Общероссийский математический портал

С. А. Гриценко, О нулях специального вида функций, связанных с L -функциями Гекке мнимых квадратичных полей, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 1, 45–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/im104>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 14:29:43

УДК 511

С. А. Гриценко

О нулях специального вида функций, связанных с L -функциями Гекке мнимых квадратичных полей

В работе получена оценка числа нулей на отрезке $[T, 2T]$ линейной комбинации специального вида вещественных функций, связанных с L -функциями Гекке одного и того же мнимого квадратичного поля, отвечающими комплексным характеристам.

Библиография: 23 наименования.

Введение

А. Сельберг определил в [1] класс S рядов Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}, \quad \operatorname{Re} s > 1,$$

удовлетворяющих следующим условиям:

1) существует целое неотрицательное число m такое, что функция $(s-1)^m F(s)$ целая;

2) коэффициенты Дирихле $a(n)$ удовлетворяют неравенствам

$$a(n) \ll_{\varepsilon} n^{\varepsilon}$$

для любого положительного ε , причем $a(1) = 1$;

3) существует функция $\gamma_F(s)$ вида

$$\gamma_F(s) = \varepsilon_1 Q^s \prod_{\nu=1}^k \Gamma(\lambda_{\nu} s + \mu_{\nu}),$$

где $|\varepsilon_1| = 1$, $k = k_F$ – натуральное число, $Q > 0$, $\lambda_{\nu} > 0$, $\operatorname{Re} \mu_{\nu} \geq 0$, и такая, что для функции $\Phi(s) = \gamma_F(s)F(s)$ справедливо тождество

$$\Phi(s) = \overline{\Phi}(1 - \bar{s});$$

4) при $\operatorname{Re} s > 1$ функция $F(s)$ раскладывается в эйлерово произведение:

$$F(s) = \prod_p (1 + a(p)p^{-s} + a(p^2)p^{-2s} + \dots),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 94-01-00002).

p пробегает простые числа,

$$\log F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)n^{-s},$$

где $b(n) = 0$, если n не равно положительной степени простого числа, причем $b(n) \ll n^{\theta}$ для некоторого $\theta \leq 1/2$.

В статье [2] для любой функции $F(s)$ из S определена степень $F(s)$ следующим образом:

$$d_F = 2 \sum_{\nu=1}^k \lambda_{\nu}.$$

Для примитивных (не представляющихся в виде $F_1(s)F_2(s)$, $F_1(s) \in S$, $F_2(s) \in S$) функций из своего класса A . Сельберг высказал в работе [1] ряд гипотез, в частности следующие.

1. При $x \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{n \leq x} |a(n)|^2 n^{-1} = \log x + O(1),$$

где $a(n)$ – коэффициенты Дирихле функции $F(s)$.

2. При $x \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{p \leq x} |a(p)|^2 p^{-1} = \log \log x + O(1).$$

3. При $x \rightarrow \infty$ справедлива оценка

$$\sum_{p \leq x} a(p)\bar{a}'(p)p^{-1} = O(1),$$

где p пробегает простые числа, а $a(n)$ и $a'(n)$ – коэффициенты Дирихле примитивных функций $F(s)$ и $F'(s)$, $F(s)$ и $F'(s)$ различны.

Изложим известные факты и гипотезы о распределении нулей рядов Дирихле (см. также [3]–[6]).

Пусть $F(s)$ – функция из класса S . Назовем нули $F(s)$, совпадающие с полюсами функции $\gamma_F(s)$, *тривиальными*, а остальные – *нетривиальными*.

Известно (см. [1]), что нетривиальные нули $F(s)$ расположены в полосе $1 - A \leq \operatorname{Re} s \leq A$, $A = A_F > 0$.

Кроме того, так как $F(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению риманова типа, то

$$N(T) \sim cT \log T, \quad c = c_F > 0,$$

где $N(T)$ – число нетривиальных нулей ρ функции $F(s)$ таких, что $0 < \operatorname{Im} \rho \leq T$.

Будем говорить, что для $F(s)$ *справедлива гипотеза Римана*, если все ее нетривиальные нули лежат на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$.

Известно, что существуют функции, представляющиеся в области $\operatorname{Re} s > 1$ рядами Дирихле и удовлетворяющие функциональным уравнениям риманова типа, но не имеющие разложений в эйлеровы произведения, для которых гипотеза Римана неверна. Таковы, например, функция Дэвенпорта–Хейльбронна (см. [7], [8], [3]),

дзета-функции Эшштейна, соответствующие неоднокласным бинарным квадратичным формам (см. [9], [10], [5], [6]), и дзета-функция Гурвица (см. [11], [12]). Все перечисленные функции представляются в виде линейных комбинаций рядов Дирихле, имеющих функциональное уравнение и разложение в эйлерово произведение.

Следующие гипотезы, принадлежащие соответственно А. Сельбергу [1], А. А. Карацубе [3] и Г. Монгмери (см. [1, с. 384]), пока не доказаны и не опровергнуты:

- для всех функций из класса S (которые по определению не только удовлетворяют функциональным уравнениям риманова типа, но и имеют разложения в эйлеровы произведения), справедлива гипотеза Римана;
- почти все нетривиальные нули функции Дэвенпорта–Хейльбронна лежат на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$;
- почти все нетривиальные нули дзета-функций Эшштейна лежат на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$.

Э. Бомбьери и Д. Хейчал в [5], пользуясь расширенной гипотезой Римана и другими дополнительными предположениями, доказали гипотезу Монгмери.

Введем три функции:

$$\rho(s) = \bar{\gamma}_F(1 - \bar{s})\gamma_F^{-1}(s) = \bar{\varepsilon}_1^2 Q^{1-2s} \prod_{\nu=1}^k \Gamma(\lambda_\nu(1-s) + \bar{\mu}_\nu) \Gamma^{-1}(\lambda_\nu + \mu_\nu),$$

$$\exp(i\theta(t)) = (\rho(1/2 + it))^{-1/2}, \quad Z(t) = \exp(i\theta(t)) F(1/2 + it).$$

Из функционального уравнения следует, что $Z(t)$ принимает вещественные значения при вещественных t . Отметим, что функция $Z(t)$ является аналогом функции Римана $\Xi(t)$ (см., например, [12, с. 253]).

Пусть теперь $a_1, \dots, a_N$ – произвольные вещественные числа. Рассмотрим функцию $\Phi_1(s)$ вида

$$\Phi_1(s) = \sum_{j=1}^N a_j (\rho_j(s))^{-1/2} F_j(s),$$

где $F_j(s)$ – функции из S .

Определим функцию $f(t)$:

$$f(t) = \Phi_1\left(\frac{1}{2} + it\right) = \sum_{j=1}^N a_j \left(\rho_j\left(\frac{1}{2} + it\right)\right)^{-1/2} F_j\left(\frac{1}{2} + it\right) = \sum_{j=1}^N a_j Z_j(t). \quad (1)$$

Начиная отсюда, будем считать, что $T \geq T_0 > 0$, где T_0 – достаточно большая постоянная, зависящая лишь от $F_1(s), \dots, F_N(s)$.

Пусть $N_0(T)$ – число нулей функции $\Phi_1(s)$ на отрезке $[1/2, 1/2 + iT]$, или, что то же самое, число нулей функции $f(t)$ на отрезке $[0, T]$.

Как отмечено в [3], $\Phi_1(s)$ “подобна” функции Дэвенпорта–Хейльбронна (все $F_j(s)$ удовлетворяют функциональным уравнениям риманова типа, а $\Phi_1(s)$, вообще говоря, не имеет разложения в эйлерово произведение). Если для $\Phi_1(s)$ справедлива гипотеза, сформулированная для функции Дэвенпорта–Хейльбронна (в связи с этим см. [1, п. 4]), то существует постоянная $c_1 = c_1(\Phi_1) > 0$ такая, что

$$N_0(T) \geq c_1 T \log T.$$

Назовем последнее неравенство *ожидаемым*.

Заметим, что если $F_1(s), \dots, F_N(s)$ являются функциями из класса S степени 1 или 2, то применение к функции $f(t)$ метода Харди–Литтлвуда [13] дает неравенство

$$N_0(T) \geq c_2 T, \quad c_2 > 0$$

(c_2 – абсолютная положительная постоянная).

