Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Саркисян, И. Г. Шандра, О регулярности и теореме
Трессе для геометрических структур, *Изв. РАН. Сер.
матем.*, 2008, том 72, выпуск 2, 151–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/im1049>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 14:34:17

УДК 514.763

Р. А. Саркисян, И. Г. Шандра

О регулярности и теореме Трессе для геометрических структур

Доказано, что для неспециального расслоения геометрических структур $P \rightarrow X$ в пространстве k -струй J^k этого расслоения для подходящего k найдется открытая всюду плотная область U_k , на которой справедлива теорема Трессе. Также доказано, что для любого $s \geq k$ все точки прообраза $\pi^{-1}(k, s)(U_k)$ области U_k относительно естественной проекции $\pi(k, s): J^s \rightarrow J^k$ регулярны (точка на J^s называется регулярной, если размерность орбит группы индуцированных с X диффеоморфизмов локально постоянна в окрестности этой точки).

Библиография: 38 наименований.

§ 1. Введение

В настоящей работе все объекты (функции, многообразия и т. д.) и отображения предполагаются вещественными и бесконечно дифференцируемыми, если специально не оговорено иное. Расслоения предполагаются локально тривиальными. Термин “гладкий” означает бесконечно дифференцируемый. Для произвольного расслоения геометрических структур $P \rightarrow X$ и любого натурального k любой диффеоморфизм базы X индуцирует диффеоморфизм пространства k -струй J^k этого расслоения. Точка из J^k называется *регулярной*, если размерность проходящей через нее орбиты группы индуцированных с X диффеоморфизмов локально постоянна в окрестности этой точки. Утверждение теоремы о регулярности (см. § 4) состоит в том, что всякий прообраз регулярной точки на J^k относительно естественной проекции $J^s \rightarrow J^k$ регулярен.

Под теоремой Трессе понимается утверждение о конечной базиремости дифференциальных инвариантов псевдогруппы Ли. Дифференциальные инварианты псевдогрупп изучались в работах [1] и [2], ряд вопросов о свойствах дифференциальных инвариантов, в том числе и о справедливости теоремы Трессе, поставлен в работах [3] и [4]. Теорема Трессе (иногда называемая теоремой Ли–Трессе) сформулирована в [5]. Различные варианты формулировки теоремы Трессе изложены в [6]–[9]. Мы доказываем, что и теорема Трессе, и теорема о регулярности выполняются на открытом инвариантном всюду плотном множестве U многообразия струй J^k начиная с некоторой достаточно высокой степени k для любого расслоения геометрических структур $P \rightarrow X$. В доказательстве теоремы Трессе используется теорема о регулярности и другие результаты из § 4, а также результаты из работ [6], [7]. (В работе [7] выведены достаточные условия для справедливости теоремы Трессе, а мы проверяем, что эти условия выполняются на U .) В § 6 приводятся алгоритмы, позволяющие

при определенных условиях явно найти конечный базис дифференциальных инвариантов, операторы инвариантного дифференцирования, размерности орбит для регулярных точек и т. д. В § 1–3 приведен подготовительный материал.

Отметим, что рассматриваемые нами псевдогруппы диффеоморфизмов геометрических структур являются частным случаем псевдогрупп Ли. Результаты настоящей работы, в том числе теорема о регулярности и теорема Трессе, могут быть доказаны для формальных дифференциальных инвариантов общих псевдогрупп Ли.

Отметим ряд близких работ по данной тематике: книги [10], [11] по внешним дифференциальным системам, работы [12]–[15], в которых получены результаты о псевдогруппах и их дифференциальных инвариантах, работу [16] (развивающую ряд предшествующих работ, в том числе [17], и обобщающую работу [18]), в которой построены дифференциальные инварианты для общего распределения ранга 2 на n -мерном многообразии, а также работы [19]–[21]. В ряде случаев (см. [22]–[24]) теорема Трессе была применена и обоснована при классификации римановых, кэлеровых и гиперкэлеровых структур (и решений уравнений Эйнштейна) вблизи точки (см. также [25]). Дифференциальные коварианты римановых метрик рассматривались в работе [26] (см. также [25] и [27]).

Настоящая работа является продолжением работы [28], и мы без дополнительных объяснений используем результаты, понятия и обозначения из этой работы, только иногда напоминая для удобства читателя некоторые из них.

Авторы благодарят всех коллег, советы которых оказались полезны при написании данной работы, в особенности В. И. Арнольда, В. А. Васильева, Б. С. Кругликова, В. Н. Латышева, Л. В. Овсянникова, Е. В. Панкратьева, А. Г. Хованского, а также участников семинара И. С. Красильщика, на котором докладывалась настоящая работа, в том числе И. С. Красильщика, А. М. Вербовецкого, И. Р. Миклашевского.

§ 2. Подготовительные сведения

2.1. Пусть $G = G^q(n)^0$ – связная компонента группы $G^q(n)$, состоящая из q -струй невырожденных отображений $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, сохраняющих начало координат. Пусть $P = P(D) \rightarrow X$ – расслоение геометрических структур, определенное действием α группы G на стандартном слое D этого расслоения. Напомним, что расслоение геометрических структур называется *неспециальным*, если $m = \dim D$ больше $n = \dim X$. Напомним также, что группа $\mathcal{V}$ всех сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов X естественным образом действует на P и на расслоении k -струй $J^k = J^k P$ расслоения P для любого k и через каждую точку $a \in J^k$ проходит орбита этой группы. Обозначим через $\Delta_k(a)$ касательное пространство в точке a к этой орбите. Имеются естественные проекции $\pi(k, s): J^k \rightarrow J^s$, $\pi_k: J^k \rightarrow X$. Обозначим $J^0 = P$.

Для любого многообразия N через $T(N)$ обозначается касательное расслоение к N . Через $T_x(N)$, или просто T_x , обозначается касательное пространство к N в точке $x \in N$. Отображение $\nu: N_1 \rightarrow N_2$ многообразий индуцирует отображение касательных расслоений $T\nu: T(N_1) \rightarrow T(N_2)$. Если $x \in N_1$ и

$\nu(x) = y \in N_2$, то $T\nu$ переводит $T_x(N_1)$ в $T_y(N_2)$. Обратный образ на N_1 при отображении ν функции f , определенной на N_2 , будем обозначать $\nu^*(f)$. Под окрестностью или областью всегда будем понимать открытую окрестность или открытую область. Через $\overline{W}$ обозначим замыкание множества W .

2.2. Известно, что росток в точке 0 гладкого диффеоморфизма φ , $\varphi(0) = 0$, продолжается до гладкого диффеоморфизма единичного шара $\mathbb{E}^n$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Это продолжение может быть выбрано тождественным вблизи границы шара [29, гл. 5, лемма 5.4]. Отсюда следует, что при локальном рассмотрении дифференциальных инвариантов группы $\mathcal{V}$ в окрестности точки $x \in X$ можно заменить многообразие X любой окрестностью точки x . Поэтому при проведении доказательств всюду в настоящей работе мы будем считать, что X есть внутренность шара $\mathbb{E}^n$ в $\mathbb{R}^n$ с индуцированной из $\mathbb{R}^n$ стандартной системой координат $F = (f^1, \dots, f^n)$. Напомним, что действие α группы G на D определяет для любого k продолженное действие α_k группы $G(k) = G^{q+k}(n)^0$ на k -е продолжение D^k многообразия D . Имеются согласованные с групповым действием естественные проекции $\mu(k, s): D^k \rightarrow D^s$. Мы полагаем $D^0 = D$, $\mu(k, 0) = \mu_k$. Выбор системы координат F на X определяет [28] тривиализации, согласованные с проекциями $\pi(k, s)$ и $\mu(k, s)$:

$$J^0 = P \approx X \times D, \quad J^k \approx X \times D^k. \quad (2.1)$$

Если точка $a \in J^k$ отвечает при соответствии (2.1) паре (b, d) , где $b \in X$, $d \in D^k$, то ясно, что $b = \pi_k(a)$. Обозначим $d = a_F$ и назовем d F -образом a . Если O – проходящая через точку a орбита группы $\mathcal{V}$, то

$$O \approx X \times O', \quad (2.2)$$

где $O' \subset D^k$ – проходящая через точку $d = a_F$ орбита группы $G(k)$.

Разложение (2.2) задает естественную биекцию между орбитами группы $\mathcal{V}$ на J^k и орбитами группы $G(k)$ на D^k . Точка $a \in J^k$ регулярна относительно действия группы $\mathcal{V}$ тогда и только тогда, когда точка $d = a_F \in D^k$ регулярна относительно действия группы $G(k)$. Напомним, что точка называется *регулярной*, когда размерности всех орбит в окрестности этой точки постоянны. Множество регулярных точек в J^k мы будем обозначать через R^k . Обозначим через $\Delta'_k(a)$ касательное пространство к подмногообразию $b \times O'$ в точке $a \in J^k$, где $\pi_k(a) = b$. Пространство $\Delta'_k(a)$ отождествляется с подпространством в $T_d(D^k)$ для $d = a_F$. В настоящей работе мы считаем, что система координат F на X фиксирована, поэтому фиксированы прямые разложения, связанные с выбором F .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Мы скажем, что на многообразии N задано семейство L , если в каждой точке $z \in N$ задано подпространство $L(z)$ касательного пространства $T_z(N)$ и существуют окрестность U точки z и s гладких векторных полей в U , причем значения этих полей в каждой точке $y \in U$ порождают пространство $L(y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Семейство L называется *равноразмерным в точке y_0* , если найдется такая окрестность U этой точки, что размерность $s = \dim L(y)$ постоянна для всех $y \in U$.

Если семейство L является равноразмерным в любой точке открытого подмножества V из N , то мы скажем, что L является равноразмерным в V (в этом случае также говорят, что L является распределением на V). Ясно, что $\Delta_k(z)$ для каждого k образуют семейство в J^k и на множестве R^k регулярных точек это семейство будет равноразмерным. Поскольку Δ_k по построению касательно к орбитам, из теоремы Фробениуса следует, что на множестве R^k выполнено включение

$$[\Delta_k, \Delta_k] \subseteq \Delta_k. \quad (2.3)$$

Здесь $[\Delta_k, \Delta_k]$ – коммутатор семейства Δ_k . Равноразмерное семейство со свойством (2.3) принято называть *инволютивным* (или *вполне интегрируемым*).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. *A-функцией (A-полем) на многообразии N назовем (гладкую) функцию F (соответственно, гладкое векторное поле), определенную в области A многообразия N . Если $N = J^k$ и A – область в N , то F называется *A-функцией уровня k* и A называется *областью уровня k* .*

Каждое A -поле e на многообразии N определяет дифференцирование в области A . Образ A -функции F при этом дифференцировании обозначим через eF ; понятно, что eF также является A -функцией.

2.3. Для формулировки теоремы Трессе удобно рассмотреть проективный предел J^∞ многообразий J^k относительно естественных отображений $\pi(k, s): J^k \rightarrow J^s$. Обозначим через ν_s естественную проекцию $J^\infty \rightarrow J^s$, через ν_{-1} – проекцию J^∞ на базовое многообразие X . Введем на J^∞ естественную топологию проективного предела, для которой базисом открытых множеств в J^∞ являются прообразы $\nu_s^{-1}(U)$ всевозможных открытых множеств U из J^s для всех s , и будем называть J^∞ *пространством бесконечных струй*. Аналогично определим топологическое пространство D^∞ и естественную проекцию $\lambda_s: D^\infty \rightarrow D^s$. Ясно, что группа $\mathcal{V}$ действует на J^∞ . Множество в J^k или J^∞ называется *инвариантным*, если оно инвариантно относительно этого действия. Из сказанного выше следует существование согласованных с проекциями λ_s, ν_s тривиализаций

$$J^s \approx X \times D^s, \quad J^\infty \approx X \times D^\infty. \quad (2.4)$$

Если точка $z \in J^\infty$ отвечает при второй тривиализации из (2.4) паре (x, y) , то $x = \nu_{-1}(z) \in X$, а $y \in D^\infty$ называется *F-образом z* и обозначается $y = z_F$. Также будем обозначать $z_k = \nu_k(z) \in J^k$, $\Delta_k(z) = \Delta_k(z_k)$, $T_k(z) = T_{z_k}(J^k)$, $\Delta'_k(z) = \Delta'_k(z_k)$. Аналогично, для точек $a \in J^r$ при $r \geq k$ положим $\Delta_k(a) = \Delta_k(c)$, $\Delta'_k(a) = \Delta'_k(c)$, где $c = \pi(r, k)(a)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. *Функцией степени k на области U в J^∞ называется функция f на U вида $f = \nu_k^*(F)$ для подходящей области B уровня k с условием $\nu_k(U) \subset B$ и для B -функции F . Для любого открытого множества $U \subset J^\infty$ через $\mathcal{A}(U)$ обозначается кольцо функций конечной степени на U . Пусть U – область в J^∞ такая, что $U = \nu_k^{-1}(A)$ для подходящей области A в J^k . Тогда U называется *областью степени k* . Все рассматриваемые далее области в J^∞ имеют конечную степень.*

2.4. Напомним, для точки $a \in J^k$ через $O_a(J^k)$ обозначается кольцо ростков гладких функций в этой точке, через $I_a(J^k)$ – подкольцо этого кольца, состоящее из функций, инвариантных относительно (частичного) действия группы $\mathcal{V}$ в окрестности точки a , т. е. функций, постоянных на каждой компоненте связности пересечения каждой орбиты группы $\mathcal{V}$ с подходящей окрестностью точки a . Росток, определенный функцией φ в точке a , будем обозначать через φ_a . А-функцию φ уровня k будем называть *А-инвариантом* (или *инвариантной функцией*, или просто *инвариантом*), если росток φ_a этой функции для любой точки $a \in A$ лежит в $I_a(J^k)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Пусть $z \in J^\infty$. Через $O_z(J^\infty)$ (аналогично, $I_z(J^\infty)$) обозначается *проективный предел* колец $O_{z_k}(J^k)$ (соответственно, $I_{z_k}(J^k)$) относительно вложений $\pi^*(r, k): O_{z_k}(J^k) \rightarrow O_{z_r}(J^r)$, индуцированных проекциями $\pi(r, k)$. Ясно, что можно говорить о значении $f(z) \in \mathbb{R}$ элемента $f \in O_z(J^\infty)$ в точке z . Обозначим через ν_k^* естественное вложение $O_{z_k}(J^k) \rightarrow O_z(J^\infty)$; ясно, что $\nu_k^* I_{z_k}(J^k) \subset I_z(J^\infty)$.

Из определений ясно, что для любого ростка $f \in O_z(J^\infty)$ найдутся натуральное k , область A в J^k и А-функция f' такие, что $z_k \in A$ и f' определяет в точке z_k росток $f'_{z_k} \in O_{z_k}(J^k)$, для которого $\nu_k^*(f'_{z_k}) = f$. Мы будем говорить, что А-функция f' и ее росток f'_{z_k} представляют росток f , а также что элемент f имеет степень k . Разумеется, А-функция f' , представляющая f , определена неоднозначно, но ее росток f'_{z_k} (при выбранном k) определен однозначно, и мы говорим, что он имеет уровень k . Ясно, что если элемент $f \in O_z(J^\infty)$ имеет степень k , то f имеет и любую большую степень.

2.5. На многообразии D имеется атлас, задающий гладкую структуру на D . Согласно [28, п. 3.4] для каждой локальной карты $Q = (N, y^c)$ этого атласа на окрестности

$$N^k = N \times D_1 \times \cdots \times D_k \quad (2.5)$$

прямого произведения

$$D^k = D \times D_1 \times \cdots \times D_k \quad (2.6)$$

возникает система координат $(y) = (y^c, y_{j_1}^c, \dots, y_{j_1, \dots, j_k}^c)$, $1 \leq c \leq m$, $1 \leq j_s \leq n$, $1 \leq s \leq k$, которая определяет карту $Q^k = (N^k, (y))$ на D^k . При $s > 0$ координаты $y_{j_1, \dots, j_s}^c$ являются глобальными координатами на D_s . Для системы координат (y) также используется запись $(y) = (y_\mu^c)$, $1 \leq c \leq m$, $|\mu| \leq k$, в которой μ – мультииндекс: $\mu = (j_1, \dots, j_s)$ веса $|\mu| = s$, а (y_μ^c) – набор координат, отвечающих всевозможным парам (c, μ) с условием $1 \leq c \leq m$, $|\mu| \leq k$. Когда ясно, о каких m и k идет речь, пишут просто $(y) = (y_\mu^c)$. Координаты (f^i) и (y) порождают тривиализации касательных расслоений

$$T(X) \approx X \times T, \quad T(N^k) \approx N^k \times S_k. \quad (2.7)$$

Здесь T и S_k – линейные пространства с координатами (ξ^i) и (η) соответственно, причем координаты (f^i) порождают (ξ^i) , а координаты (y) порождают координаты $(\eta) = (\eta_\mu^c) = (\eta^c, \eta_{j_1}^c, \dots, \eta_{j_1, \dots, j_k}^c)$, $1 \leq c \leq m$, $1 \leq j_s \leq n$, $1 \leq s \leq k$.

Весом координаты η_μ^c или y_μ^c называется вес $|\mu|$ мультииндекса μ . Отождествление (2.1) порождает на области $N^k(F) \approx X \times N^k \subset J^k$ систему координат (f^i) , (y) , что определяет карту $Q^k(F) = (N^k(F), (f^i), (y))$ на J^k . Отождествление (2.1) также порождает отождествления $T(J^k) \approx T(X) \times T(D^k)$, $T(N^k(F)) \approx T(X) \times T(N^k)$, что вместе с (2.7) дает отождествление

$$T(N^k(F)) \approx (X \times N^k) \times (T + S_k). \quad (2.8)$$

Ясно, что карты Q_α^k , $Q_\alpha^k(F)$ образуют атласы D^k и J^k соответственно, если карты Q_α образуют атлас D . Обозначим $N^0 = N$, $N^0(F) \approx X \times N^0$, $N^\infty = \lambda_0^{-1}(N) \in D^\infty$, $N^\infty(F) \approx X \times N^\infty \subset J^\infty$. Далее мы будем предполагать, что выполнено следующее свойство: существует такой изоморфизм области N с внутренностью E^m единичного шара $\mathbb{E}^m$ в $\mathbb{R}^m$, при котором координаты y^c индуцированы стандартными координатами в $\mathbb{R}^m$. Мы рассматриваем только такие атласы на многообразии D , каждая карта которых обладает указанным свойством.

На области $N^k(F) \approx X \times N^k$ многообразия J^k имеется n векторных полей $\partial_1^k, \partial_2^k, \dots, \partial_n^k$, которые в карте $Q^k(F)$ записываются следующим образом:

$$\partial_i^k = \frac{\partial}{\partial f^i} + y_i^c \frac{\partial}{\partial y^c} + \dots + y_{j_1, \dots, j_{k-1}, i}^c \frac{\partial}{\partial y_{j_1, \dots, j_{k-1}}^c}. \quad (2.9)$$

Поле ∂_i^k называется *полным дифференцированием уровня k по переменной f^i* . Если A – область в $N^{k-1}(F)$, то для любой A -функции G определено действие ∂_i^k на G ; результат этого действия обозначается $\partial_i^k G$ и представляет собой функцию уровня k , определенную на $\pi^{-1}(k, k-1)[A]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Назовем *кортежем уровня k* и обозначим через $\mathcal{P} = (U, H)$ пару, состоящую из области U многообразия J^k и последовательности $H = (H^1, \dots, H^n)$ из n U -функций. При $r \geq k$ полагаем $\mathcal{P}^{(r)} = (\pi^{-1}(r, k)[U], H^{(r)})$, где $H^{(r)} = (\pi^*(r, k)[H^1], \dots, \pi^*(r, k)[H^n])$. Ясно, что $\mathcal{P}^{(r)}$ – кортеж уровня r . Каждый кортеж $\mathcal{P} = (U, H)$ уровня k при любом $r \geq k$ определяет $\pi^{-1}(r, k)[U]$ -поле уровня r , заданное формулой

$$\pi^*(r, k)[H^1] \partial_1^r + \dots + \pi^*(r, k)[H^n] \partial_n^r. \quad (2.10)$$

Пусть G – произвольная A -функция уровня $r-1$. Обозначим $W = \pi^{-1}(r, k)[U] \cap \pi^{-1}(r, r-1)[A]$. Тогда результат применения поля (2.10) к функции G представляет собой W -функцию уровня r и обозначается $D(\mathcal{P})G$. Мы называем операцию $G \rightarrow D(\mathcal{P})G$ (полным) *$\mathcal{P}$ -дифференцированием (уровня k)* и обозначаем $D(\mathcal{P})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Пусть $D = D(\mathcal{P})$ – $\mathcal{P}$ -дифференцирование, отвечающее кортежу $\mathcal{P} = (U, H)$ уровня k . Мы говорим, что оно *определено в точке $z \in J^r$* (в области $A \subset J^r$), если $r \geq k$ и $\pi(r, k)z \in U$ (соответственно, $\pi(r, k)A \subset U$); в этом случае D имеет в точке z значение, которое обозначается $D(z)$ и равно по определению

$$\pi^*(r, k)(H^1)[z] \frac{\partial}{\partial f^1} + \dots + \pi^*(r, k)(H^n)[z] \frac{\partial}{\partial f^n} \in T_b(X),$$

где $b = \pi_k(z) \in X$ и $H = (H^1, \dots, H^n)$. Мы говорим, что набор $\mathcal{P}_i$ -дифференцирований $D_i = D(\mathcal{P}_i)$ образует базис в точке z , если все D_i определены в точке z и $D_i(z)$ образуют базис в $T_b(X)$. Ясно, что D_i образуют базис в точке z тогда и только тогда, когда количество D_i равно n , $n = \dim X$, и $\det\{\pi^*(r, k)H_i^j[z]\} \neq 0$. Здесь $\mathcal{P}_i = (U_i, H_i)$, а $H_i = (H_i^1, \dots, H_i^n)$. Если D_i образуют базис в точке z , то ясно, что точка z имеет подходящую окрестность $W \subset J^r$ такую, что для любого $t \geq r$ и любой точки $v \in \pi^{-1}(t, r)[W]$ все D_i определены в v и набор $D_i(v)$ образует базис в точке v .

