} C_2^{l-k} \right) \frac{l^l}{(b-a)^l} + \sum_{k=0}^l C_l^k e^k (3C_2)^{l-k} \right] \|Tf\|_{W_p^l(2a-b, 2b-a)} \\ &\leq 2(8C_3)^l \left(\left(C_2 + \frac{1}{3} \right)^l \frac{l^l}{(b-a)^l} + (e + 3C_2)^l \right) \|f\|_{W_p^l(a, b)} \\ &\leq C_4^l \left(1 + \frac{l^l}{(b-a)^l} \right) \|f\|_{W_p^l(a, b)}, \end{aligned}$$

где $C_4 = 16C_3(e + 3C_2)$. Из этого неравенства и неравенства (14) следует, что

$$\|T_1 f\|_{W_p^l(-\infty, +\infty)} \leq C_1^l \left(1 + \frac{l^l}{(b-a)^l} \right) \|f\|_{W_p^l(a, b)}$$

(с $C_1 = 2C_4$), что и требовалось доказать.

ЛЕММА 4. *Существует число $C_5 > 0$ и для любых $\varepsilon \in (0, 1)$, $l \in \mathbb{N}$ существует такой оператор продолжения T_ε , что для любых $1 \leq p \leq +\infty$ $T_\varepsilon : W_p^l(0, \varepsilon) \rightarrow W_p^l(-\infty, +\infty)$, причем*

$$\|T_\varepsilon\|_{W_p^l(0, \varepsilon) \rightarrow W_p^l(-\infty, +\infty)} \leq C_5^l l^l \varepsilon^{-l + \frac{1}{p'}}. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $f \in W_p^l(0, \varepsilon)$. Применяя интегральное представление (4) из § 2 к функции $f(\varepsilon\xi)$, получим, что для любого $x \in (0, 1)$

$$f(\varepsilon x) = \int_0^1 p(x, \xi) f(\varepsilon\xi) d\xi + \int_0^1 q(x, \xi) (f(\varepsilon\xi))_\xi^{(l)} d\xi.$$

Заменяя εx на x , получим следующее интегральное представление для функций $f \in W_p^l(0, \varepsilon)$: для любых $x \in (0, \varepsilon)$

$$f(x) = \int_0^1 p\left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi\right) f(\varepsilon\xi) d\xi + \varepsilon^l \int_0^1 q\left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi\right) f^{(l)}(\varepsilon\xi) d\xi \equiv (P_\varepsilon f)(x) + (Q_\varepsilon f)(x). \quad (17)$$

Так как $p(x, \xi)$ – многочлен степени не выше $l - 1$ по x , то отсюда следует, что для любых $x \in (0, \varepsilon)$

$$(Q_\varepsilon f)^{(l)}(x) = f^{(l)}(x). \quad (18)$$

2. Докажем, что существует такое $C_6 > 0$, что для любых $s \in \mathbb{N}_0$: $0 \leq s \leq l - 1$

$$\|(P_\varepsilon f)^{(s)}\|_{L_p(-2,2)} \leq C_6^l l^s \varepsilon^{-l+\frac{1}{p'}} \|f\|_{L_p(0,\varepsilon)} \quad (19)$$

и

$$\|Q_\varepsilon f\|_{L_p(0,\varepsilon)} \leq C_6^l l^{-l} \varepsilon^l \|f^{(l)}\|_{L_p(0,\varepsilon)}. \quad (20)$$

Для получения оценки (19) воспользуемся тем, что для $|x| \leq 2$ и $0 \leq \xi \leq 1$ $|\frac{x}{\varepsilon} - \xi| \leq \frac{3}{\varepsilon}$, и согласно неравенству (11) из § 2

$$\left\| p^{(s)}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi\right) \right\|_{L_{p,x}(-2,2)} \leq 4^{\frac{1}{p}} \left\| p^{(s)}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi\right) \right\|_{L_{\infty,x}(-2,2)} \leq C_7^l l^s \varepsilon^{-l+1+s},$$

где $C_7 = 48C_4$ (здесь C_4 – постоянная из неравенства (11) из § 2, в котором $a = 0$, $b = 1$; $p^{(s)}(x, \xi) = \frac{\partial^s p}{\partial x^s}(x, \xi)$). Согласно неравенству Минковского отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \|(P_\varepsilon f)^{(s)}\|_{L_p(-2,2)} &= \left\| \varepsilon^{-s} \int_0^1 p^{(s)}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi\right) f(\varepsilon\xi) d\xi \right\|_{L_p(-2,2)} \\ &\leq \varepsilon^{-s} \int_0^1 \left\| p^{(s)}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi\right) \right\|_{L_{p,x}(-2,2)} |f(\varepsilon\xi)| d\xi \\ &\leq C_7^l l^s \varepsilon^{-l+1} \int_0^1 |f(\varepsilon\xi)| d\xi \leq C_7^l l^s \varepsilon^{-l+1} \|f(\varepsilon\xi)\|_{L_{p,\xi}(0,1)} \\ &= C_7^l l^s \varepsilon^{-l+1-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(0,\varepsilon)}, \end{aligned}$$

и мы получили (19).

Для получения неравенства (20) достаточно заметить, что согласно неравенству (10) из § 2 (с $a = 0$, $b = 1$; при этом $\frac{x}{\varepsilon}$, $\xi \in [a, b]$)

$$\begin{aligned} \|Q_\varepsilon f\|_{L_p(0,\varepsilon)} &= \varepsilon^l \left\| \int_0^1 q\left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi\right) f^{(l)}(\varepsilon\xi) d\xi \right\|_{L_{p,x}(0,\varepsilon)} \leq e^{2l} l^{-l} \varepsilon^{l+\frac{1}{p}} \int_0^1 |f^{(l)}(\varepsilon\xi)| d\xi \\ &\leq e^{2l} l^{-l} \varepsilon^{l+\frac{1}{p}} \|f^{(l)}(\varepsilon\xi)\|_{L_p(0,1)} = e^{2l} l^{-l} \varepsilon^l \|f^{(l)}\|_{L_p(0,\varepsilon)}. \end{aligned}$$

3. Построим теперь оператор продолжения $T_\varepsilon : W_p^l(0, \varepsilon) \rightarrow W_p^l(-\infty, +\infty)$. Пусть T – оператор продолжения из леммы 3, т.е. $T : W_p^l(0, 1) \rightarrow W_p^l(-\infty, +\infty)$. Обозначим через φ функцию типа “шапочки”, удовлетворяющую условиям теоремы 1' для $G = (0, 1)$ и $\delta = 1$; тогда, в частности, для некоторого $C_8 > 0$ для любых $k \in \mathbb{N}$: $k \leq l$

$$\|\varphi^{(k)}\|_{L_\infty(-\infty, +\infty)} \leq (C_8 l)^k. \quad (21)$$

Положим для любых $f \in W_p^l(0, \varepsilon)$

$$T_\varepsilon f = \varphi(P_\varepsilon f) + \tau_\varepsilon^{-1} T(\tau_\varepsilon Q_\varepsilon f), \quad (22)$$

где $(\tau_\varepsilon g)(x) = g(\varepsilon x)$ для $0 < x < 1$.

4. Используя неравенства (14) для $a = 0$, $b = 1$ (в наших обозначениях $T_1 \equiv T$), неравенство (19) для $s = 0$ и неравенство (20), получим, что

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon f\|_{L_p(-\infty, +\infty)} &\leq \|\varphi(P_\varepsilon f)\|_{L_p(-\infty, +\infty)} + \|\tau_\varepsilon^{-1} T(\tau_\varepsilon Q_\varepsilon f)\|_{L_p(-\infty, +\infty)} \\ &\leq \|P_\varepsilon f\|_{L_p(-2, 2)} + \varepsilon^{\frac{1}{p}} \|T(\tau_\varepsilon Q_\varepsilon f)\|_{L_p(-\infty, +\infty)} \\ &\leq C_6^l \varepsilon^{-l + \frac{1}{p'}} \|f\|_{L_p(0, \varepsilon)} + 16^l \varepsilon^{\frac{1}{p}} \|\tau_\varepsilon Q_\varepsilon f\|_{L_p(0, 1)} \\ &= C_6^l \varepsilon^{-l + \frac{1}{p'}} \|f\|_{L_p(0, \varepsilon)} + 16^l \|Q_\varepsilon f\|_{L_p(0, \varepsilon)} \\ &\leq C_6^l \varepsilon^{-l + \frac{1}{p'}} \|f\|_{L_p(0, \varepsilon)} + (16C_6)^l l^{-l} \varepsilon^l \|f^{(l)}\|_{L_p(0, \varepsilon)} \\ &\leq C_9^l \varepsilon^{-l + \frac{1}{p'}} \|f\|_{W_p^l(0, \varepsilon)}, \end{aligned}$$

где $C_9 = 16C_6$.

Далее,

$$(T_\varepsilon f)^{(l)} = \sum_{k=0}^l C_l^k \varphi^{(k)}(P_\varepsilon f)^{(l-k)} + \varepsilon^{-l} \tau_\varepsilon^{-1} (T(\tau_\varepsilon Q_\varepsilon f))^{(l)}.$$

Откуда согласно неравенствам (11), (19), (20), (21) и равенству (18) следует, что

$$\begin{aligned} \|(T_\varepsilon f)^{(l)}\|_{L_p(-\infty, +\infty)} &\leq \sum_{k=0}^l C_l^k (C_8 l)^k \|(P_\varepsilon f)^{(l-k)}\|_{L_p(-2, 2)} \\ &\quad + \varepsilon^{-l + \frac{1}{p}} \|(T(\tau_\varepsilon Q_\varepsilon f))^{(l)}\|_{L_p(-\infty, +\infty)} \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^l C_l^k (C_8 l)^k C_6^l l^{l-k} \right) \varepsilon^{-l + \frac{1}{p'}} \|f\|_{L_p(0, \varepsilon)} \\ &\quad + (2C_1)^l l^l \varepsilon^{-l + \frac{1}{p'}} (\|\tau_\varepsilon Q_\varepsilon f\|_{L_p(0, 1)} + \|(\tau_\varepsilon Q_\varepsilon f)^{(l)}\|_{L_p(0, 1)}) \\ &= l^l [(C_6(1 + C_8))^l \varepsilon^{-l + \frac{1}{p'}} \|f\|_{L_p(0, \varepsilon)} \\ &\quad + (2C_1)^l (\varepsilon^{-l} \|Q_\varepsilon f\|_{L_p(0, \varepsilon)} + \|f^{(l)}\|_{L_p(0, \varepsilon)})] \\ &\leq l^l [(C_6(1 + C_8))^l \varepsilon^{-l + \frac{1}{p'}} \|f\|_{L_p(0, \varepsilon)} \\ &\quad + (2C_1)^l (1 + C_6)^l \|f^{(l)}\|_{L_p(0, \varepsilon)}] \leq C_{10}^l l^l \varepsilon^{-l + \frac{1}{p'}} \|f\|_{W_p^l(0, \varepsilon)}, \end{aligned}$$

где $C_{10} = \max\{C_6(1 + C_8), 2C_1(1 + C_6)\}$.

Из полученных оценок следует искомое неравенство (16).

ЗАМЕЧАНИЕ. Для любых функций $f \in W_p^l(0, \varepsilon)$ рассмотрим оператор продолжения

$$\tilde{T}_\varepsilon f = P_\varepsilon(f) + \tau_\varepsilon^{-1} T(\tau_\varepsilon Q_\varepsilon f). \quad (23)$$

Так как

$$(\tilde{T}_\varepsilon f)^{(l)} = (\tau_\varepsilon^{-1} T(\tau_\varepsilon Q_\varepsilon f))^{(l)},$$

то из проведенных выше оценок следует, что

$$\|\tilde{T}_\varepsilon\|_{W_p^l(0, \varepsilon) \rightarrow W_p^l(-\infty, +\infty)} \leq C_{11}^l l^l, \quad (24)$$

где $C_{11} = 2C_1(1 + C_6)$.

3.2. Оценка снизу.

ЛЕММА 5. *Норма любого оператора продолжения $T: W_p^l(0, \varepsilon) \rightarrow W_p^l(-\infty, +\infty)$ при любых $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, $\varepsilon \in (0, \infty)$ удовлетворяет неравенству*

$$\|T\|_{W_p^l(0, \varepsilon) \rightarrow W_p^l(-\infty, +\infty)} \geq \frac{1}{3} 4^{l-1} (l-1)! \varepsilon^{-l + \frac{1}{p'}}. \quad (25)$$

Мы приведем два доказательства леммы 5. Первое из них прямое: оно основано на подборе “наихудшей” для продолжения функции $f \in W_p^l(0, \varepsilon)$. Второе основано на приводимой ниже лемме 6, в которой в самом общем случае дается оценка снизу нормы любого оператора продолжения через наименьшие постоянные в неравенствах для норм промежуточных производных. В обоих доказательствах участвуют многочлены $Q_{l-1;p}$ степени $l-1$, наименее уклоняющиеся от нуля в метрике $L_p(0, 1)$.

ПЕРВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $f(x) = \frac{\varepsilon^{l-1}}{(l-1)!} Q_{l-1;p}(\frac{x}{\varepsilon})$. Отметим, что $f^{(l-1)}(0) = 1$. Из определения нормы оператора следует неравенство

$$\begin{aligned} \|T\| &\equiv \|T\|_{W_p^l(0, \varepsilon) \rightarrow W_p^l(-\infty, +\infty)} \geq \frac{\|Tf\|_{W_p^l(-\infty, +\infty)}}{\|f\|_{L_p(0, \varepsilon)}} \\ &= \frac{(l-1)!}{\|Q_{l-1;p}\|_{L_p(0, 1)}} \varepsilon^{-l + \frac{1}{p'}} \|g\|_{W_p^l(-\infty, +\infty)}, \end{aligned} \quad (26)$$

где $g = Tf$.

Так как $g \in W_p^l(-\infty, +\infty)$, то

$$g^{(l-1)}(-0) = f^{(l-1)}(+0) = 1,$$

где через $g^{(l-1)}(-0)$ обозначено граничное значение производной порядка $l-1$ в точке 0 для функции g (рассматриваемой как функция из $W_p^l(-\infty, 0)$).

Из неравенства Колмогорова–Стейна следует, что

$$\begin{aligned} \|g^{(l-1)}\|_{L_p(-\infty, +\infty)} &\leq \frac{\pi}{2} \|g\|_{L_p(-\infty, +\infty)}^{\frac{1}{l}} \|g^{(l)}\|_{L_p(-\infty, +\infty)}^{1-\frac{1}{l}} \\ &\leq \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{l}\right)^{\frac{1}{l}} \left(1 - \frac{1}{l}\right)^{1-\frac{1}{l}} (\|g\|_{L_p(-\infty, +\infty)} + \|g^{(l)}\|_{L_p(-\infty, +\infty)}) \\ &\leq \frac{\pi}{2} \|g\|_{W_p^l(-\infty, +\infty)}. \end{aligned}$$

Складывая это неравенство с очевидным неравенством

$$\|g^{(l)}\|_{L_p(-\infty, +\infty)} \leq \|g\|_{W_p^l(-\infty, +\infty)},$$

получим

$$\begin{aligned} \|g^{(l-1)}\|_{W_p^1(-\infty, +\infty)} &= \|g^{(l-1)}\|_{L_p(-\infty, +\infty)} + \|g^{(l)}\|_{L_p(-\infty, +\infty)} \\ &\leq \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) \|g\|_{W_p^l(-\infty, +\infty)}. \end{aligned}$$

Из неравенства (26) теперь следует

$$\|T\| \geq \frac{2}{\pi + 2} \frac{(l-1)!}{\|Q_{l-1;p}\|_{L_p(0,1)}} \varepsilon^{-l+\frac{1}{p'}} \|g^{(l-1)}\|_{W_p^1(-\infty, 0)}.$$

Так как $g^{(l-1)}(-0) = 1$, то отсюда вытекает

$$\|T\| \geq \frac{2}{\pi + 2} \frac{(l-1)!}{\|Q_{l-1;p}\|_{L_p(0,1)}} \varepsilon^{-l+\frac{1}{p'}} \inf_{h(-0)=1} \|h\|_{W_p^1(-\infty, 0)}.$$

Поскольку для любых рассматриваемых функций h

$$1 = |h(-0)| \leq \int_{-1}^0 |h(x)| dx + \int_{-1}^0 |h'(x)| dx \leq \|h\|_{W_p^1(-\infty, 0)},$$

то

$$\|T\| \geq \frac{2}{\pi + 2} \frac{(l-1)!}{\|Q_{l-1;p}\|_{L_p(0,1)}} \varepsilon^{-l+\frac{1}{p'}}. \quad (27)$$

Неравенство (25) следует из (27), поскольку (см. [8])

$$\|Q_{l-1;p}\|_{L_p(0,1)} \leq \|Q_{l-1;\infty}\|_{L_\infty(0,1)} = 2 \cdot 4^{-l+1}. \quad (28)$$

Обозначим теперь для $l, n \in \mathbb{N}$ и $1 \leq p \leq +\infty$ через $M_{l,n,p}$ множество таких $1 \leq q \leq +\infty$ и $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, что для некоторого $A > 0$ для любых $f \in W_p^l(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\|D^\beta f\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq A \|f\|_{W_p^l(\mathbb{R}^n)}. \quad (29)$$

Как известно, это означает, что или $p \leq q < +\infty$ и $|\beta| \leq l - n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ или $q = +\infty$ и для $p = +\infty$ $|\beta| \leq l$, для $1 < p < +\infty$ $|\beta| < l - \frac{n}{p}$, для $p = 1$ $|\beta| \leq l - n$. Обозначим далее для открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и для $(q, \beta) \in M_{l,n,p}$ через $C^*(\Omega, p, q, l, \beta)$ наименьшую постоянную в неравенстве

$$\|D^\beta f\|_{L_q(\Omega)} \leq C \|f\|_{W_p^l(\Omega)}. \quad (30)$$

ЛЕММА 6. Пусть $l, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$, $(q, \beta) \in M_{l,n,p}$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество. Тогда норма любого оператора продолжения $T: W_p^l(\Omega) \rightarrow W_p^l(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет неравенству

$$\|T\|_{W_p^l(\Omega) \rightarrow W_p^l(\mathbb{R}^n)} \geq \sup_{(q, \beta) \in M_{l,n,p}} \frac{C^*(\Omega, p, q, l, \beta)}{C^*(\mathbb{R}^n, p, q, l, \beta)}. \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать неравенство (30) для $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, исходя из неравенства (29) с точной постоянной с помощью произвольного оператора продолжения $T: W_p^l(\Omega) \rightarrow W_p^l(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\begin{aligned} \|D^\beta f\|_{L_q(\Omega)} &\leq \|D^\beta(Tf)\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq C^*(\mathbb{R}^n, p, q, l, \beta) \|Tf\|_{W_p^l(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C^*(\mathbb{R}^n, p, q, l, \beta) \|T\|_{W_p^l(\Omega) \rightarrow W_p^l(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{W_p^l(\Omega)}. \end{aligned}$$

Значит,

$$C^*(\Omega^n, p, q, l, \beta) \leq C^*(\mathbb{R}^n, p, q, l, \beta) \|T\|_{W_p^l(\Omega) \rightarrow W_p^l(\mathbb{R}^n)},$$

откуда и следует неравенство (31).

ВТОРОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим прежде всего, что при любых $1 \leq p \leq +\infty$, $l \in \mathbb{N}$ для любых $f \in W_p^l(-\infty, +\infty)$ справедливо неравенство

$$\|f^{(l-1)}\|_{L_\infty(-\infty, +\infty)} \leq \sqrt{2\pi} \|f\|_{W_p^l(-\infty, +\infty)}. \quad (32)$$

Оно следует из неравенства¹

$$\|f'\|_{L_\infty(-\infty, +\infty)} \leq 2 \|f\|_{L_p(-\infty, +\infty)}^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} \|f''\|_{L_p(-\infty, +\infty)}^{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{p})}, \quad (33)$$

где $1 \leq p \leq +\infty$, и использованного в первом доказательстве леммы 5 неравенства Колмогорова–Стейна.

Действительно,

$$\begin{aligned} \|f^{(l-1)}\|_{L_\infty(-\infty, +\infty)} &\leq 2 \|f^{(l-2)}\|_{L_p(-\infty, +\infty)}^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} \|f^{(l)}\|_{L_p(-\infty, +\infty)}^{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{p})} \\ &\leq 2 \left(\frac{\pi}{2} \|f\|_{L_p(-\infty, +\infty)}^{\frac{2}{l}} \|f^{(l)}\|_{L_p(-\infty, +\infty)}^{1-\frac{2}{l}} \right)^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} \|f^{(l)}\|_{L_p(-\infty, +\infty)}^{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{p})} \\ &\leq \sqrt{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(-\infty, +\infty)}^{\frac{1}{l}(1-\frac{1}{p})} \|f^{(l)}\|_{L_p(-\infty, +\infty)}^{\frac{1}{l}(l-1+\frac{1}{p})} \\ &\leq \sqrt{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{l} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right)^{\frac{1}{l}(1-\frac{1}{p})} \left(\frac{1}{l} \left(l - 1 + \frac{1}{p} \right) \right)^{\frac{1}{l}(l-1+\frac{1}{p})} \\ &\quad \times (\|f\|_{L_p(-\infty, +\infty)} + \|f^{(l)}\|_{L_p(-\infty, +\infty)}), \end{aligned}$$

¹При $p = +\infty$ это классическое неравенство, восходящее к Э. Ландау и Ж. Адамару. Тот факт, что с той же постоянной оно верно и для любых $1 \leq p < +\infty$, вытекает из неравенства

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\leq \left(\frac{p+1}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \varepsilon^{-1-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(x-\varepsilon, x+\varepsilon)} + 2^{-\frac{1}{p}} \varepsilon^{-1-\frac{1}{p}} \|f''\|_{L_p(x-\varepsilon, x+\varepsilon)} \\ &\leq \left(\frac{p+1}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \varepsilon^{-1-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(-\infty, +\infty)} + 2^{-\frac{1}{p}} \varepsilon^{-1-\frac{1}{p}} \|f''\|_{L_p(-\infty, +\infty)}, \end{aligned}$$

следующего из оценок, полученных в [8], после минимизации по $\varepsilon > 0$.

откуда и следует (31).

С другой стороны, полагая в неравенстве

$$\|f^{(l-1)}\|_{L_\infty(0,\varepsilon)} \leq C^*((0,\varepsilon), p, \infty, l, l-1) \|f\|_{W_p^l(0,\varepsilon)}$$

$f = \varepsilon^{l-1} Q_{l-1;p}(\frac{x}{\varepsilon})$, мы получаем

$$C^*((0,\varepsilon), p, \infty, l, l-1) \geq \frac{(l-1)!}{\|Q_{l-1;p}\|_{L_p(0,1)}} \varepsilon^{-l+\frac{1}{p'}} \quad (34)$$

(в [11] доказано, что при $0 < \varepsilon \leq 1$ здесь имеет место знак равенства). Следовательно, согласно (31)

$$\|T\|_{W_p^l(0,\varepsilon) \rightarrow W_p^l(-\infty, \infty)} \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(l-1)!}{\|Q_{l-1;p}\|_{L_p(0,1)}} \varepsilon^{-l+\frac{1}{p'}}, \quad (35)$$

откуда согласно (28) вновь следует (25). В заключение приведем основной результат § 3.

ТЕОРЕМА 3. *Существуют такие числа $C_{12} > 0$, $C_{13} > 0$, что для любых $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ справедливо неравенство*

$$C_{12}^l \left(1 + \frac{l^l}{(b-a)^{l-\frac{1}{p'}}}\right) \leq \inf_{T: W_p^l(a,b) \rightarrow W_p^l(-\infty, +\infty)} \|T\| \leq C_{13}^l \left(1 + \frac{l^l}{(b-a)^{l-\frac{1}{p'}}}\right). \quad (36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка снизу следует из леммы 5 и очевидного неравенства

$$\|T\|_{W_p^l(a,b) \rightarrow W_p^l(-\infty, +\infty)} \geq 1.$$

Оценка сверху для $b-a < 1$ следует из леммы 4, а для $b-a \geq 1$ из леммы 3.

§ 4. Разбиение единицы

В этом параграфе описывается конструкция специального разбиения единицы и приводятся оценки производных от элементов разбиения единицы.