Впервые принципиально более точная оценка величины $N_0(T)$, соответствующей функции Дэвенпорта–Хейльбронна, была получена С. М. Ворониным, который в 1980 г. в статье [14] доказал, что

$$N_0(T) \geq c_3 T \exp \left(\frac{1}{20} \sqrt{\log \log \log \log T} \right)$$

(c_3 – абсолютная положительная постоянная). Последнее неравенство означает, что прямая $\operatorname{Re} s = 1/2$ является “особой” для нулей функции Дэвенпорта–Хейльбронна.

В 1989 г. А. А. Карацуба разработал новый метод оценок снизу числа нулей некоторых рядов Дирихле на отрезках критической прямой, с помощью которого доказал для функции Дэвенпорта–Хейльбронна следующее утверждение [15]:

$$N_0(T) \geq T (\log T)^{0,5} (\log T)^{-\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое фиксированное число, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$. Затем в статье [16] А. А. Карацуба применил свой метод к оценке числа нулей на критической прямой функции $\Phi_1(s)$ для случая, когда $F_1(s), \dots, F_N(s)$ являются L -функциями Дирихле, отвечающими примитивным характерам (в нашей терминологии они относятся к функциям из класса S степени 1), и получил следующие оценки величины $N_0(T)$:

$$N_0(T) \geq T (\log T)^{2\beta} (\log T)^{-\varepsilon},$$

если характеры Дирихле $\chi_1, \dots, \chi_N$ имеют одинаковую четность, и

$$N_0(T) \geq T (\log T)^\beta (\log T)^{-\varepsilon}$$

в противном случае; здесь $\beta = (\varphi(K))^{-1}$, K – наименьшее общее кратное натуральных чисел $k_1, \dots, k_N$ – модулей характеров $\chi_1, \dots, \chi_N$; $\varphi(K)$ – функция Эйлера; ε – сколь угодно малое фиксированное число; $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$.

В дальнейшем в работе [3] множитель $(\log T)^{-\varepsilon}$ в правых частях последних трех неравенств был заменен медленнее убывающим множителем $\exp(-c_4 \sqrt{\log \log T})$ (c_4 – абсолютная положительная постоянная).

В статье [17] была получена следующая оценка снизу величины $N_0(T)$ для случая, когда $F_1(s), \dots, F_N(s)$ – функции из S степени 2.

ТЕОРЕМА. Пусть N – произвольное натуральное число, $a_1, \dots, a_N$ – произвольные вещественные числа, $a_1 \neq 0$, $T \geq T_0 > 0$. Пусть $f(t)$ – определенная формулой (1) функция, а $F_1(s), \dots, F_N(s)$ – функции степени 2 из S , удовлетворяющие условиям:

1) при $x \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические формулы

$$\sum_{p \leq x} |a_j(p)|^2 \log p = x + O(x(\log x)^{-1}),$$

где $a_j(n)$ – коэффициенты Дирихле функций $F_j(s)$, а p пробегает простые числа;

2) при $x \rightarrow \infty$ справедливы оценки

$$\sum_{p \leq x} a_j(p) \bar{a}_i(p) p^{-1} = O(1),$$

где $a_j(n)$ и $a_i(n)$ – коэффициенты Дирихле любых функций $F_j(s)$, $F_i(s)$, $1 \leq j \neq i \leq N$;

3) для любых j , $1 \leq j \leq N$, и любых простых чисел p существуют положительные постоянные c_{F_j} такие, что

$$|1 + a_j(p)p^{-1/2-it} + a_j(p^2)p^{-1-2it} + \dots| > c_{F_j};$$

4) если $F(s)$ – любая из функций $F_1(s), \dots, F_N(s)$, то при $x \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{n \leq x} |a(n)|^2 n^{-1} = A_F \log x + B_F + O((\log x)^{-4}),$$

где $a(n)$ – коэффициенты Дирихле функции $F(s)$, $A_F > 0$, B_F – постоянные, зависящие только от $F(s)$.

Тогда на отрезке $[T, 2T]$ лежит не меньше, чем

$$T \exp(\sqrt{\log \log \log T})$$

нулей нечетного порядка функции $f(t)$.

Отметим, что условие 2) есть гипотеза Сельберга, а условия 1) и 4) – слегка усиленные варианты упомянутых выше гипотез Сельберга о примитивных функциях из класса S .

Из нашей теоремы легко вывести, что

$$N_0(T) \geq \frac{1}{2} T \exp(\sqrt{\log \log \log T}).$$

Из этой оценки следует, что прямая $\operatorname{Re} s = 1/2$ является “особой” для нулей функции $\Phi_1(s)$, хотя она, очевидно, гораздо менее точна, чем выписанные выше оценки А. А. Карацубы, и далека от ожидаемой.

Доказательство теоремы было проведено методом Воронина (см. [11], [14]), разработанным им в 1980 г. для оценки числа нулей функции Дэвенпорта–Хейльброна, лежащих на отрезке критической прямой.

Утверждение теоремы носит условный характер. В настоящей статье указывается подкласс S_1 класса Сельберга S , все функции которого имеют степень 2 и удовлетворяют условиям 1)–4) теоремы. Будет доказано, что его составляют L -функции Гекке, соответствующие комплексным характерам. Для функций данного подкласса утверждение теоремы безусловное.

Пусть d – бесквадратное целое отрицательное число, $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ – мнимое квадратичное расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, D – кольцо целых алгебраических чисел в $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

Везде в дальнейшем под *идеалами* будут пониматься целые ненулевые идеалы кольца D , а под *классами идеалов* – их классы эквивалентности.

Известно (см., например, [18]), что классы идеалов образуют абелеву группу G конечного порядка по умножению.

Идеалы будем обозначать прописными рукописными латинскими буквами $\mathcal{A}$, а простые идеалы – через $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ и т.д.

Как и в монографии [11], будем называть *характерами Гекке* групповые характеры группы классов идеалов G .

Пусть χ – характер Гекке. При $\operatorname{Re} s > 1$ соответствующая ему L -функция Гекке определяется рядом Дирихле

$$L(s, \chi) = \sum_{\mathcal{A}} \chi(\mathcal{A}) (N(\mathcal{A}))^{-s}, \quad (2)$$

где $\mathcal{A}$ пробегает множество целых ненулевых идеалов, а $N(\mathcal{A})$ обозначает норму идеала $\mathcal{A}$.

Из однозначности разложения целых ненулевых идеалов в произведение простых и из мультипликативности функции нормы следует, что $L(s, \chi)$ имеет разложение в эйлерово произведение вида

$$L(s, \chi) = \prod_{\mathcal{P}} (1 - \chi(\mathcal{P}) (N(\mathcal{P}))^{-s})^{-1}, \quad \operatorname{Re} s > 1, \quad (3)$$

где $\mathcal{P}$ пробегает все простые ненулевые идеалы.

Введя обозначение

$$a(n) = \sum_{\mathcal{A}, N(\mathcal{A})=n} \chi(\mathcal{A}), \quad (4)$$

где суммирование ведется по всем целым ненулевым идеалам $\mathcal{A}$, перепишем (2) в виде

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s}, \quad \operatorname{Re} s > 1. \quad (5)$$

Пусть δ – дискриминант поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Известно (см., например, [18, с. 232]), что

$$\delta = \begin{cases} 4d, & \text{если } d \equiv 2, 3 \pmod{4}, \\ d, & \text{если } d \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Характер Дирихле $\chi_1(x)$ по модулю $|\delta|$ вида

$$\chi_1(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{|\delta|} \right), & \text{если } d \equiv 1 \pmod{4}, \\ (-1)^{\frac{x-1}{2}} \left(\frac{x}{|\delta|} \right), & \text{если } d \equiv 3 \pmod{4}, \\ (-1)^{\frac{x^2-1}{8} + \frac{x-1}{2} \cdot \frac{d'-1}{2}} \left(\frac{x}{|\delta|} \right), & \text{если } d = 2d', \end{cases}$$

называется *характером квадратичного поля* $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

Разобьем множество простых чисел p на три подмножества следующим образом:

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \{p \mid \chi_1(p) = 1\}, \\ \Pi_0 &= \{p \mid \chi_1(p) = 0\}, \\ \Pi_{-1} &= \{p \mid \chi_1(p) = -1\},\end{aligned}$$

где $\chi_1(n)$ – характер квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

Дальнейший план статьи таков: в § 1 приводятся вспомогательные утверждения об L -функциях Гекке, а в § 2 доказывается, что различные L -функции Гекке одного и того же мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, отвечающие комплексным характерам Гекке, удовлетворяют гипотезам 1)–4).