2.6. Пусть $\mathcal{P} = (U, H)$ – кортеж уровня k . Для любой точки $z \in \nu_k^{-1}(U)$ соответствующее $\mathcal{P}$ -дифференцирование $D(\mathcal{P})$ индуцирует в $O_z(J^\infty)$ дифференцирование, которое будем также обозначать через $D(\mathcal{P})$ и называть $\mathcal{P}$ -дифференцированием; образ элемента $g \in O_z(J^\infty)$ при этом дифференцировании обозначим $D(\mathcal{P})g$ и определим следующим образом. Пусть A – область уровня $r \geq k - 1$ такая, что $z_r = \nu_r(z) \in A$, и g задается ростком A -функции G в точке z_r . Тогда $H = D(\mathcal{P})G$ есть $(\pi^{-1}(r + 1, r)[A])$ -функция, росток которой в точке z_{r+1} представляет элемент $D(\mathcal{P})g$. Легко видеть, что это определение корректно. Также легко видеть, что $D(\mathcal{P}) = D(\mathcal{P}^{(j)})$ при любом $j \geq k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8. Мы будем говорить, что $\mathcal{P}$ -дифференцирование $D(\mathcal{P})$ уровня k определено в точке $z \in J^\infty$, если $z \in \nu_k^{-1}(U)$, где $\mathcal{P} = (U, H)$. Пусть $b = \nu_{-1}(z) \in X$. Через $D(\mathcal{P})(z)$ обозначим вектор $\nu_k^*(H^1)[z]\partial/\partial f^1 + \dots + \nu_k^*(H^n)[z]\partial/\partial f^n \in T_bX$, где $H = (H^1, \dots, H^n)$; этот вектор называется значением $\mathcal{P}$ -дифференцирования $D(\mathcal{P})$ в точке z .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. Для набора $\mathcal{P} = (U, H)$ уровня k полное $\mathcal{P}$ -дифференцирование $D(\mathcal{P})$ называется инвариантным, если для любой точки $z \in \nu_k^{-1}(U)$ и любого элемента $H \in I_z(J^\infty)$ имеем $D(\mathcal{P})H \in I_z(J^\infty)$.

Назовем полное инвариантное $\mathcal{P}$ -дифференцирование просто инвариантным дифференцированием, когда нет необходимости явно указывать кортеж $\mathcal{P}$, задающий это дифференцирование.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Можно было бы дать эквивалентное определение инвариантного дифференцирования в терминах многообразий J^k без обращения к J^∞ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10. Точка $a \in J^k$ называется допустимой, если существуют окрестность U точки a и n инвариантных дифференцирований $D_1 = D(\mathcal{P}_1), \dots, D_n = D(\mathcal{P}_n)$, образующих базис в каждой точке окрестности U . Ясно, что множество допустимых точек открыто и что любой прообраз допустимой точки будет допустимой точкой. Аналогично, точка $z \in J^\infty$ называется допустимой (ступени k), если допустима точка $z_k = \nu_k(z) \in J^k$. Ясно, что допустимая точка ступени k будет допустимой точкой ступени r для любого $r \geq k$.

2.7. Опишем известный способ получения инвариантных дифференцирований. Пусть k – натуральное число и U – область в J^k . Рассмотрим кортеж $\mathcal{P} = (U, H)$ уровня k такой, что все H^i являются инвариантами, где

$H = (H^1, \dots, H^n)$. Рассмотрим матрицу

$$\varphi = \varphi_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} \partial_1^{k+1} H^1 & \dots & \partial_n^{k+1} H^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_1^{k+1} H^n & \dots & \partial_n^{k+1} H^n \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Элементы матрицы φ и $\det \varphi$ определены на $\pi^{-1}(k+1, k)[U]$. Предположим, что матрица φ обратима в подобласти W области $\pi^{-1}(k+1, k)[U]$, и обозначим $\psi = \det \varphi^{-1}$. Заменим формально в матрице φ i -ю строку на строку $\psi \partial_1, \dots, \psi \partial_n$ и разложим формально определитель полученной матрицы по i -й строке. В результате имеем формальное выражение вида $\sum_k A_i^k \partial_k$, где A_i^k – алгебраическое дополнение к элементу, стоящему на пересечении i -й строки и k -го столбца матрицы φ , деленное на $\det \varphi$. Обозначим через D_i полное дифференцирование уровня $k+1$, отвечающее кортежу $\mathcal{P}_i = (W, A_i)$, где $A_i = (A_i^1, \dots, A_i^n)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Каждое D_i индуцирует на области $\nu_k^{-1}(W)$ инвариантное дифференцирование D_i (обозначаемое так же), т. е. для каждой точки $z \in \nu_k^{-1}(W)$ и любого элемента $H \in I_z(J^\infty)$ имеем $D_i H \in I_z(J^\infty)$ для любого $1 \leq i \leq n$. Кроме того, значения $D_i(z)$ этих дифференцирований образуют базис в каждой точке $z \in \nu_k^{-1}(W)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно представить H ростком инвариантной функции, определенной в подходящей окрестности V точки $z_r = \nu_r(z) \in J^r$ для подходящего уровня $r \geq k$. В этом случае утверждение доказано в [7, п. 25].

2.8. Отметим, что каждая точка $a \in J^{k+1}$ определяет в касательном пространстве $T_u(J^k)$ точки $u = \pi(k+1, k)(a)$ к многообразию J^k подпространство размерностью n , называемое *R-плоскостью* и обозначаемое $\tau(a)$. Именно, пусть $b = \pi_k(u) \in X$ и a представляется струей $(k+1)$ -го порядка отображения $\sigma: X \rightarrow P$ в точке b , т. е. $a = j_{k+1}\sigma(b)$. Тогда $j_k\sigma$ определяет отображение $X \rightarrow J^k$ и $\tau(a)$ есть образ касательного пространства $T_b(X)$ к точке b многообразия X при касательном отображении $T(j_k\sigma)$ отображения $j_k\sigma$, т. е. $\tau(a) = T(j_k\sigma)(T_b(X))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.11. Точка $a \in J^k$ называется *ординарной точкой*, если

$$\Delta_{k-1}(a) \cap \tau(a) = 0. \quad (2.12)$$

Точка $z \in J^\infty$ называется *ординарной точкой степени k* , если точка $z_k = \nu_k(z) \in J^k$ ординарна. Очевидно, множества всех ординарных точек в J^k и J^∞ открыты и инвариантны.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Прообраз всякой ординарной точки $a \in J^k$ относительно любой проекции $\pi(r, k): J^r \rightarrow J^k$ ординарен. Действительно, если $w \in J^r$, $w' = \pi(r, k)(w) \in J^k$, то

$$\tau(w') = \pi(r-1, k-1)[\tau(w)], \quad \Delta_{k-1}(w) = \pi(r-1, k-1)[\Delta_{r-1}(w)].$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Если точка $a \in J^{k+1}$ ординарна, а точка $u = \pi(k+1, k)(a) \in J^k$ регулярна, то точка a допустима. Действительно, пусть σ и b – такие же, как в начале данного пункта. Пусть $r = \text{codim } \Delta_k(u)$. По теореме Фробениуса у точки u найдутся окрестность $U \subset J^k$ и U -инварианты $H^1, \dots, H^r$ такие, что в точке u ранг якобиевой матрицы $(\partial H^i / \partial z^j)$, составленной из частных производных функций H^i по локальным координатам z^j в окрестности точки u , равен r . Рассмотрим в окрестности точки b суперпозицию $G' = H' \circ j_k \sigma$ отображения $j_k \sigma: X \rightarrow J^k$ и отображения $H': J^k \rightarrow \mathbb{R}^r$, заданного функциями $H^1, \dots, H^r$. Поскольку $\Delta_k(u) \cap \tau(a) = 0$, ранг отображения G' в точке b равен n . Поэтому, перенумеровав H^i и обозначив через $H: J^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ отображение, заданное функциями $H^1, \dots, H^n$, можно считать, что ранг суперпозиции $G = H \circ j_k \sigma$ в окрестности точки b равен n . Однако непосредственное вычисление показывает, что якобиева матрица отображения G в точке b совпадает с матрицей $\varphi(a) = \varphi_{\mathcal{P}}(a)$, определенной по формуле (2.11). Поэтому, уменьшив при необходимости U , взяв последовательность $H = (H^1, \dots, H^n)$ и определив кортеж $\mathcal{P} = (U, H)$, мы видим, что a является допустимой точкой, так как кортеж $\mathcal{P}$ определяет указанным в начале п. 2.7 способом n инвариантных дифференцирований $D_1, \dots, D_n$, образующих базис в каждой точке окрестности $V = \pi^{-1}(k+1, k)[U]$.

ЛЕММА 2.1. Пусть $P = P(D) \rightarrow X$ – неспециальное расслоение геометрических структур, имеющее порядок q . Пусть Λ^k – множество допустимых точек в $J^k = JP^k$. Тогда найдется такое натуральное $\Omega = \Omega(m, n)$, зависящее только от $m = \dim D$, $n = \dim X$ и q , что для любого $k \geq \Omega$ множество Λ^k открыто, инвариантно и всюду плотно в J^k .

§ 3. Доказательство леммы 2.1

Для доказательства леммы 2.1 изложим некоторые необходимые сведения.

3.1. Для группы струй $G^{k+q}(n)^0$ и ее алгебры Ли $\mathcal{G}(k+q)$ имеются прямые разложения (см. [28, п. 3.4])

$$G^{k+q}(n)^0 = G_1 \times \dots \times G_{k+q},$$

$$\mathcal{G}(k+q) = \mathcal{G}_1 \times \dots \times \mathcal{G}_{k+q}$$

и соответствующие координаты $(g) = (g_\mu^i) = (g_{j_1}^i, \dots, g_{j_1, \dots, j_{k+q}}^i)$ и $(r) = (r_\mu^i) = (r_{j_1}^i, \dots, r_{j_1, \dots, j_{k+q}}^i)$. Число $s = |\mu|$ называется *весом* координаты g_μ^i или r_μ^i , а также весом мультииндекса $\mu = (j_1, \dots, j_s)$.

3.2. В настоящем параграфе используются обозначения из п. 2.5. По аналогии с п. 2.2 также условимся, что точка $z \in N^k(F)$ будет задаваться парой (x, y) , где $x = \pi_k(z) \in X$, $y = z_F \in D^k$, и будем записывать $z = (x, y)$. Точка $x \in X$ задается набором своих координат $x^i = f^i(x)$, $1 \leq i \leq n$, поэтому запишем $x = (x^i)$. Аналогично, точка $d \in D^k$ задается набором своих координат $d_\mu^c = y_\mu^c(d)$, следовательно, $d = (d_\mu^c)$. Аналогичный смысл для $g \in G$, $r \in \mathcal{G}(k+q)$ имеют записи $g = (g_\mu^i)$, $r = (r_\mu^i)$, только в этом случае индекс i и

мультииндекс μ удовлетворяют условиям $1 \leq |\mu| \leq k + q$, $1 \leq i \leq n$. Векторное поле θ в области $N^k(F)$ будет задаваться парой вектор-функций (ξ, η) , где $\xi = \xi(z) \in T$, $\eta = \eta(z) \in S_k$, $z \in N^k(F)$. Мы будем называть ξ *горизонтальной*, а η *вертикальными компонентами* поля θ . Поля ξ и η , в свою очередь, будут задаваться своими компонентными функциями ξ^i и η_μ^c , и мы будем записывать $\xi = (\xi^i)$, $\eta = (\eta_\mu^c)$. Аналогично, векторное поле ξ на X и векторное поле η на N^k задаются соответственно вектор-функцией $\xi = (\xi^i) = \xi(x) \in T$ для $x \in X$ и вектор-функцией $\eta = (\eta_\mu^c) = \eta(y) \in S_k$ для $y \in N^k$.

3.3. Пусть точка $a = (a^c)$ многообразия D принадлежит карте (N, y^c) , а элемент $g = (g_\mu^c)$ – окрестности единицы группы $G = G^q(n)^0$; действие G на D обозначается через α . Пусть точка $v = \alpha(a, g)$ находится в карте N и ее координаты v^p задаются формулами $v^p = \alpha^p(a^c, g_{j_1}^i, \dots, g_{j_1, \dots, j_q}^i)$, $1 \leq c, p \leq m$, $1 \leq j_s \leq n$, $1 \leq s \leq q$, $1 \leq i \leq n$. Близкое к единичному отображение φ из группы $\mathcal{V}$ задается формулами $h^i = \varphi^i(x^1, \dots, x^n)$, где $x = (x^i) \in X$, $1 \leq i \leq n$, $h = \varphi(x) = (h^i) \in X$. Тогда φ индуцирует отображение $\psi = \psi(\varphi): P \rightarrow P$, которое в карте $N^0(F) = X \times N$ записывается в виде $\psi = (\varphi^i, \iota^p)$, где $1 \leq i \leq n$, $1 \leq p \leq m$ и ι^p получается из α^p подстановкой $\partial^s \varphi^i / \partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_s}$ вместо $g_{j_1, \dots, j_s}^i$.

3.4. Пусть $\varphi(t): X \rightarrow X$ – семейство диффеоморфизмов, зависящее от параметра t , такое, что $\varphi(0) = \text{Id}$ – единичное преобразование. Обозначим через $\xi = (\xi^i(f))$ векторное поле $(\partial\varphi/\partial t)(0)$ на базе X . Диффеоморфизм φ порождает диффеоморфизмы $\psi^k = \psi^k(\varphi): J^k \rightarrow J^k$ для всех $k \geq 0$, поэтому векторное поле ξ порождает векторные поля $\theta^{(k)}$ на каждом $J^k \approx X \times D^k$. В карте $N^k(F)$ имеем $\theta^{(k)} = (\xi, \eta^{(k)})$, $\xi = (\xi^i)$, $1 \leq i \leq n$, и $\eta^{(k)} = (\eta_\mu^c)$, $|\mu| \leq k$. В книгах [6] и [30] выведены формулы для $\eta^{(k)}$, например формула (16.11) в работе [30], однако эта формула выведена в другом контексте, но ее вывод справедлив и в нашем случае.

Сначала рассмотрим $\eta^{(0)} = (\eta^c)$. Пусть $\xi_{j_1, \dots, j_s}^i = \partial^s \xi^i / \partial f^{j_1} \dots \partial f^{j_s}$. Обозначим через $\alpha_i^{c, j_1, \dots, j_s}(y)$ функцию на D , значение которой при фиксированном y равно значению частной производной $\partial \alpha^c / \partial g_{j_1, \dots, j_s}^i$ при значении аргументов $g_j^i = \delta_j^i$ и $g_{j_1, \dots, j_s}^i = 0$ для $s > 1$. Тогда имеем

$$\eta^c = \alpha_i^c \xi^i + \dots + \alpha_i^{c, j_1, \dots, j_s} \xi_{j_1, \dots, j_s}^i + \dots + \alpha_i^{c, j_1, \dots, j_q} \xi_{j_1, \dots, j_q}^i; \quad (3.1)$$

здесь и далее в настоящей работе по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Обозначая мультииндекс $(j_1, \dots, j_s)$ через μ , получим запись формулы (3.1) в виде

$$\eta^c = \alpha_i^{c, \mu} \xi_\mu^i, \quad 1 \leq |\mu| \leq q. \quad (3.2)$$

Пусть $\mu = (j_1, \dots, j_k)$, $k \geq 1$. Тогда

$$\eta_\mu^c = \partial_{j_1} \partial_{j_2} \dots \partial_{j_k} (\eta^c - y_i^c \xi^i) + y_{i, j_1, \dots, j_k}^c \xi^i. \quad (3.3)$$

Здесь по определению имеем $\partial_j \xi_{j_1, \dots, j_k}^i = \xi_{j, j_1, \dots, j_k}^i$, и для любой функции g конечного уровня выполнено $\partial_j (g \xi_{j_1, \dots, j_k}^i) = g \xi_{j, j_1, \dots, j_k}^i + \partial_j g \xi_{j_1, \dots, j_k}^i$, причем $\partial_j g$ задано формулой (2.9), например

$$\partial_j y_{j_1, \dots, j_k}^c = y_{j, j_1, \dots, j_k}^c, \quad \partial_j (g(f^i, y^c, y_{j_1}^c)) = \frac{\partial g}{\partial f^j} + y_j^c \frac{\partial g}{\partial y^c} + y_{j, j_1}^c \frac{\partial g}{\partial y_{j_1}^c}.$$

С помощью указанных свойств вычисляются все $\eta_{j_1, \dots, j_k}^c$. Например,

$$\begin{aligned}\eta_{j_1}^c &= \partial_{j_1}(\eta^c - y_i^c \xi^i) + y_{i, j_1}^c \xi^i \\ &= \partial_{j_1}(\alpha_i^{c, \mu}(y) \xi_\mu^i) - y_i^c \xi_{j_1}^i = \alpha_i^{c, \mu} \xi_{j_1, \mu}^i + y_{j_1}^p \xi_{j_1, \mu}^i \frac{\partial \alpha_i^{c, \mu}}{\partial y^p} - y_i^c \xi_{j_1}^i\end{aligned}$$

и т. д. Легко проверить, что $\partial_j \partial_s = \partial_s \partial_j$ для любых j и s , поэтому данное определение корректно. Значит, для любого мультииндекса $\mu = (j_1, \dots, j_i)$ также корректно определяется действие $\partial_\mu = \partial_{j_1} \dots \partial_{j_i}$ на любую функцию кольца $\mathcal{A}(U)$ для любой области $U \subseteq J^\infty$.

Далее нам будет удобно записывать мультииндекс $\mu = (j_1, \dots, j_i)$ в другом виде: $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, где μ_s – количество тех индексов j_r , которые равны s . Например, при $n = 3$ и $i = 5$, если $\mu = (j_1, \dots, j_5)$ при $j_1 = 3, j_2 = 2, j_3 = 2, j_4 = 1, j_5 = 3$, имеем $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, где $\mu_1 = 1, \mu_2 = 2, \mu_3 = 2$. Ясно, что вес $|\mu|$ равен $\mu_1 + \dots + \mu_n$. Данная запись мультииндекса называется *канонической* и используется всегда, когда не оговорено противное, а ранее введенная запись $\mu = (j_1, \dots, j_i)$ – *развернутой*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть A – область в многообразии J^k . Функция g , определенная в A , называется *A-квазиполиномом*, или просто *квазиполиномом*, если при каком-нибудь (значит, и при любом) покрытии многообразия D локальными картами в любой локальной карте (N, y^c) эта функция является на области $A \cap N^k(F)$ полиномом от y_μ^c , $1 \leq |\mu| \leq k$, с коэффициентами, которые являются гладкими функциями от f^i и y^c .

3.5. Следующие свойства функций η_μ^c вытекают из п. 3.4.

1. Для каждого μ с условием $|\mu| \leq k$ функция $\eta_\mu^c = P(\mu, c)_i^\nu \xi_\nu^i$ является линейной формой от ξ_ν^i , $1 \leq |\nu| \leq k + q$, поэтому для $a \in J^k$ вектор $\eta^{(k)}(a)$ зависит только от струи порядка $k + q$ поля ξ в точке $b = \pi_k(a)$, причем $\eta^{(k)}(a)$ не зависит от $\xi^i(b)$, т. е. от струи нулевого порядка.

2. Коэффициенты $P(\mu, c)_i^\nu$ этих линейных форм являются квазиполиномами, не зависящими от координат f^i .

3.6. Пусть a – любая точка из $J^k \approx X \times D^k$, $a = (b, y)$, $b = \pi_k(a)$, $y = a_F$. Поскольку группа $G = G^{q+k}(n)^0$ действует на D^k , каждый вектор Ξ из алгебры Ли $\mathcal{G}(k+q)$ определяет векторное поле на D^k . Поэтому определено отображение $\gamma_k(a): \mathcal{G}(k+q) \rightarrow S_k(a) = T_y(D^k)$. Легко видеть, что $(k+q)$ -струи векторных полей $\xi = (\xi^i)$ на X в точке b , удовлетворяющие условию $\xi^i(b) = 0$, образуют (относительно скобки Ли) алгебру Ли, изоморфную алгебре Ли $\mathcal{G}(k+q)$. Именно, $(k+q)$ -струе ξ_b поля ξ в точке b с коэффициентами Тейлора $\xi_\mu^i(b)$ отвечает вектор $\Xi \in \mathcal{G}(k+q)$ с координатами $r_\mu^i = \xi_\mu^i(b)$. При этом из определений вытекает, что вектор $\gamma_k(a)[\Xi]$ совпадает с вектором $\eta^{(k)}(a)$, построенным по струе ξ_b . Поэтому $\gamma_k(a)[\mathcal{G}(k+q)] = \Delta'(a)$.