Пусть для $x \in \mathbb{R}^n$ $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$. В этом параграфе мы будем рассматривать области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ вида

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n < \varphi(\bar{x})\}, \quad (1)$$

где функция φ удовлетворяет условию Липшица, т.е. существует число $M > 0$ такое, что

$$|\varphi(\bar{x}) - \varphi(\bar{y})| \leq M|\bar{x} - \bar{y}|, \quad \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^{n-1}. \quad (2)$$

Положим $G = \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^n, x_n > \varphi(\bar{x})\}$ и

$$G_m = \{x \in G, 2^{-m-1} < x_n - \varphi(\bar{x}) \leq 2^{-m}\}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

ЛЕММА 7. Существует число $C_1 > 0$ и для любых $n, l \in \mathbb{N}$ существует последовательность неотрицательных функций $\psi_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{Z}$ (зависящих от m, n, l, φ), удовлетворяющие следующим условиям:

$$1) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \psi_m(x) = \begin{cases} 1, & x \in G, \\ 0, & x \notin G; \end{cases}$$

$$2) G = \bigcup_{m=-\infty}^{+\infty} \text{supp } \psi_m,$$

причем кратность покрытия $\kappa(\{\text{supp } \psi_m\}_{m \in \mathbb{Z}}) = 2$;

$$3) G_m \subset \text{supp } \psi_m \subset G_m^* \subset G_{m-1} \cup G_m \cup G_{m+1}, \\ G_m^* = \{x \in G, \quad 2^{-m-1}(1 - 2^{-4}) < x_n - \varphi(\bar{x}) \leq 2^{-m}(1 + 2^{-4})\};$$

$$4) \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n: |\alpha| \leq l$$

$$|(D^\alpha \psi_m)(x)| \leq [C_1^n (1 + M) 2^m]^{|\alpha|}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A_δ – оператор усреднения с ядром ω , построенным в теореме 1. Для любого $m \in \mathbb{Z}$ положим

$$\Gamma_m = \{x \in G: x_n - \varphi(\bar{x}) = 2^{-m}\}, \quad \delta_m = (1 + M)^{-1} 2^{-m-5}, \quad (5)$$

обозначим через χ_m характеристическую функцию множества G_m и определим функцию ψ_m следующим образом:

$$\psi_m(x) = \begin{cases} (A_{\delta_m} \chi_m)(x), & \text{если } x \in (\Gamma_m)^{\delta_m}, \\ 1, & \text{если } x \in G_m \setminus ((\Gamma_m)^{\delta_m} \cup (\Gamma_{m+1})^{\delta_{m+1}}), \\ (A_{\delta_{m+1}} \chi_m)(x), & \text{если } x \in (\Gamma_{m+1})^{\delta_{m+1}}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (6)$$

Таким образом, функция ψ_m представляет собой усреднение характеристической функции χ_m множества G_m с шагом δ_m “в сторону множества G_{m-1} ” и с шагом δ_{m+1} “в сторону множества G_{m+1} ”. При этом характеристические функции χ_{m-1} и χ_m соседних множеств G_{m-1} и G_m “в месте стыка” усредняются с одинаковым шагом δ_m , а характеристические функции χ_m и χ_{m+1} соседних множеств G_m и G_{m+1} “в месте стыка” усредняются также с одинаковым, но уже другим шагом δ_{m+1} (см. рис. 1).

Из определения функции ψ_m следует, что $\psi_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Бесконечно непрерывная дифференцируемость в точках $x \in \partial((\Gamma_m)^{\delta_m})$ следует из того, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ для любого $y \in B(x, \varepsilon)$ $\psi_m(y) = (A_{\delta_m} \chi_m)(y)$, при этом $(D^\alpha \psi_m)(x) = 0$; так же рассматривается случай, когда $x \in \partial((\Gamma_{m+1})^{\delta_{m+1}})$. Кроме того,

$$G_m \subset \text{supp } \psi_m \subset (G_m)^{\delta_m} \subset G_m^*.$$

Поясним последнее включение. Если $u \in (G_m)^{\delta_m}$, то существует такое $x \in G_m$, что $u \in B(x, \delta_m)$, поэтому

$$u_n - \varphi(\bar{u}) = u_n - x_n + x_n - \varphi(\bar{x}) + \varphi(\bar{x}) - \varphi(\bar{u}) \\ > -\delta_m + 2^{-m-1} - M\delta_m > 2^{-m-1}(1 - 2^{-4}).$$

Рис. 1

Аналогично доказывается, что $u_n - \varphi(\bar{u}) \leq 2^{-m}(1 - 2^{-4})$.

Докажем 1). Если $x \notin G$, то все $\psi_m(x) = 0$ и $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \psi_m(x) = 0$. Пусть $x \in G$; тогда существует такое $k = k(x)$, что $x \in G_k$. Если $x \in G_k \setminus ((\Gamma_k)^{\delta_k} \cup (\Gamma_{k+1})^{\delta_{k+1}})$, то $\psi_k(x) = 1$, а при $m \neq k$ $\psi_m(x) = 0$ и $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \psi_m(x) = 1$. Если $x \in G_k \cap (\Gamma_{k+1})^{\delta_{k+1}}$, то для $m \neq k, k+1$ $\psi_m(x) = 0$ и

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \psi_m(x) &= \psi_k(x) + \psi_{k+1}(x) = (A_{\delta_{k+1}} \chi_k)(x) + (A_{\delta_{k+1}} \chi_{k+1})(x) \\ &= (A_{\delta_{k+1}} (\chi_k + \chi_{k+1}))(x) = (A_{\delta_{k+1}} \chi_{G_k \cup G_{k+1}})(x) = 1, \end{aligned}$$

поскольку $x \in B(x, \delta_{k+1}) \subset G_k \cup G_{k+1}$. Аналогично рассматривается случай, когда $x \in G_k \cap (\Gamma_k)^{\delta_k}$.

Получим неравенство 4). Достаточно рассмотреть точки $x \in (\Gamma_m)^{\delta_m} \cup (\Gamma_{m+1})^{\delta_{m+1}}$. Если $x \in (\Gamma_m)^{\delta_m}$, то

$$\begin{aligned} |(D^\alpha \psi_m)(x)| &= |D^\alpha (\omega_{\delta_m} * \chi_m)(x)| = \delta_m^{-|\alpha|} |(D^\alpha \omega)_{\delta_m} * \chi_m(x)| \\ &\leq \delta_m^{-|\alpha|} \|(D^\alpha \omega)_{\delta_m}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = \delta_m^{-|\alpha|} \|D^\alpha \omega\|_{L_1(B_1)} \\ &\leq \delta_m^{-|\alpha|} v_n \|D^\alpha \omega\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq ((2\tilde{C}_1)^n 2^5 (1+M) 2^m l)^{|\alpha|}, \end{aligned}$$

где $\tilde{C}_1$ – постоянная из неравенства (3) из § 1 (обозначенная там через C_1). Аналогичная оценка справедлива и для $x \in (\Gamma_{m+1})^{\delta_{m+1}}$ с заменой 2^5 на 2^6 , откуда и следует неравенство (4) с $C_1 = 2^7 \tilde{C}_1$.

§ 5. Двусторонняя оценка точной постоянной в неравенстве для L_p -нормы промежуточной производной

Для получения оценки сверху нам понадобятся несколько лемм, связанных с понятием множества, удовлетворяющего условию конуса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию конуса (с параметрами $r > 0$ и $h > 0$), если существует такой конус

$$K = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : 0 < \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{r}{h} y_n < r \right\},$$

что для любого $x \in \Omega$ существует конус $K_x \subset \Omega$ с вершиной в точке x , конгруэнтный конусу K .

Пусть B – открытый шар, (x, y) – интервал с концами в точках $x, y \in \mathbb{R}^n$. Назовем *коническим телом с вершиной в точке $x \in \mathbb{R}^n$* , построенным по шару B , множество

$$V_x = \bigcup_{y \in B} (x, y)$$

(если $x \in B$, то $V_x = B$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *звезда относительно шара $B \subset \Omega$* , если для любого $x \in \Omega$ $V_x \subset \Omega$.

Впишем в конус K_x открытый шар $B(y(x), r_1)$ (его радиус $r_1 = \frac{rh}{r + \sqrt{r^2 + h^2}}$) и рассмотрим коническое тело с вершиной в точке x , построенное по шару $B(y(x), r_1)$. Обозначим его через $\tilde{K}_x$ и положим $h_1 = |x - y(x)| = h - r_1$.

Ниже мы будем пользоваться следующим неравенством: если $E_k \subset \mathbb{R}^n$, где $k \in \{1, \dots, m\}$, $m \in \mathbb{N}$ или $m = +\infty$, – измеримые множества, $E = \bigcup_{k=1}^m E_k$ и кратность покрытия $\{E_k\}_{k=1}^m$ равна κ , то для любой неотрицательной измеримой на E функции φ

$$\sum_{k=1}^m \int_{E_k} \varphi(x) dx \leq \kappa \int_E \varphi(x) dx, \quad (1)$$

в частности,

$$\sum_{k=1}^m \text{mes } E_k \leq \kappa \text{mes } E. \quad (2)$$

ЛЕММА 8. Для любого открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего условию конуса с параметрами r и h , существуют такие ограниченные области $\Omega_k \subset \Omega$, звездные относительно шаров $B_k \subset \bar{B}_k \subset \Omega_k$, где $k \in \{1, \dots, m\}$ (для ограниченных Ω $m \in \mathbb{N}$, а для неограниченных Ω $m = \infty$), что

- 1) $\Omega = \bigcup_{k=1}^m \Omega_k$;
- 2) для любого $k \in \{1, \dots, m\}$

$$r_1 = \text{diam } B_k \leq \text{diam } \Omega_k \leq 2h,$$

откуда, в частности, следует, что

2') для любого $k \in \{1, \dots, m\}$

$$\frac{\text{diam } \Omega_k}{\text{diam } B_k} \leq 4 \left(1 + \frac{h}{r}\right);$$

3) кратность покрытия

$$\kappa(\{\Omega_k\}_{k=1}^m) \leq 8^n \left(1 + \frac{h}{r}\right)^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \Omega$. Рассмотрим кроме конуса K_x и конического тела $\tilde{K}_x$ еще и коническое тело K_x^* с вершиной в точке $z(x) = x + \frac{\varepsilon_x(x-y(x))}{|x-y(x)|}$, где $\varepsilon_x = \frac{1}{2} \min\{r_1, \text{dist}(x, \partial\Omega)\}$, построенное по шару $B(y(x), r_1)$. Таким образом, $x \in K_x^* \subset \Omega$ и $\Omega \subset \bigcup_{x \in \Omega} K_x^*$ (см. рис. 2).

Рис. 2

Обозначим через κ_n минимальную кратность покрытия $\mathbb{R}^n$ шарами единичного радиуса (или, что то же самое, одинакового радиуса). Выберем такие $x_k \in \mathbb{R}^n$ ($k \in \mathbb{N}$), что $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(x_k, \frac{r_1}{2})$ и $\kappa\left(\{B(x_k, \frac{r_1}{2})\}_{k \in \mathbb{N}}\right) = \kappa_n$, и положим

$$G_k = \bigcup_{y(x) \in \Omega \cap B(x_k, \frac{r_1}{2})} K_x^*.$$

Пусть $G_k \neq \emptyset$ и $\xi \in G_k$; тогда существует такое $x \in B(x_k, \frac{r_1}{2}) \cap \Omega$, что $\xi \in K_x^*$. Рассмотрим коническое тело $\tilde{K}_\xi$ с вершиной в точке ξ , построенное по шару $B(x_k, \frac{r_1}{2})$. Так как $y(x) \in B(x_k, \frac{r_1}{2})$, то $B(y(x), r_1) \supset B(x_k, \frac{r_1}{2})$ и

$\tilde{K}_\xi \subset K_x^* \subset \Omega$. Следовательно, множество G_k звездно относительно шара $B(x_k, \frac{r_1}{2})$.

Далее, так как

$$|\xi - x_k| \leq |z(x) - x_k| = |z(x) - x| + |x - y(x)| + |y(x) - x_k| \leq r_1 + h_1 = h,$$

то $G_k \subset B(x_k, h)$ и $\text{diam } G_k \leq 2h$.

Рассмотрим множества G_k для тех k , для которых $G_k \neq \emptyset$. Если Ω ограничено, то их конечное число – обозначим его через m ; если Ω неограничено, то их счетное число ($m = +\infty$). Перенумеруем их и обозначим через $\Omega_1, \Omega_2, \dots$. Так как $\Omega \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B(x_k, \frac{r_1}{2})$, то

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = \bigcup_{k=1}^m \Omega_k.$$

Таким образом, для множеств Ω_k выполнены свойства 1), 2), 2'). Наконец,

$$\kappa(\{\Omega_k\}_{k=1}^m) \leq \kappa(\{B(x_k, h)\}_{k=1}^{\infty}).$$

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$; тогда количество $\kappa(x)$ шаров $B(x_k, h) \ni x$ равно количеству точек $x_k \in B(x, h)$. Так как $\kappa(\{B(x_k, \frac{r_1}{2})\}_{k=1}^{\infty}) = \kappa_n$, то согласно неравенству (2)

$$\begin{aligned} \kappa(x) \text{mes } B(x_k, \frac{r_1}{2}) &= \sum_{k: B(x_k, \frac{r_1}{2}) \ni x} \text{mes } B(x_k, \frac{r_1}{2}) \\ &\leq \kappa_n \text{mes } \bigcup_{k: B(x_k, \frac{r_1}{2}) \ni x} B(x_k, \frac{r_1}{2}) \leq \kappa_n \text{mes } B(x, h) \end{aligned}$$

и

$$\kappa(x) \leq \kappa_n 2^n \left(\frac{h}{r_1}\right)^n \leq \kappa_n 4^n \left(1 + \frac{h}{r}\right)^n,$$

откуда и следует свойство (3), поскольку $\kappa_n \leq 2^n$.