§1. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 1. Пусть χ – неглавный характер Гекке. Тогда L -функция Гекке $L(s, \chi)$ целая, причем:

$$1) \quad L(s, \chi) = \rho(s, \chi) L(1-s, \bar{\chi}), \text{ где}$$

$$\rho(s, \chi) = \frac{1}{\theta(\chi)} \left(\frac{\sqrt{d_\chi}}{2\pi} \right)^{1-2s} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)},$$

$\theta_\chi, d_\chi > 0$ – постоянные, зависящие лишь от χ , $|\theta_\chi| = 1$;

$$2) \quad L(1, \chi) \neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [19, гл. 7].

ЛЕММА 2. Пусть p – простое число, (p) – соответствующий ему главный идеал в D . Тогда

$$\begin{aligned}(p) &= \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2, \quad \mathcal{P}_1 \neq \mathcal{P}_2, \quad \text{если} \quad \chi_1(p) = 1, \\ (p) &= \mathcal{P}, \quad \text{если} \quad \chi_1(p) = -1, \\ (p) &= \mathcal{P}^2, \quad \text{если} \quad \chi_1(p) = 0,\end{aligned}$$

где $\mathcal{P}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$, – простые идеалы, $\chi_1(x)$ – характер квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см., например, в [20, гл. 3, § 8] или в [18, с. 232, 233].

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть χ – характер Гекке, $a(n)$ – числа, определенные в (4). Тогда при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\begin{aligned}L(s, \chi) &= \prod_{p \in \Pi_1} \left(1 - \frac{a(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} \right)^{-1} \prod_{p \in \Pi_0} \left(1 - \frac{a(p)}{p^s} \right)^{-2} \\ &\quad \times \prod_{p \in \Pi_{-1}} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}} \right)^{-1}.\end{aligned}\tag{6}$$

Утверждение следствия 1 непосредственно вытекает из определений, леммы 2 и тождества (3).

ЛЕММА 3. Пусть χ – характер Гекке, $a(n)$ – числа, определенные в (4). Тогда

$$a(1) = 1, \quad (7)$$

$$|a(n)| \leq \tau(n), \quad (8)$$

причем $a(n)$ – мультипликативная функция, принимающая лишь вещественные значения, $\tau(n)$ – число натуральных делителей числа n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (7) следует непосредственно из определений. Мультипликативность функции $a(n)$ вытекает из того факта, что $a(n)$ – коэффициенты ряда Дирихле, имеющего разложение в эйлерово произведение.

Далее, из определений легко находим, что $a(p^m)$ принимает одно из значений ± 1 при $p \in \Pi_0$ и $a(p^m)$ равно 0 или 1 при $p \in \Pi_{-1}$ (m – произвольное натуральное число).

Если же $p \in \Pi_1$, то

$$\begin{aligned} a(p^m) &= \sum_{l=0}^m \chi(\mathcal{P}_1^l) \chi(\mathcal{P}_2^{m-l}) = \sum_{l=0}^m \chi(\mathcal{P}_1^l) \bar{\chi}(\mathcal{P}_1^{m-l}) \\ &= \sum_{l=0}^m \bar{\chi}(\mathcal{P}_2^l) \bar{\chi}(\mathcal{P}_1^{m-l}) = \bar{a}(p^m), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ – различные простые идеалы такие, что $(p) = \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2$.

Из (9) имеем

$$|a(p^m)| \leq m + 1 = \tau(p^m),$$

откуда в силу мультипликативности $a(n)$ следует (8).

Отметим, что если $\bar{\chi}$ – характер Гекке, сопряженный χ , то, так как $a_\chi(n) = a_{\bar{\chi}}(n)$, из (5) следует, что

$$L(s, \chi) = L(s, \bar{\chi}). \quad (10)$$

ЛЕММА 4. Пусть $L(s, \chi)$ – L -функция Гекке, отвечающая неглавному характеру Гекке χ . Пусть $X, Y > 0$, $X \leq Y(\log Y)^2$, $XY = \left(\frac{\text{Im } s}{2\pi}\right)^2 |\delta|$, где δ – дискриминант квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

Тогда при $0 < \text{Re } s < 1$ справедлива формула

$$L(s, \chi) = \sum_{N(\mathcal{A}) < X} \chi(\mathcal{A}) (N(\mathcal{A}))^{-s} + \rho(s, \chi) \sum_{N(\mathcal{A}) < Y} \bar{\chi}(\mathcal{A}) (N(\mathcal{A}))^{s-1} + R,$$

где

$$\rho(s, \chi) = \frac{1}{\theta(\chi)} \left(\frac{\sqrt{d_\chi}}{2\pi} \right)^{1-2s} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)},$$

$\theta_\chi, d_\chi > 0$ – те же постоянные, что в лемме 1, а

$$R = O(X^{1/2-\sigma} (\log X)^2), \quad s = \sigma + it.$$

Доказательство см. в [21].

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть χ – неглавный характер Гекке, $s = \sigma + it$, $0 < \sigma < 1$. Тогда

$$L(s, \chi) = O(|t|^{1-\sigma} \log |t|).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Берем в лемме 4 $X = Y = \frac{|t|}{2\pi} \sqrt{|\delta|}$ и оцениваем получившиеся суммы тривиально, пользуясь (8), формулой Стирлинга, формулой частного суммирования и известным неравенством

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = O(x \log x).$$

ЛЕММА 5. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольно малое число, χ – неглавный характер Гекке, $a(n) = a_\chi(n)$ – соответствующие ему коэффициенты Дирихле, определенные в (4). Тогда справедлива оценка

$$\sum_{n \leq x} a(n) = O(x^{1/3+\varepsilon}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим формулу Перрона:

$$\sum_{n \leq x} a(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT_0}^{c+iT_0} L(s, \chi) \frac{x^s}{s} ds + O(x^{1+\varepsilon} T_0^{-1}),$$

где $c = 1 + (\log x)^{-1}$, $T_0 = x^{2/3}$.

Перенесем отрезок интегрирования на $\operatorname{Re} s = -\varepsilon$, $-T_0 \leq \operatorname{Im} s \leq T_0$. Так как $L(s, \chi)$ – целая функция, $L(s, \chi) = O(|t|^{1-\sigma} \log |t|)$, $s = \sigma + it$ (см. следствие 2) и $L(0, \chi) = 0$, то

$$\sum_{n \leq x} a(n) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\varepsilon-iT_0}^{-\varepsilon+iT_0} L(s, \chi) \frac{x^s}{s} ds + O(x^{1/3+\varepsilon}).$$

Перейдем к неравенствам:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \leq x} a(n) \right| &\ll x^{1/3+\varepsilon} + x^{-\varepsilon} \int_{-1}^1 \varepsilon^{-1} |L(-\varepsilon + it, \chi)| dt \\ &\quad + x^{-\varepsilon} \log x \left| \int_{T_1}^{2T_1} x^{it} (-\varepsilon + it)^{-1} L(-\varepsilon + it, \chi) dt \right| \\ &\quad + x^{-\varepsilon} \log x \left| \int_{T_2}^{2T_2} x^{-it} (-\varepsilon - it)^{-1} L(-\varepsilon - it, \chi) dt \right| \\ &\ll x^{1/3+\varepsilon} + x^{-\varepsilon} \log x (I_1 + I_2), \end{aligned} \tag{11}$$

где T_1 и T_2 – некоторые из чисел отрезка $[1, \frac{1}{2} T_0]$ такие, при которых правая часть (11) максимальна.

Интегралы I_1 и I_2 оцениваются одинаково. Оценим, например, I_1 .

Из леммы 1 и формулы Стирлинга следует, что

$$L(-\varepsilon + it, \chi) = \frac{1}{\theta(\chi)} \left(\sqrt{d_\chi} t (2\pi)^{-1} \right)^{1+2\varepsilon-2it} e^{2it} \\ \times (1 + O(T_1^{-1})) \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-1-\varepsilon} n^{it}.$$

Из этой формулы получаем

$$I_1 \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a(n)|}{n^{1+\varepsilon}} \left| \int_{T_1}^{2T_1} t^{1+2\varepsilon} (-\varepsilon + it)^{-1} (e^{2\pi i k t^{-2}})^{it} dt \right| + T_1^{2\varepsilon}.$$

Интегралы в правой части последней формулы оценим по второй производной (см., например, [12, с. 74, лемма 4]); тогда

$$I_1 \ll T_1^{2\varepsilon+1/2} \ll T_0^{2\varepsilon+1/2} \ll x^{4\varepsilon/3+1/3}.$$

Для I_2 справедлива та же оценка. Теперь утверждение леммы следует из (11).