3.7. Для точки $z \in N^\infty(F)$ обозначим через $\Delta_{k, k-1}(z)$, $\Delta'_{k, k-1}(z)$ и S^k , $k \geq 1$, ядра индуцированных естественной проекцией $\pi(k, k-1): J^k \rightarrow J^{k-1}$ соответственно отображений $\Delta_k(z) \rightarrow \Delta_{k-1}(z)$, $\Delta'_k(z) \rightarrow \Delta'_{k-1}(z)$ и $S_k \rightarrow S_{k-1}$. Легко видеть, что $\Delta'_{k, k-1}(z) = \Delta_{k, k-1}(z) \subseteq S^k$. Обозначим $d(k, z) = \text{codim}(\Delta'_k(z), S_k)$,

$d(k, k-1, z) = \text{codim}(\Delta_{k,k-1}(z), S^k)$. Положим $d(0, z) = \text{codim}(\Delta'_0(z), S_0)$. Ясно, что $0 \leq d(0, z) \leq m$.

ЛЕММА 3.1. *Существует такое натуральное число $\Omega = \Omega(m, n, q)$, зависящее только от $m = \dim D$, $n = \dim X$ и q , что для любой точки $z \in N^\infty(F)$ найдется натуральное r , обладающее свойствами $0 < r < \Omega$ и $d(r, r-1, z) \geq n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $k \geq 1$ очевидно, что $\dim \Delta'_k(z) = \dim \Delta'_{k-1}(z) + \dim \Delta_{k,k-1}(z)$, $\dim S_k = \dim S_{k-1} + \dim S^k$. Отсюда имеем $d(k, z) = d(k-1, z) + d(k, k-1, z)$, следовательно, получаем

$$d(k, z) = \sum_{s=1}^k d(s, s-1, z) + d(0, z). \quad (3.4)$$

Хорошо известно (см. [28, пп. 3.1–3.9], что

$$\dim S_k = \dim D^k = mC_{n+k}^k, \quad \dim \Delta'_k(z) \leq \dim G^{k+q}(n) = n(C_{n+k+q}^{k+q} - 1).$$

Поэтому $d(k, z) \geq f(k) = mC_{n+k}^k - n(C_{n+k+q}^{k+q} - 1)$. Из явного вида $f(k)$ легко следует (см. [28]), что при $k \rightarrow \infty$ величина $f(k)$ асимптотически ведет себя как $(m-n)C_{n+k}^k$. Поэтому существует натуральное число $\Omega = \Omega(m, n, q)$, зависящее только от m , n и q , такое, что при $k = \Omega - 1$ имеем $f(k) \geq nk + m$, значит, $d(k, z) \geq nk + m$. Формула (3.4) показывает, что найденное значение Ω является искомым. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. *Множество ϑ ординарных точек всюду плотно в J^Ω .*

Покажем, что лемма 2.1 следует из леммы 3.2. Пусть ϑ всюду плотно в J^Ω , и пусть задано натуральное $k \geq \Omega$. Учтя, что множество R^k регулярных точек в J^k открыто и всюду плотно для любого k , рассмотрим в J^k множество $\tilde{\Lambda} = \pi^{-1}(k, \Omega)[\vartheta] \cap \pi^{-1}(k, k-1)[R^{k-1}]$, которое всюду плотно в J^k . Все точки множества $\tilde{\Lambda}$ ординарны по замечанию 2.2, следовательно, по замечанию 2.3 они допустимы. Значит, в силу определения 2.10 множество Λ^k открыто и всюду плотно в J^k . Инвариантность Λ^k очевидна.

Итак, для доказательства леммы 2.1 нам осталось доказать лемму 3.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.2. Достаточно показать, что $\vartheta \cap N^\Omega(F)$ всюду плотно в $N^\Omega(F)$. Для любой точки $z = (x, y) \in N^k(F)$ мы считаем, что $\Delta_k(z)$ является подпространством в $T + S_k$, а $\Delta'_k(z)$ является подпространством в S_k . Обозначим через $\tau'(z)$ проекцию $\tau(z)$ на S_{k-1} вдоль T . Из соотношения (2.2) и определения $\Delta'_k(z)$ вытекает, что

$$\Delta_{k-1}(z) = \Delta'_{k-1}(z) + T. \quad (3.5)$$

Из соотношения (3.5) следует, что для $z \in N^k(F)$ условие $\tau(z) \cap \Delta_{k-1}(z) = 0$ равносильно условию

$$\tau'(z) \cap \Delta'_{k-1}(z) = 0. \quad (3.6)$$

Далее, из определения $\tau(z)$ в п. 2.8 следует, что подпространство $\tau'(z)$ порождено векторами $e^w(z) = (\eta(w, z)_\mu^c)$, $1 \leq w \leq n$, с координатами

$$\eta(w, z)_\mu^c = y_{\mu+1_w}^c, \quad 0 \leq |\mu| \leq k-1, \quad 1 \leq c \leq m, \quad 1 \leq w \leq n, \quad (3.7)$$

где $y = (y_\mu^c)$ и для $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ через $\mu + 1_w$ обозначен мультииндекс $(u_1, \dots, u_w + 1, \dots, u_n)$. Теперь обозначим через $\tilde{R}$ множество точек в $N^\Omega(F)$, определенных условием $\{v \in \tilde{R} \Leftrightarrow \pi(\Omega, k)v \in N^k(F) \text{ регулярно для всех } k \text{ таких, что } 0 < k < \Omega\}$. Поскольку множество R^k регулярных точек открыто и всюду плотно в $N^k(F)$ при любом k , множество $\tilde{R}$ открыто и всюду плотно в $N^\Omega(F)$. Возьмем теперь произвольную точку $z \in \tilde{R}$ и согласно лемме 3.1 натуральное r , $0 < r < \Omega$, для которого $d(r, r-1, z) \geq n$. Рассмотрим $z_r = \pi(\Omega, r)(z) \in N^r(F)$, а также $A(z) = \pi^{-1}(r+1, r)(z_r) \subset N^{r+1}(F)$. Ясно, что $z_{r+1} \in A(z)$. Пусть $v \in A(z)$ и векторы $e^w(v)$, $1 \leq w \leq n$, порождают подпространство $\tau'(v) \subset S_r$.

Обозначим через S^r и H подпространства в S_r , определенные соответственно условиями $\{\eta = (\eta_\mu^c) \in S^r \Leftrightarrow \eta_\mu^c = 0 \text{ для всех } \mu \text{ таких, что } |\mu| < r\}$ и $\{\eta = (\eta_\mu^c) \in H \Leftrightarrow \eta_\mu^c = 0 \text{ для всех } \mu \text{ таких, что } |\mu| = r\}$. Имеет место прямое разложение: $S_r = S^r + H$. Запишем $e^w(v) = e_1^w(v) + e_2^w(v)$, где $e_1^w(v) \in S^r$, $e_2^w(v) \in H$. Заметим, что при изменении v в множестве A вектор $e_2^w(v)$ не изменяется. Возьмем какое-нибудь прямое дополнение H_1 к линейному пространству $\Delta'_r(v) + S^r$ в S_r и обозначим через e_3^w проекцию $e_2^w(v)$ на $\Delta'_r(v) + S^r$ вдоль H_1 . Рассмотрим какое-нибудь содержащееся в $\Delta'_r(v)$ прямое дополнение H_2 к подпространству S^r в $\Delta'_r(v) + S^r$ и обозначим через e_4^w проекцию e_3^w на S^r вдоль H_2 . Ясно, что при этой проекции $\Delta'_r(v)$ переходит в $\Delta_{r,r-1}(v)$. Обозначим $h^w(v) = e_1^w(v) + e_4^w$, и пусть $\tau_0(v)$ – подпространство, порожденное векторами $h^w(v)$, $1 \leq w \leq n$. Ясно, что $\tau_0(v) \subset S^r$.

Заметим, что точка v ординарна (т. е. выполнено условие $\tau(v) \cap \Delta_r(v) = 0$), если выполнены два условия: $\dim \tau_0(v) = n$ и

$$\tau_0(v) \cap \Delta_{r,r-1}(v) = 0. \quad (3.8)$$

Далее нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 3.3. *Можно так выбрать точку v в $A(z)$, сколь угодно близкую к z_{r+1} , что $\tau_0(v)$ будет n -мерно и трансверсально любому наперед заданному подпространству L коразмерности n в S^r .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем среди мультииндексов лексикографическое упорядочение: будем считать, что $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ больше $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, если найдется индекс s такой, что $1 \leq s < n$ и $\mu_1 = \nu_1, \dots, \mu_s = \nu_s, \mu_{s+1} > \nu_{s+1}$. Упорядочим координаты η_μ^c в S^r : будем считать, что $\eta_\mu^c > \eta_\nu^c$, если $c > p$ или $c = p$, но $\mu > \nu$, и обозначим введенный порядок на множестве координат η_μ^c через Γ_1 . Аналогично упорядочим координаты y_μ^c веса $r+1$ в N^{r+1} и обозначим полученный порядок на множестве этих координат через Γ_2 .

Пусть $d = \dim S^r$. Обозначим через M_1 матрицу размером $n \times d$, w -я строка которой состоит из координат вектора $h^w(v)$, записанных в порядке убывания относительно Γ_1 . Каждый элемент m_{wj} матрицы M_1 имеет вид $m_{wj} = a_{wj} + b_{wj}$, где a_{wj} и b_{wj} – соответственно j -е координаты векторов $e_1^w(v)$ и e_4^w пространства S^r . Величины b_{wj} не изменяются при изменении v в $A(z)$. Из соотношения (3.7) следует, что $a_{wj} = y_\mu^c(v)$ для подходящих c и μ , $|\mu| = r+1$, зависящих от w и j . Поэтому каждый элемент матрицы M_1 можно считать

линейной функцией специального вида от координат $y_\mu^c(v)$ веса $r + 1$ точки v , т. е. $m_{wj} = y_{\mu(w,j)}^{c(w,j)}(v) + b_{wj}$. Мы будем называть $y_{\mu(w,j)}^{c(w,j)}$ *координатой, отвечающей элементу m_{wj}* . Из формулы (3.7) следует, что порядок Γ_2 на координатах, отвечающих элементам фиксированной строки матрицы M_1 , при движении слева направо по этой строке монотонно убывает. То же самое имеет место при движении сверху вниз в каждом столбце матрицы M_1 .

Обозначим через $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ минор матрицы M_1 , образованный ее столбцами с номерами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, причем в этой записи всегда предполагается, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$. Каждый такой минор мы рассматриваем как полином от переменных y_μ^c веса $r + 1$. Моном минора $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, который получается перемножением координат, отвечающих элементам его главной диагонали, будем называть *главным членом минора*.

Покажем, что все миноры $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ линейно независимы между собой как многочлены от y_μ^c . С этой целью упорядочим все эти миноры: будем считать, что минор $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ больше минора $\Delta(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, если найдется индекс s , $1 \leq s < n$, такой, что $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_s = \beta_s, \alpha_{s+1} < \beta_{s+1}$. Предположим, что равна нулю нетривиальная линейная комбинация этих миноров с постоянными коэффициентами. Пусть $\Delta' = \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ – наибольший минор, нетривиально входящий в эту линейную комбинацию, а $x' = y(1) \dots y(n)$ – символическая запись его главного члена, где каждое $y(i)$ – это координата y_μ^c с соответствующими индексами, причем будем считать, что порядок сомножителей в этой записи отвечает порядку элементов, стоящих на главной диагонали минора $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, проходимой слева направо. Моном x' должен сократиться с таким же мономом x'' , входящим в другой минор $\Delta'' = \Delta(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$. В моном x'' должны входить все координаты $y(i)$, в частности координата $y(1)$. По предположению имеем $\alpha_1 \leq \beta_1$, но тогда $\alpha_1 = \beta_1$, так как иначе все переменные, входящие в Δ'' , строго меньше $y(1)$. Поскольку $\alpha_1 = \beta_1$, то моном x'' содержит переменную $y(1)$ из столбца β_1 , так как все переменные, отвечающие остальным элементам этого столбца, также меньше $y(1)$. Вычеркнем первую строку и первый столбец из миноров Δ' и Δ'' и получим миноры $\Delta(\beta_2, \dots, \beta_n)$ и $\Delta(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Повторяя приведенное рассуждение, мы получим $\alpha_2 = \beta_2$ и так далее, т. е. мы получим, что член $y(1) \dots y(n)$ не может сократиться. Линейная независимость доказана.

Выберем теперь какой-нибудь базис в подпространстве L пространства S^r и обозначим через M_2 матрицу размером $(n - d) \times d$, составленную из его координат. Невырожденность квадратной матрицы $M(v) = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}$ означает трансверсальность $\tau_0(v)$ и L , а также выполнение условия $\dim \tau_0(v) = n$. Разложим определитель матрицы $M(v)$ по первым n строкам. Получим нетривиальную линейную комбинацию миноров $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Поскольку координаты $y_\mu^c(v)$ веса $r + 1$ для точки $v \in A(z)$ могут принимать любые значения, лемма доказана.

Теперь легко завершить доказательство леммы 3.2. Положим $L = \Delta_{r,r-1}(v)$. По лемме 3.3 найдется точка $v_0 \in A(z)$, для которой определитель матрицы $M(v)$ отличен от нуля. Обозначим его через Ψ . Функция Ψ – квазиполином от координат $y_\mu^c(v)$ точки v , т. е. Ψ является полиномом от $y_\mu^c(v)$, $1 \leq |\mu| \leq$

$r + 1$, коэффициенты которого зависят от координат $y^c(v)$. При $v \in A(z)$ все координаты $y^c(v)$ постоянны и равны координатам $y^c(z)$ точки z , поэтому хотя бы один из коэффициентов квазиполинома Ψ отличен от нуля в точке z и, значит, в целой окрестности $V(z)$ этой точки. Пусть $W(z)$ – дополнение в $V(z)$ к множеству нулей функции Ψ . Из сказанного выше ясно, что $W(z)$ открыто и всюду плотно в $V(z)$ (однако точка z может лежать вне $W(z)$) и состоит из ординарных точек (так как прообраз ординарной точки ординарен). Очевидно, объединение областей $W(z)$ для всех $z \in \tilde{R}$ состоит из ординарных точек, открыто и всюду плотно в N^Ω . Лемма 3.2, а с ней и лемма 2.1 доказаны.

Из леммы 3.2 в силу замечания 2.2 вытекает очевидное следствие.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Для любого $k \geq \Omega$ множество $\mathcal{V}^k$ ординарных точек открыто, инвариантно и всюду плотно в J^k .*

§ 4. Теорема о регулярности

4.1. В настоящем параграфе мы используем обозначения, введенные в § 2, в частности $P = P(D) \rightarrow X$ – расслоение геометрических величин, J^∞ – пространство бесконечных струй этого расслоения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Пусть k – натуральное число, z – точка пространства J^∞ . Тогда k -*типом* точки z называется бесконечная последовательность натуральных чисел $\eta(z) = (d_k, d_{k+1}, \dots)$, где $d_i = \dim \Delta_i(z)$.

ТЕОРЕМА 4.1 (о регулярности). Пусть $P \rightarrow X$ – расслоение геометрических величин порядка q с типовым слоем D , $\dim D = m$, $\dim X = n$ и $m > n$. Тогда в пространстве J^∞ найдется конечное число открытых непересекающихся инвариантных областей $U_1, \dots, U_r$ ступени $\mathfrak{A}$, для которых объединение U всех множеств U_i всюду плотно в J^∞ и которые обладают следующими свойствами:

- 1) для любого i и любой точки $z \in U_i$ проекция $z_k = \nu_k(z) \in J^k$ является при $k \geq \mathfrak{A}$ регулярной точкой из J^k ;
- 2) для любого i $\mathfrak{A}$ -тип точки $z \in U_i$ не зависит от z (а зависит только от номера i области U_i);
- 3) ступень $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(m, n, q)$ зависит только от m, n и q ;
- 4) существует универсальный (не зависящий от X и D) список $\mathfrak{A}$ -типов такой, что для любой точки $z \in U$ ее $\mathfrak{A}$ -тип содержится в этом списке; количество $\mathfrak{A}$ -типов в этом универсальном списке ограничено константой $r_0(m, n, q)$, зависящей только от m, n и q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что теорема вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 4.1. Для любой карты N из D в области $N^\infty(F)$ пространства J^∞ найдется конечное число открытых непересекающихся областей $U_1, \dots, U_r$ ступени $\mathfrak{A}$, не превосходящей $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(m, n, q)$, объединение которых всюду плотно в $N^\infty(F)$ и для которых выполнены утверждения 1)–4) теоремы 4.1.

Пусть лемма 4.1 верна, и пусть индексом i нумеруются все различные типы из универсального списка. Пусть $J^\infty \approx X \times D^\infty$ – тривиализация (2.4)

и N_α образуют атлас на D . Тогда $C_\alpha = X \times (N_\alpha)^\infty(F)$ образуют атлас на J^∞ . Согласно лемме 4.1 для каждого α в C_α существует область $U_{\alpha i}$, удовлетворяющая заключению этой леммы. Обозначим $U'_i = \bigcup_\alpha U_{\alpha i}$. Ясно, что U'_i – открытые множества в J^∞ и их объединение всюду плотно в J^∞ . Обозначим $U_i = \mathcal{V}(U'_i)$, где $\mathcal{V}$ – группа сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов X , действие которой естественно продолжается на J^∞ , а $\mathcal{V}(U'_i)$ – образ U'_i под действием группы $\mathcal{V}$. Ясно, что U_i – искомые множества. Отсюда в силу леммы 4.1 следует теорема.

4.2. До конца настоящей работы будем для краткости обозначать $N^\infty(F)$ через U_0 . Изучим более подробно введенные ранее понятия. Под линейным пространством будем понимать конечномерное (если специально не оговорено иное) линейное пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Пусть A – линейное пространство. Через A^* обозначим двойственное пространство к A , через $S(A)$ – симметрическую алгебру над линейным пространством A , а через $S^k(A)$ – k -ю симметрическую степень A и положим $S^0(A) = \mathbb{R}$.

Обозначим

$$S_k(A) = \sum_{i=0}^k S^i(A), \quad S_k^\bullet(A) = \sum_{i=1}^k S^i(A).$$

Все $S^i(A)$ естественным образом вложены в $S(A)$, и имеется прямое разложение:

$$S(A) = \sum_{i=0}^{\infty} S^i(A).$$

Пусть Q – другое линейное пространство. На $S(A)$, а также на тензорном произведении $M = S(A) \otimes Q$ стандартным образом определены градуировка и степень. Для элемента $m \in M$ однородная компонента степени t обозначается через m^t , степень – через $\deg(m)$. Если $m = \sum_{i=1}^k m^i$ и $m^k \neq 0$, то $\deg(m) = k$. Обозначим $M_k = S_k(A) \otimes Q$, $M^k = S^k(A) \otimes Q$.

4.3. Обозначения, введенные в пп. 2.5, 3.2 и 3.4, и следующие обозначения сохраняются до конца работы. В частности, $n = \dim X$, $m = \dim D$. Пусть $S_k = S_k(T^*) \otimes S_0$ (это отождествление зависит от выбранной системы координат $f^1, \dots, f^n$ на X). Обозначим S_0 через E . Отождествим алгебру Ли $\mathcal{G}(k+q)$ группы $G^q(n)^0$ (как линейное пространство) с линейным пространством $S_k^\bullet(T^*) \otimes T$. Для мультииндексов $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ и $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ обозначим через $\mu + \nu = ((\mu + \nu)_1, \dots, (\mu + \nu)_n)$ мультииндекс, определенный условием $(\mu + \nu)_i = \mu_i + \nu_i$. Мультииндекс $\mu + 1_i$ был определен в доказательстве леммы 3.2. Поскольку на X фиксирована координатная система F , то это определяет базисы $\partial/\partial f^i$, $1 \leq i \leq n$, в T и df^i в T^* . Для краткости будем обозначать $\partial/\partial f^i = X_i$, $X^\mu = X_1^{\mu_1} \dots X_n^{\mu_n} \in S^k(T)$. Элементы пространства $S^k(T)$ будем отождествлять с полиномами от X_i .

Если в линейном пространстве Q выбран базис $q_1, \dots, q_m$, то элементы вида $X^\mu \otimes q_j$ из пространства $S_k(T) \otimes Q$ будут называться *мономами*. Ясно, что $S_k(T^*) \otimes Q^*$ является двойственным пространством к $S_k(T) \otimes Q$ и каждый моном $X^\mu \otimes q_j$ с условием $|\mu| \leq k$ определяет на $S_k(T^*) \otimes Q^*$ координату, обозначаемую x_μ^j . Запись $x = (x_\mu^j) \in S_k(T^*) \otimes Q^*$ означает, что координаты

элемента x равны x_μ^j . Если $Q = T^*$ и базис в T^* состоит из элементов df^i , то при отождествлении $\mathcal{G}(k+q)$ с $S_k^\bullet(T^*) \otimes T$ координата x_μ^i совпадает с координатой r_μ^i (см. п. 3.2). Если $Q^* = E$ и в Q взят базис $\bar{\eta}_c$, двойственный к η_c , то координаты x_μ^c на $S_k = S_k(T^*) \otimes E$ совпадают с координатами η_μ^c из п. 2.5.