Отметим, что для случая ограниченного множества Ω первое утверждение леммы 2 доказано в [14] (по сравнению с [14] рассуждения изменены, что позволяет получить оценки 2) и 3)).

ЛЕММА 9. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $\Omega = \bigcup_{k=1}^s \Omega_k$, где $s \in \mathbb{N}$ или $s = \infty$, $\Omega_k \subset \mathbb{R}^n$ – измеримые множества, причем при $1 \leq p \leq +\infty$ $\kappa = \kappa(\{\Omega_k\}_{k=1}^s) < +\infty$. Пусть далее $M \in \mathbb{N}$ или $M = +\infty$, $C_m > 0$ ($m \in \{1, \dots, M\}$), f_m ($m \in \{1, \dots, M\}$) и g – измеримые на Ω функции. Если для любого $k \in \{1, \dots, s\}$ справедливо неравенство

$$\|g\|_{L_p(\Omega_k)} \leq \sum_{m=1}^M C_m \|f_m\|_{L_p(\Omega_k)},$$

то

$$\|g\|_{L_p(\Omega)} \leq \kappa^{\frac{1}{p}} \sum_{m=1}^M C_m \|f\|_{L_p(\Omega)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $p = +\infty$, то

$$\begin{aligned} \|g\|_{L_\infty(\Omega)} &= \sup_{k \in \{1, \dots, s\}} \|g\|_{L_\infty(\Omega_k)} \leq \sum_{m=1}^M C_m \sup_{k \in \{1, \dots, s\}} \|f_m\|_{L_\infty(\Omega_k)} \\ &= \sum_{m=1}^M C_m \|f_m\|_{L_\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $1 \leq p < +\infty$. Тогда согласно неравенству Минковского для сумм и неравенству (1)

$$\begin{aligned} \|g\|_{L_p(\Omega)} &\leq \left(\sum_{k=1}^s \|g\|_{L_p(\Omega_k)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^s \left(\sum_{m=1}^M C_m \|f_m\|_{L_p(\Omega_k)} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sum_{m=1}^M C_m \left(\sum_{k=1}^s \|f_m\|_{L_p(\Omega_k)}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{m=1}^M C_m \left(\sum_{k=1}^s \int_{\Omega_k} |f_m(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \kappa^{\frac{1}{p}} \sum_{m=1}^M C_m \left(\int_{\Omega} |f_m(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \kappa^{\frac{1}{p}} \sum_{m=1}^M C_m \|f_m\|_{L_p(\Omega)}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 10. Существует число $C_1 > 0$ такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любого ограниченного открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (с диаметром $\mathcal{D}$), звездного относительно шара B (с диаметром d), для любых $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$, $\beta \in \mathbb{N}_0^n$: $|\beta| < l$, $f \in W_p^l(\Omega)$ верно следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{\|D^\beta f\|_{L_p(\Omega)}}{(\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{p}}} &\leq C_1^{nl} \left[\left(\frac{|\beta|}{\mathcal{D}} \right)^{|\beta|} \left(\frac{\mathcal{D}}{d} \right)^{l-1} \frac{\|f\|_{L_p(B)}}{(\text{mes } B)^{\frac{1}{p}}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\mathcal{D}}{l-|\beta|} \right)^{l-|\beta|} \left(\frac{\mathcal{D}}{d} \right)^{n-1} \frac{\|f\|_{W_p^l(\Omega)}}{(\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{p}}} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B = B(x_0, \frac{d}{2}) \subset \Omega$ – шар звездности. Для любой функции $f \in W_p^l(\Omega)$ справедливо интегральное представление [14], [24], [23]: для почти всех $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} (D^\beta f)(x) &= \int_B \left[\sum_{|\alpha| < l-|\beta|} \frac{(-1)^{|\alpha|+|\beta|}}{\alpha!} D_y^{\alpha+\beta} ((x-y)^\alpha \omega(y)) f(y) \right] dy \\ &\quad + (l-|\beta|) \sum_{|\alpha|=l-|\beta|} \frac{1}{\alpha!} \int_{V_x} \frac{(D^{\alpha+\beta} f)(y)}{|x-y|^{n-l+|\beta|}} \frac{(x-y)^\alpha}{|x-y|^{l-|\beta|}} w(x, y) dy, \end{aligned} \quad (4)$$

где V_x – коническое тело, определенное выше,

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \int_{|x-y|}^{+\infty} \omega \left(x + \varrho \frac{x-y}{|x-y|} \right) \varrho^{n-1} d\varrho, \\ \omega &\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \text{supp } \omega \subset \overline{B}, \quad \int_B \omega(x) dx = 1. \end{aligned}$$

Выберем в качестве ω функцию

$$\omega(x) = \left(\frac{2}{d}\right)^n \tilde{\omega}\left(\frac{2}{d}(x - x_0)\right), \quad (5)$$

где $\tilde{\omega}$ – функция из теоремы 1.

Учитывая неравенство 4) из теоремы 1, получим, что

$$\begin{aligned} |D_y^{\alpha+\beta}((x-y)^\alpha \omega(y))| &\leq \sum_{0 \leq \gamma \leq \alpha+\beta} C_{\alpha+\beta}^\gamma |D_y^\gamma(x-y)^\alpha| |(D^{\alpha+\beta-\gamma}\omega)(y)| \\ &\leq \sum_{0 \leq \gamma \leq \alpha} C_{\alpha+\beta}^\gamma \frac{\alpha!}{(\alpha-\gamma)!} |(x-y)^{\alpha-\gamma}| \left(\frac{2}{d}\right)^{n+|\alpha+\beta-\gamma|} 2^n v_n^{-1} C_2^{|\alpha+\beta-\gamma|} n^{|\alpha+\beta-\gamma|} \\ &\leq 2^{2n+l} \alpha! C_2^{ln} v_n^{-1} l^{|\beta|} d^{-n} n^l \mathcal{D}^{-|\beta|} \left(\frac{\mathcal{D}}{d}\right)^{|\alpha|+|\beta|} \sum_{0 \leq \gamma \leq \alpha} \frac{l^{|\alpha-\gamma|}}{(\alpha-\gamma)!} \\ &\leq (16eC_2)^{nl} v_n^{-1} \alpha! l^{|\beta|} d^{-n} \mathcal{D}^{-|\beta|} \left(\frac{\mathcal{D}}{d}\right)^{|\alpha|+|\beta|}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $C_2 \geq 1$ – постоянная из неравенства 4) теоремы 1, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$, $C_\alpha^\gamma = \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!}$; $0 \leq \gamma \leq \alpha$ означает, что $0 \leq \gamma_j \leq \alpha_j$, $j = 1, \dots, n$. Мы учли, что

$$|(x-y)^{\alpha-\gamma}| d^{-n-|\alpha+\beta-\gamma|} \leq d^{-n} \mathcal{D}^{-|\alpha+\beta-\gamma|} \leq d^{-n} \mathcal{D}^{-|\beta|} \left(\frac{\mathcal{D}}{d}\right)^{|\alpha+\beta|}.$$

Так как $\left|\frac{(x-y)^\alpha}{|x-y|^{l-|\beta|}}\right| \leq 1$ при $|\alpha| = l - |\beta|$, то из свойств 1), 4) функции $\tilde{\omega}$ из теоремы 1 имеем неравенство

$$\begin{aligned} \left|\frac{(x-y)^\alpha}{|x-y|^{l-|\beta|}} w(x, y)\right| &\leq \left(\frac{4}{d}\right)^n v_n^{-1} \int_{d_1}^{d_2} \varrho^{n-1} d\varrho \\ &\leq \left(\frac{4}{d}\right)^n v_n^{-1} d \mathcal{D}^{n-1} \leq 4^n v_n^{-1} \left(\frac{\mathcal{D}}{d}\right)^{n-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь d_1 – расстояние от точки x до ближайшей точки пересечения прямой, проходящей через точки x и y , со сферой ∂B , а d_2 – расстояние от точки x до другой точки пересечения.

Из неравенства (4), (6), (7), применяя неравенство Минковского, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \|D^\beta f\|_{L_p(\Omega)} &\leq C_3^{ln} v_n^{-1} \left(\frac{l}{\mathcal{D}}\right)^{|\beta|} d^{-n} \left(\frac{\mathcal{D}}{d}\right)^{l-1} (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_1(B)} \\ &\quad + (l - |\beta|) 4^n v_n^{-1} \left(\frac{\mathcal{D}}{d}\right)^{n-1} \sum_{|\alpha|=l-|\beta|} \frac{1}{\alpha!} \left\| \int_{V_x} \frac{(D^{\alpha+\beta} f)(y)}{|x-y|^{n-l+|\beta|}} dy \right\|_{L_p(\Omega)}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $C_3 = 32eC_2$.

Из неравенства Гёльдера для первого слагаемого и неравенства Юнга для второго слагаемого получаем неравенство

$$\begin{aligned} \|D^\beta f\|_{L_p(\Omega)} &\leq C_3^{ln} v_n^{-1} \left(\frac{l}{\mathcal{D}}\right)^{|\beta|} d^{-n} \left(\frac{\mathcal{D}}{d}\right)^{l-1} (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{p}} (\text{mes } B)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{L_p(B)} \\ &+ (l - |\beta|) 4^n v_n^{-1} \left(\frac{\mathcal{D}}{d}\right)^{n-1} \sum_{|\alpha|=l-|\beta|} \frac{1}{\alpha!} \|D^{\alpha+\beta} f\|_{L_p(\Omega)} \left\| \frac{1}{|x|^{n-l+|\beta|}} \right\|_{L_1(\Omega-\Omega)}, \end{aligned}$$

где $A - B$ – арифметическая разность множеств A и B . Так как

$$\begin{aligned} \left\| |x|^{-n+l-|\beta|} \right\|_{L_1(\Omega-\Omega)} &\leq \frac{nv_n \mathcal{D}^{l-|\beta|}}{l - |\beta|}, \\ l^{|\beta|} &\leq e^{nl} \beta! \leq e^{nl} |\beta|^{|\beta|}, \quad \frac{1}{\alpha!} \leq \frac{e^{ln}}{l^{|\alpha|}} \leq \frac{e^{ln}}{(l - |\beta|)^{l-|\beta|}}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \|D^\beta f\|_{L_p(\Omega)} &\leq (C_3 e)^{ln} (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|\beta|}{\mathcal{D}}\right)^{|\beta|} \left(\frac{\mathcal{D}}{d}\right)^{l-1} \frac{\|f\|_{L_p(B)}}{(\text{mes } B)^{\frac{1}{p}}} \\ &+ n(4e)^{ln} \left(\frac{\mathcal{D}}{l - |\beta|}\right)^{l-|\beta|} \left(\frac{\mathcal{D}}{d}\right)^{n-1} \|f\|_{w_p^l(\Omega)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Лемма доказана с константой $C_1 = 32e^2 C_2$.

СЛЕДСТВИЕ. Если в условиях леммы 6 множество Ω есть шар $B = B(0, \frac{\mathcal{D}}{2})$, то справедливо неравенство

$$\|D^\beta f\|_{L_p(B)} \leq C_1^{ln} \left[\left(\frac{|\beta|}{\mathcal{D}}\right)^{|\beta|} \|f\|_{L_p(B)} + \left(\frac{\mathcal{D}}{l - |\beta|}\right)^{l-|\beta|} \|f\|_{w_p^l(B)} \right] \quad (10)$$

(это неравенство является обобщением неравенства (15) из §3 на многомерный случай).

Рассмотрим теперь неравенство (30) для промежуточной производной для случая $p = q$

$$\|D^\beta f\|_{L_p(\Omega)} \leq C^*(\Omega, p, p, l, \beta) \|f\|_{W_p^l(\Omega)} \quad (11)$$

с точной постоянной $C^*(\Omega, p, p, l, \beta)$.