ЛЕММА 6. Пусть χ – произвольный характер Гекке. Тогда для любого комплексного s

$$\overline{L}(\bar{s}, \chi) = L(s, \chi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если χ – главный характер Гекке, то утверждение леммы следует из представления $L(s, \chi_0) = \zeta(s) L(s, \chi_1)$, где χ_1 – характер квадратичного поля (заметим, что он вещественный).

Пусть χ – неглавный характер Гекке. Из представления (5) и вещественности чисел $a(n)$ (см. лемму 3) следует, что

$$L(s, \bar{\chi}) = L(s, \chi).$$

Поэтому функциональное уравнение для $L(s, \chi)$ можно переписать в виде

$$L(s, \chi) = \rho(s, \chi) L(1-s, \chi), \quad (12)$$

где $\rho(s, \chi)$ – та же функция, что в лемме 1.

Пусть $\operatorname{Re} s > 1$. Применим к правой части равенства (5) формулу частного суммирования:

$$L(s, \chi) = s \int_1^{\infty} \mathbb{C}(u) u^{-1-s} du, \quad (13)$$

где

$$\mathbb{C}(u) = \sum_{n \leq u} a(n).$$

В силу леммы 5 $\mathbb{C}(u) = O(u^{1/3+\varepsilon})$, следовательно, $L(s, \chi)$ представляется формулой (13) в области $\operatorname{Re} s > 1/3$. Снова пользуясь вещественностью чисел $a(n)$ и формулой (13), заключаем, что лемма справедлива при $\operatorname{Re} s > 1/3$.

Пусть $\operatorname{Re} s \leq 1/3$. Применим (12) к $L(\bar{s}, \chi)$:

$$L(\bar{s}, \chi) = \rho(\bar{s}, \chi) L(1-\bar{s}, \chi).$$

Воспользуемся тождеством

$$L(1 - \bar{s}, \chi) = \bar{L}(1 - s, \chi)$$

(оно справедливо, так как $\operatorname{Re}(1 - \bar{s}) > 1/3$) и (12):

$$L(\bar{s}, \chi) = \rho(\bar{s}, \chi) \bar{\rho}(1 - s, \chi) \bar{L}(s, \chi).$$

Теперь утверждение леммы следует из очевидного тождества

$$\rho(\bar{s}, \chi) \bar{\rho}(1 - s, \chi) = 1.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть χ — характер Гекке, $\beta + i\gamma$ — нуль функции $L(s, \chi)$ (β и γ — вещественные числа). Тогда $\beta - i\gamma$, $1 - \beta + i\gamma$, $1 - \beta - i\gamma$ — тоже нули $L(s, \chi)$.

Доказательство состоит в прямом применении функционального уравнения и леммы 6.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $G(s)$ — целая функция и

$$M(r) = M_G(r) = \max_{|s|=r} |G(s)|.$$

Если существует $a > 0$ такое, что

$$M(r) < e^{r^a} \quad \text{при } r > r_0(a) > 0,$$

то $G(s)$ называется *целой функцией конечного порядка*; в этом случае $\alpha = \inf a$ называется *порядком* $G(s)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ — последовательность комплексных чисел таких, что

$$0 < |s_1| \leq |s_2| \leq \dots \leq |s_n| \leq \dots \quad (14)$$

Если существует $b > 0$ такое, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^{-b} < \infty,$$

то говорят, что *последовательность имеет конечный показатель сходимости*; в этом случае $\beta = \inf b$ называется *показателем сходимости* последовательности (14).

ЛЕММА 7. Пусть $G(s)$ – целая функция конечного порядка α и $G(0) \neq 0$, s_n – последовательность всех нулей $G(s)$, причем $0 < |s_1| \leq |s_2| \leq \dots \leq |s_n| \leq \dots$

Тогда последовательность s_n имеет конечный показатель сходимости $\beta \leq \alpha$, и

$$G(s) = e^{g(s)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{s_n}\right) \exp \left(\left(\frac{s}{s_n}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{s_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{l} \left(\frac{s}{s_n}\right)^l \right),$$

где $l \geq 0$ – наименьшее целое число, для которого

$$\sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^{-(l+1)} < \infty,$$

$g(s)$ – многочлен степени $g \leq \alpha$ и $\alpha = \max(g, \beta)$.

Если, кроме того, для любого $c > 0$ найдется бесконечная последовательность $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots \rightarrow \infty$ такая, что

$$M(r_n) > e^{cr_n^\alpha}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

то $\alpha = \beta$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^{-\beta}$ расходится.

Доказательство см. в [22, с. 42–48].

ЛЕММА 8. Пусть χ – произвольный неглавный характер Гекке,

$$\Phi(s) = \Phi_\chi(s) = \bar{\theta}^{-1/2} \left(\frac{\sqrt{d_\chi}}{2\pi} \right)^s \Gamma(s) L(s, \chi).$$

Тогда:

- 1) нулями $\Phi(s)$ являются нетривиальные нули $L(s, \chi)$;
- 2) нули $\Phi(s)$ расположены в полосе $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$;
- 3) $\Phi(s)$ – целая функция первого порядка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем утверждение 2). Пусть $s = \sigma + it$, σ и t – вещественные числа, $\sigma > 1$. Тогда в силу (6)

$$|L(s, \chi)|^{-1} \leq \prod_p (1 + p^{-\sigma})^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) n^{-\sigma} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} \right)^2 \leq \left(\frac{\sigma}{\sigma-1} \right)^2,$$

$$|L(s, \chi)| \geq \left(\frac{\sigma}{\sigma-1} \right)^2 > 0.$$

Для доказательства утверждения 1) достаточно проверить, что $\Phi(-n) \neq 0$ при $n = 0, 1, 2, \dots$

Но в силу леммы 1 $\Phi(-n) = \Phi(n+1)$, $\Phi(1) \neq 0$, а неравенство $\Phi(n+1) \neq 0$ при $n \geq 1$ следует из 2).

Докажем утверждение 3). То, что функция $\Phi(s)$ целая, следует из леммы 1. Оценим ее порядок. Для этого оценим $|\Phi(s)|$ при $|s| \rightarrow \infty$ (без ограничения общности считаем, что $\operatorname{Re} s \geq 1/2$). Из леммы 4 следует, что $L(s, \chi) = O(|s|)$. Так как существует постоянная $c > 0$ такая, что $|\Gamma(s)| \leq \exp(c|s| \log |s|)$, то порядок $\Phi(s)$ не больше 1.

Но при $s \rightarrow \infty$ $\Gamma(s) \sim s \log s$, поэтому порядок $\Phi(s)$ равен 1.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть χ – неглавный характер Гекке, $\Phi(s)$ – функция из леммы 8. Тогда имеет место формула

$$\Phi(s) = e^{As+B} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{\rho_n}\right) e^{s/\rho_n}, \quad (15)$$

где A и B – постоянные, зависящие лишь от χ , ρ_n – нетривиальные нули $L(s, \chi)$.

Утверждение следствия 4 непосредственно вытекает из лемм 7 и 8.

ЛЕММА 9. В условиях следствия 4 справедливо тождество

$$-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s - \rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s + n} - \frac{1}{n}\right) + B_0, \quad (16)$$

где $B_0 = B_0(\chi)$ – постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем при $\operatorname{Re} s > 1$ логарифмическую производную от обеих частей (15), убедимся в справедливости (16), а затем применим принцип аналитического продолжения.

ЛЕММА 10 (аналог границы Валле–Пуссена для нулей $L(s, \chi)$). Пусть χ – произвольный комплексный характер Гекке. Тогда существует постоянная $c = c(\chi) > 0$ такая, что в области

$$\sigma \leq 1 - \frac{c}{\log(|t| + 2)}, \quad s = \sigma + it,$$

нет нулей $L(s, \chi)$.

Если же χ – вещественный характер Гекке, то существует постоянная $c = c(\chi) > 0$ такая, что в области

$$\sigma \leq 1 - \frac{c}{\log(|t| + 2)}, \quad |t| > 0, \quad s = \sigma + it,$$

нет нулей $L(s, \chi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через $c_1, \dots, c_{10}$ будем обозначать положительные постоянные, зависящие лишь от χ .

Пусть χ – комплексный характер Гекке. Заметим, что тогда χ^2 – неглавный характер Гекке, и в силу леммы 1 функция $L(s, \chi^2)$ целая.