4.4. Рассмотрим отображение $\gamma_k(a)$, введенное в п. 3.6. Далее мы будем считать, что оно зависит от точки $z \in U_0 \subset J^\infty$ согласно формуле $\gamma_k(z) = \gamma_k(a): \mathcal{G}(k+q) \rightarrow S_k$, где $a = \nu_k(z) \in J^k$ и S_k отождествляется с касательным пространством $T_a(D^k)$. В координатном представлении $\gamma_k(z)$ задается функциями $\eta_\mu^c = \gamma_\mu^c(z, r)$, где $1 \leq c \leq m$, μ – мультииндекс, $|\mu| \leq k$, $z \in U_0$, а r – элемент группы $\mathcal{G}(k+q)$ с координатами r_ν^c , $1 \leq |\nu| \leq k+q$. Функции $\gamma_\mu^c(z, r)$ имеют вид

$$\gamma_\mu^c(z, r) = a(z; c, \mu)_i^\nu r_\nu^i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq |\nu| \leq k+q$$

(как обычно, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование). Функции $a(z; c, \mu)_i^\nu$ являются функциями от $z \in U_0$ конечной степени $k+q$, т. е. лежат в кольце $\mathcal{A}(U_0)$ (см. определение 2.4).

4.5. Для точки $z \in U_0$ и любого натурального k определим линейные отображения

$$\beta_k(z): S_{k+q}(T^*) \otimes T \rightarrow S_k = S_k(T^*) \otimes E.$$

Пусть $r = (r_\nu^c) \in S_{k+q}(T^*) \otimes T$. Зададим отображение $\beta_k(z)$ формулами

$$\eta_\mu^c = \beta_\mu^c(z, r) = \sum_{i=1}^n y_{i,j_1,\dots,j_k}^c r^i + \gamma_\mu^c(z, r). \quad (4.1)$$

Здесь $y = z_F \in D^\infty$, $y_{i,j_1,\dots,j_k}^c$ – координаты точки y ; если $\mu = (j_1, \dots, j_k)$ – развернутая запись мультииндекса μ , то координата $y_{i,j_1,\dots,j_k}^c$ отвечает мультииндексу $\mu + 1_i$. Отсюда и из (3.3) получаем, что $\beta_\mu^c(z, r)$ можно описать еще следующим образом. Рассмотрим в обозначениях п. 3.4 элемент $\beta_\mu^c(z, \xi) = \partial_\mu(\eta^c - \xi^i y_i^c)$. Здесь подразумевается, что сначала в эту формулу нужно подставить вместо элемента η^c его выражение, задаваемое формулой (3.2), затем применить к полученному выражению оператор ∂_μ по правилам, приведенным в п. 3.4. Получится выражение вида

$$\beta_\mu^c(z, \xi) = \sum a(z, c, \mu)_j^\nu \xi_\nu^j,$$

в котором сумма берется по индексу j с условием $1 \leq j \leq m$ и мультииндексу ν с условием $|\nu| \leq k+q$. В полученном выражении следует заменить каждое ξ_ν^i на r_ν^i . Результат совпадает с формулой (4.1).

Отображение $\beta_k(z)$ естественным образом определяет отображение $\mathcal{A}(U_0)$ -модулей

$$\beta_k: \mathcal{A}(U_0) \otimes S_{k+q}(T^*) \otimes T \rightarrow \mathcal{A}(U_0) \otimes S_k(T^*) \otimes E$$

(все тензорные произведения здесь и ниже берутся над $\mathbb{R}$), а также двойственное отображение

$$\beta_k^*: \mathcal{A}(U_0) \otimes S_k(T) \otimes E^* \rightarrow \mathcal{A}(U_0) \otimes S_{k+q}(T) \otimes T^*.$$

Отображения β_k^* (в отличие от отображений β_k) согласованы, т. е. при $r \leq k$ ограничение β_k^* на $\mathcal{A}(U_0) \otimes S_r(T) \otimes E^*$ относительно естественных вложений $S_r(T) \subset S_k(T) \subset S(T)$ равно β_r^* . Поэтому корректно определено отображение $\mathcal{A}(U_0)$ -модулей

$$\beta^*: \mathcal{A}(U_0) \otimes S(T) \otimes E^* \rightarrow \mathcal{A}(U_0) \otimes S(T) \otimes T^*.$$

4.6. Введем следующие обозначения. Пусть Q – линейное пространство. Тогда для любого открытого подмножества U в U_0 модуль $\mathcal{A}(U) \otimes S(T) \otimes Q$ над $\mathcal{A}(U)$ обозначается через $\mathcal{Q}(U)$ и называется *свободным функциональным модулем* (над U). Если W – подобласть в U , то определено естественное отображение ограничения $\mathcal{Q}(U) \rightarrow \mathcal{Q}(W)$. Образ элемента $h \in \mathcal{Q}(U)$ при этом отображении называется *ограничением h на W* и обозначается $h|W$. Если $H = [h_1, \dots, h_r]$ – список элементов из $\mathcal{Q}(U)$, то через $H|W$ обозначается список $[h_1|W, \dots, h_r|W]$. Зафиксируем до конца работы обозначение $\mathcal{C}(U) = \mathcal{A}(U) \otimes S(T)$ и зададим на множестве $\mathcal{C}(U)$ операцию $*$ некоммутативного умножения. Каждый элемент $c \in \mathcal{C}(U)$ однозначно представляется в виде $c = \sum a_\mu X^\mu$, где $a_\mu \in \mathcal{A}(U)$. Мы полагаем

$$aX_i * bX^\nu = abX^{\nu+1_i} + a\partial_i(b)X^\nu,$$

где a, b принадлежат $\mathcal{A}(U)$ и $\partial_i(b)$ определено в п. 3.4. По аддитивности операция $*$ определяет умножение в $\mathcal{C}(U)$. На подкольце $S(T)$ кольца $\mathcal{C}(U)$ операция $*$ есть обычное умножение в кольце полиномов. Если мы теперь выберем в Q базис $q_1, \dots, q_t$, то $\mathcal{Q}(U)$ будет изоморфно $\mathcal{C}(U) \otimes q_1 + \dots + \mathcal{C}(U) \otimes q_t$, и с помощью этого изоморфизма мы зададим на $\mathcal{Q}(U)$ структуру левого свободного $\mathcal{C}(U)$ -модуля, не зависящую от выбора базиса $q_1, \dots, q_t$ и согласованную со структурой $\mathcal{A}(U)$ -модуля.

Далее мы рассматриваем каждый свободный функциональный модуль как левый $\mathcal{C}(U)$ -модуль. *Функциональным модулем* (над U) мы называем любой конечно порожденный $\mathcal{C}(U)$ -подмодуль свободного функционального модуля, также заданного над U . Очевидно определяются гомоморфизм функциональных модулей, заданных над U , и ограничение $\mathcal{I}|W$ функционального модуля $\mathcal{I}$ над U на подобласть W в U . Если $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}(U) \otimes S(T) \otimes Q$, обозначим через $\mathcal{I}_W$ подмодуль в $\Phi = \mathcal{A}(W) \otimes S(T) \otimes Q$, порожденный элементами вида $h|W$, когда h пробегает все элементы $\mathcal{I}$. Подмодули $\mathcal{I}_W$ и Φ являются модулями над $\mathcal{A}(U)$, и мы по определению полагаем $\mathcal{I}|W = \mathcal{I}_W \otimes \mathcal{A}(W)$, где тензорное произведение берется над кольцом $\mathcal{A}(U)$. Если это не вызывает путаницы, часто функциональный модуль называется просто *модулем*.

Заметим, что построенное нами отображение β^* является гомоморфизмом свободных функциональных модулей. Действительно, прямо из определения следует, что $X^\nu \eta_\mu^c = \eta_{\mu+\nu}^c$. С другой стороны, из п. 4.5 следует $X^\nu \beta_\mu^c = \beta_{\mu+\nu}^c$, что доказывает гомоморфность β^* . Заметим также, что можно было бы сформулировать введенные понятия в терминах теории пучков (например, сопоставление $U \rightarrow \mathcal{Q}(U)$ определяет пучок над U_0), но мы не видим особых преимуществ от этого.

4.7. Далее U – произвольная область в U_0 , Q – произвольно фиксированное линейное пространство размерности d с базисом $q_1, \dots, q_d$, $\mathcal{Q}(U) = \mathcal{C}(U) \otimes Q$ – свободный функциональный модуль над U . Он содержит свободный $S(T)$ -модуль $S(T) \otimes Q$, называемый *основой* модуля $\mathcal{Q}(U)$.

Введем среди мономов X^ν полное упорядочение: положим $X^\nu > X^\mu$, если $|\nu| > |\mu|$ или если $|\nu| = |\mu|$ и найдется индекс i с условием $1 \leq i < n$ такой, что $\nu_j = \mu_j$ при $1 \leq j \leq i$ и $\nu_{i+1} > \mu_{i+1}$. Здесь $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ и $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$. Элементы из $S(T) \otimes Q$ вида $X^\nu \otimes q_i$ также называются *мономами*. Среди них также вводится полное упорядочение: $X^\nu \otimes q_i > X^\mu \otimes q_j$ при $i < j$ и при $i = j$ в случае $X^\nu > X^\mu$. Введенный порядок на мономах из $S(T)$ и $S(T) \otimes Q$ обозначается *grlex*. Понятно, что каждый элемент $f \in \mathcal{Q}(U)$ допускает однозначную запись вида

$$f = \sum_{j, \mu} a_\mu^j X^\mu \otimes q_j, \quad (4.2)$$

в которой $a_\mu^j \in \mathcal{A}(U)$ и мономы расположены в порядке убывания относительно *grlex*. Такая запись называется *стандартной*, и a_μ^j называются *коэффициентами* элемента f . Первое ненулевое слагаемое стандартной записи называется *старшим членом* элемента f и обозначается через $\text{lt}(f)$. Если $\text{lt}(f) = bX^\nu \otimes q_i$, то моном $X^\nu \otimes q_i$ называется *старшим мономом* элемента f и обозначается $\text{lm}(f)$, b – *старшим коэффициентом*, $|\nu|$ – *степенью* f . Для любой точки $z \in U$ через $f(z)$ обозначается элемент, принадлежащий основе $S(T) \otimes Q$, который получается, если в формуле (4.2) все a_μ^j заменить их значениями в точке z . Для любого элемента h из основы определяются (также с помощью *grlex*) аналогичные понятия: стандартная запись, старший член $\text{lt}(h)$, старший моном $\text{lm}(f)$, старший коэффициент, степень. *Степенью* элемента $f \in \mathcal{Q}(U)$ назовем максимум степеней коэффициентов a_μ^i и обозначим ее $\text{st}(f)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. *Разбиением* $\mathbf{V}$ области $U \subset U_0$ называется набор $\mathbf{V} = (V_j, 1 \leq j \leq t)$ непересекающихся подобластей V_j конечной степени r_j области U такой, что объединение $V = \bigcup_{j=1}^t V_j$ всюду плотно в U . Количество t областей V_j называется *длиной* $l(\mathbf{V})$, а максимум чисел r_j – *степенью* $\text{st}(\mathbf{V})$ разбиения $\mathbf{V}$.

Разбиение $\mathbf{W} = (W_s, 1 \leq s \leq r)$ той же области U *вписано* (является подразбиением) в $\mathbf{V}$, если каждое W_s содержится в каком-нибудь V_j .

Для каждой области $V \subset U_0$ определено разбиение, называемое *тривиальным*, состоящее из единственной области V .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Пусть $\mathbf{V} = (V_j, 1 \leq j \leq t)$ – разбиение области U . Для функционального модуля $\mathcal{Q}(U)$ мы обозначаем $\mathcal{Q}(\mathbf{V}) = \bigcup_{j=1}^t \mathcal{Q}(V_j)$. Каждый конечный список H элементов $\mathcal{Q}(\mathbf{V})$ есть объединение для $1 \leq j \leq t$ списков $H(j) = [h_s^j, 1 \leq s \leq s(j)]$ элементов функциональных модулей $\mathcal{Q}(V_j)$; обозначим его $H = [H(j), 1 \leq j \leq t]$. Если $\mathbf{W} = (W_s, 1 \leq s \leq r)$ – подразбиение разбиения $\mathbf{V}$, то естественно определяется ограничение $H^1 = H \mid \mathbf{W}$ списка H на $\mathbf{W}$, являющееся списком элементов $\mathcal{Q}(\mathbf{W})$: если $H^1 = [H^1(p), 1 \leq p \leq r]$ и $W_p \subset V_j$, то $H^1(p)$ состоит из элементов $g_s^p = h_s^j \mid W_p, 1 \leq s \leq s(j) = s(p)$, функционального модуля $\mathcal{Q}(W_p)$. Количество элементов списка H называется

длиной списка H и обозначается $l(H)$, максимальная ступень и степень элементов списка H называются соответственно *ступенью* и *степенью* H и обозначаются $\text{st}(H)$ и $\deg(H)$. Ясно, что $\text{st}(H) = \text{st}(H^1)$, $\deg(H) = \deg(H^1)$. Для любой области U любой список H элементов $\mathcal{Q}(U)$ можно рассматривать как список элементов $\mathcal{Q}(\mathbf{U})$ для тривиального разбиения $\mathbf{U}$ области U , поэтому также определены его длина, степень, ступень и ограничение $H \mid \mathbf{V}$ на любое разбиение $\mathbf{V}$ области U .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. Пусть $\mathbf{V} = (V_j, 1 \leq j \leq t)$ – разбиение области U , $H = [H(j), 1 \leq j \leq t]$ – конечный список элементов из $\mathcal{Q}(\mathbf{V})$. Мы скажем, что разбиение $\mathbf{V}$ *нормально относительно* H , если для любого j , любого ненулевого элемента h_s^j списка $H(j)$ и любой точки $z \in V_j$ значение старшего коэффициента $a(z)$ элемента h_s^j отлично от нуля.

ЛЕММА 4.2. Пусть $\mathbf{V} = (V_j, 1 \leq j \leq t)$ – разбиение области U , $H = [H(j), 1 \leq j \leq t]$ – конечный список элементов из $\mathcal{Q}(\mathbf{V})$. Тогда существует подразбиение $\mathbf{W}$ разбиения $\mathbf{V}$, нормальное относительно ограничения $H \mid \mathbf{W}$ списка H на $\mathbf{W}$, причем $\text{st}(\mathbf{W}) \leq \max[\text{st}(\mathbf{V}), \text{st}(\mathbf{H})]$, а длина $l(\mathbf{W})$ разбиения ограничена константой, зависящей только от $n, d = \dim Q, e = \deg(H), l(\mathbf{V})$ и $l(H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, лемму достаточно доказать для случая, когда $\mathbf{V}$ – тривиальное разбиение области $V \subset U$ и H – список элементов из $\mathcal{Q}(\mathbf{V})$. Сначала рассмотрим случай, когда H состоит из единственного элемента h . Пусть в этом случае $g = \text{lt}(h) = bX^\nu \otimes q_i$ – старший член элемента h . Пусть W_1 – область в V , состоящая из точек z , удовлетворяющих условию $b(z) \neq 0$. Положим $V_1 = V - \overline{W}_1$ и обозначим $h_1 = h|_{V_1}$. Элемент h_1 принадлежит $\mathcal{Q}(V_1)$. Аналогично, пусть $\text{lt}(h_1) = g_1 = pX^\mu \otimes q_j$, рассмотрим в V_1 область W_2 , состоящую из точек z , удовлетворяющих условию $p(z) \neq 0$. Положим $V_2 = V_1 - \overline{W}_2$ и обозначим $h_2 = h|_{V_2}$. Будем продолжать так до тех пор, пока не получим открытое множество V_t , состоящее из точек z , для которых все коэффициенты стандартной записи элемента h равны нулю. Положим $V_t = W_t$; тогда разбиение $\mathbf{W} = (W_j, 1 \leq j \leq t)$ области V будет искомым для случая $H = [h]$. Ясно, что длина $l(\mathbf{W}) = t$ в этом случае не превосходит увеличенного на единицу числа мономов степени не более $e = \deg(h)$ в основе $S(T) \otimes Q$, т. е. $t \leq 1 + dC_{n+e}^n$.

В случае $H = [h_1, \dots, h_{r-1}, h_r]$ предположим, что для $H^{(r-1)} = [h_1, \dots, h_{r-1}]$ построено нормальное разбиение $\mathbf{W}^{(r-1)} = (W_j, 1 \leq j \leq t)$. Тогда для каждого j рассмотрим элемент $g_j = h_r \mid W_j$ и согласно предыдущему построим нормальное разбиение $\mathbf{W}_j$ области W_j для списка, содержащего единственный элемент $g_j \in \mathcal{Q}(W_j)$. Пусть $\mathbf{W}_j = (W_{ji}, 1 \leq i \leq i(j))$ – построенные разбиения. Тогда набор областей W_{ji} при $1 \leq j \leq t, 1 \leq i \leq i(j)$ определяет разбиение $\mathbf{W}$ области V . Ясно, что в этом случае $l(\mathbf{W})$ не превосходит $l(\mathbf{V})(1 + dC_{n+e}^n)^r$. Оценка для $\text{st}(\mathbf{W})$ выводится тривиально. Лемма доказана.

Выше мы определили отображение $\text{lm}: \mathcal{Q}(U) \rightarrow S(T) \otimes Q$, которое отображает элемент $f \in \mathcal{Q}(U)$ в $\text{lm}(f)$. Легко видеть, что образ $\text{lm}(\mathcal{I})$ любого подмодуля $\mathcal{I}$ модуля $\mathcal{Q}(U)$ при отображении lm является мономиальным (т. е.

порожденным мономами) подмодулем в $S(T) \otimes Q$. Поскольку $S(T) \otimes Q$ вложено в $Q(U)$, отображение lm задано и на $S(T) \otimes Q$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5. Пусть V – область в U_0 . Если старший коэффициент p элемента $f \in Q(V)$ отличен от нуля в каждой точке $z \in V$, то элемент называется *отмеченным*. Отмеченный элемент f можно нормировать, т. е. заменить f на $p^{-1}f$. Элемент f нормирован, если $p \equiv 1$.

Если $\mathbf{W}$ – разбиение области U , нормальное относительно списка H элементов из $Q(\mathbf{W})$, то мы можем нормировать список H и получить нормированный список H_1 . По определению список H_1 состоит из всех ненулевых нормированных элементов списка H (каждый ненулевой элемент списка H есть отмеченный элемент функционального модуля $Q(V)$ для некоторой области $V \subset U$). Список H называется *нормированным*, если $H_1 = H$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Если V – область в U_0 , H – список элементов из функционального модуля $Q(V)$, то нормированные элементы списка H порождают в $Q(V)$ тот же подмодуль, что и элементы списка H .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.6. Пусть $\mathbf{W} = (W_j, 1 \leq j \leq t)$ – разбиение области U и $\mathcal{I}$ – подмодуль в $Q(U)$. Мы говорим, что в $\mathcal{I}$ задан *базис Грёбнера над разбиением $\mathbf{W}$* , если задан конечный список $G = [G(j), 1 \leq j \leq t]$ элементов из $Q(\mathbf{W})$ такой, что:

- 1) все элементы g_s^j каждого списка $G(j)$ нормированы и порождают модуль $\mathcal{I} \mid W_j$;
- 2) разбиение $\mathbf{W}$ нормально относительно списка G ;
- 3) элементы $\text{lm}(g_s^j)$ каждого списка $G(j)$ порождают $S(T)$ -подмодуль $\text{lm}(\mathcal{I} \mid W_j)$ основы $S(T) \otimes Q$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Если $\mathbf{V}$ – подразбиение разбиения $\mathbf{W}$, то ограничение G на $\mathbf{V}$ определяет базис Грёбнера подмодуля $\mathcal{I}$ над разбиением $\mathbf{V}$.

ЛЕММА 4.3. Пусть $H = [h_s, 1 \leq s \leq r]$ – конечный список образующих подмодуля $\mathcal{I}$ свободного функционального модуля $Q(U)$. Тогда существуют разбиение $\mathbf{W}$ области U и конечный список G элементов из $Q(\mathbf{W})$, задающий базис Грёбнера подмодуля $\mathcal{I}$ над разбиением $\mathbf{W}$. Длина $l(\mathbf{W})$ разбиения $\mathbf{W}$ ограничена константой, зависящей только от $n, r = l(H), d = \dim(Q)$ и $e = \deg(H)$. Степень $\text{st}(\mathbf{W})$ разбиения $\mathbf{W}$ ограничена константой, зависящей только от n, e, d и $\text{st}(H)$. Длина $l(G)$ списка G ограничена константой, зависящей только от n, r, d и e . Степень $\deg(G)$ списка G ограничена константой, зависящей только от n, d и e .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Доказательство существования базисов Грёбнера, изложенное ниже, повторяет с небольшими изменениями алгоритм Бухбергера (см. [31]–[33] для случая модулей над кольцом полиномов и [34] для случая модулей над кольцом дифференциальных операторов с аналитическими коэффициентами). Вывод оценок можно найти, например, в [35], кроме того, далее для удобства читателя приводится кратко их доказательство.