Оценку постоянной $C^*(\Omega, p, p, l, \beta)$ сверху (а в случае, когда Ω – ограниченное множество, и снизу) дает

ТЕОРЕМА 4. Для любых $n \in \mathbb{N}$, $r, h > 0$ существует число $C_4(n, r, h) > 0$ такое, что для любого открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего условию конуса с параметрами r, h , для любых $l \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{N}_0^n$: $|\beta| < l$, $1 \leq p \leq +\infty$

$$C^*(\Omega, p, p, l, \beta) \leq C_4(n, r, h) l^{|\beta|}. \quad (12)$$

Если, кроме того, множество Ω ограничено и имеет диаметр $\mathcal{D}$, то существует такое число $C_5(n, \mathcal{D}) > 0$, что справедливо двустороннее неравенство

$$C_5(n, \mathcal{D}) l^{|\beta|} \leq C^*(\Omega, p, p, l, \beta) \leq C_4(n, r, h) l^{|\beta|}. \quad (13)$$

Доказательство. По лемме 8 множество Ω представляется в виде $\Omega = \bigcup_{k=1}^m \Omega_k$, где Ω_k – область, звездная относительно шара B_k . Пусть $\mathcal{D}_k, d_k$ – диаметры множеств Ω_k и B_k соответственно. Согласно лемме 10 для любого $k \in \{1, \dots, m\}$ ($m \in \mathbb{N}$ или $m = +\infty$) справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|D^\beta f\|_{L_p(\Omega_k)} &\leq C_1^{nl} \left[\left(\frac{l}{\mathcal{D}_k} \right)^{|\beta|} \left(\frac{\mathcal{D}_k}{d_k} \right)^{l-1} \left(\frac{\text{mes } \Omega_k}{\text{mes } B_k} \right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(\Omega_k)} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\mathcal{D}_k}{l-|\beta|} \right)^{l-|\beta|} \left(\frac{\mathcal{D}_k}{d_k} \right)^{n-1} \|f\|_{w_p^l(\Omega_k)} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Из леммы 8 следует, что $\frac{\mathcal{D}_k}{d_k} \leq 4 \left(1 + \frac{h}{r}\right)$ и $(2h)^{-1} \leq \mathcal{D}_k^{-1} \leq 2(r^{-1} + h^{-1})$. Поэтому из (14) следует, что

$$\begin{aligned} \|D^\beta f\|_{L_p(\Omega_k)} &\leq C_1^{nl} \left[l^{|\beta|} (2(r^{-1} + h^{-1}))^{|\beta|} 4^{l-1+\frac{n}{p}} \left(1 + \frac{h}{r}\right)^{l-1+\frac{n}{p}} \|f\|_{L_p(\Omega_k)} \right. \\ &\quad \left. + 4^{n-1} \left(1 + \frac{h}{r}\right)^{n-1} \left(\frac{2h}{l-|\beta|} \right)^{l-|\beta|} \|f\|_{w_p^l(\Omega_k)} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Применяя к (15) лемму 9 и учитывая, что согласно лемме 8 $\kappa \leq 8^n \left(1 + \frac{h}{r}\right)^n$, получаем неравенство

$$\begin{aligned} \|D^\beta f\|_{L_p(\Omega)} &\leq (256C_1)^{nl} \left(1 + \frac{h}{r}\right)^{n-1} \left[l^{|\beta|} (r^{-1} + h^{-1})^{|\beta|} \left(1 + \frac{h}{r}\right)^l \|f\|_{L_p(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{h}{l-|\beta|} \right)^{l-|\beta|} \|f\|_{w_p^l(\Omega)} \right], \end{aligned}$$

откуда и следует (12).

Оценка снизу (13) для ограниченного множества Ω получается подстановкой в неравенство (11) функции $f(x) = (x - x_0)^\beta$, где $x_0 \in \Omega$, и применением неравенства $l^{|\beta|} e^{-nl} \leq \beta!$:

$$C^*(\Omega, p, p, l, \beta) \geq \frac{\beta! (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{p}}}{\|(x - x_0)^\beta\|_{L_p(\Omega)}} \geq \frac{\beta!}{\mathcal{D}^{|\beta|}} \geq l^{|\beta|} [e^{-n} \min\{\mathcal{D}^{-1}, 1\}]^l. \quad (16)$$

Теорема доказана.

§6. Оценка сверху минимальной нормы операторов продолжения для специальной липшицевой области

Пусть $-\infty \leq a_i < b_i \leq +\infty$, $i = 1, \dots, n-1$, $a_n > -\infty$. Специальной липшицевой областью мы будем называть область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ вида

$$\Omega = \{a_i < x_i < b_i, \quad i = 1, \dots, n-1; \quad a_n < x_n < \varphi(\bar{x})\}, \quad (1)$$

где функция φ удовлетворяет условию Липшица с константой M , т.е.

$$|\varphi(\bar{x}) - \varphi(\bar{y})| \leq M |\bar{x} - \bar{y}|, \quad a_i < x_i, y_i < b_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (2)$$

и для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\varphi(\bar{x}) > a_n + \varepsilon, \quad a_i < x_i < b_i, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (3)$$

6.1. Оценки усреднений со сдвигами для ядер с моментами, равными нулю. Пусть $0 < a < b < +\infty$, $0 < d < c < +\infty$. Рассмотрим для $m \in \mathbb{Z}$ множества

$$\hat{\Omega}_m = \{a_i < x_i < b_i, \quad i = 1, \dots, n-1; \quad -c2^{-m} < x_n - \varphi(\bar{x}) < -d2^{-m}\} \quad (4)$$

и

$$\hat{G}_m = \left\{ a_i + \frac{b}{a}2^{-m} < x_i < b_i - \frac{b}{a}2^{-m}, \right. \\ \left. i = 1, \dots, n-1; \quad a2^{-m} < x_n - \varphi(\bar{x}) < b2^{-m} \right\}. \quad (5)$$

Для достаточно больших m $\hat{\Omega}_m \subset \Omega$ (если $c2^{-m} \leq \varepsilon$) и $\hat{\Omega}_m \neq \emptyset$ (если $\frac{b}{a}2^{-m+1} \leq \min_{i=1, \dots, n-1} (d_i - c_i)$).

Обозначим для любых $n, l \in \mathbb{N}$ через ω (зависящее от n и l) ядро усреднения, удовлетворяющее условиям теоремы 2. Тогда, в частности, $\omega \in C_0^\infty(K)$, где $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} < x_i < 1, \quad i = 1, \dots, n\}$ и $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| \leq l$

$$|D^\alpha \omega(x)| \leq C_1^{ln} l^{|\alpha|}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (6)$$

где C_1 – абсолютная постоянная.

Рассмотрим для $m \in \mathbb{Z}$ усреднения со “сдвигами”

$$\Phi_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\bar{x} - 2^{-m}\bar{z}, x_n - B2^{-m}z_n) \omega(z) dz, \quad (7)$$

“сдвиг” обеспечивается выбором постоянной B и тем, что $\text{supp } \omega \subset K$, в частности $\omega(z) = 0$, если $z_n \leq \frac{1}{2}$. Параметры a, b, c, d, B будут подобраны так, что

$$\text{если } x \in \hat{G}_m, \quad z \in K, \quad \text{то } (\bar{x} - 2^{-m}\bar{z}, x_n - B2^{-m}z_n) \in \hat{\Omega}_m. \quad (8)$$

Это приведет к тому, что при достаточно больших m значения функции Φ_m на множестве $\hat{G}_m \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ будут определяться значениями функций Φ на множестве $\hat{\Omega}_m \subset \Omega$, “сдвинутом” по отношению к множеству $\hat{G}_m$ вдоль оси x_n на величину порядка 2^{-m} .

ЛЕММА 11. *Существует число $C_2 > 0$, для любых $0 < a < b < +\infty$ существует число $C_3 = C_3(a, b) > 0$, для любых $n \in \mathbb{N}$, $M \geq 0$, $0 < a < b < +\infty$, $d > 0$ существуют числа $B = B(n, M, a, b, d) > 0$ и $c = c(n, M, a, b, d) > 0$, обладающие следующими свойствами.*

При любых $m \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$ для всякой функции $f \in C^\infty(\Omega)$ при $\beta \in \mathbb{N}_0^n : |\beta| \leq l$, $1 \leq p \leq +\infty$

1) справедливо неравенство

$$\|D^\beta \Phi_m\|_{L_p(\hat{G}_m)} \leq C_2^{ln} \|D^\beta \Phi\|_{L_p(\hat{\Omega}_m)}, \quad (9)$$

2) существуют такие функции F_β (не зависящие от m), что

$$\|D^\beta \Phi_m - F_\beta\|_{L_p(\hat{G}_m)} \leq C_3^{ln} l^{|\beta|-l} (1 + M + d)^l 2^{m(|\beta|-l)} \|\Phi\|_{w_p^{l, \dots, l}(\hat{\Omega}_m)}, \quad (10)$$

где

$$\|\Phi\|_{w_p^{l, \dots, l}(\hat{\Omega}_m)} = \sum_{i=1}^n \|D_i^l \Phi\|_{L_p(\hat{\Omega}_m)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Неравенства

$$\begin{aligned} \|D^\beta \Phi_m\|_{L_p(\widehat{G}_m)} &\leq \widetilde{C}_2 \|D^\beta \Phi\|_{L_p(\widehat{\Omega}_m)}, \\ \|D^\beta \Phi_m - F_\beta\|_{L_p(\widehat{G}_m)} &\leq \widetilde{C}_3 2^{m(|\beta|-l)} \|\Phi\|_{w_p^{l,\dots,l}(\widehat{\Omega}_m)}, \end{aligned}$$

где $\widetilde{C}_2$ и $\widetilde{C}_3$ не зависят от Φ и m , без оценки зависимости $\widetilde{C}_2$ и $\widetilde{C}_3$ от l , M и d доказаны в [6] (см. лемму 8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем B и c так, чтобы

$$2\frac{b}{a} \left(\frac{b}{a} Mn + b + d \right) \leq B \leq 2^{10} \frac{b}{a} \left(\frac{b}{a} Mn + b + d \right) \quad (11)$$

и

$$c = \frac{b}{a} (Mn + 2B). \quad (12)$$

Выбор параметров c и B обеспечивает выполнение не только условия (8), но и следующего более сильного условия:

$$\text{если } x \in \widehat{G}_m, \quad \frac{a}{2b} < z_j < \frac{b}{a}, \quad j = 1, \dots, n, \quad \text{то } (\bar{x} - 2^{-m}\bar{z}, x_n - B2^{-m}z_n) \in \widehat{\Omega}_m. \quad (13)$$

1. Докажем 1). Пусть сначала $\beta = 0$. Согласно (6)

$$|\Phi_m(x)| \leq C_1^{ln} \int_{\frac{1}{2}}^1 \dots \int_{\frac{1}{2}}^1 |\Phi(\bar{x} - 2^{-m}\bar{z}, x_n - B2^{-m}z_n)| dz. \quad (14)$$

Согласно обобщенному неравенству Минковского

$$\begin{aligned} \|\Phi_m\|_{L_p(\widehat{G}_m)} &\leq C_1^{ln} \int_K \|\Phi(\bar{x} - 2^{-m}\bar{z}, x_n - B2^{-m}z_n)\|_{L_p(\widehat{G}_m)} dz \\ &\leq C_1^{ln} \sup_{z \in K} \|\Phi(\bar{x} - 2^{-m}\bar{z}, x_n - B2^{-m}z_n)\|_{L_p(\widehat{G}_m)} \leq C_1^{ln} \|\Phi\|_{L_p(\widehat{\Omega}_m)}, \end{aligned}$$

поскольку при указанном выборе параметров выполняется свойство (8). Тем самым доказано неравенство (9).

При $|\beta| > 0$ достаточно выполнить дифференцирование под знаком интеграла $(D^\beta \Phi_m = (D^\beta \Phi)_m)$ и применить неравенство (9) с $\beta = 0$.

2. Докажем неравенство 2). Для функции $\Phi(\bar{x} - 2^{-m}\bar{z}, x_n - B2^{-m}z_n)$ запишем интегральное представление (3) из § 2 (см. лемму 1):

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{x} - 2^{-m}\bar{z}, x_n - B2^{-m}z_n) &= \int_{\Pi} P(\bar{x} - 2^{-m}\bar{z}, x_n - B2^{-m}z_n, \xi) \Phi(\xi) d\xi \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{\Pi_i} Q_i(\bar{x} - 2^{-m}\bar{z}, x_n - B2^{-m}z_n, \xi) \\ &\quad \times D_i^l \Phi(\xi_1, \dots, \xi_i, x_{i+1} - 2^{-m}z_{i+1}, \dots, x_n - B2^{-m}z_n) d\xi_1 \dots d\xi_i \\ &\equiv \sum_{i=0}^n r_i^{(m)}(x, z), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\Pi_i = \{y \in \mathbb{R}^i : \delta_j < y_j < \gamma_j, j = 1, \dots, i\}$, $\Pi \equiv \Pi_n$. Выберем здесь δ_j и γ_j зависящими от x , а именно

$$\begin{aligned} \delta_i &= x_i - a^{-1}(x_n - \varphi(\bar{x})), & \gamma_i &= x_i - b^{-1}(x_n - \varphi(\bar{x})), & i &= 1, \dots, n-1, \\ \delta_n &= x_n - Ba^{-1}(x_n - \varphi(\bar{x})), & \gamma_n &= x_n - \frac{Bb^{-1}}{2}(x_n - \varphi(\bar{x})). \end{aligned} \quad (16)$$

Отметим, что так как $x \in \widehat{G}_m$, то $\Pi \subset \widehat{\Omega}_m$ (см. [6]).