Если же χ – вещественный характер Гекке, то $\chi^2 = \chi_0$ – главный характер, и $L(s, \chi^2) = \zeta(s)L(s, \chi_1)$, где χ_1 – характер квадратичного поля (см. [20, с. 380, 265, 266]).

В обоих случаях $L(s, \chi^2)$ не имеет особенностей при $|\operatorname{Im} s| > 0$.

Пусть $\operatorname{Re} s > 1$. Справедливо тождество

$$-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \sum_{\mathcal{A}} \lambda(\mathcal{A}) \chi(\mathcal{A}) (N(\mathcal{A}))^{-s}, \quad (17)$$

где

$$\lambda(\mathcal{A}) = \begin{cases} \log N(\mathcal{P}), & \text{если } \mathcal{A} = \mathcal{P}^k, \quad k \geq 1, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$\mathcal{A}$ – целый ненулевой идеал, $\mathcal{P}$ – простой идеал.

Пусть χ – комплексный характер Гекке, $\chi(\mathcal{A}) = e^{i\omega(\mathcal{A})}$, $s = \sigma + it$, $\sigma > 1$, $t \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} -\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} &= \sum_{\mathcal{A}} \lambda(\mathcal{A}) (N(\mathcal{A}))^{-\sigma} e^{i(\omega(\mathcal{A}) - t \log N(\mathcal{A}))}, \\ -\operatorname{Re} \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} &= \sum_{\mathcal{A}} \lambda(\mathcal{A}) (N(\mathcal{A}))^{-\sigma} \cos(\omega(\mathcal{A}) - t \log N(\mathcal{A})), \\ -\operatorname{Re} \frac{L'(\sigma + 2it, \chi^2)}{L(\sigma + 2it, \chi^2)} &= \sum_{\mathcal{A}} \lambda(\mathcal{A}) (N(\mathcal{A}))^{-\sigma} \cos 2(\omega(\mathcal{A}) - t \log N(\mathcal{A})). \end{aligned}$$

Поэтому

$$3 \left\{ -\frac{L'(\sigma, \chi_0)}{L(\sigma, \chi_0)} \right\} + 4 \left\{ -\operatorname{Re} \frac{L'(\sigma + it, \chi)}{L(\sigma + it, \chi)} \right\} + \left\{ -\operatorname{Re} \frac{L'(\sigma + 2it, \chi^2)}{L(\sigma + 2it, \chi^2)} \right\} \geq 0. \quad (18)$$

Оценим сверху каждое слагаемое в левой части (18). Имеем

$$-\frac{L'(\sigma, \chi_0)}{L(\sigma, \chi_0)} = -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - \frac{L'(\sigma, \chi_1)}{L(\sigma, \chi_1)} \leq \frac{1}{\sigma - 1} + c_1. \quad (19)$$

Далее, в силу леммы 9

$$-\operatorname{Re} \frac{L'(\sigma + it, \chi)}{L(\sigma + it, \chi)} = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s - \rho_n} + \frac{1}{\rho_n} \right) + \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s + n} - \frac{1}{n} \right) + \operatorname{Re} B_0. \quad (20)$$

Отсюда, так как (см. лемму 8) $0 \leq \operatorname{Re} \rho_n \leq 1$ и $\operatorname{Re} s > 1$, имеем неравенство

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re} \frac{L'(\sigma + it, \chi)}{L(\sigma + it, \chi)} &\leq \operatorname{Re} \frac{1}{s - \rho} + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{s + n} - \frac{1}{n} \right| + |B_0| \\ &\leq \operatorname{Re} \frac{1}{s - \rho} + c_2 \log(|t| + 2), \end{aligned} \quad (21)$$

где ρ – произвольный нетривиальный нуль $L(s, \chi)$.

Аналогично получается неравенство

$$-\operatorname{Re} \frac{L'(\sigma + 2it, \chi^2)}{L(\sigma + 2it, \chi^2)} \leq c_3 \log(|t| + 2). \quad (22)$$

Из соотношений (18)–(22) следует, что

$$\frac{3}{\sigma - 1} - 4 \operatorname{Re} \frac{1}{\sigma + it - \rho} + c_4 \log(|t| + 2) \geq 0. \quad (23)$$

Полагая в неравенстве (23) $\rho = \beta + i\gamma$, $t = \gamma$, $\sigma = 1 + \frac{1}{2c_4 \log(|\gamma|+2)}$, получаем

$$\beta \leq 1 - \frac{1}{14c_4 \log(|\gamma|+2)}. \quad (24)$$

Случай L -функций Гекке, соответствующих комплексным характерам, полностью рассмотрен. Пусть теперь χ – вещественный характер Гекке. Тогда $\chi^2 = \chi_0$. Из оценки (19) имеем

$$-\operatorname{Re} \frac{L'(\sigma + 2it, \chi^2)}{L(\sigma + 2it, \chi^2)} \leq \frac{\sigma - 1}{(\sigma - 1)^2 + (2t)^2} + c_5 \log(|t| + 2), \quad (25)$$

где σ и t – произвольные вещественные числа такие, что $\sigma > 1$, $t \neq 0$.

Выберем $t = \gamma$, где γ – мнимая часть нуля ρ функции $L(s, \chi)$. Тогда из неравенств (18)–(21) и (25) получаем

$$\frac{4}{\sigma - \beta} \leq \frac{3}{\sigma - 1} + \frac{\sigma - 1}{(\sigma - 1)^2 + 4\gamma^2} + c_6 \log(|\gamma| + 2). \quad (26)$$

Рассмотрим отдельно два возможных случая.

Пусть сначала $|\gamma| > \varepsilon_2 / \log(|\gamma| + 2)$, где ε_2 – малая положительная постоянная, точное значение которой будет указано ниже. Возьмем в неравенстве (26) $\sigma = 1 + \varepsilon_2 / \log(|\gamma| + 2)$. Тогда $|\gamma| > \sigma - 1$, а значит,

$$\begin{aligned} \frac{4}{\sigma - \beta} &\leq \frac{3,2}{\sigma - 1} + c_6 \log(|\gamma| + 2) = \left(\frac{3,2}{\varepsilon_2} + c_6 \right) \log(|\gamma| + 2), \\ \beta &\leq 1 - \frac{4 / \left(\frac{3,2}{\varepsilon_2} + c_6 \right) - \varepsilon_2}{\log(|\gamma| + 2)} = 1 - \frac{0,8 - c_6 \varepsilon_2}{\left(\frac{3,2}{\varepsilon_2} + c_6 \right) \log(|\gamma| + 2)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Рассмотрим теперь случай, когда $0 < |\gamma| \leq \varepsilon_2 / \log(|\gamma| + 2)$. Пользуясь неравенством (20), получаем

$$-\frac{L'(\sigma, \chi)}{L(\sigma, \chi)} \leq c_7 \log(|\gamma| + 2) - \frac{2(\sigma - \beta)}{(\sigma - \beta)^2 + \gamma^2}, \quad (28)$$

так как в силу следствия 3, если $\beta + i\gamma$ – нуль функции $L(s, \chi)$, то и $\beta - i\gamma$ – также нуль $L(s, \chi)$.

Оценим $-\frac{L'(\sigma, \chi)}{L(\sigma, \chi)}$ снизу:

$$\begin{aligned} -\frac{L'(\sigma, \chi)}{L(\sigma, \chi)} &= \sum_{\mathcal{A}} \lambda(\mathcal{A}) \chi(\mathcal{A}) (N(\mathcal{A}))^{-\sigma} \geq - \sum_{\mathcal{A}} \lambda(\mathcal{A}) (N(\mathcal{A}))^{-\sigma} \\ &\geq \frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} + \frac{L'(\sigma, \chi_1)}{L(\sigma, \chi_1)} > -\frac{1}{\sigma - 1} - c_8 \log(|\gamma| + 2), \end{aligned}$$

где χ_1 – характер квадратичного поля. Отсюда и из оценки (28) имеем

$$-\frac{1}{\sigma - 1} \leq c_9 \log(|\gamma| + 2) - \frac{2(\sigma - \beta)}{(\sigma - \beta)^2 + \gamma^2}. \quad (29)$$

Выберем в неравенстве (29) $\sigma = 1 + \frac{2\varepsilon_2}{\log(|\gamma|+2)}$. Тогда $|\gamma| \leq (\sigma-1)/2 \leq (\sigma-\beta)/2$, следовательно,

$$\begin{aligned} -\frac{\log(|\gamma|+2)}{2\varepsilon_2} &\leq c_{10} \log(|\gamma|+2) - \frac{1,6}{\sigma-\beta}, \\ \beta &\leq 1 - \frac{0,6 - 2c_{10}\varepsilon_2}{\left(\frac{1}{2\varepsilon_2} + c_{10}\right) \log(|\gamma|+2)}. \end{aligned} \quad (30)$$

Выбирая в неравенствах (27) и (30) $\varepsilon_2 = \min(0,1c_6^{-1}, 0,1c_{10}^{-1})$, завершаем доказательство леммы.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть χ – вещественный характер Гекке, σ и t – вещественные числа, $s = \sigma + it$. Тогда существует положительная постоянная c_{11} , зависящая только от χ и такая, что $L(s, \chi)$ не имеет нулей в области

$$\operatorname{Re} s > \max \left(1 - c_{11}, 1 - \frac{c}{\log(|t|+2)} \right),$$

где c – константа из леммы 10.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 10 в области

$$\operatorname{Re} s > 1 - \frac{c}{\log(|t|+2)}, \quad |t| > 0,$$

нет нулей функции $L(s, \chi)$.