Следующие два определения аналогичны определениям, данным в работе [31].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.7. Пусть V – область в U_0 , $H = [f, g]$ – список, состоящий из двух отмеченных элементов функционального модуля $\mathcal{Q}(V)$. Рассмотрим их старшие члены $\text{lt}(f) = pX^\mu \otimes q_s$, $\text{lt}(g) = bX^\nu \otimes q_i$. Будем говорить, что g и f не сравнимы, если $s \neq i$, и будем считать, что в этом случае элемент $S(f, g)$ не определен; если $s = i$, найдем н.о.к. $X^\theta = X^\mu X^\varepsilon = X^\nu X^\lambda$ мономов X^ν и X^μ и положим $S(f, g) = p^{-1}X^\varepsilon f - b^{-1}X^\lambda g \in \mathcal{Q}(V)$.

Заметим, что

$$\deg(S(f, g)) \leq \deg(f) + \deg(g), \quad (4.3)$$

$$\text{st}(S(f, g)) \leq \max(\text{st}(f), \text{st}(g)) + \max(\deg(f), \deg(g)). \quad (4.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.8. Пусть V – область в U_0 , $H = [h_1, \dots, h_r]$ – список отмеченных элементов из $\mathcal{Q}(V)$. Тогда для любого элемента $g \in \mathcal{Q}(V)$ можно определить элемент $R_H(g) \in \mathcal{Q}(V)$, называемый *редукцией g по модулю H* . Для этого рассмотрим старший член $\text{lt}(g) = bX^\nu \otimes q_i$. Пусть h_s – элемент списка H с наименьшим номером, для которого $\text{lt}(h_s) = pX^\mu \otimes q_i$ и, кроме того, X^ν делится на X^μ . Если такой элемент существует, мы полагаем $X^\nu = X^\mu X^\varepsilon$ и определяем $R_H(g)$ рекурсивно:

$$R_H(g) = R_H(g - bp^{-1}X^\varepsilon h_s), \quad R_H(0) = 0.$$

Если требуемый элемент h_s не существует, полагаем $R_H(g) = \text{lt}(g) - R_H(g - \text{lt}(g))$. Этими условиями $R_H(g)$ однозначно определяется.

Заметим, что

$$\deg(R_H(g)) \leq \deg(g), \quad (4.5)$$

$$\text{st}(R_H(g)) \leq \max(\deg(g) + \max(\text{st}(h_1), \dots, \text{st}(h_r)), \text{st}(g)). \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.3. Согласно лемме 4.2 существует разбиение U^0 области U , нормальное относительно ограничения $G^0 = H \mid U^0$ списка H на U^0 . Обозначим через H^0 список элементов из $\mathcal{Q}(U^0)$, полученный нормированием списка G^0 . На i -м шаге алгоритма построения базиса Грёбнера (коротко – алгоритма БГ) по разбиению $U^i = (U_j, 1 \leq j \leq p(i))$ области U и списку $H^i = [H(j), 1 \leq j \leq p(i)]$ элементов из $\mathcal{Q}(U^i)$ строится подходящее подразбиение U^{i+1} области U и список H^{i+1} элементов из $\mathcal{Q}(U^{i+1})$. Если $H(j) = [h_s^j, 1 \leq s \leq s(j)]$, то на i -м шаге алгоритма БГ вначале список $H(j)$ расширяется до списка $H^1(j)$ добавлением элементов $S(h_s^j, h_v^j)$ для всех пар $s < v$, для которых этот элемент определен. После этого каждый новый элемент g списка $H^1(j)$ заменяется элементом $R_{H(j)}(g)$ и полученный список обозначается через $H^2(j)$. Объединение списков $H^2(j)$ при $1 \leq j \leq p(i)$ определяет список V^i элементов из $\mathcal{Q}(U^i)$. Затем по лемме 4.2 берем подразбиение U^{i+1} разбиения U^i , нормальное относительно ограничения $G^{i+1} = V^i \mid U^{i+1}$ списка V^i на U^{i+1} . Нормируем список G^{i+1} и обозначаем полученный список элементов из $\mathcal{Q}(U^{i+1})$ через H^{i+1} . Получение разбиения U^{i+1} и списка H^{i+1} является результатом i -го шага алгоритма БГ.

Известно (см. ниже), что через конечное число шагов I результат стабилизируется, т.е. $U^{I+1} = U^I$, $H^{I+1} = H^I$. Тогда алгоритм завершает работу и

мы обозначаем $\mathbf{W} = \mathbf{U}^I = (W_j, 1 \leq j \leq p)$, $G = H^I = [G(j), 1 \leq j \leq p]$. По замечанию 4.1 для любого j элементы, образующие список $G(j)$, порождают $\mathcal{I} \mid W_j$. По выбору I для любых двух элементов g_v^j и g_s^j списка $G(j)$ либо $S(g_s^j, g_v^j)$ не определено, либо $S(g_s^j, g_v^j) = 0$. Отсюда выводится, что для каждого j элементы $\text{lm}(g_s^j)$ порождают $\text{lm}(\mathcal{I} \mid W_j)$; доказательство аналогично выводу соответствующего утверждения при построении базисов Грёбнера для модулей над кольцами полиномов в [31] и [32]. Следует только учесть, что все g_s^j нормированы.

Остается только доказать существование оценок из формулировки леммы. Для этого докажем, что число I шагов алгоритма БГ ограничено константой, зависящей от n, d, e и r .

Если алгоритм БГ не остановился до Z -го шага, то найдется одна из областей разбиения $\mathbf{U}^0$, скажем U^0 , затем одна из областей разбиения $\mathbf{U}^1$, скажем U^1 , и так далее, для которых $U^0 \subset U^1 \subset \dots \subset U^Z$ и выполнено следующее ниже соотношение (4.7). Пусть $H_i = [h_s^i, 1 \leq s \leq s(i)]$ – список элементов модуля $\mathcal{Q}(U^i)$, содержащихся в списке H^i . Обозначим через M^i мономиальный подмодуль в $S(T) \otimes Q$, порожденный элементами $\text{lm}(h_s^i)$. Тогда выполняется строгая цепочка включений

$$M^0 \subset M^1 \subset \dots \subset M^Z. \quad (4.7)$$

Действительно, из построения базисов Грёбнера в [31], [32] следует, что если $M^i = M^{i+1}$, то ограничение списка H^{i+1} на U^i равно H^i , а отсюда, в свою очередь, вытекает $M^i = M^{i+1} = \dots = M^Z$.

Легко видеть, что каждый мономиальный подмодуль M в $S(T) \otimes Q$ обладает единственной минимальной системой образующих, и она также состоит из мономов. (Минимальной называется система образующих, содержащаяся в любой другой.)

Далее нам понадобятся следующие определение, лемма и утверждение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.9. Максимум степеней элементов минимальной системы образующих мономиального подмодуля M называется *родом* M .

ЛЕММА 4.4. Пусть (4.7) – строго возрастающая цепочка мономиальных подмодулей $S(T)$ -модуля $S(T) \otimes Q$. Предположим, что род $q(i)$ каждого модуля M^i не превосходит заданной функции $\rho(i)$. Тогда длина Z цепочки (4.7) оценивается величиной $I_1(\rho, n, d)$, зависящей от $n, d = \dim Q$ и какого-то количества начальных значений функции ρ (количество этих значений зависит от их величины, но всегда конечно). Будем называть оценки указанного типа *финитными*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (аналогично доказательству леммы Диксона [36, гл. 6.2]) проведем индукцией по $n = \dim T$. Пусть для $\dim T = n - 1$ лемма верна. Обозначим через T' подпространство в T , порожденное векторами $X_1, \dots, X_{n-1}$, и рассмотрим отображение $c: S(T) \otimes Q \rightarrow S(T') \otimes Q$, которое переводит каждый моном $X_1^{\mu_1} \dots X_n^{\mu_n} \otimes q_s$ в моном $X_1^{\mu_1} \dots X_{n-1}^{\mu_{n-1}} \otimes q_s$. Цепочка (4.7) отображением c переводится в цепочку

$$c(M^0) \subseteq c(M^1) \subseteq \dots \subseteq c(M^Z).$$

Пусть $L^0 = c(M^0)$. Обозначим через L^1 тот модуль $c(M^i)$, для которого имеется первое строгое включение $c(M^{i-1}) \subset c(M^i)$, и т. д. Тогда имеем цепочку строгих включений (здесь обозначено $c(M^Z) = L^J$)

$$L^0 \subset L^1 \subset \dots \subset L^J \quad (4.8)$$

подмодулей модуля $S(T') \otimes Q$. Определим при $0 \leq u \leq J$ функцию $i(u)$ следующим образом: $i(u)$ равна наименьшему значению i , для которого $c(M^i) = L^u$. Пусть m_σ^i , $1 \leq \sigma \leq \sigma(i)$, – минимальная система мономов, порождающая модуль M^i . Запишем $m_\sigma^i = c(m_\sigma^i)X_n^{\alpha(\sigma,i)}$. Фиксируем u с условием $0 \leq u < J$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. Для любого i с условием $i(u) \leq i < i(u+1)$ и для любого σ с условием $1 \leq \sigma \leq \sigma(i)$ выполнено $\alpha(\sigma, i) \leq q(i(u))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть d_τ^u , $1 \leq \tau \leq \tau(u)$, – минимальная система мономов, порождающая модуль L^u . Для произвольного модуля M и элемента $a \in M$ через $((a))$ обозначим подмодуль в M , порожденный a . Ясно, что для любого монома m_σ^i найдется подходящий моном d_τ^u , для которого выполнено условие $c(m_\sigma^i) \in ((d_\tau^u))$, и среди мономов $m_\sigma^{i(u)}$ найдется (единственный) моном $m_\varepsilon^{i(u)}$, удовлетворяющий условию $m_\varepsilon^{i(u)} = X_n^\alpha d_\tau^u$. При этом $\alpha \leq q(i(u))$. Если для каких-нибудь i и σ теперь $\alpha(\sigma, i) > q(i(u))$, то $m_\sigma^i \in ((m_\varepsilon^{i(u)}))$, что противоречит минимальности системы m_σ^i . Утверждение доказано.

Пусть $q_1(u) = q(i(u))$. Обозначим через $L^{(u)}$ линейную оболочку в $S(T) \otimes Q$ множества мономов, содержащих X_n в степени не выше $q_1(u)$. Обозначим $L^{(u)} \cap M^i = N^i$. Очевидно, что $L^{(u)} = S(T') \otimes Q'$, где Q' – подпространство в L , состоящее из мономов вида $X_n^\iota \otimes q_j$ для $0 \leq \iota \leq q_1(u)$ и $1 \leq j \leq d$. Поэтому $L^{(u)}$ является свободным $S(T')$ -модулем ранга $q_1(u) \dim Q = d' = q_1(u)d$. Следовательно, N^i являются конечнопорожденными $S(T')$ -модулями. Из утверждения 4.1 следует, что при $i(u) \leq i$, $w < i(u+1)$ условие $M^i = M^w$ эквивалентно условию $N^i = N^w$. Поэтому строго возрастающая цепочка

$$M^{i(u)} \subset M^{i(u)+1} \subset \dots \subset M^{i(u+1)-1} \quad (4.9)$$

индуцирует строго возрастающую цепочку $S(T')$ -подмодулей модуля $L^{(u)} = S(T') \otimes Q'$:

$$N^{i(u)} \subset N^{i(u)+1} \subset \dots \subset N^{i(u+1)-1}. \quad (4.10)$$

Род каждого модуля N^i , очевидно, не превосходит функции $\rho(i)$. Поскольку $\dim T' = n-1$, по предположению индукции существуют финитная оценка длины цепочки (4.10) величиной $I_2(\rho, n-1, d', i(u))$ и, следовательно, длины цепочки (4.9). Эта оценка зависит от $i(u)$, так как первый элемент цепочки (4.10) имеет номер $i(u)$. Таким образом,

$$i(u+1) - i(u) \leq I_2(\rho, n-1, d', i(u)). \quad (4.11)$$

Формула (4.11) позволяет последовательно для $u = 1, 2, \dots$ найти финитную (зависящую только от некоторого количества первых значений функции ρ) оценку $q'(u) \leq \rho'(u)$ для рода $q'(u)$ модуля L^u , воспользовавшись очевидной

формулой $q'(u) \leq q_1(u)$. Теперь по предположению индукции, примененному к цепочке (4.8), имеем оценку $J \leq I_3(\rho', n-1, d)$. Эта оценка и оценка (4.11) дают оценку $I \leq I_1(\rho, n, d)$. Финитность функции I_1 следует из ее построения. Мы не приводим дальнейшие подробности доказательства. Лемма доказана.

Завершим доказательство леммы 4.3. Из начала доказательства леммы следует, что род модуля M^i цепочки (4.7) оценивается функцией $\rho(i) = 2^i e$. Поэтому из леммы 4.4 вытекает, что число Z шагов алгоритма БГ оценивается величиной $I(n, d, e)$. Все требуемые оценки вытекают отсюда с учетом (4.5), (4.6) и леммы 4.2. Лемма доказана.

4.8. Наша ближайшая цель – построение базиса Грёбнера для ядра и образа отображения β^* из п. 4.6. Рассмотрим сначала, как строится базис Грёбнера для ядра и образа гомоморфизма модулей над кольцом полиномов. Пусть A и Q – линейные пространства, $L = S(T) \otimes A$, $M = S(T) \otimes Q$, $\varphi: L \rightarrow M$ – произвольный гомоморфизм $S(T)$ -модулей. Пусть J – ядро, а I – образ гомоморфизма φ . Пусть η_c , $1 \leq c \leq r$, и q_a , $1 \leq a \leq d$, – базисы в A и Q соответственно. Элементы $h_c = \varphi(\eta_c)$ порождают I . Фиксируем введенные обозначения до п. 4.12. Изложим вкратце известную процедуру построения базиса Грёбнера для модуля J (подробности см. в [31] и [37]).

На мономах M имеется порядок grlex , и пусть $G = [g_v, 1 \leq v \leq R]$ – список элементов базиса Грёбнера в I . Далее предположим, что базис Грёбнера построен по приведенной в [31] или [32] версии алгоритма Бухбергера исходя из базиса h_c с помощью порядка grlex (эта же версия использована нами выше). Рассмотрим линейное пространство A_1 с базисом $\theta_1, \dots, \theta_R$ и $S(T)$ -модуль $L_1 = S(T) \otimes A_1$. Определим гомоморфизм $\varphi_1: L_1 \rightarrow M$ формулами $\varphi_1(\theta_v) = g_v$, $v = 1, \dots, R$. Введем среди мономов L_1 полное упорядочение: будем считать, что $X^\mu \otimes \theta_s > X^\nu \otimes \theta_i$, если $X^\mu \text{lm}(g_s) > X^\nu \text{lm}(g_i)$ или $X^\mu \text{lm}(g_s) = X^\nu \text{lm}(g_i)$, но $s < i$. Определим гомоморфизм $\text{lt}(\varphi_1): L_1 \rightarrow M$, полагая $\text{lt}(\varphi_1)[\theta_v] = \text{lt}(g_v)$. В [31] или [32] для любого элемента $h \in M$ определена редукция $R_G(h) \in M$, определены сравнимые пары элементов g, h из M и для каждой сравнимой пары определен элемент $S(g, h) \in M$. Эти определения здесь не приводятся, так как в определениях 4.7 и 4.8 приведены аналогичные понятия для функциональных модулей.

4.9. Определим (см. [31]) частное $Q_G(h)$ элемента $h \in M$ рекурсивно по формуле $Q_G(h) = bX^\mu \theta_s - Q_G(h - bX^\mu g_s)$ для наименьшего s такого, что $\text{lt}(h) = bX^\mu \text{lt}(g_s)$, и по формуле $Q_G(h) = Q_G(h - \text{lt}(h))$, если $\text{lt}(h)$ не делится на $\text{lt}(g_s)$ ни для какого s . Частное $Q_G(h)$ является элементом модуля L_1 . Легко проверить, что

$$h = \varphi_1(Q_G(h)) + R_G(h). \quad (4.12)$$

Отметим, что $R_G(h) = 0$ тогда и только тогда, когда $h \in I$, поскольку G – базис Грёбнера в I . Если элементы g_j и g_v сравнимы и $j < v$, запишем $\text{lt}(g_j) = pX^\mu \otimes q_s$, $\text{lt}(g_v) = bX^\nu \otimes q_s$, найдем н.о.к. $X^\theta = X^\mu X^\varepsilon = X^\nu X^\lambda$ мономов X^ν и X^μ и положим

$$t_{jv} = p^{-1} X^\varepsilon \theta_j - b^{-1} X^\lambda \theta_v.$$

Легко видеть, что каждое t_{jv} лежит в ядре K отображения $\text{lt}(\varphi_1)$ и $\varphi_1(t_{jv}) = S(g_j, g_v)$.

ЛЕММА 4.5. *Множество элементов t_{jv} образует базис модуля K .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [31, лемма 2.9].

Теперь положим $s_{jv} = t_{jv} - Q_G(S(g_j, g_v))$. Докажем, что $\varphi_1(s_{jv}) = 0$. Поскольку $\varphi_1(t_{jv}) = S(g_j, g_v)$ и $R_G(S(g_j, g_v)) = 0$ по формуле (4.12), получаем $S(g_j, g_v) = \varphi_1(Q_G(S(g_j, g_v)))$, что доказывает требуемое.

ЛЕММА 4.6. *Элементы s_{jv} образуют базис Грёбнера в ядре J_1 отображения φ_1 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [31, лемма 2.10].

4.10. Занумеруем все элементы s_{jv} в любом порядке с помощью индекса b . Пусть b меняется от 1 до B и s_b пробегает множество элементов s_{jv} . Тогда каждый элемент s_b допускает запись $s_b = s_b^v \theta_v$, где $s_b^v \in S(T)$. Введем матричные обозначения. Пусть $G = [g_v]$ и $H = [h_c]$ – строки, составленные из элементов g_v и h_c , определенных в п. 4.8. Тогда найдутся $(R \times r)$ - и $(r \times R)$ -матрицы Y и F с элементами из $S(T)$ такие, что $H = GY$, $G = HF$. Сопоставим каждому элементу s_b столбец $\mathbf{s}_b$, состоящий из элементов $s_b^1, \dots, s_b^R$. Тогда очевидно, что столбцы $\mathbf{t}_b = F\mathbf{s}_b$ определяют соотношения между элементами h_c , т. е. элементы $\psi_b = t_b^c \eta_c$, где t_b^c – элементы столбца $\mathbf{t}_b$, принадлежат идеалу J . Рассмотрим $(r \times r)$ -матрицу $E_r = FY$, где через E_r обозначена единичная матрица порядка r . Пусть $\lambda_j^1, \dots, \lambda_j^r$ – элементы j -го столбца этой матрицы. Легко видеть, что $\lambda_j^c h_c = 0$, т. е. элементы $\lambda_j = \lambda_j^c \eta_c$ лежат в J .

ЛЕММА 4.7. *Идеал J порождается элементами λ_j и ψ_b для $1 \leq b \leq B$, $1 \leq j \leq r$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [37, теорема 3.4.4].

4.11. Введем среди мономов модуля $L = S(T) \otimes A$ порядок grlex .

ЛЕММА 4.8. *Построим базис Грёбнера $t_1, \dots, t_s$ модуля J , исходя из базиса λ_j и ψ_b идеала, построенного в лемме 4.7, и используя порядок grlex и принятую нами версию алгоритма Бухбергера. Тогда количество и степень элементов $t_1, \dots, t_s$ ограничены универсальными константами, зависящими от $n, r, d = \dim Q$ и максимальной степени e элементов h_c .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства леммы 4.3 следует, что степень f и количество R элементов g_v из п. 4.8 оцениваются универсальными константами, зависящими от n, r, d и e . Построения из пп. 4.8–4.10 непосредственно показывают, что степень и количество элементов λ_j и ψ_b оцениваются через R и f : количество элементов t_{jv} не превосходит R^2 , степень их не превосходит $2f$. Степень элементов $S(g_j, g_v)$ не превосходит $2f$. Степень элемента $Q_G(h)$ не превосходит степени элемента h . Поэтому степень и количество элементов λ_j и ψ_b , образующих базис идеала I , оцениваются через n, r, d и e . Из доказательство леммы 4.3 также следует, что количество и степень элементов $t_1, \dots, t_s$

оцениваются универсальными константами, зависящими от n , r , d и e . Лемма доказана.

4.12. Пусть U – произвольная область в U_0 конечной ступени $\text{st}(U)$. Далее мы обозначаем $\mathcal{L}(U) = \mathcal{C}(U) \otimes E^*$, $\mathcal{M}(U) = \mathcal{C}(U) \otimes T^*$, $L = S(T) \otimes E^*$, $M = S(T) \otimes T^*$ (пространство E определено в п. 4.3 и $\dim E = m$). В п. 4.5 был построен гомоморфизм $\beta^*: \mathcal{L}(U) \rightarrow \mathcal{M}(U)$. Пусть $\mathcal{I}$ – образ и $\mathcal{J}$ – ядро этого отображения, η_c , $1 \leq c \leq m$, – базис в E^* . Тогда элементы $h_c = \beta^*(\eta_c)$ порождают $\mathcal{I}$ и максимальная степень элементов h_c не превосходит q .