Из (7) и (15) следует, что

$$D^\beta \Phi_m(x) = \sum_{i=0}^n 2^{m|\beta|} B^{-\beta_n} \int_K (D^\beta \omega)(z) r_i^{(m)}(x, z) dz \equiv \sum_{i=0}^n R_i^{(m)}(x). \quad (17)$$

В качестве $F_\beta(x)$, как и в [6], возьмем $R_0^{(m)}(x)$. Можно проверить (см. [6]), что $R_0^{(m)}$ не зависит от m .

3. Из представления (15) для $R_i^{(m)}$, $i = 1, \dots, n$, получаем оценки

$$\begin{aligned} |R_i^{(m)}(x)| &\leq B^{-\beta_n} 2^{m|\beta|} \int_K \left[|(D^\beta \omega)(z)| \int_{\Pi_i} |Q_i(\bar{x} - 2^{-m}\bar{z}, x_n - B2^{-m}z_n, \xi)| \right. \\ &\quad \left. \times |D_i^l \Phi(\xi_1, \dots, \xi_i, x_{i+1} - 2^{-m}z_{i+1}, \dots, x_n - B2^{-m}z_n)| d\xi_1 \dots d\xi_i \right] dz. \end{aligned}$$

Так как для $x \in \widehat{G}_m$

$$\begin{aligned} \gamma_i - \delta_i &\leq \frac{b}{a} 2^{-m}, & i &= 1, \dots, n-1, & \gamma_n - \delta_n &\leq B \frac{b}{a} 2^{-m}, \\ (\gamma_i - \delta_i)^{-1} &\leq \left(1 - \frac{a}{b}\right)^{-1} 2^m, & i &= 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

то из оценки (2) из § 2 следует

$$|Q_i| \leq C_4^{ln} \left(1 - \frac{a}{b}\right)^{-i} \left(\frac{b}{a}\right)^l l^{-l} B^l 2^{m(i-l)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (18)$$

где C_4 — абсолютная постоянная.

Согласно (6) и (18)

$$\begin{aligned} |R_i^{(m)}(x)| &\leq C_5^{ln} B^{l-\beta_n} 2^{m(|\beta|+i-l)} l^{|\beta|-l} \\ &\times \int_{\frac{1}{2}}^1 \dots \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{\Pi_i} |D_i^l \Phi(\xi_1, \dots, \xi_i, x_{i+1} - 2^{-m}z_{i+1}, \dots, x_n - B2^{-m}z_n)| d\xi_1 \dots d\xi_i \right) dz, \end{aligned} \quad (19)$$

где $C_5 = \frac{C_1 C_4 b^2}{a(b-a)}$.

Интегрируем в (19) по $z_1, \dots, z_i$ и производим замену $\xi_s = x_s - 2^{-m}z_s$, $s = 1, \dots, i$. Согласно выбору параметров δ_j и γ_j по формуле (16) для $x \in \widehat{G}_m$

переменная $z_s = 2^m(x_s - \xi_s)$ изменяется в пределах от $\frac{a}{b}$ до $\frac{b}{a}$ для $s = 1, \dots, n-1$ и от $\frac{a}{2b}$ до $\frac{b}{a}$ для $s = n$. Следовательно, для $x \in \widehat{G}_m$

$$|R_i^{(m)}| \leq C_5^{ln} l^{|\beta|-l} 2^{m(|\beta|-l)} B^{l-\beta_n} \int_{\frac{a}{2b}}^{\frac{b}{a}} \dots \int_{\frac{a}{2b}}^{\frac{b}{a}} |(D_i^l \Phi)(\bar{x} - 2^{-m} \bar{z}, x_n - B 2^{-m} z_n)| dz. \quad (20)$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского, как в п. 1, и учитывая, что наряду с (8) выполняется также (13), имеем

$$\begin{aligned} \|R_i^{(m)}\|_{L_p(\widehat{G}_m)} &\leq C_6^{ln} l^{|\beta|-l} B^{l-\beta_n} 2^{m(|\beta|-l)} \|D_i^l \Phi\|_{L_p(\widehat{\Omega}_m)} \\ &\leq C_7^{ln} l^{|\beta|-l} (1+M+d)^{l-\beta_n} 2^{m(|\beta|-l)} \|D_i^l \Phi\|_{L_p(\widehat{\Omega}_m)}, \end{aligned}$$

где $C_6 = C_5 \frac{b}{a}$ и $C_7 = 2^{10} \frac{b}{a} (\frac{b}{a} n + b + 1)$ (мы приняли во внимание неравенство (11)), откуда и следует (10).

6.2. Оценки L_p -нормы производных продолженной функции. Пусть $-\infty \leq a_i < c_i < d_i < b_i \leq +\infty$, $i = 1, \dots, n-1$, $a_n \geq -\infty$; если $a_i = -\infty$ ($b_i = +\infty$), то $c_i \geq -\infty$ ($d_i \leq +\infty$). Наряду с множеством Ω , определяемым условиями (1)–(3), рассмотрим множество

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : c_i < x_i < d_i, \quad i = 1, \dots, n-1; \quad a_n < x_n < \varphi(\bar{x}) + H\}, \quad (21)$$

где $H = 2^{-m_0-1}$, а $m_0 \in \mathbb{Z}$.

Положим $G = \mathcal{E} \setminus \Omega$ и для $m \in \mathbb{Z}$ (см. рис. 3)

$$\begin{aligned} G_m = \{x \in G, \quad c_i < x_i < d_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ 2^{-m-1} \leq x_n - \varphi(\bar{x}) < 2^{-m}\}, \quad m \geq m_0 - 1, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\tilde{G}_m = G_{m-1} \cup G_m \cup G_{m+1}, \quad m \geq m_0. \quad (23)$$

Отметим, что

$$G = \bigcup_{m=m_0+1}^{\infty} G_m. \quad (24)$$

ЛЕММА 12. *Существует число $C_8 > 0$ такое, что для любых $n, l \in \mathbb{N}$ существует последовательность неотрицательных функций $\psi_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq m_0$ (зависящих от m, n, l, φ), удовлетворяющих следующим условиям:*

- 1) $\sum_{m=m_0}^{\infty} \psi_m(x) = \begin{cases} 1, & x \in G, \\ 0, & x \in \Omega; \end{cases}$
- 2) $\bigcup_{m=m_0+1}^{\infty} \text{supp } \psi_m \subset G,$

причем кратность покрытия $\kappa(\{\text{supp } \psi_m\}_{m \in \mathbb{Z}}) = 2$;

- 3) $G_m \subset \text{supp } \psi_m \subset \tilde{G}_m, \quad m \geq m_0;$
- 4) $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n: |\alpha| \leq l \text{ и } \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$|(D^\alpha \psi_m)(x)| \leq [C_8^n (1+M) l 2^m]^{|\alpha|}. \quad (25)$$

Рис. 3

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продолжим функцию φ с параллелепипеда $\{a_i < x_i < b_i, i = 1, \dots, n-1\}$ на $\mathbb{R}^{n-1}$ с сохранением константы Липшица и обозначим продолженную функцию через φ^* .

Рассмотрим множества

$$\begin{aligned}\Omega^* &= \{x \in \mathbb{R}^n : x_n < \varphi^*(\bar{x})\}, \\ G^* &= \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}^*, \\ G_m^* &= \{x \in G^* : \varphi^*(\bar{x}) + 2^{-m-1} \leq x_n < \varphi^*(\bar{x}) + 2^{-m}\}, \quad m \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Пользуясь леммой 7, построим разбиение единицы $\psi_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{Z}$. Тогда функции ψ_m , $m \geq m_0$, удовлетворяют требованиям леммы 12.

Пусть $f \in W_p^l(\Omega)$. Положим $A = 200(Mn + 1)$ и выберем число $m_0 \in \mathbb{Z}$ так, чтобы

$$20A2^{-m_0} < \varepsilon, \quad 8 \cdot 2^{-m_0} < \min_{i=1, \dots, n-1} \{c_i - a_i, b_i - d_i\}. \quad (26)$$

Для $x \in G$ определим оператор продолжения [6]

$$\begin{aligned}(Tf)(x) &= \sum_{m=m_0}^{+\infty} \psi_m(x) \int_{\mathbb{R}^n} f(\bar{x} - 2^{-m}\bar{z}, x_n - A2^{-m}z_n) \omega(z) dz \\ &\equiv \sum_{m=m_0}^{+\infty} \psi_m(x) f_m(x),\end{aligned} \quad (27)$$

где ω — функция, удовлетворяющая условиям теоремы 2. (Если $x \in \Omega$, то $(Tf)(x) = f(x)$.) В силу указанного выбора параметров

$$\text{если } x \in \tilde{G}_m, \quad z \in K, \quad \text{то } (\bar{x} - 2^{-m}\bar{z}, x_n - A2^{-m}z_n) \in \tilde{\Omega}_m, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_m = \{x \in \mathbb{R}^n : & a_i < x_i < b_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ & -8(Mn+2A)2^{-m} < x_n - \varphi(\bar{x}) \leq -8(Mn+1)2^{-m}\}, \end{aligned} \quad (29)$$

и значения функции Tf на множестве $\tilde{G}_m$ определяются значениями функции f на множестве $\tilde{\Omega}_m$. (Выбор параметров, определяющих множество $\tilde{\Omega}_m$, связан с применением леммы 11 – см. доказательство леммы 13.)

ЛЕММА 13. *Оператор T , определенный равенством (27), обладает тем свойством, что при $1 \leq p \leq +\infty$*

$$T: L_p(\Omega) \rightarrow L_p(\mathcal{E}),$$

причем существует число $C_9 > 0$ такое, что для любых $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$, $l \in \mathbb{N}$

$$\|T\|_{L_p(\Omega) \rightarrow L_p(\mathcal{E})} \leq C_9^{ln}. \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как кратность покрытия $\{\text{supp } \psi_m\}_{m=m_0}^{+\infty}$ равна 2, то согласно неравенству Гёльдера при $1 \leq p < +\infty$

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L_p(G)}^p &\leq 2^{p-1} \int_G \sum_{m=m_0}^{+\infty} |\psi_m(x)|^p |f_m(x)|^p dx \\ &= 2^{p-1} \sum_{m=m_0}^{+\infty} \int_{\tilde{G}_m} |\psi_m(x)|^p |f_m(x)|^p dx \leq 2^p \sum_{m=m_0}^{+\infty} \|f_m\|_{L_p(\tilde{G}_m)}^p. \end{aligned}$$

Положим в лемме 11 $a = \frac{1}{4}$, $b = 2$, $B = A$, $d = Mn + 1$, $c = 8(Mn + 2A)$; тогда согласно (26) $\tilde{G}_m \subset \hat{G}_m$, а $\hat{\Omega}_m = \tilde{\Omega}_m$, следовательно, согласно неравенству (9)

$$\|Tf\|_{L_p(G)} \leq 2C_2^{ln} \left(\sum_{m=m_0}^{+\infty} \|f\|_{L_p(\tilde{\Omega}_m)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2C_2^{ln} \kappa^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(\Omega)},$$

где κ – кратность покрытия $\{\tilde{\Omega}_m\}_{m=m_0}^{\infty}$ ($\kappa \leq 500$ – см. [6]), откуда и следует (30). Рассуждения при $p = +\infty$ аналогичны. Оператор T , определенный равенством (27) с $m_0 \in \mathbb{N}$, обладает следующим свойством.

ЛЕММА 14. *Существует число $C_{10} > 0$ такое, что для любых $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$, $l \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$: $|\alpha| \leq l$, и для любых $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$*

$$\|D^\alpha(Tf)\|_{L_p(\mathcal{E})} \leq C_{10}^{ln} (1 + M)^{2l} (\|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)} + \|f\|_{w_p^{l, \dots, l}(\Omega)}). \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле Ньютона–Лейбница

$$D^\alpha(Tf)(x) = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta \sum_{m=m_0}^{+\infty} D^{\alpha-\beta} \psi_m(x) D^\beta f_m(x).$$

Обозначим

$$I_{\alpha\beta}(x) = \sum_{m=m_0}^{+\infty} D^{\alpha-\beta} \psi_m(x) D^\beta f_m(x).$$

Тогда

$$\|D^\alpha(Tf)\|_{L_p(G)} \leq \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta K_{\alpha\beta}^{\frac{1}{p}}, \quad (32)$$

где $K_{\alpha\beta} = \|I_{\alpha\beta}\|_{L_p(G)}^p$. Согласно неравенству (9) из леммы 11, как и при доказательстве леммы 13,

$$K_{\alpha\alpha}^{\frac{1}{p}} \leq C_9^{ln} \|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)}. \quad (33)$$

Пусть теперь $\beta \neq \alpha$ ($\beta \leq \alpha$). Согласно лемме 12

$$\sum_{m=m_0}^{+\infty} D^{\alpha-\beta} \psi_m(x) = 0, \quad x \in G.$$

Отсюда следует, что если F_β – функция из леммы 11 (напомним, что F_β не зависит от m), то

$$I_{\alpha\beta}(x) = \sum_{m=m_0}^{+\infty} D^{\alpha-\beta} \psi_m(x) [(D^\beta f_m)(x) - F_\beta(x)], \quad x \in G,$$

и, как при доказательстве леммы 13,

$$K_{\alpha\beta} \leq 2^p \sum_{m=m_0}^{+\infty} \|D^{\alpha-\beta} \psi_m (D^\beta f_m - F_\beta)\|_{L_p(\tilde{G}_m)}^p.$$

Согласно неравенству (25)

$$|(D^{\alpha-\beta} \psi_m)(x)| \leq (C_8^n (1+M))^{|\alpha|-|\beta|} l^{|\alpha|-|\beta|} 2^{m(|\alpha|-|\beta|)},$$

где $C_8 > 0$ – абсолютная постоянная. Следовательно,

$$K_{\alpha\beta} \leq C_{10}^{nlp} (1+M)^{(|\alpha|-|\beta|)p} l^{(|\alpha|-|\beta|)p} \sum_{m=m_0}^{+\infty} 2^{m(|\alpha|-|\beta|)p} \|D^\beta f_m - F_\beta\|_{L_p(\tilde{G}_m)}^p,$$

где $C_{10} > 0$ – абсолютная постоянная.