Кроме того, известно (см. лемму 1), что функция $L(s, \chi)$ аналитическая в окрестности точки $s = 1$, причем $L(1, \chi) \neq 0$. Следовательно, существует круг с центром в точке $s = 1$ радиуса $r > 0$, $r = r(\chi)$, в котором нет нулей $L(s, \chi)$. Отсюда получается утверждение следствия 5 с $c_{11} = r$.

ЛЕММА 11. Пусть $L(s, \chi)$ – L -функция Гекке, $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$, $n = 1, 2, \dots$, – все ее нетривиальные нули, $T \geq 2$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (T - \gamma_n)^2} = O(\log T).$$

Постоянная в знаке O зависит лишь от χ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s = 2 + iT$. Тогда в силу леммы 9

$$-\operatorname{Re} \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \leq -\operatorname{Re} S_1 + |S_2| + |B_0| + 1, \quad (31)$$

где

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s - \rho_n} + \frac{1}{\rho_n} \right), \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s + n} - \frac{1}{n} \right).$$

Оценим сверху $|S_2|$:

$$|S_2| \leq \sum_{n \leq T} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) + \sum_{n > T} \frac{|s|}{n^2} = O(\log T). \quad (32)$$

Далее, так как

$$\frac{-L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \leq \sum_{\mathcal{A}} \lambda(\mathcal{A}) (N(\mathcal{A}))^{-2} = O(1),$$

то из (31) и (32) получаем

$$|\operatorname{Re} S_1| = O(\log T).$$

Но

$$\operatorname{Re} S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 - \beta_n}{(2 - \beta_n)^2 + (T - \gamma_n)^2} + \frac{\beta_n}{\beta_n^2 + (T - \gamma_n)^2} \right) \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (T - \gamma_n)^2},$$

что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $T \geq 2$, $L(s, \chi)$ — L -функция Гекке, $s = \sigma + it$. Тогда в области

$$\sigma > \max \left(1 - 0,5c_{11}, 1 - \frac{c}{2 \log(|t| + 2)} \right), \quad |t| \leq T,$$

где c_{11} и c — постоянные из следствия 5, справедлива оценка

$$\left| \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \right| = O(\log^2 T).$$

Постоянная в знаке O зависит лишь от L -функции Гекке $L(s, \chi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 9 и оценки (32) получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \left| \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \right| &\leq \left| \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} - \frac{L'(2 + it, \chi)}{L(2 + it, \chi)} \right| + O(1) \\ &\leq \sum_{|t - \gamma_n| \leq 1} |\sigma - \beta_n + i(t - \gamma_n)|^{-1} + \sum_{|t - \gamma_n| > 1} \frac{2 - \sigma}{(t - \gamma_n)^2} \\ &\quad + O(\log T) \leq \sum_{|t - \gamma_n| \leq 1} |\sigma - \beta_n + i(t - \gamma_n)|^{-1} \\ &\quad + O \left(\sum_{k=1}^{\infty} \log(t + k) k^{-2} \right) + O(\log T). \end{aligned} \quad (33)$$

Из условий нашей леммы следует, что $|\sigma - \beta_n| \gg \log^{-1} T$, т.е. $|\sigma - \beta_n + i(t - \gamma_n)| \ll \log T$, где постоянная в знаке Виноградова зависит лишь от L -функции Гекке и не зависит от T .

Теперь из неравенства (33) и следствия 6 получаем оценку

$$\left| \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \right| = O(\log^2 T),$$

которую и требовалось доказать.

ЛЕММА 12. Пусть $\operatorname{Re} s > 1$, χ – характер Гекке, $a(n) = a_\chi(n)$ – числа, определенные равенствами (4),

$$\begin{aligned} h(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} |a(n)|^2 n^{-s} = \prod_p (1 + |a(p)|^2 p^{-s} + |a(p^2)|^2 p^{-2s} + \dots), \\ g(s) &= \prod_p (1 - p^{-s})^{-|a(p)|^2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Тогда справедливы тождества

$$h(s) = g(s) H_1(s), \quad (35)$$

$$g(s) = \zeta(s) L(s, \chi_1) L(s, \chi^2) H_2(s), \quad (36)$$

где $L(s, \chi_1)$ – L -функция Дирихле, отвечающая характеру χ_1 квадратичного поля, $L(s, \chi^2)$ – L -функция Гекке, отвечающая характеру Гекке χ^2 ,

$$H_1(s) = \prod_p (1 + |a(p)|^2 p^{-s} + |a(p^2)|^2 p^{-2s} + \dots) (1 - p^{-s})^{|a(p)|^2}, \quad (37)$$

$$\begin{aligned} H_2(s) &= \prod_{p \in \Pi_1} (1 - \chi^2(\mathcal{P}_1) p^{-s}) (1 - \chi^2(\mathcal{P}_2) p^{-s}) (1 - p^{-s})^{-a_{\chi^2}(p)} \\ &\quad \times \prod_{p \in \Pi_0} (1 - p^{-s}) \prod_{p \in \Pi_{-1}} (1 - p^{-2s})^2, \end{aligned} \quad (38)$$

где $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ – простые идеалы такие, что

$$\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 = (p), \quad a_{\chi^2}(p) = \sum_{\mathcal{A}, N(\mathcal{A})=p} \chi^2(\mathcal{A}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тождество (35) следует непосредственно из определений. Докажем справедливость тождества (36). Из (34) имеем

$$g(s) = \prod_{p \in \Pi_1} (1 - p^{-s})^{-|a(p)|^2} \prod_{p \in \Pi_0} (1 - p^{-s})^{-1}. \quad (39)$$

Разложим в эйлерово произведение функцию $g_1(s)$, $g_1(s) = \zeta(s) L(s, \chi_1) \times L(s, \chi^2) H_2(s)$:

$$\begin{aligned} g_1(s) &= \prod_{p \in \Pi_1} (1 - p^{-s})^{-2} (1 - \chi^2(\mathcal{P}_1) p^{-s}) (1 - \chi^2(\mathcal{P}_2) p^{-s}) (1 - p^{-s})^{-a_{\chi^2}(p)} \\ &\quad \times \prod_{p \in \Pi_0} (1 - p^{-s})^{-1} = \prod_{p \in \Pi_1} (1 - p^{-s})^{-2 - a_{\chi^2}(p)} \prod_{p \in \Pi_0} (1 - p^{-s})^{-1}. \end{aligned} \quad (40)$$

Покажем, что $|a_\chi(p)|^2 = 2 + a_{\chi^2}(p)$. Действительно,

$$|a_\chi(p)|^2 = (\chi(\mathcal{P}_1) + \chi(\mathcal{P}_2)) (\overline{\chi}(\mathcal{P}_1) + \overline{\chi}(\mathcal{P}_2)) = 2 + \chi^2(\mathcal{P}_1) + \chi^2(\mathcal{P}_2) = 2 + a_{\chi^2}(p).$$

Сравнивая (39) с (40), приходим к равенству $g(s) = g_1(s)$. Тождество (32) доказано.