ЛЕММА 4.9. *Существуют такое разбиение $\mathbf{W}$ области U и такие списки R и G элементов из $\mathcal{L}(\mathbf{W})$ и $\mathcal{M}(\mathbf{W})$ соответственно, что R определяет базис Грёбнера в $\mathcal{I}$ над разбиением $\mathbf{W}$, а G определяет базис Грёбнера в $\mathcal{J}$ над разбиением $\mathbf{W}$. При этом длина $l(\mathbf{W})$ и степени $\deg(G)$, $\deg(R)$ ограничены константой, зависящей только от $n = \dim T$, $m = \dim E$ и q , а ступени $\text{st}(\mathbf{W})$, $\text{st}(G)$ и $\text{st}(R)$ ограничены константой, зависящей только от n , m , $\text{st}(U)$ и q .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим список $H = [h_1, \dots, h_m]$ образующих функционального модуля $\mathcal{I}$ и построим согласно лемме 4.3 разбиение $\mathbf{V}$ области U и список G' элементов $\mathcal{M}(\mathbf{V})$, определяющий базис Грёбнера в $\mathcal{I}$ над разбиением $\mathbf{V}$. Как отмечалось выше, данное построение аналогично построению базиса Грёбнера для модулей над кольцом полиномов $S(T)$ с тем дополнением, что в конце промежуточных шагов необходимо периодически переходить к нормальным разбиениям и нормировать полученные списки. При этом не доставляет препятствий некоммутативность основного кольца $\mathcal{C}(U)$, действующего на функциональный модуль $\mathcal{M}(U)$. Таким же образом, повторяя построения из пп. 4.8–4.11, переходя при этом несколько раз к нормальным разбиениям и нормируя полученные списки, мы можем, начав со списка G' , построить подразбиение $\mathbf{W}$ разбиения $\mathbf{V}$ и список R элементов из $\mathcal{L}(\mathbf{W})$, задающий базис Грёбнера над $\mathbf{W}$ подмодуля $\mathcal{J}$. Разумеется, ограничение $G = G' \mid \mathbf{W}$ списка G' на $\mathbf{W}$ определяет базис Грёбнера в $\mathcal{I}$ над разбиением $\mathbf{W}$. Требуемые оценки для $l(\mathbf{W})$, $\deg(G)$, $\deg(R)$, $\text{st}(\mathbf{W})$, $\text{st}(G)$ и $\text{st}(R)$ следуют из лемм 4.3 и 4.8. Мы опустим дальнейшие подробности. Лемма доказана.

4.13. Обозначим через $\text{Ker } \gamma_k(z)$, $\text{Ker } \beta_k(z)$ ядра отображений γ_k и β_k , введенных в пп. 3.6 и 4.4. Первое ядро рассматривается как линейное подпространство в $S_{k+q}^\bullet(T^*) \otimes T$ и, следовательно, вложено в пространство $S_{k+q}(T^*) \otimes T$, где содержится второе ядро.

ЛЕММА 4.10. *Для ординарной точки $z \in J^\infty$ ступени $k + 1$ имеем $\text{Ker } \gamma_s(z) = \text{Ker } \beta_s(z)$ при любом $s \geq k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, достаточно доказать лемму при $k = s$ (так как ординарная точка $z \in J^\infty$ ступени $k + 1$ будет ординарной точкой ступени $s + 1$ для любого $s \geq k$). Напомним, что отображение $\gamma_k(z)$ определено на

$$S_{k+q}^\bullet(T^*) \otimes T = \sum_{i=1}^{k+q} S^i(T^*) \otimes T.$$

Любой элемент $r \in S_{k+q}(T^*) \otimes T$ однозначно представим в виде $r = r^0 + r'$, где $r^0 \in S_0(T^*) \otimes T = T$, а $r' \in S_{k+q}^\bullet(T^*) \otimes T$. Касательное пространство $T_k(z) = T_{z_k} J^k$ отождествляется с прямой суммой $T + S_k$, и мы будем обозначать его через T_k .

Зададим отображение $\theta_k(z): S_{k+q}(T^*) \otimes T \rightarrow T_k(z) = T_k = S_k + T$ формулой $\theta_k(z)[r] = \gamma_k(z)[r'] + r^0$. Поскольку $\Delta_k(z) = \Delta'_k(z) + T$ и $\gamma_k(z)[S_k(T^*) \otimes T] = \Delta'_k(z)$, то $\theta_k(z)[S_{k+q}(T^*) \otimes T] = \Delta_k(z)$. Заметим, что для любой точки $z \in J^\infty$ пространство T_k разлагается в прямую сумму пространств S_k и $\tau(z_{k+1})$. Обозначим через $\rho_k(z)$ проекцию T_k на S_k вдоль $\tau(z_{k+1})$. Из формул (3.7) следует, что

$$\rho_k(z)\theta_k(z) = \beta_k(z). \quad (4.13)$$

Условие ординарности (2.12) означает, что ядро отображения $\rho_k(z)$ равно нулю. Значит, ядра отображений $\beta_k(z)$ и $\theta_k(z)$ совпадают, но ядра отображений $\gamma_k(z)$ и $\theta_k(z)$ также совпадают. Лемма доказана.

4.14. Обозначим через $\Delta''_k(z)$ образ $\beta_k(z)[S_{k+q}(T^*) \otimes T]$ отображения $\beta_k(z)$.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. В условиях леммы 4.10 имеем $\dim \Delta''_k(z) = \dim \Delta'_k(z) + n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

Легко видеть, что проекция $T\pi(k+1, k)$ отображает эпиморфно $\Delta''_{k+1}(z)$ на $\Delta''_k(z)$. Обозначим через $\Pi_{k+1}(z)$ ядро проекции $\Delta''_{k+1}(z) \rightarrow \Delta''_k(z)$.

ЛЕММА 4.11. Для ординарной точки $z \in J^\infty$ степени $k+1$ имеем $\Pi_s(z) = \Delta_{s,s-1}(z)$ при любом $s > k \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соображений, приведенных в доказательстве леммы 4.10, достаточно доказать лемму при $s = k+1$. Любой элемент $x \in \Delta''_{k+1}(z)$ имеет вид $x = \beta_{k+1}(z)r$ для некоторого элемента $r \in S_{k+q+1}(T^*) \otimes T$. Если $x \in \Pi_{k+1}(z)$, то $T\pi(k+1, k)[\beta_{k+1}(z)r] = 0$. Однако легко проверить, что

$$T\pi(k+1, k)[\beta_{k+1}(z)r] = \beta_k(z)[r_{k+q}] = 0,$$

где $r_{k+q} = r^{k+q} + r^{k+q-1} + \dots + r^0$ — сумма всех однородных компонент элемента r , кроме $(k+q+1)$ -й. В силу леммы 4.10 имеем $r_{k+q} \in \text{Ker } \gamma_k(z)$, и потому $r_0 = 0$, значит, $r \in S_{k+q+1}^\bullet(T^*) \otimes T$, откуда имеем $x \in \Delta'_{k+1}(z)$, что и требовалось доказать.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.10. Функцией Гильберта точки $z \in J^\infty$ называется функция $\text{Hilb}_z(k) = \dim \Delta''_k(z)$ натурального аргумента k .

4.15. Если размерность пространства $\Delta'_k(z)$ постоянна в окрестности точки $z \in U_0$, то точка $z_k = \nu_k(z)$ регулярна, так как в этом случае размерности орбит группы $\mathcal{V}$ в окрестности точки z_k равны $\dim \Delta'_k(z) + n$. Построим согласно лемме 4.9 для $U = U_0$ разбиение $\mathbf{W} = (W_j, 1 \leq j \leq t)$ области U_0 и такие списки R и G элементов из $\mathcal{L}(\mathbf{W})$ и $\mathcal{M}(\mathbf{W})$ соответственно, что R определяет базис Грёбнера в $\mathcal{I}$ над разбиением $\mathbf{W}$, а G определяет базис Грёбнера в $\mathcal{J}$ над разбиением $\mathbf{W}$.

ЛЕММА 4.12. Для построенного выше разбиения $\mathbf{W} = (W_j, 1 \leq j \leq t)$ области U_0 функция Гильберта точки w из W_j зависит только от номера j и не зависит от w .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем j и точку $w \in W_j$ и будем обозначать для краткости $\mathcal{L}(W_j) = \mathcal{L}'$, $\mathcal{M}(W_j) = \mathcal{M}'$, $\mathcal{A}(W_j) = \mathcal{A}'$, $\mathcal{C}(W_j) = \mathcal{C}'$, $\mathcal{I} \mid W_j = \mathcal{I}'$, $\mathcal{J} \mid W_j = \mathcal{J}'$. Если $G = [G(s), 1 \leq s \leq t]$, то элементы списка $G(j)$, порождающие $\mathcal{J}'$, мы будем обозначать через $h_1, \dots, h_r$.

Как уже отмечалось в п. 4.7, для элемента $f \in \mathcal{L}'$ и точки $w \in W_j$ определен элемент $f(w) \in L$. Таким образом, определено отображение $l: \mathcal{L}' \rightarrow L$, переводящее элемент $f \in \mathcal{L}'$ в элемент $f(w) \in L$. Аналогично определено отображение $m: \mathcal{M}' \rightarrow M$, а также отображение, которое каждой функции φ из $\mathcal{A}'$ сопоставляет ее значение $\varphi(w)$ в точке w . Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}' & \longrightarrow & \mathcal{M}' \\ l \downarrow & & \downarrow m \\ L & \longrightarrow & M \end{array} \quad (4.14)$$

в которой верхняя горизонтальная стрелка индуцирована отображением β^* , определенным в п. 4.5, а нижнее отображение, которое будет дальше обозначаться φ , определяется следующим образом. Ввиду вложения $L \subset \mathcal{L}'$ для любого монома p из L определен образ $\beta^*(p) \in \mathcal{M}'$, и по определению имеем $\varphi[p] = [\beta^*(p)](w)$. Коммутативность диаграммы (4.14) очевидна по построению. Заметим, что φ не перестановочно с действием $S(T)$, а есть просто $\mathbb{R}$ -линейное отображение.

Перенумеруем все мономы из L по возрастанию относительно порядка grlex . Они задают базис $p_1, p_2, \dots$ бесконечномерного в общем случае (т. е. при $n > 0$, $E \neq 0$) линейного пространства над $\mathbb{R}$ (далее коротко б.п.) L , а также свободный базис $\mathcal{A}'$ -модуля $\mathcal{L}'$. Определим в $\mathcal{L}'$ другой базис $p'_1, p'_2, \dots$ следующим образом: если $p_i \notin \text{lm}(\mathcal{J}')$, то положим $p'_i = p_i$, если $p_i \in \text{lm}(\mathcal{J}')$, то обозначим через p'_i любой нормированный элемент из $\mathcal{J}'$ со свойством $\text{lt}(p'_i) = p_i$. (Такой элемент существует. Действительно, из определения базиса Грёбнера вытекает, что найдется элемент h списка $G(W_j)$, для которого $p_r = b \text{lm}(h)$, где $b \in \mathcal{C}'$; тогда $p'_r = bg$.) Матрица перехода от p_i к p'_i является бесконечной в общем случае и треугольной с единичной главной диагональю. Любой элемент t из $\mathcal{L}'$ допускает однозначную запись $t = c^i p_i$, в которой отлично от нуля только конечное количество коэффициентов c^i . Поэтому t допускает также аналогичную однозначную запись вида $t = (c')^i p'_i$. Отсюда легко следует, что элементы p'_i также образуют в $\mathcal{L}'$ свободный базис. Теперь наименьший из элементов $p_i \notin \text{lm}(\mathcal{J}')$ обозначим через b_1 , следующий – через b_2 и т. д. Элементы p'_i с условием $\text{lt}(p'_i) = p_i \in \text{lm}(\mathcal{J}')$ свободно порождают $\mathcal{A}'$ -модуль $\mathcal{J}'$, а элементы b_i свободно порождают $\mathcal{A}'$ -модуль $\mathcal{B}'$, причем $\mathcal{L}'$ – прямая сумма $\mathcal{B}'$ и $\mathcal{J}'$. В общем случае и $\mathcal{J}'$, и $\mathcal{B}'$ имеют бесконечный ранг как $\mathcal{A}'$ -модули. Отображение β^* переводит $\mathcal{J}'$ в 0 и осуществляет изоморфизм $\mathcal{B}'$ и $\mathcal{I}'$, совместимый с действием $\mathcal{A}'$. Обозначим $\beta^*(b_i) = b'_i$. Как и выше, рассмотрим множество $\text{lm}(\mathcal{I}')$ и составим список $Z_1, Z_2, \dots$ мономов множества $\text{lm}(\mathcal{I}')$; тогда найдется

для каждого Z_c нормированный элемент $z_c \in \mathcal{I}'$, для которого $\text{lt}(z_c) = Z_c$, и элементы $z_1, z_2, \dots$ образуют свободный базис $\mathcal{A}'$ -модуля $\mathcal{I}'$.

Каждый элемент b'_i может быть записан через образующие z_c , и наоборот:

$$b'_i = b_i^c z_c, \quad z_c = z_c^i b'_i, \quad b_i^c, z_c^i \in \mathcal{A}'.$$

Пусть B – матрица (бесконечная), i -я строка которой состоит из элементов $b_i^1, b_i^2, \dots$, и пусть X – аналогичная матрица, c -я строка которой состоит из элементов $z_c^1, z_c^2, \dots$. В каждой строке и матрицы B , и матрицы X стоит конечное число элементов. Поэтому определено произведение матриц

$$BX = E_\infty, \quad (4.15)$$

которое равно бесконечной единичной матрице.

Далее нам понадобятся следующие леммы.

ЛЕММА 4.13. *Для любой точки $w \in W_j$ все элементы $b'_i(w)$ линейно независимы в б.п. M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой матрицы $C = (c_{rs})$ с элементами из $\mathcal{A}'$ обозначим $C(w) = (c_{rs}(w))$. Из (4.15) следует, что $B(w)X(w) = E_\infty$, откуда получаем, что все строки матрицы $B(w)$ линейно независимы. Поскольку все элементы $z_c(w)$ линейно независимы в M , то отсюда следует, что все элементы $b'_i(w)$ также линейно независимы в M . Лемма доказана.

Обозначим теперь $m[\mathcal{I}'] = I$, $l[\mathcal{J}'] = J$, $J_1 = \text{Ker } \varphi$, $l[B'] = B$. Очевидно, б.п. L разлагается в прямую сумму бесконечных пространств B и J .

ЛЕММА 4.14. *Для любого выбора $w \in W_j$ имеем $J_1 = J$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $J \subseteq J_1$ очевидно из коммутативности диаграммы (4.14). Если это включение строгое, то $J_1 \cap B \neq 0$, поэтому найдется элемент $d \in B$, $d \neq 0$, такой, что $\varphi(d) = 0$. Рассмотрим элемент $d' \in B'$ такой, что $l(d') = d$. Пусть $d' = d^i b_i$. Тогда

$$\beta^*(d') = d^i b'_i. \quad (4.16)$$

Ввиду коммутативности диаграммы (4.14) соотношение (4.16) влечет соотношение $d^i(w)b'_i(w) = 0$. Поскольку $d = d^i(w)b_i(w) \neq 0$, не все $d^i(w)$ равны нулю, что противоречит линейной независимости элементов $b'_i(w)$, доказанной в лемме 4.13. Лемма доказана.

4.16. Закончим теперь доказательство леммы 4.12. Рассмотрим $\mathcal{A}'$ -подмодуль $\mathcal{L}_k = L_k \otimes \mathcal{A}'$ модуля $\mathcal{L}'$ и обозначим $\mathcal{B}_k = \mathcal{B}' \cap \mathcal{L}_k$, $\mathcal{J}_k = \mathcal{J}' \cap \mathcal{L}_k$. Из определения $\mathcal{B}'$ следует, что имеет место прямое разложение $\mathcal{A}'$ -модулей:

$$\mathcal{L}_k = \mathcal{B}_k + \mathcal{J}_k. \quad (4.17)$$

Полагая $B_k = l(\mathcal{B}_k)$ и $J_k = l(\mathcal{J}_k)$, имеем прямое разложение линейных пространств: $L_k = B_k + J_k$, причем $B_k \subset B$, $J_k \subset J$. Поскольку $\varphi(J_k) = 0$ и φ инъективно на B_k (лемма 4.14), то размерность линейного пространства

$\varphi(L_k)$ равна размерности линейного пространства B_k . Последняя размерность равна рангу свободного $\mathcal{A}'$ -модуля $\mathcal{B}_k$ и не зависит от выбранной точки $w \in W_j$. С другой стороны, ввиду включения $\varphi(L_k) \subseteq M_{k+q}$ при отождествлении L_k и M_{k+q} с двойственными пространствами к $L_k^* = S_k(T^*) \otimes E$ и $M_{k+q}^* = S_{k+q}(T^*) \otimes T$ отображение φ отождествляется с двойственным отображением $\beta_k^*(w): L_k \rightarrow M_{k+q}$ к отображению $\beta_k(w): S_{k+q}(T^*) \otimes T \rightarrow S_k(T^*) \otimes E$. Поэтому $\varphi(L_k)$ отождествляется с образом отображения $\beta_k^*(w): L_k \rightarrow M_{k+q}$. Тогда очевидно, что размерность линейного пространства $\varphi(L_k)$ равна размерности $\dim \Delta_k''(w)$ образа $\Delta_k''(w)$ отображения $\beta_k(w)$. Поэтому $\dim \Delta_k''(w)$ постоянно для всех точек $w \in W_j$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.1. Итак, из доказательства леммы 4.12 следует, что функция Гильберта любой точки $w \in W_j$ равна функции Гильберта $\mathcal{A}'$ -модуля $\mathcal{B}'$, т.е. функции $\text{Hilb}_{\mathcal{B}'}(k) = \text{rang}(\mathcal{B}_k)$, где $\text{rang}(\mathcal{C})$ – ранг над кольцом $\mathcal{A}'$ свободного $\mathcal{A}'$ -модуля $\mathcal{C}$. Поскольку ранг (свободного) модуля $\mathcal{L}_k$ равен mC_{n+k}^n , из формулы (4.17) следует, что значение $\text{Hilb}_{\mathcal{B}'}(k)$ определяется функцией Гильберта $\text{Hilb}_{\mathcal{J}'}(k) = \text{rang}(\mathcal{J}_k)$ модуля $\mathcal{J}'$. Как известно, функция $\text{Hilb}_{\mathcal{J}'}$, в свою очередь, полностью определяется подмодулем $J^1 = \text{lm}(\mathcal{J}')$ модуля L , так как $\text{Hilb}_{\mathcal{J}'}(k) = \dim(L_k \cap J^1)$. В силу леммы 4.3 максимальная степень образующих $\mathcal{J}'$ и, следовательно, J^1 ограничена константой, зависящей только от n, m и q . Очевидно, в L существует только конечное число мономиальных подмодулей с таким условием, и их количество оценивается универсальной константой $r_0(m, n, q)$.

Рассмотрим множество ϑ ординарных точек в J^Ω , затем его прообраз $\nu_\Omega^{-1}(\vartheta)$ в J^∞ и пересечение $U_0 \cap \nu_\Omega^{-1}(\vartheta) = U_{0r}$; согласно следствию 3.1 область U_{0r} всюду плотна в U_0 . Согласно следствию 4.1 при $z \in U_{0r}$ и $k \geq \Omega$ выполнено равенство

$$\dim \Delta_k''(z) = \dim \Delta_k'(z) + n = \dim \Delta_k(z).$$

Обозначим $U_j = W_j \cap U_{0r}$. Тогда для точки $z \in U_j$ при $k \geq \Omega$ имеем $\dim \Delta_k(z) = \text{Hilb}_z(k)$, т.е. k -тип этой точки определяется ее функцией Гильберта. Поэтому k -тип точки $z \in U_i$ не зависит от z . В силу сказанного выше количество всех возможных k -типов ограничено константой $r_0(m, n, q)$.

Оценка для ступени $\mathfrak{A} = \max(\text{st}(\mathbf{W}), \Omega)$ разбиения $\mathbf{U} = (U_j)$ получается из лемм 2.1 и 4.3, гарантирующих соответствующие оценки для Ω и $\text{st}(\mathbf{W})$. Лемма, а с ней и теорема 4.1 доказаны.