Применяя теперь неравенство (10) из леммы 11 (с теми же a, b, B, d, c , что и при доказательстве леммы 13), получим

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta}^{\frac{1}{p}} &\leq \left[(C_3 C_{10})^{nlp} (1+M)^{(l+|\alpha|-|\beta|)p} l^{(l+|\alpha|-|\beta|)p} \sum_{m=m_0}^{+\infty} 2^{m(l+|\alpha|-|\beta|)p} \|f\|_{w_p^{l,\dots,l}(\tilde{\Omega}_m)}^p \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_{11}^{nl} (1+M)^{2l} \|f\|_{w_p^{l,\dots,l}(\Omega)}, \end{aligned} \quad (34)$$

где $C_{11} > 0$ – абсолютная постоянная.

Искомое неравенство (31) следует из (32), (33) и (34).

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в определении оператора T $m_0 \leq 0$ и $|\alpha| = l$, то неравенство (31) остается в силе, поскольку при выводе неравенства (33) знак m_0 не играет роли при любых α с $|\alpha| \leq l$, а при выводе неравенства (34) при $|\alpha| = l$ (в отличие от случая $|\alpha| < l$) константа также не зависит от m_0 .

ЛЕММА 15. *Оператор T , определенный равенством (27), обладает тем свойством, что при $1 \leq p \leq +\infty$, $l \in \mathbb{N}$*

$$T: w_p^l(\Omega) \rightarrow w_p^l(\mathcal{E}),$$

причем существует число $C_{12} > 0$ такое, что для любых $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$, $l \in \mathbb{N}$

$$\|T\|_{w_p^l(\Omega) \rightarrow w_p^l(\mathcal{E})} \leq C_{12}^{ln} (1 + M)^{2l}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство следует из неравенства (31) и сделанного выше замечания (предельный переход показывает, что последнее неравенство справедливо и для любых функций из пространства $w_p^l(\Omega)$).

Пусть теперь

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}, -\infty < x_n < \varphi(\bar{x})\},$$

где φ удовлетворяет условию Липшица с постоянной M .

ЛЕММА 16. *Оператор продолжения T , определенный равенством (27) с $m_0 = -(3 + [\log_2 l^l])$, обладает тем свойством, что при $1 \leq p \leq +\infty$, $l \in \mathbb{N}$*

$$T: L_p(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega^\delta), \quad T: w_p^l(\Omega) \rightarrow w_p^l(\Omega^\delta),$$

где $\delta = \frac{l^l}{1+M}$, причем существует число $C_{13} > 0$ такое, что для любых $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$, $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|T\|_{L_p(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega^\delta)} &\leq C_{13}^{ln}, \\ \|T\|_{w_p^l(\Omega) \rightarrow w_p^l(\Omega^\delta)} &\leq C_{13}^{ln} (1 + M)^{2l}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [6] известно, что при $x \in G = \bigcup_{m=m_0+1}^{+\infty} G_m$ справедливы неравенства

$$\frac{x_n - \varphi(\bar{x})}{1 + M} \leq \varrho(x, \partial\Omega) < x_n - \varphi(\bar{x}).$$

Отсюда следует

$$\delta = \frac{l^l}{1 + M} \leq \frac{2^{-m_0-2}}{1 + M} < \frac{x_n - \varphi(\bar{x})}{1 + M} \leq \varrho(x, \partial\Omega),$$

значит, $G \supset \Omega^\delta$, и тем самым оператор T продолжает функции с Ω на Ω^δ .

Теперь утверждение леммы 16 следует из лемм 13, 14 и замечания к лемме 14.

§ 7. Двусторонняя оценка минимальной нормы операторов продолжения для открытых множеств с границей класса Lip 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет границу класса Lip 1, если существуют числа $\varepsilon > 0$, $M > 0$, $s \in \mathbb{N}$ и открытые параллелепипеды V_j , $j = 1, \dots, s$, такие, что выполняются следующие условия:

$$1) \quad \partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^s (V_j)_\varepsilon;$$

2) существует преобразование λ_j ($j = 1, \dots, s$), являющееся суперпозицией поворотов и отражений, такое, что

$$\lambda(V_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : a_{ij} < x_i < b_{ij}, \quad i = 1, \dots, n\},$$

где $-\infty \leq a_{ij} < b_{ij} \leq +\infty$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, s$, и

$$\lambda_j(\Omega \cap V_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \in V_j^*, \quad a_{nj} < x_n < \varphi_j(\bar{x})\},$$

где $V_j^* = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : a_{ij} < x_i < b_{ij}, \quad i = 1, \dots, n-1\}$, причем

$$\begin{aligned} |\varphi_j(\bar{x}) - \varphi_j(\bar{y})| &\leq M|\bar{x} - \bar{y}|, & \bar{x}, \bar{y} \in V_j^*, \\ a_{nj} + \varepsilon &< \varphi_j(\bar{x}) < b_{nj} - \varepsilon, & \bar{x} \in V_j^*; \end{aligned}$$

3) если $V_j \cap V_k \cap \Omega = \emptyset$, то $V_j \cap V_k = \emptyset$.

Пусть Ω имеет границу класса Lip 1 с параметрами s , M , ε . В работе [10] строится последовательность открытых множеств Ω_j , $j = 1, \dots, s$, таких, что $\Omega \equiv \Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \dots \subset \Omega_s$, причем существуют δ , зависящее только от ε , M и n , такое, что

$$\Omega_s \supset \Omega^\delta,$$

и набор параллелепипедов $\mathcal{U}_j \subset V_j$, $j = 1, \dots, n$, обладающих следующими свойствами.

Множество $\Omega_j \setminus \Omega_{j-1} \subset \mathcal{U}_j$;

$$\lambda_j(\mathcal{U}_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : c_{ij} < x_i < d_{ij}, \quad i = 1, \dots, n\},$$

где $a_{ij} < c_{ij} < d_{ij} < b_{ij}$, $i = 1, \dots, n-1$ (если $a_{ij} = -\infty$, то $c_{ij} \geq -\infty$; если $b_{ij} = +\infty$, то $d_{ij} \leq +\infty$); множество $\lambda_j(V_j \cap \Omega_j)$ имеет вид

$$\lambda_j(V_j \cap \Omega_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : a_{ij} < x_i < b_{ij}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad a_{nj} < x_n < \tilde{\varphi}_j(\bar{x})\},$$

где функция $\tilde{\varphi}_j$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $M_j = M(1+2^{j-s})$, $a_{nj} + \varepsilon_j < \tilde{\varphi}_j(\bar{x}) < b_{nj} - \varepsilon_j$, $\bar{x} \in V_j^*$, где $\varepsilon_j = \varepsilon \left(\frac{3}{4} - 2^{j-s-3} \right)$.

Это, в частности, означает, что множества Ω_j имеют границу класса Lip 1 с параметрами ε_j , M_j и параллелепипедами $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_s$.

В соответствии с формулой (21) из § 6 определим для $j = 1, \dots, s$ множества $\mathcal{E}_j$ равенством

$$\lambda_j(\mathcal{E}_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : c_{ij} < x_i < d_{ij}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad a_{nj} < x_n < \tilde{\varphi}_j(\bar{x}) + H_j\}.$$

Рис. 4

Построим теперь операторы продолжения $R_1, \dots, R_s$. Для функций f , заданных на Ω_{j-1} ($\Omega_0 \equiv \Omega$), положим (см. рис. 4)

$$(R_j f)(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega_{j-1}, \\ (\Lambda_j^{-1} T_j \Lambda_j f)(x), & x \in \Omega_j \setminus \Omega_{j-1}, \end{cases} \quad (1)$$

где $(\Lambda_j g)(x) = g(\lambda_j^{-1} x)$, $(\Lambda_j^{-1} g)(x) = g(\lambda_j(x))$, а T_j — оператор, построенный в § 6 для множества $\lambda_j(\Omega \cap V_j)$:

$$(T_j h)(x) = \begin{cases} h(x), & x \in \lambda_j(\Omega_{j-1}), \\ \sum_{m=m_0}^{\infty} \psi_{m,j}(x) \times \int_{\mathbb{R}^n} h(\bar{x} - 2^{-m} \bar{z}, x_n - A_j 2^{-m} z_n) \omega(z) dz, & x \in \lambda_j(\mathcal{C}_j \setminus \Omega_j), \end{cases} \quad (2)$$

где $A_j = 200(M_j n + 1)$, а $m_{0,j}$ выбрано в соответствии с формулой (26) из § 6.

Положим, наконец,

$$R = R_s \dots R_1 \quad (3)$$

(этот оператор продолжает функции, заданные на Ω , на множество $\Omega_s \supset \Omega^\delta$).

ТЕОРЕМА 5. Для любого ограниченного множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с границей класса $\text{Lip } 1$ существуют $\delta = \delta(\Omega) > 0$ и $C_1(\Omega) > 0$ такие, что для любых $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$

$$R: L_p(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega^\delta), \quad R: w_p^l(\Omega) \rightarrow w_p^l(\Omega^\delta), \quad (4)$$

причем

$$\|R\|_{L_p(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega^\delta)} \leq C_1(\Omega)^l, \quad \|R\|_{w_p^l(\Omega) \rightarrow w_p^l(\Omega^\delta)} \leq C_1(\Omega)^l. \quad (5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение (4) доказано в [10], новым моментом являются оценки (5) для нормы оператора продолжения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что для $j = 1, \dots, s$ существуют такие $B_j > 0$, зависящие только от n , M_j и ε_j , что

$$\|R_j\|_{w_p^l(\Omega_{j-1}) \rightarrow w_p^l(\Omega_j)} \leq B_j^l, \quad (6)$$

где число δ выбирается, как описано выше. Согласно правилам дифференцирования для $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, для $x \in \Omega_j \setminus \Omega_{j-1}$

$$D^\alpha((\Lambda_j^{-1}g)(x)) = D^\alpha(g(\lambda_j(x))) = \sum_{|\beta|=|\alpha|} C_{\alpha\beta}(D^\beta g)(\lambda_j(x))$$

и для $x \in \lambda_j(\mathcal{E}_j \setminus \Omega_{j-1})$

$$D^\alpha((\Lambda_j g)(x)) = \sum_{|\beta|=|\alpha|} \tilde{C}_{\alpha\beta}(D^\beta g)(\lambda_j^{-1}(x)),$$

где $|C_{\alpha\beta}|, |\tilde{C}_{\alpha\beta}| \leq 1$. Поэтому для $f \in \omega_p^l(\Omega_{j-1})$

$$\begin{aligned} \|R_j f\|_{w_p^l(\Omega_j \setminus \Omega_{j-1})} &= \sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha(R_j f)\|_{L_p(\Omega_j \setminus \Omega_{j-1})} \\ &\leq \sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha(\Lambda_j^{-1} T_j \Lambda_j f)\|_{L_p(\mathcal{E}_j \setminus \Omega_{j-1})} \\ &= \sum_{|\alpha|=l} \left\| \sum_{|\beta|=l} C_{\alpha\beta}(D^\beta T_j \Lambda_j f)(\lambda_j(x)) \right\|_{L_p(\mathcal{E}_j \setminus \Omega_{j-1})} \\ &\leq \sum_{|\alpha|=l} \sum_{|\beta|=l} |C_{\alpha\beta}| \|D^\beta(T_j \Lambda_j f)\|_{L_p(\lambda_j(\mathcal{E}_j \setminus \Omega_{j-1}))} \\ &\leq l^n \|T_j \Lambda_j f\|_{w_p^l(\lambda_j(\mathcal{E}_j \setminus \Omega_{j-1}))}. \end{aligned}$$

Согласно лемме 15 отсюда следует

$$\|R_j f\|_{w_p^l(\Omega_j \setminus \Omega_{j-1})} \leq \tilde{B}_j^l \|\Lambda_j f\|_{w_p^l(\lambda_j(\Omega_{j-1} \cap V_j))},$$

где $\tilde{B}_j > 0$ зависят только от n и M_j .