ЛЕММА 13. *Функции $H_1(s)$ и $H_2(s)$, определенные равенствами (37) и (38), являются аналитическими в области $\operatorname{Re} s > 1/2$, причем при $\operatorname{Re} s \geq 3/4$*

$$H_1(s) = O(1), \quad H_2(s) = O(1), \quad H_2(s) \neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство $H_2(s) \neq 0$ ($\operatorname{Re} s > 1/2$) следует непосредственно из (38). Имеют место тождества

$$H_1(s) = \prod_p \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_p(n) p^{-ns} \right),$$

$$H_2(s) = \prod_p \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_p(n) p^{-ns} \right) H_3(s),$$

где

$$b_p(n) = \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} |a(p^m)|^2 \binom{|a(p)|^2}{n-m},$$

$$c_p(n) = (-1)^n \left(\binom{-a_{\chi^2}(p)}{n} + \binom{-a_{\chi^2}(p)}{n-1} a_{\chi^2}(p) + \binom{-a_{\chi^2}(p)}{n-2} \right),$$

$$H_3(s) = \prod_{p \in \Pi_0} (1 - p^{-s}) \prod_{p \in \Pi_{-1}} (1 - p^{-2s})^2.$$

Пользуясь неравенствами

$$|a(p)| \leq 2, \quad |a_{\chi^2}(p)| \leq 2, \quad |a(p^m)| \leq \tau(p^m),$$

$$\binom{|a(p)|^2}{k} \leq 4!, \quad \left| \binom{-a_{\chi^2}(p)}{k} \right| \leq k+1 = \tau(p^k),$$

где k – произвольное неотрицательное число, оценим величины $|b_p(n)|$ и $|c_p(n)|$:

$$|b_p(n)| \leq 4! \tau^3(p^n), \quad |c_p(n)| \leq 4 \tau(p^n). \quad (41)$$

Из неравенств (41) следует, что функции $H_1(s)$ и $H_2(s)$ аналитические в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1/2$, а также что

$$H_1(s) = O(1), \quad H_2(s) = O(1)$$

при $\operatorname{Re} s \geq 3/4$.

Теми же свойствами обладает и функция $H_3(s)$. Лемма доказана.

§ 2. Теоремы

Здесь мы укажем подкласс S_1 класса Сельберга S функций степени 2, удовлетворяющих условиям 1)–4) теоремы, сформулированной во введении. Его составляют L -функции Гекке одного и того же мнимого квадратичного поля, соответствующие комплексным характерам.

Принадлежность функций из подкласса S_1 классу Сельберга S следует непосредственно из определений.

Далее, все L -функции Гекке удовлетворяют условию 3). В самом деле, так как

$$\begin{aligned} & |1 + a(p)p^{-1/2-it} + a(p^2)p^{-1-2it} + \dots| \\ &= \begin{cases} |1 - \chi(\mathcal{P}_1)p^{-1/2-it}|^{-1} |1 - \chi(\mathcal{P}_2)p^{-1/2-it}|^{-1}, & p \in \Pi_1, (p) = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2, \\ |1 - p^{-1-2it}|^{-1}, & p \in \Pi_1, \\ |1 - \chi(\mathcal{P})p^{-1/2-it}|^{-1}, & p \in \Pi_0, (p) = \mathcal{P}^2, \end{cases} \end{aligned}$$

имеет место неравенство

$$\left| 1 + a(p)p^{-1/2-it} + a(p^2)p^{-1-2it} + \dots \right| \geq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{-2}. \quad (42)$$

Сформулируем и докажем теоремы 1–3, из которых будет следовать, что L -функции Гекке из подкласса S_1 удовлетворяют условиям 1), 2), 4).

ТЕОРЕМА 1. Пусть ε – произвольно малое положительное число, χ – комплексный характер Гекке, $a(n) = a_\chi(n)$ – коэффициенты Дирихле, определенные равенством (4). Тогда справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{n \leq x} |a(n)|^2 n^{-1} = A \log x + B + O(x^{-1/6+\varepsilon}), \quad (43)$$

где $A > 0$ и B – постоянные, зависящие лишь от $L(s, \chi)$, а постоянная в знаке O зависит лишь от $L(s, \chi)$ и ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся формулой Перрона (см., например, [23, с. 427, 428]), положив в ней $T = x^{1/6}$:

$$V = \sum_{n \leq x} |a(n)|^2 n^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} h(s+1) \frac{x^s}{s} ds + O(x^{-1/6+\varepsilon}),$$

где $h(s)$ – функция из леммы 12, а $b = (\log x)^{-1}$.

Пользуясь теоремой Коши, перенесем интегрирование на отрезок $[-1/4 - iT, -1/4 + iT]$. Тогда в силу лемм 1, 12, 13 подынтегральная функция имеет полюс второго порядка с вычетом $A \log x + B$, где

$$\begin{aligned} A &= L(1, \chi_1) L(1, \chi^2) H_1(1), \\ B &= \gamma_0 A + \frac{d}{ds} (L(s, \chi_1) L(s, \chi^2) H_1(s)) \Big|_{s=1}, \end{aligned}$$

γ_0 – нулевой коэффициент разложения в ряд Лорана функции $\zeta(s)$ в точке $s = 1$.

Заметим, что $L(1, \chi) > 0$, $L(1, \chi^2) > 0$ (см. лемму 1), $H_1(1) > 0$, а значит, $A > 0$.

Получена формула

$$V = A \log x + B + \int_{-1/4-iT}^{-1/4+iT} h(s+1) \frac{x^s}{s} ds + O(x^{-1/6+\varepsilon}). \quad (44)$$

Пользуясь приближенными функциональными уравнениями для $\zeta(s+1)$, $L(s+1, \chi_1)$ и $L(s+1, \chi^2)$ (см. лемму 4), получаем оценки

$$|\zeta(s+1)| = O(T^{1/8}), \quad |L(s+1, \chi_1)| = O(T^{1/8}), \quad |L(s+1, \chi^2)| = O(T^{1/4}),$$

где $s = -1/4 + it$, $|t| \leq T$. Тем самым подынтегральную функцию из равенства (44) мы оценили как $O(x^{-1/6} \log x (1 + |t|)^{-1})$, откуда следует справедливость формулы (43).

ТЕОРЕМА 2. Пусть χ – комплексный характер Гекке, $a(n) = a_\chi(n)$ – коэффициенты Дирихле, определенные равенством (4). Тогда справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{p \leq x} |a(p)|^2 \log p = x + O(x e^{-c' \sqrt{\log x}}),$$

где $c' > 0$ – постоянная, зависящая лишь от $L(s, \chi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\operatorname{Re} s > 1$. Беря логарифмическую производную от функции $g(s)$ и пользуясь формулой (34), имеем

$$-\frac{g'(s)}{g(s)} = \sum_{p \leq x} |a(p)|^2 \log p p^{-s} + F_1(s), \quad (45)$$

где

$$F_1(s) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_p |a(p)|^2 \log p p^{-ks}.$$

С другой стороны, в силу равенства (36) получаем

$$-\frac{g'(s)}{g(s)} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{L'(s, \chi_1)}{L(s, \chi_1)} - \frac{L'(s, \chi^2)}{L(s, \chi^2)} - \frac{H_2'(s)}{H_2(s)}. \quad (46)$$

Применим формулу Перрона, положив в ней $T = \exp(\sqrt{\log x})$. Тогда с учетом соотношений (45) и (46) получим

$$V_1 = \sum_{p \leq x} |a(p)|^2 \log p = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{L'(s, \chi_1)}{L(s, \chi_1)} - \frac{L'(s, \chi^2)}{L(s, \chi^2)} - \frac{H_2'(s)}{H_2(s)} + F_1(s) \right) \frac{x^s}{s} ds + O(x \exp(-0,5\sqrt{\log x})), \quad (47)$$

где $b = 1 + (\log x)^{-1}$.

В силу теорем о границе нулей Валле–Пуассона для функций $\zeta(s)$, $L(s, \chi_1)$, $L(s, \chi^2)$ (см., например, [22, с. 69, 139] и следствие 5) существует постоянная $c' > 0$ такая, что в области

$$\operatorname{Re} s \geq 1 - 4c'(\log |T| + 2)^{-1}, \quad |t| \leq T,$$

нет нулей функций $\zeta(s)$, $L(s, \chi_1)$, $L(s, \chi^2)$.

Перенесем в интеграле, стоящем в правой части равенства (47), интегрирование на отрезок

$$[1 - 2c'(\log(T + 2))^{-1} - iT, 1 - 2c'(\log(T + 2))^{-1} + iT].$$

При этом мы пройдем через простой полюс подынтегральной функции с вычетом x ; следовательно,

$$\begin{aligned} V_1 = x + O \left(x \exp(-2c' \sqrt{\log x}) \int_I \left(\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| + \left| \frac{L'(s, \chi_1)}{L(s, \chi_1)} \right| \right. \right. \\ \left. \left. + \left| \frac{L'(s, \chi^2)}{L(s, \chi^2)} \right| + 1 \right) \left| \frac{ds}{s} \right| \right) + O(x \exp(-0,5 \sqrt{\log x})), \end{aligned} \quad (48)$$

где I – отрезок $[1 - 2c'(\log(T + 2))^{-1} - iT, 1 - 2c'(\log(T + 2))^{-1} + iT]$.