§ 5. Теорема Трессе

ТЕОРЕМА 5.1 (А. Трессе). Пусть $P \rightarrow X$ – расслоение геометрических величин порядка q с типовым слоем D , $\dim D = m$, $\dim X = n$ и $m > n$. Тогда найдутся натуральное $\Gamma = \Gamma(m, n, q)$, зависящее только от m, n и q , открытое всюду плотное инвариантное множество V в J^Γ и покрытие множества V открытыми множествами B_α со следующими свойствами:

1) на каждом B_α имеется n инвариантных дифференцирований $D_1^\alpha, \dots, D_n^\alpha$, образующих базис в каждой точке B_α ;

2) на каждом B_α имеется конечный набор инвариантных функции F_α^ρ , $1 \leq \rho \leq \rho(\alpha)$;

3) для любого натурального $k \geq \Gamma$, любой области $H \subseteq J^k$, любой инвариантной определенной на H функции G и любой точки $u \in \pi^{-1}(k, \Gamma)[V] \cap H$ существуют окрестность C этой точки и индекс α такие, что $\pi(k, \Gamma)[C] \subseteq B_\alpha$, а ограничение функции G на C выражается через конечное число функций $f_{i_1, \dots, i_r}^\rho$ для $r \leq k - \Gamma$, т. е. $G = \Phi(f^\rho, f_{i_1}^\rho, \dots, f_{i_1, \dots, i_r}^\rho, \dots, f_{i_1, \dots, i_t}^\rho)$.

Здесь $f_{i_1, \dots, i_r}^\rho = \pi^*(k, \Gamma + r)[D_{i_1}^\alpha \dots D_{i_r}^\alpha F_\alpha^\rho]$ являются инвариантными функциями, определенными в $\pi^{-1}(k, \Gamma)[B_\alpha]$ и, значит, в C . Для гладкой функции G функция Φ может быть выбрана гладкой.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть $W = \nu_\Gamma^{-1}(V)$ – прообраз в J^∞ области V . Тогда W – открытое всюду плотное инвариантное множество в J^∞ . Для любой точки $z \in W$ в кольце $O_z(J^\infty)$ имеется n инвариантных дифференцируемых D_i , а в кольце $I_z(J^\infty)$ имеется конечный набор f^β , $1 \leq \beta \leq p$, инвариантных ростков степени Γ со следующим свойством: любой инвариантный росток $\varphi \in I_z(J^\infty)$ произвольной степени s представляется в виде суперпозиции ростков f^β и $f_{i_1, \dots, i_r}^\beta = D_{i_1} \dots D_{i_r} f^\beta$, т. е. $\varphi = \Phi(f^\beta, f_{i_1}^\beta, \dots, f_{i_1, \dots, i_r}^\beta, \dots, f_{i_1, \dots, i_t}^\beta)$, $0 \leq r \leq \max(s, \Gamma) - \Gamma$.

Отметим, что все ростки $f_{i_1, \dots, i_r}^\beta$ также инвариантны, а росток Φ может быть представлен гладкой функцией для ростка φ гладкой функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следствия вытекает из теоремы 5.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. В работе [7] выведены достаточные условия справедливости теоремы Трессе. В § 2–4 мы фактически проверили эти условия. В настоящей работе теорема Трессе формулируется в несколько усиленном виде по сравнению с [7]. Поэтому вместо ссылки на [7] нам проще воспроизвести здесь с необходимыми изменениями рассуждения из работы [7] для вывода теоремы Трессе из результатов, полученных в § 2–4.

Рассмотрим разбиение $U = (U_j, 1 \leq j \leq t)$ области U_0 , построенное в доказательстве леммы 4.1. По лемме 4.1 объединение $U = \bigcup_{j=1}^t U_j$ всюду плотно в U_0 . Напомним, что в обозначениях из пп. 4.2, 4.12, 4.16 для точки $w \in U_j$ касательное в точке $w_k = \nu_k(w) \in J^k$ пространство к слою D^k проекции π_k отождествляется с L_k^* . Пусть

$$L_k^* = (L^k + L_{k-1})^* = [L^k]^* + L_{k-1}^*.$$

Тогда естественная проекция $\pi(k, k-1)$ отождествляется с проекцией $L_k^* \rightarrow L_{k-1}^*$ на второе слагаемое, поэтому двойственное отображение $L_{k-1} \rightarrow L_k = L^k + L_{k-1}$ есть вложение L_{k-1} на второе слагаемое. Из п. 4.16 видно, что для подпространства $\Delta_k''(w)$ пространства L_k^* аннулятор $\Delta_k''(w)$ в L_k отождествляется с J_k , поэтому имеет место изоморфизм $\Delta_k''(w)^* = L_k/J_k$. Подпространство $\Delta_{k,k-1}(w)$ согласно лемме 4.11 есть ядро эпиморфизма $\pi(k, k-1): \Delta_k''(w) \rightarrow \Delta_{k-1}''(w)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \Delta_{k,k-1}(w)^* &= \Delta_k''(w)^* / \Delta_{k-1}''(w)^* \\ &= (L_k/J_k) / (L_{k-1}/J_{k-1}) = L_k / (L_{k-1} + J_k) = L^k / \text{gr } J_k. \end{aligned}$$

Здесь через $\text{gr}J_k$ обозначен образ J_k при проекции $L_k = L^k + L_{k-1}$ на первое слагаемое. Пусть

$$\text{gr}J = \sum_{k=1}^{\infty} \text{gr}J_k.$$

Далее нам понадобятся следующие леммы.

ЛЕММА 5.1. *Построенное б.п. $\text{gr}J$ является подмодулем $S(T)$ -модуля L (со стандартным действием обычного кольца полиномов $S(T)$ на $L = S(T) \otimes E^*$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обозначениях из п. 4.16 имеем $J_k = l(\mathcal{J}_k)$. Мы скажем, что элемент $a' \in \mathcal{J}_k$ представляет элемент $a \in \text{gr}J_k$, если элемент $l(a')$ переходит в элемент a при эпиморфизме $L_k \rightarrow L_k/L_{k-1}$. Тогда из определения действия элемента $t \in T$ на $\mathcal{L}'$ (см. п. 4.6) следует, что ta' представляет ta . Поскольку $\mathcal{J}_k$ – подмодуль в $\mathcal{L}'$, то выполнено включение $ta' \in \mathcal{J}_{k+1}$, что доказывает лемму.

ЛЕММА 5.2. *Существует константа Γ_1 , зависящая только от m, n и q , такая, что при $k \geq \Gamma_1$ для любой точки $w \in U$ справедливо равенство $T(\text{gr}J_k) = \text{gr}J_{k+1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4.9 для каждой области U_j степени образующих функционального модуля $\mathcal{J} \mid U_j$ ограничены константой Γ_1 , зависящей только от m, n и q . Ясно, что при $k \geq \Gamma_1$ выполнено соотношение $T[(\mathcal{J} \mid U_j)_k] = (\mathcal{J} \mid U_j)_{k+1}$. Так как $J_k = l(\mathcal{J}_k)$, выполнено равенство $T(\text{gr}J_k) = \text{gr}J_{k+1}$. Лемма доказана.

Положим $\Gamma = \max(\Gamma_1, \mathfrak{A})$, где $\mathfrak{A}$ определено в доказательстве леммы 4.1. Покажем, что константа Γ является искомой, и построим искомую область V . Напомним [7], что для любого линейного подпространства H в $S^k T^* \otimes E$ определено алгебраическое продолжение $\wp(H)$ по формуле

$$\wp(H) = [T^* \otimes H] \cap [S^{k+1} T^* \otimes E] \subset S^{k+1} T^* \otimes E.$$

Здесь оба пространства $T^* \otimes H$ и $S^{k+1} T^* \otimes E$ считаются подпространствами в тензорном произведении (над $\mathbb{R}$)

$$\underbrace{T^* \otimes \dots \otimes T^*}_k \otimes E = \left(\bigotimes_k T^* \right) \otimes E.$$

Напомним, что мы обозначаем $(L^k)^* = S^k(T^*) \otimes E$ и $\Delta_{k,k-1}(w)$ является подпространством в $(L^k)^*$, поэтому мы можем рассмотреть пространство $\wp(\Delta_{k,k-1}(w))$.

ЛЕММА 5.3. *Пусть H – подпространство в $S^k(T^*) \otimes E$ и H^* – аннулятор H в L^k . Тогда подпространство TH^* является аннулятором $\wp(H)$ в L^{k+1} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно вытекает из определений (см. [38]).

СЛЕДСТВИЕ 5.2. *При $k \geq \Gamma$ для любой точки $w \in U$ имеем*

$$\wp(\Delta_{k,k-1}(w)) = \Delta_{k+1,k}(w). \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве теоремы 5.1 показано, что аннулятор $\Delta_{k,k-1}(w)$ равен $\text{gr} J_k$. При $k \geq \Gamma_1$ согласно лемме 5.2 имеем $T(\text{gr} J_k) = \text{gr} J_{k+1}$. Следствие доказано.

Выше для локальной карты N на D построена область $U = U(N)$ в J^∞ . Рассмотрим покрытие D локальными картами N_α и для каждого N_α точно так же построим область $U_\alpha = U(N_\alpha)$. Обозначим через V^1 объединение всех областей U_α ; ясно, что V^1 есть открытое всюду плотное множество ступени $\mathfrak{A}$ в J^∞ . Рассмотрим в J^∞ наименьшее инвариантное множество V^2 , содержащее V^1 , и положим $V^3 = V^2 \cap \nu_\Gamma^{-1}(\Lambda^\Gamma)$. Напомним, что Λ^Γ – множество допустимых точек в J^Γ (причем Λ^Γ всегда открыто и инвариантно в J^Γ). По построению $\Gamma \geq \mathfrak{A} \geq \Omega$ (число Ω определено в лемме 2.1), поэтому Λ^Γ также всюду плотно в J^Γ . Теперь ясно, что найдется открытое инвариантное всюду плотное множество V в J^Γ , для которого $V^3 = \nu_\Gamma^{-1}(V)$. Покажем, что множество V искомое. По построению U_α для любой точки $z \in V^3$ проекция $z_k = \nu_k(z) \in J^k$ является при $k \geq \Gamma$ регулярной точкой из J^k . Все точки области V допустимы по построению, поэтому существует покрытие области V открытыми множествами W_β такими, что на каждом W_β имеется n инвариантных дифференцирований $D_1^\beta, \dots, D_n^\beta$, образующих базис в каждой точке W_β . Для любой точки $w \in J^k$ с условием $\pi(k, \Gamma)w \in V$ по построению V выполнено свойство (5.1), так как при действии группы $\mathcal{V}$ оно сохраняется.

Пусть A – область в J^k и $F^1, \dots, F^s$ – последовательность A -функций (т. е. функций, определенных в области A), $v \in A$. Через $\text{Ker}_v\{dF^\alpha; 1 \leq \alpha \leq s\}$ обозначается линейное подпространство касательного пространства $T_v J^k$, являющееся аннулятором дифференциалов dF^α функций F^α в точке v .

Напомним, что для любого k множество R^k регулярных точек – открытая всюду плотная инвариантная область в J^k .

ЛЕММА 5.4. Пусть s – натуральное число и $a \in R^s$. Тогда:

1) найдутся такие окрестность $A \subset R^s$ этой точки и набор F^ρ , $1 \leq \rho \leq \rho(a)$, состоящий из инвариантных A -функций, что

$$\text{Ker}_v\{dF^\rho; 1 \leq \rho \leq \rho(a)\} = \Delta_s(v) \quad \forall v \in A; \quad (5.2)$$

2) если имеется любая окрестность $A \subset R^s$ точки a и любой набор F^ρ , $1 \leq \rho \leq \rho(a)$, состоящий из инвариантных A -функций, со свойством (5.2), то для любого открытого множества $H \subset J^s$ и любой инвариантной H -функции G любая точка u из пересечения $H \cap A$ обладает окрестностью, в которой G выражается через F^ρ , т. е. $G = \Phi(F^\rho)$, при этом функция Φ может быть выбрана гладкой, если G является гладкой.

Набор функций F^ρ , обладающих свойством (5.2), будем называть базовым набором в точке a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.4. В окрестности регулярной точки a распределение Δ_s инволютивно. Из теоремы Фробениуса следует, что имеется окрестность U точки a , диффеоморфная прямому произведению двух своих связных подмногообразий $S_1 \times S_2$, причем для каждой точки $h \in S_1$ подмногообразие

$h \times S_2$ есть компонента связности пересечения U с проходящей через точку h орбитой группы $\mathcal{V}$. Мы можем считать, что каждое S_i есть внутренность единичного шара в пространстве $\mathbb{R}^{s_i}$ соответствующей размерности. Отсюда лемма легко следует.

Используя утверждение 1) леммы 5.4 для точек области V (случай $s = \Gamma$), мы можем заменить покрытие W_β более мелким покрытием B_α , для которого выполнено свойство 1) теоремы 5.1, а также следующее свойство: на каждой области B_α определен набор инвариантных функций F_α^ρ , $1 \leq \rho \leq \rho(\alpha)$, такой, что $\text{Ker}_v\{dF_\alpha^\rho; 1 \leq \rho \leq \rho(\alpha)\} = \Delta_\Gamma(v)$ для всех $v \in B_\alpha$.

ЛЕММА 5.5. Пусть B_α – одна из областей построенного покрытия, $D_1^\alpha, \dots, D_n^\alpha$ – соответствующие инвариантные дифференцирования. Пусть $s \geq \Gamma$ и $C(s)$ – область в R^s такая, что $\pi(s, \Gamma)[C(s)] \subseteq B_\alpha$. Пусть в $C(s)$ определены функции F^ε , $1 \leq \varepsilon \leq p$, такие, что $\text{Ker}_v\{dF^\varepsilon; 1 \leq \varepsilon \leq p\} = \Delta_s(v)$ для любой точки $v \in C(s)$. Определим в J^{s+1} область $C(s+1)$ условием $C(s+1) = \pi^{-1}(s+1, s)[C(s)]$. Тогда:

- 1) область $C(s+1)$ состоит из регулярных точек, т. е. $C(s+1) \subseteq R^{s+1}$;
- 2) все функции $D_i^\alpha F^\varepsilon$ определены в $C(s+1)$;
- 3) $\text{Ker}_v\{d(\pi^*(s+1, s)[F^\varepsilon]), d(D_i^\alpha F^\varepsilon); 1 \leq \varepsilon \leq p, 1 \leq i \leq n\} = \Delta_{s+1}(v)$ для любой точки $v \in C(s+1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) справедливо в силу выбора V . Утверждение 2) следует из определения D_i^α . Утверждение 3) доказано в [7, леммы 23.2 и 23.5] с использованием результатов, полученных в [38].

Продолжим доказательство теоремы Трессе. Рассмотрим произвольную точку $u \in A$. Найдем $\alpha = \alpha(u)$, для которого выполнено включение $\pi(k, \Gamma)u \in B_\alpha$. Обозначим $t = k - \Gamma$ и применим t раз лемму 5.5: первый раз для $s = \Gamma$, $C(s) = B_\alpha$ и набора $(F^\varepsilon, 1 \leq \varepsilon \leq p) = (F_\alpha^\rho, 1 \leq \rho \leq \rho(\alpha))$, в результате получаем $C(\Gamma+1) = \pi^{-1}(\Gamma+1, \Gamma)[B_\alpha]$, затем второй раз для $s = \Gamma+1$ и набора $(F^\varepsilon, 1 \leq \varepsilon \leq p) = (d(\pi^*(s+1, s)[F^\varepsilon]), d(D_i^\alpha F^\varepsilon); 1 \leq \varepsilon \leq p, 1 \leq i \leq n)$, в результате получаем $C(\Gamma+2) = \pi^{-1}(\Gamma+2, \Gamma)[B_\alpha]$ и т. д. На последнем шаге получаем $s = k$, $C(k) = \pi^{-1}(k, \Gamma)[B_\alpha]$ и набор инвариантных функций (определенных в $C(k)$)

$$f_{i_1, \dots, i_r}^\rho = \pi^*(k, \Gamma+r)[D_{i_1}^\alpha \dots D_{i_r}^\alpha F_\alpha^\rho]$$

для всех значений $0 \leq r \leq t$ такой, что

$$\text{Ker}_v\{df_{i_1, \dots, i_r}^\rho; 0 \leq r \leq t, 1 \leq \rho \leq \rho(\alpha), 1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n\} = \Delta_k(v)$$

для любой точки $v \in C(k)$. Согласно утверждению 2) леммы 5.4 (используемой в случае $s = k$, $A = C(k)$ для набора функций $f_{i_1, \dots, i_r}^\rho$) для любой инвариантной H -функции G , заданной в условии теоремы, найдется окрестность C точки u такая, что ограничение G на C выражается через функции $f_{i_1, \dots, i_r}^\rho$ с помощью гладкой функции Φ . Теорема Трессе доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Теорема 5.1 и теорема 4.1 справедливы и без условия $t > n$. Их доказательства в случае $t \leq n$ будут опубликованы отдельно.

§ 6. Алгоритмы

6.1. Многие построения из § 4 и § 5 можно провести в каком-то смысле явно, если слегка модифицировать их.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Пусть дан набор B , состоящий из конечного числа функций $b_1(z), \dots, b_\varepsilon(z)$, определенных на области U_0 . Подобласть U' области U_0 *вырезается набором функций B* , если $U' = U(b_1) \cap \dots \cap U(b_\varepsilon)$, где $U(b_\lambda)$ – по определению дополнение к множеству нулей функции b_λ в U_0 . Скажем, что B является *вырезающим набором для U'* и будем обозначать $U' = U(B)$. Разумеется, $U(B) = U(b)$, где $b(z) = b_1(z) \dots b_\varepsilon(z)$.

Рассмотрим теперь лемму 4.2 в случае, когда разбиение $\mathbf{V}$ из условия этой леммы есть тривиальное разбиение области $U(B)$, заданной вырезающим набором B . Предположим, что список H состоит из единственного элемента h , принадлежащего функциональному модулю $\mathcal{Q}(U(B))$, стандартная запись которого имеет вид

$$h = \sum_{i=1}^K a(i) X^{\nu(i)} \otimes q_{j(i)}. \quad (6.1)$$

В записи (6.1) и далее предполагается, что при возрастании i порядок grlex на мономах $X^{\nu(i)} \otimes q_{j(i)}$ убывает, а коэффициенты $a(i) = a(i, z)$ зависят от точки $z \in U_0$. Под стратификацией подобласти U' области U_0 мы понимаем представление U' в виде объединения непересекающихся локально замкнутых подмножеств Γ_p (стратов). Определим также пересечение $\Gamma \cap \Pi$ двух стратификаций Γ и Π области U' как стратификацию этой же области, страты которой имеют вид $\Gamma_p \cap \Pi_j$, где Γ_p принимает значение из множества всех стратов стратификации Γ , а Π_j – из множества всех стратов стратификации Π . Определим теперь стратификацию $\Gamma(h)$ области $U(B)$. Определим для $1 \leq p \leq K$ подмножества Γ_p условиями

$$x \in \Gamma_p \Leftrightarrow \{a(1, x) = 0, \dots, a(p-1, x) = 0, a(p, x) \neq 0\};$$

это и задаст стратификацию $\Gamma(h)$. Для элемента h вида (6.1) и натурального p , $1 \leq p \leq K$, определим элементы

$$\text{Tr}(h, p) = \sum_{i=p}^K a(i) X^{\nu(i)} \otimes q_{j(i)}, \quad \text{Nt}(h, p) = \frac{\text{Tr}(h, p)}{a(p)}.$$

Элемент $\text{Tr}(h, p)$ принадлежит $\mathcal{Q}(U(B))$, а $\text{Nt}(h, p)$ принадлежит $\mathcal{Q}(U(B_p))$, где список B_p получается присоединением функции $a(p)$ к списку B . Наконец, если список H состоит из элементов $h_1, \dots, h_r$, определим стратификацию $\Gamma(H)$ области $U(B)$ формулой $\Gamma(H) = \Gamma(h_1) \cap \dots \cap \Gamma(h_r)$. Далее через $\Gamma = (\Gamma_v, 1 \leq v \leq t)$ обозначена стратификация со стратами $\Gamma_1, \dots, \Gamma_t$.

Итак, пусть $\Gamma = \Gamma(H) = (\Gamma_v, 1 \leq v \leq t)$. Обозначим через W_v множество внутренних точек страта Γ_v . Легко видеть, что $W_1, \dots, W_t$ определяют разбиение $\mathbf{W}$ области $U(B)$. Некоторые области W_v теперь могут быть пустыми. Мы обозначаем $\mathbf{W} = \mathbf{W}(\Gamma)$ и говорим, что $\mathbf{W}$ и Γ , а также W_v и Γ_v

ассоциированы между собой. Доказательство леммы 4.2 показывает, что построенное там разбиение $\mathbf{W}$ ассоциировано с явно заданной стратификацией $\Gamma(H)$. Среди соотношений, задающих страт Γ_v , для каждого s , $1 \leq s \leq r$, имеются соотношения вида $a(s, 1) = 0, \dots, a(s, p-1) = 0, a(s, p) \neq 0$, в которых $a(s, i) = a(s, i, x)$ являются коэффициентами стандартной записи элемента h_s , а значение $p = p(s, v)$ зависит от v и s . Свяжем со стратом Γ_v набор A_v , состоящий из функций $a(1, p(1, v)), \dots, a(r, p(r, v))$. Ясно, что всегда выполнено включение $\Gamma_v \subseteq U(B_v)$, где $B_v = B \cup A_v$.