Остается заметить, что, как и выше,

$$\|\Lambda_j f\|_{w_p^l(\lambda_j(\Omega_{j-1} \cap V_j))} \leq l^n \|f\|_{w_p^l(\Omega_{j-1} \cap V_j)},$$

и мы получаем (6).

Наконец,

$$\|R\|_{w_p^l(\Omega) \rightarrow w_p^l(\Omega^\delta)} \leq \prod_{j=1}^s \|R_j\|_{w_p^l(\Omega_{j-1}) \rightarrow w_p^l(\Omega_j)} \leq \left(\prod_{j=1}^s A_j \right)^l.$$

Для доказательства более простой первой из оценок (5) вместо леммы 15 нужно воспользоваться леммой 13.

ТЕОРЕМА 6. 1) Для любого ограниченного открытого множества Ω с границей класса $\text{Lip } 1$ существуют числа $C_2(\Omega) > 0$ и $C_3(\Omega) > 0$ такие, что для любых $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$

$$C_2(\Omega)^l l^l \leq \inf_{T: W_p^l(\Omega) \rightarrow W_p^l(\mathbb{R}^n)} \|T\| \leq C_3(\Omega)^l l^l. \quad (7)$$

2) Если $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}, -\infty < x_n < \varphi(\bar{x})\}$, где φ удовлетворяет условию Липшица, то существует такое $C_4(\Omega) > 0$, что для любых $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$

$$1 \leq \inf_{T: W_p^l(\Omega) \rightarrow W_p^l(\mathbb{R}^n)} \|T\| \leq C_4(\Omega)^l. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Согласно теореме 1' для множества Ω и параметра $\delta = \delta(\Omega)$, определенного в теореме 5, существует функция φ такая, что $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\varphi \equiv 1$ на Ω , $0 \leq \varphi \leq 1$ на $\Omega^\delta \setminus \Omega$, $\varphi \equiv 0$ вне Ω^δ .

Из теоремы 1 для $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$: $|\alpha| \leq l$ следует неравенство

$$|(D^\alpha \varphi)(x)| \leq C_5^l l^{|\alpha|} \delta^{-|\alpha|}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (9)$$

где C_5 зависит только от n .

Положим для $f \in W_p^l(\Omega)$

$$(Sf)(x) = (Rf)(x)\varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (10)$$

Согласно лемме 13

$$\|Sf\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C_5^l \|Rf\|_{L_p(\Omega^\delta)} \leq C_6(\Omega)^l \|f\|_{L_p(\Omega)},$$

где $C_6(\Omega)$ зависит только от Ω .

Для $|\alpha| = l$ получаем (согласно (9) и теоремам 4 и 5)

$$\begin{aligned} \|D^\alpha(Sf)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} &\leq \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta \|D^{\alpha-\beta} \varphi D^\beta(Rf)\|_{L_p(\Omega^\delta)} \\ &\leq C_7(\Omega)^l \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta l^{l-|\beta|} \|D^\beta(Rf)\|_{L_p(\Omega^\delta)} \\ &\leq C_8(\Omega)^l \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta l^l \|Rf\|_{W_p^l(\Omega^\delta)} \leq C_9(\Omega)^l l^l \|f\|_{W_p^l(\Omega)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $C_7(\Omega)$, $C_8(\Omega)$ и $C_9(\Omega)$ зависят только от Ω , что и доказывает оценку сверху в неравенстве (7).

2. Для доказательства оценки сверху в неравенстве (8) рассмотрим оператор продолжения T , построенный в лемме 16, и положим для $f \in W_p^l(\Omega)$

$$(Sf)(x) = (Tf)(x)\varphi(x),$$

где функция φ определена в п. 1 с $\delta = \frac{l^l}{1+M}$.

Согласно (9) и лемме 15

$$\|Sf\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{10}^l \|f\|_{L_p(\Omega)},$$

где C_{10} зависит только от n .

Для $|\alpha| = l$ получаем (согласно (9) и теореме 4)

$$\begin{aligned} \|D^\alpha(Sf)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} &\leq \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta \|D^{\alpha-\beta} \varphi D^\beta(Tf)\|_{L_p(\Omega^\delta)} \\ &\leq C_{11}^l \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta \left(\frac{l^l}{1+M} \right)^{-(l-|\beta|)} l^{l-|\beta|} \|D^\beta(Tf)\|_{L_p(\Omega^\delta)} \\ &\leq C_{12}(\Omega)^l \left[\sum_{\substack{0 \leq \beta \leq \alpha \\ \beta \neq \alpha}} C_\alpha^\beta l^{-l(l-|\beta|)} l^{l-|\beta|} \|D^\beta(Tf)\|_{L_p(\Omega^\delta)} + \|D^\alpha(Tf)\|_{L_p(\Omega^\delta)} \right] \\ &\leq C_{13}(\Omega)^l \left(\|D^\alpha(Tf)\|_{L_p(\Omega^\delta)} + \sum_{\substack{0 \leq \beta \leq \alpha \\ \beta \neq \alpha}} C_\alpha^\beta l^{-l(l-|\beta|)+l-|\beta|} \|D^\beta(Tf)\|_{L_p(\Omega^\delta)} \right) \\ &\leq C_{14}(\Omega)^l \|Tf\|_{W_p^l(\Omega^\delta)} \leq C_{15}(\Omega)^l \|f\|_{W_p^l(\Omega)}, \end{aligned} \quad (12)$$

где C_{11} зависит только от n , а $C_{12}(\Omega), \dots, C_{15}(\Omega)$ зависят только от Ω , что и доказывает оценку сверху в неравенстве (8).

3. Докажем оценку снизу (7) (в (8) оценка снизу тривиальна). Из неравенства Колмогорова–Стейна по индукции по n следует, что для $f \in W_p^l(\mathbb{R}^n)$ при $|\alpha| < l$

$$\|D^\alpha f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{\pi}{2} \right)^n \|f\|_{W_p^l(\mathbb{R}^n)}.$$

Пусть $T: W_p^l(\Omega) \rightarrow W_p^l(\mathbb{R}^n)$ – произвольный оператор продолжения. Тогда оценка снизу в неравенстве (7) следует из леммы 6 и теоремы 4 с $|\beta| = l-1$:

$$\begin{aligned} \|T\|_{W_p^l(\Omega) \rightarrow W_p^l(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{W_p^l(\Omega)} &\geq \frac{C^*(\Omega, p, p, l, \beta)}{C^*(\mathbb{R}^n, p, p, l, \beta)} \\ &\geq \left(\frac{2}{\pi} \right)^n C_5(n, \mathcal{D})^l l^{l-1} \geq C_{16}(\Omega)^l l^l, \end{aligned}$$

где $C_{16}(\Omega)$ зависит только от Ω . Теорема 6 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО п. б) теорем 1, 1', 1''. Если предположить противное, то для функции φ , определенной в доказательстве теоремы 6, вместо неравенства (9) будет выполняться неравенство

$$|(D^\alpha \varphi)(x)| \leq C_5^l l^{\sigma|\alpha|} \delta^{-|\alpha|}, \quad \sigma < 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (13)$$

Отсюда следует, что в оценке (11) вместо l^l появится множитель $l^{\sigma l}$. Это означает, что

$$\inf_{T: W_p^l(\Omega) \rightarrow W_p^l(\mathbb{R}^n)} \|T\| \leq C_3(\Omega)^l l^{\sigma l},$$

что противоречит полученной оценке снизу (см. (7)).

Список литературы

1. *Балашова Г. С.* О теоремах продолжения в пространствах бесконечно дифференцируемых функций // Матем. сб. 1982. Т. 118. № 3. С. 371–385.
2. *Балашова Г. С.* О продолжении бесконечно дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 6. С. 1292–1308.
3. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
4. *Буренков В. И.* Формула Тейлора и интегральные представления Соболева // Тр. МИАН СССР. 1974. Т. 131. С. 33–38.
5. *Буренков В. И.* О продолжении функций с сохранением и ухудшением дифференциальных свойств // ДАН СССР. 1975. Т. 224. № 2. С. 269–272.
6. *Буренков В. И.* Об одном способе продолжения дифференцируемых функций // Тр. МИАН СССР. 1976. Т. 140. С. 27–67.
7. *Буренков В. И., Файн Б. Л.* О продолжении функций из анизотропных классов с сохранением класса // Тр. МИАН СССР. 1979. Т. 150. С. 52–66.
8. *Буренков В. И.* О точных постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале // Тр. МИАН СССР. 1980. Т. 156. С. 23–29.
9. *Буренков В. И.* IX школа по теории операторов в функциональных пространствах: Тез. докладов. Тернополь, 1984. С. 19–20.
10. *Буренков В. И.* О продолжении функции с сохранением полунормы // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 172. С. 81–95.
11. *Буренков В. И.* О точных постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале. II // Тр. МИАН СССР. 1986. Т. 173. С. 38–49.
12. *Буренков В. И., Горбунов А. Л.* XVI школа по теории операторов в функциональных пространствах: Тез. докладов. Нижний Новгород, 1991. С. 29.
13. *Буренков В. И., Горбунов А. Л.* Двусторонняя оценка минимальной нормы оператора продолжения для пространства Соболева // Докл. РАН. 1993. Т. 330. № 6. С. 680–682.
14. *Глушко В. П.* Об областях, звездных относительно шара // ДАН СССР. 1962. Т. 144. С. 1215–1216.
15. *Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983.
16. *Горбунов А. Л.* XXIX научная конференция факультета физико-математических и естественных наук Российского университета дружбы народов: Тез. докладов. М., 1993. С. 41.
17. *Кудрявцев Л. Д.* К вопросу о полиномиальных следах // Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 161. С. 149–157.
18. *Кудрявцев Л. Д.* О вариационном методе отыскания обобщенных решений дифференциальных уравнений в функциональных пространствах со степенным весом // Дифференц. уравн. 1983. Т. 19. № 10. С. 1723–1740.
19. *Кудрявцев Л. Д., Никольский С. М.* Пространства дифференцируемых функций многих переменных и теоремы вложения // Итоги науки и техники. Матем. анализ. Т. 26. М.: ВИНТИ, 1988. С. 1–157.
20. *Мазья В. Г., Поборчий С. В.* О продолжении функций из пространств Соболева во внешность и внутрь малой области // Вестн. ЛГУ. 1984. № 7.
21. *Митягин Б. М.* Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах // УМН. 1964. Т. 16. № 4. С. 63–132.
22. *Никольский С. М.* К вопросу о неравенствах между частными производными // Тр. МИАН СССР. 1961. Т. 61. С. 147–164.
23. *Решетняк Ю. Г.* Некоторые интегральные представления дифференцируемых функций // Сиб. матем. журн. 1971. Т. 12. С. 420–432.
24. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. 1-е изд. Л.: ЛГУ, 1950. 2-е изд. Новосибирск, НГУ, 1962. 3-е изд. М.: Наука, 1988.
25. *Файн Б. Л.* О продолжении функций с бесконечного цилиндра с ухудшением класса // Тр. МИАН СССР. 1970. Т. 140. С. 277–284.

26. Яковлев Г. Н. О следах функций из пространства W_p^l на кусочно-гладких поверхностях // Матем. сб. 1967. Т. 74. № 4. С. 526–543.
27. Hestens M. R. Extensions of the range of a differentiable function // Duke Math. J. 1941. V. 8. P. 183–192.
28. Jones P. W. Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces. Prepr. Univ. of Chicago, 1980. P. 44.
29. Calderon A. P. Lebesgues spaces of differentiable functions and distributions // Proc. Symp. Pure Math. 1961. V. 4. P. 33–49.
30. Michlin S. G. Konstanten in einigen Ungleichungen // Teubner-texte zur Matematik. B. 35. Leipzig, 1981.
31. Paukszto M. V. On the asymptotic behaviour of the best constant of the extension of functions from the angle // Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences. 1982. V. 30. № 1–2. P. 79–83.
32. Paukszto M. V., Ryll-Nardzewski C. On the Stein Type Extension Operators // Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences. 1982. V. 30. № 7–8.
33. Seeley R. T. Extensions of C^∞ functions defined in a half space // Proc. Amer. Math. Soc. 1964. V. 15. P. 625–626.
34. Стейн И. М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
35. Whitney H. Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets // Trans. Amer. Math. Soc. 1934. V. 36. P. 63–89.

Поступило в редакцию
12.VII.1995