Теперь утверждение теоремы 2 следует из равенства (48) и оценок

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| = O(\log^2 T), \quad \left| \frac{L'(s, \chi_1)}{L(s, \chi_1)} \right| = O(\log^2 T), \quad \left| \frac{L'(s, \chi^2)}{L(s, \chi^2)} \right| = O(\log^2 T)$$

(см., например, [23, с. 69, 133] и следствие 6).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $L(s, \chi_i)$ и $L(s, \chi_j)$ – две различные L -функции Гекке одного и того же мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ($d < 0$). Пусть коэффициенты Дирихле $a_i(n) = a_{\chi_i}(n)$ и $a_j(n) = a_{\chi_j}(n)$ определены равенствами (4).

Тогда справедлива оценка

$$\sum_{p \leq x} a_i(p) \bar{a}_j(p) p^{-1} = O(1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению имеем

$$\begin{aligned} V_3 = \sum_{p \leq x} a_i(p) \bar{a}_j(p) p^{-1} &= \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in \Pi_1}} a_i(p) \bar{a}_j(p) p^{-1} + O(1) \\ &= \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in \Pi_1}} (\chi_i(\mathcal{P}_1) + \chi_i(\mathcal{P}_2)) (\bar{\chi}_j(\mathcal{P}_1) + \bar{\chi}_j(\mathcal{P}_2)) p^{-1} + O(1), \end{aligned} \quad (49)$$

где $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ – различные простые идеалы такие, что $\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 = (p)$.

Раскрывая скобки в правой части равенства (49) и пользуясь тем, что

$$\chi_i(\mathcal{P}_2) = \bar{\chi}_i(\mathcal{P}_1), \quad \chi_j(\mathcal{P}_2) = \bar{\chi}_j(\mathcal{P}_1), \quad N(\mathcal{P}_1) = N(\mathcal{P}_2) = p,$$

имеем

$$V_3 = O\left(\left|\sum_{N(\mathcal{P}) \leq x} \psi_1(\mathcal{P})(N(\mathcal{P}))^{-1}\right|\right) + O\left(\left|\sum_{N(\mathcal{P}) \leq x} \psi_2(\mathcal{P})(N(\mathcal{P}))^{-1}\right|\right) + O(1), \quad (50)$$

где ψ_1 и ψ_2 — характеры Гекке, определенные равенствами

$$\psi_1(\mathcal{A}) = \chi_i(\mathcal{A})\chi_j(\mathcal{A}), \quad \psi_2(\mathcal{A}) = \chi_i(\mathcal{A})\bar{\chi}_j(\mathcal{A}),$$

где $\mathcal{A}$ — целый ненулевой идеал (как обычно, для всех идеалов одного и того же класса значения характеров Гекке одни и те же).

По условию теоремы 3 функции $L(s, \chi_i)$ и $L(s, \chi_j)$ различные. Следовательно, не возможны равенства $\chi_i = \chi_j$ и $\chi_i = \bar{\chi}_j$ (так как для любого характера Гекке χ $L(s, \bar{\chi}) = L(s, \chi)$; см. равенство (10)). А значит, характеры Гекке ψ_1 и ψ_2 неглавные.

Оценим сумму V_4 :

$$V_4 = \sum_{N(\mathcal{P}) \leq x} \psi(\mathcal{P})(N(\mathcal{P}))^{-1}.$$

Применим формулу частного суммирования:

$$V_4 = \int_2^x \mathbb{C}(u) d(u \log u)^{-1} + \mathbb{C}(x)(x \log x)^{-1},$$

где

$$\mathbb{C}(u) = \sum_{N(\mathcal{P}) \leq u} \psi(\mathcal{P}) \log N(\mathcal{P}). \quad (51)$$

Покажем, что существует постоянная $c'' > 0$ такая, что

$$\mathbb{C}(u) = O(u \exp(-c'' \sqrt{\log u})). \quad (52)$$

Действительно, в силу леммы 1 и следствий 5 и 6 существует постоянная $c'' > 0$, зависящая лишь от $L(s, \psi)$ и такая, что в области

$$\operatorname{Re} s > 1 - 4c''(\log(T+2))^{-1}, \quad |\operatorname{Im} s = t| \leq T,$$

функция $\frac{L'(s, \psi)}{L(s, \psi)}$ является аналитической, причем

$$\left| \frac{L'(s, \psi)}{L(s, \psi)} \right| = O(\log^2(T+2)). \quad (53)$$

Здесь T — произвольное положительное число.

Применяя формулу Перрона с $T = \exp(\sqrt{\log u})$, теорему Коши и оценку (53), имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(u) &= \frac{1}{2\pi i} \int_I -\frac{L'(s, \psi)}{L(s, \psi)} \frac{u^s}{s} ds + O(u \exp(-2c'' \sqrt{\log u})) \\ &= O(u \exp(-c'' \sqrt{\log u})), \end{aligned}$$

где

$$I = [1 - 2c''(\log(T+2))^{-1} - iT, 1 - 2c''(\log(T+2))^{-1} + iT].$$

Теперь утверждение теоремы 3 следует из соотношений (50)–(52).

Сформулируем основной результат нашей статьи.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $F_1(s), \dots, F_N(s)$ – L -функции Гекке, соответствующие комплексным характеристам Гекке, а $f(t)$ – функция, определенная равенством (1). Тогда на отрезке $[T, 2T]$ существует не меньше, чем $T \exp(\sqrt{\log \log \log T})$ нулей нечетного порядка функции $f(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что функции $F_1(s), \dots, F_N(s)$ различны. Теперь теорема 4 прямо следует из теоремы, сформулированной во введении, неравенства (42) и теорем 1–3.

Список литературы

1. Selberg A. Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series // Proc. of the Amalfi conference on Analytic Number Theory. Univ. di. Salerno. 1992. P. 365–387.
2. Conrey J. B., Ghosh A. On the Selberg class of Dirichlet series: small degrees // Duke Math. J. 1993. V. 72. № 3. P. 673–695.
3. Карацуба А. А. Новый подход к проблеме нулей некоторых рядов Дирихле // Тр. МИРАН. 1994. Т. 207. С. 180–196.
4. Карацуба А. А. Нули арифметических нулей Дирихле // Math. Slovaca. 1994. Т. 44. № 5. С. 633–649.
5. Bombieri E., Hejhal D. Sur les zéros des fonctions zêta d'Epstein // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. Math. 1987. V. 304. P. 213–217.
6. Hejhal D. Zeros of Epstein zeta-functions and Supercomputers // Proc. Intern. Congr. Math. Berkeley (Calif., USA). 1986. P. 1362–1383.
7. Davenport H., Heilbronn H. On the zeros of certain Dirichlet series // J. Lond. Math. Soc. 1936. V. 11. P. 181–185, 307–312.
8. Карацуба А. А. О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 2. С. 303–315.
9. Воронин С. М. О нулях дзета-функций квадратичных форм // Тр. МИАН. 1976. Т. 142. С. 136–147.
10. Воронин С. М. О нулях дзета-функций квадратичных форм // ДАН СССР. 1977. Т. 235. № 2. С. 257–258.
11. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994.
12. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953.
13. Hardy G., Littlewood J. E. The zeros of Riemann zeta-function on the critical line // Math. Zs. 1921. V. 10. P. 283–317.
14. Воронин С. М. О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. № 1. С. 63–91.
15. Карацуба А. А. О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 2. С. 303–315.
16. Карацуба А. А. О нулях специального вида функций, связанных с рядами Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 3. С. 483–514.
17. Гриценко С. А. О нулях линейных комбинаций специального вида функций, связанных с рядами Дирихле из класса Сельберга // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 4. С. 3–42.
18. Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. М.: Мир, 1987.
19. Ленг С. Алгебраические числа. М.: Мир, 1966.
20. Борович З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М.: Наука, 1973.
21. Лаврик А. Ф. Приближенное функциональное уравнение дзета-функции Гекке мнимого квадратичного поля // Матем. заметки. 1967. Т. 2. № 5. С. 475–482.
22. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.
23. Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.

Поступило в редакцию
25.VI.1996