6.2. Модификация доказательства леммы 4.3 состоит в том, что вместе с каждым разбиением $\mathbf{U}^i$ будет одновременно строиться ассоциированная с ним стратификация и с каждым стратом Γ_v этой стратификации будет строиться содержащее его открытое множество $U(A_v)$, заданное своим вырезающим набором функций A_v , а также конечный список $E(i, v)$ элементов функционального модуля $\mathcal{Q}(U(A_v))$. При этом ограничение списка $E(i, v)$ на множество W_v внутренних точек страта Γ_v дает список $H(v)$, а объединение списков $H(v)$ по всем стратам приводит к списку H^i . Начнем доказательство леммы 4.3 для случая $U = U_0$ (для наших целей достаточно этого случая). Используя построения из п. 6.1 в случае, когда список B пуст, мы получим, что в качестве $\mathbf{U}^0$ можно взять разбиение, ассоциированное со стратификацией $\Gamma^0 = \Gamma(H) = (\Gamma_v, 1 \leq v \leq t_0)$, отвечающей списку $H = [h_s, 1 \leq s \leq r]$ из условия леммы. Набор вырезающих функций A_v страта v построен выше. Список $E[0, v]$ состоит из элементов $e_1^0 = \text{Nt}(h_1, p_0(1, v)), \dots, e_r^0 = \text{Nt}(h_r, p_0(r, v))$, где $p_0(s, v)$ – функция, построенная в п. 6.1 для стратификации $\Gamma(H)$, отвечающей списку H и пустому вырезающему набору B . Для любого v все элементы списка $E[0, v]$ принадлежат $\mathcal{Q}(U(A_v))$. При переходе к $\mathbf{U}^1$ расширим список $E[0, v]$ до списка $G[0, v]$, содержащего все элементы $RE[0, v][S(e_s^0, e_t^0)]$ для всех пар $e_s^0, e_t^0, s < t$, элементов списка $E[0, v]$.

6.3. Далее через $H = [h_1, \dots, h_m]$, где $h_c = \beta^*(\eta_c)$, обозначается исходный список образующих функционального модуля $\mathcal{I}$ из леммы 4.9.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. *Допустимым многочленом* называется многочлен от координат $f^i = f^i(z)$, $y_\mu^c = y_\mu^c(z)$ точки $z \in U_0$, от коэффициентов элементов $h_1, \dots, h_r$ (см. п. 6.1) и от частных производных этих коэффициентов (любых порядков) по переменным y_μ^c, f^i . Пусть $U = U(B)$ – подобласть в U_0 , заданная вырезающим набором B . *Допустимой* (относительно U) *дробью* называется дробь P/Q , в которой P – допустимый многочлен, а Q равно произведению степеней функций из набора B . Назовем элемент $x \in \mathcal{Q}(U(B))$ *допустимым*, если коэффициенты его стандартной записи являются допустимыми дробями. Допустимая дробь P/Q называется *явно заданной*, если явно находятся коэффициенты многочлена P и запись Q через функции из набора B .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3. Назовем стратификацию $\Gamma = (\Gamma_v, 1 \leq v \leq t)$ области U_0 *допустимой*, если каждый ее страт определяется своей системой уравнений и неравенств $\{X_1 = 0, \dots, X_a = 0, Z_1 \neq 0, \dots, Z_c \neq 0\}$ с допустимыми многочленами в левых частях, и *явно заданной*, если все эти многочлены явно заданы.

6.4. Теперь вернемся к доказательству леммы 4.3, взяв в качестве исходного введенный в п. 6.3 список H . В этом случае из способа построения списка $G[0, v]$ следует, что все элементы списка $G[0, v]$ допустимы относительно $U(B_v)$, а все функции набора B_v являются допустимыми многочленами. Продолжая доказательство леммы 4.3, применим модифицированную согласно п. 6.1 лемму 4.2 в случае, когда $U = U(B_v)$, а список H есть список $G[0, v] = (g_1, \dots, g_d)$ элементов функционального модуля $\mathcal{Q}(U(B_v))$. Мы получим стратификацию $\Pi(G[0, v]) = (\Pi_j, 1 \leq j \leq u)$ области $U(B_v)$. Положим $\Gamma_{v,j} = \Gamma_v \cap \Pi_j$. Страты $\Gamma_{v,j}$ при $1 \leq v \leq v_0$, $1 \leq j \leq u$, определяют стратификацию Γ^1 области U_0 , ассоциированную с разбиением $\mathbf{U}^1$. Согласно п. 6.1 для страта Π_j по списку $(g_1, \dots, g_d)$ строится набор функций A_j . Ясно, что $\Gamma_{v,j} \subset U(A_j \cup B_v)$. Из построения набора A_j следует, что все функции этого набора являются допустимыми относительно подобласти $U(B_v)$ дробями. Поэтому, отбросив у этих функций знаменатели, получим вместо A_j набор A'_j такой, что, обозначая $B_{v,j} = A'_j \cup B_v$, получим $\Gamma_{v,j} \subset U(B_{v,j})$, причем набор $B_{v,j}$ состоит из допустимых многочленов. В качестве списка $E[1, (v, j)]$ мы берем список, образованный элементами $e_1^1 = \text{Nt}(g_1, p_1(1, (v, j)))$, $\dots$, $e_d^1 = \text{Nt}(g_d, p_1(d, (v, j)))$, где $p_1(s, (v, j))$ – функция, построенная в п. 6.1 для стратификации $\Pi(G[0, v])$ области $U(B_v)$, отвечающей списку $G[0, v]$. Ясно, что элементы $e_1^1, \dots, e_d^1$ принадлежат $\mathcal{Q}(U(B_{v,j}))$ и допустимы. Занумеруем все двойные индексы (v, j) (в любом порядке) с помощью простого индекса b и будем теперь обозначать $\Gamma^1 = (\Gamma_b^1, 1 \leq b \leq b_1)$. Этим завершается шаг 1 модифицированного алгоритма. Мы пришли к той же ситуации, что и перед шагом 1, т. е. вместо Γ^0 мы имеем явно заданную допустимую стратификацию Γ^1 . Вырезающий набор B_b страта Γ_b^1 состоит из явно заданных многочленов. Список $E[1, b]$ состоит из явно заданных допустимых функций из $\mathcal{Q}(U(B_b))$.

Все последующие шаги модифицированного доказательства леммы 4.3 совершаются аналогично описанному переходу от шага 0 к шагу 1. Прделав таким образом Z шагов (количество которых явно оценивается согласно лемме 4.3), мы придем к явно заданной стратификации $\Gamma^Z = (\Gamma_v^Z, 1 \leq v \leq v_Z)$, к явно заданному для каждого страта Γ_v^Z списку вырезающих функций B_v и списку элементов $E(Z, v) = (e_u^v, 1 \leq u \leq u(v))$ функционального модуля $\mathcal{Q}(U(B_v))$. Разбиение $\mathbf{W}$, существование которого доказывается в лемме 4.3, ассоциировано с Γ^Z . Если W_v – область разбиения $\mathbf{W}$, ассоциированная со стратом Γ_v^Z , то элементы e_u^v образуют базис Грёбнера для ограничения $\mathcal{I} \mid W_v$ подмодуля $\mathcal{I}$ на область $U(B_v)$. Элементы e_u^v нормированы по построению, их старшие члены порождают $S(T)$ -подмодуль $I(v)$ основы $S(T) \otimes Q$, не зависящий от точки w страта Γ_v^Z . Как известно, функция Гильберта модуля $I(v)$ может быть явно найдена.

6.5. Теперь модифицируем аналогичным образом доказательство леммы 4.9 и получим в результате явно заданную относительно списка H стратификацию $\Pi = (\Pi_j, 1 \leq j \leq t)$ области U_0 , ассоциированную с разбиением $\mathbf{W} = (W_j, 1 \leq j \leq t)$, которое построено в этой лемме. Сохраняя введенные в лемме 4.9 обозначения, из сказанного выше получаем, что для области W_j ,

ассоциированной со стратом Π_j , может быть явно найдена функция Гильберта $\text{Hilb}_{\mathcal{J}'}$. Для точки $w \in U_0$ условие $\Delta_{k-1}(w) \cap \tau(w_k) = 0$ ординарности ее проекции $w_k = \nu_k(w) \in J^k$ может быть выписано в виде системы неравенств $Z_1 \neq 0, \dots, Z_c \neq 0$ с явно заданными допустимыми функциями в левых частях. Если точка w_k ординарна и является внутренней точкой страта Π_j , ее k -тип при $k \geq \Omega$ определяется ее функцией Гильберта, определяемой, в свою очередь, по функции $\text{Hilb}_{\mathcal{J}'}$.

6.6. Сохраняя обозначения из п. 6.5, далее будем считать, что для любого явно заданного многочлена P и любой заданной точки $w \in U_0$ выполнены следующие предположения:

- 1) можно явно проверить условие $P(w) = 0$ (а значит, и условие $P(w) \neq 0$);
- 2) можно явно проверить, существует ли в U_0 такая окрестность точки w , в которой многочлен P тождественно равен нулю.

Тогда из пп. 6.1–6.5 следует, что можно проверить выполнение следующих свойств:

- 3) точка w является внутренней точкой страта Π_j ;
- 4) точка w_Ω является ординарной.

Далее будем предполагать, что свойства 3) и 4) также выполнены. Из сказанного выше ясно, что тогда точка w_Ω неособа и явно находится Ω -тип точки w . Покажем, что в этом случае мы также можем найти специальную систему локальных координат на многообразии J^Ω в окрестности точки w_Ω с явно заданным базовым набором инвариантных функций (см. лемму 5.4).

Действительно, элементы матрицы Φ , задающей линейное отображение $\gamma_\Omega(w): \mathcal{G}(\Omega + q) \rightarrow S_\Omega$ из п. 4.4, являются явно заданными допустимыми многочленами. В силу предположения 1) мы можем явно найти какой-нибудь минор Ψ этой матрицы, имеющий максимальный ранг p . Этот минор следующим образом определяет разбиение координат g_ν^i в группе $G^{q+\Omega}(n)^0$ на две группы координат $(a^\chi, 1 \leq \chi \leq p)$ и $(b^\delta, 1 \leq \delta \leq d)$ и аналогичное разбиение координат y_μ^c в слое D^Ω на две группы координат $(z^\sigma, 1 \leq \sigma \leq p)$ и $(v^\beta, 1 \leq \beta \leq r)$. Пусть действие группы $G^{q+\Omega}(n)^0$ на продолженном слое D^Ω задается функциями $z^\lambda = Z^\lambda(z^\sigma, v^\beta, a^\chi, b^\delta)$, $v^\varepsilon = V^\varepsilon(z^\sigma, v^\beta, a^\chi, b^\delta)$. Тогда $\Psi = [\partial Z^\lambda / \partial a^\chi](e)$ (в этой формуле справа стоит значение якобиевой матрицы $\partial Z^\lambda / \partial a^\chi$ в единичном элементе e группы $G^{q+\Omega}(n)^0$). Предполагая фиксированной точку w , рассмотрим точку y слоя D^Ω с координатами $z^\lambda = Z^\lambda(z^\sigma(w), v^\beta, a^\chi, b^\delta(e))$, $v^\omega = V^\omega(z^\sigma(w), v^\beta, a^\chi, b^\delta(e))$. Легко видеть, что таким образом определяются новые локальные координаты $a^\chi(y)$, $1 \leq \chi \leq p$, $v^\beta(y)$, $1 \leq \beta \leq r$, на слое D^Ω в окрестности точки w_Ω . По построению этих координат функции $v^\beta(y)$ образуют базовый набор в точке w_Ω . Функции Z^λ , V^ε выражаются в виде дроби P/Q , в которой P является многочленом от координат $y_\mu^c = y_\mu^c(w_\Omega)$ точки w_Ω , координат g_ν^i элемента g группы $G^{q+\Omega}(n)^0$ и от частных производных (первого и старших порядков) по переменным y_μ^c и g_ν^i функций $\alpha^t(y^c, g_{j_1}^i, \dots, g_{j_1, \dots, j_q}^i)$, задающих исходное действие группы $G^q(n)^0$ на типовом слое D , а Q есть степень определителя $\det(g_j^i)$ естественной проекции (g_j^i) элемента g на группу $\text{GL}(n)$. Коэффициенты многочлена P и степень, входящая в Q , явно находятся. В п. 3.4 показано, как по функциям α^t явно найти элементы $h_c = \beta^*(\eta_c)$

списка H из п. 6.5. Если каким-либо образом мы можем явно найти обратное преобразование от координат a^χ, v^β к координатам y_μ^c , то мы сможем явно выразить через координаты y_μ^c базовый набор в окрестности точки w_Ω .

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. В силу замечания 2.2 любой прообраз $z \in J^{\Omega+1}$ точки w_Ω ординарен. Поэтому указанное в замечании 2.3 построение можно применить (полагая $a = z, u = w_\Omega$) для получения n инвариантных дифференцирований, определенных и образующих базис в точке z . Для их нахождения необходимо вычислить матрицу $\varphi = (\partial_i v^\beta)$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq \beta \leq r$ (см. п. 2.7), найти значение $\varphi(z)$ этой матрицы в точке z , а затем найти какой-нибудь минор ранга n матрицы $\varphi(z)$ (ввиду свойства 4) такой минор найдется). Пусть следующее предположение справедливо:

5) можно явно найти частные производные (всех порядков) $\partial v^\beta / \partial y_\mu^c$, и для любого многочлена P от них и от y_μ^c можно проверить выполнение равенства $P(z) = 0$.

Тогда среди v^β мы можем явно отобрать n таких функций $v^1, \dots, v^n$, для которых матрица $(\partial_i v^j)$, $1 \leq i, j \leq n$, невырождена, и затем по ним явно провести построение из замечания 2.3 и явно найти набор, определяющий n инвариантных дифференцирований D_i , $1 \leq i \leq n$, определенных и образующих базис в точке u . Наконец, из предположения 5) следует, что можно явно найти базисный набор инвариантов для любой точки $s \in J^k$ при $\Omega \leq k$ и $\pi(k, \Omega)[s] = w_\Omega$. Это вытекает из теоремы 5.1 и того, что все функции $D_{i_1} \dots D_{i_r} v^\beta$ могут быть найдены явно.

Если действие группы $G^q(n)^0$ на стандартном слое аналитично, то легко видеть, что в теореме 4.1 все множество возможных k -типов для связной базы X сводится к одному единственному k -типу. В этом случае достаточно выполнения одного свойства 2), чтобы явно найти этот тип. Это утверждение почти очевидно, поэтому доказательство не приводится.

Список литературы

1. S. Lie, *Gesammelte Abhandlungen*, Teubner, Leipzig, 1922–1937.
2. É. Cartan, *Œuvres complètes*, Gauthier-Villars, Paris, 1952–1955.
3. V. I. Arnold, “Mathematical problems in classical physics”, *Trends and perspectives in applied mathematics*, Appl. Math. Sci., **100**, Springer, New York, 1994, 1–20.
4. В. И. Арнольд, *Задачи Арнольда*, Фазис, М., 2000; англ. пер.: V. I. Arnold, *Arnold’s problems*, Springer, Berlin, 2004.
5. Ar. Tresse, “Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations”, *Acta Math.*, **18** (1894), 1–88.
6. Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978.
7. A. Kumpera, “Invariants différentiels d’un pseudogroupe de Lie. I”, *J. Differential Geometry*, **10** (1975), 289–345.
8. J. Muñoz, F. J. Muriel, J. Rodríguez, “On the finiteness of differential invariants”, *J. Math. Anal. Appl.*, **284**:1 (2003), 266–282.
9. B. Kruglikov, V. Lychagin, “Invariants of pseudogroup actions: homological methods and finiteness theorem”, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **3**:5–6 (2006), 1131–1165.

10. R. L. Bryant, S. S. Chern, R. B. Gardner, H. L. Goldschmidt, P. A. Griffiths, *Exterior differential systems*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **18**, Springer-Verlag, New York, 1991.
11. Ф. Гриффитс, *Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление*, Мир, М., 1986; пер. с англ.: Ph. A. Griffiths, *Exterior differential systems and the calculus of variations*, Progr. Math., **25**, Boston, MA, Birkhäuser, 1983.
12. V. Guillemin, D. Quillen, S. Sternberg, "The classification of the irreducible complex algebras of infinite types", *J. Analyse Math.*, **18** (1967), 107–112; рус. пер.: *Математика. Сб. пер.*, **12:6** (1968), 63–66.
13. I. M. Singer, S. Sternberg, "The infinite groups of Lie and Cartan. I. The transitive groups.", *J. Analyse Math.*, **15** (1965), 1–114.
14. Ж. Поммаре, *Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли*, Мир, М., 1983; пер. с англ.: Z. F. Pommaret, *Systems of partial differential equations and Lie pseudogroups*, Math. Appl., **14**, Gordon & Breach, New York, 1978.
15. P. J. Olver, J. Pohjanpelto, "Maurer–Cartan forms and the structure of Lie pseudo-groups", *Selecta Math.*, **11:1** (2005), 99–126.
16. I. Zelenko, "On variational approach to differential invariants of rank two distributions", *Differential Geom. Appl.*, **24:3** (2006), 235–259.
17. A. Agrachev, "Methods of control theory in nonholonomic geometry", *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, vols. 1, 2 (Zürich, 1994), Birkhäuser, Basel, 1995, 1473–1483.
18. É. Cartan, "Les systèmes de Pfaff, à cinq variables et les équations aux dérivés partielles du second ordre", *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **27:3** (1910), 109–192.
19. A. Agrachev, I. Zelenko, "Geometry of Jacobi curves. I, II", *J. Dynam. Control Systems*, **8:1** (2002), 93–140; **8:2** (2002), 167–215.
20. B. Doubrov, I. Zelenko, "A canonical frame for nonholonomic rank two distributions of maximal class", *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **342:8** (2006), 589–594.
21. А. А. Аграчев, "Качение шаров и октавы", *Анализ и особенности. Часть 1: Сб. статей*, К 70-летию со дня рождения академика В. И. Арнольда, Тр. МИАН, **258**, Наука, М., 2007, 17–27; англ. пер.: A. A. Agrachev, "Rolling balls and octonions", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **258:1** (2007), 13–22.
22. А. С. Шмелев, "Некоторые свойства симплектических и гиперкелеровых структур", *Докл. РАН*, **336:3** (1994), 304–306; англ. пер.: A. S. Shmelev, "Some properties of symplectic and hyper-Kählerian structures", *Russ. Acad. Sci. Dokl. Math.*, **49:3** (1994), 511–514.
23. А. С. Шмелев, "О дифференциальных инвариантах некоторых дифференциально-геометрических структур", Тр. МИАН, **209**, Наука, М., 1995, 234–267; англ. пер.: A. S. Shmelev, "On differential invariants of some differential–geometric structures", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **209** (1995), 203–234.
24. А. С. Шмелев, "Функциональные модули ростков римановых метрик", *Функци. анализ и его прил.*, **31:2** (1997), 58–66; англ. пер.: A. S. Shmelev, "Functional moduli of jets of Riemannian metrics", *Funct. Anal. Appl.*, **31:2** (1997), 119–125.
25. T. Y. Thomas, *The differential invariants of generalized spaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1934.
26. D. B. A. Epstein, "Natural tensors on Riemannian manifolds", *J. Differential Geometry*, **10:4** (1975), 631–645.
27. P. I. Katsylo, "On curvatures of sections of tensor bundles", *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **213** (2005), 129–140.
28. Р. А. Саркисян, "О дифференциальных инвариантах геометрических структур", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70:2** (2006), 99–158; англ. пер.: R. A. Sarkisyan, "On differential invariants of geometric structures", *Izv. Math.*, **70:2** (2006), 307–362.
29. М. Голубицкий, В. Гийемин, *Устойчивые отображения и их особенности*, Мир, М., 1977; пер. с англ.: M. Golubitsky, V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Grad. Texts in Math., **14**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1973.

30. Н. Х. Ибрагимов, *Группы преобразований в математической физике*, Наука, М., 1983; англ. пер.: N. H. Ibragimov, *Transformation groups applied to mathematical physics*, Math. Appl., D. Reidel, Dordrecht, 1985.
31. D. Bayer, D. Mumford, *What can be computed in algebraic Geometry?*, [arXiv:alg-geom/9304003](#); D. Bayer, D. Mumford, *Computational algebraic geometry and commutative algebra*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
32. Д. Кокс, Дж. Литтл, Д. О'Ши, *Идеалы, многообразия и алгоритмы*, Мир, М., 2000; пер. с англ.: D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, varieties, and algorithms*, An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra, Undergrad. Texts Math., Springer-Verlag, New York, 1997.
33. D. Eisenbud, *Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry*, Grad. Texts in Math., **150**, Springer-Verlag, New York, 1995.
34. А. Г. Хованский, С. П. Чулков, *Геометрия полугруппы $\mathbb{Z}_{\leq 0}^n$* , Изд-во МЦНМО, М., 2006.
35. V. N. Latyshev, "A combinatorial complexity of Gröbner bases", *J. Math. Sci.*, **102**:3 (2000), 4134–4138.
36. И. В. Аржанцев, *Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений*, Изд-во МЦНМО, М., 2003.
37. W. W. Adams, P. Loustaunau, *An introduction to Gröbner bases*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
38. M. Kuranishi, *Lectures on involutive systems of partial differential equations*, Publ. Soc. Mat., Publicacoes da Sociedade de Matematica de Sao Paulo, Sao Paulo, 1967.

Р. А. САРКИСЯН
 Финансовая академия при Правительстве РФ
E-mail: voidcaller@mail.domonet.ru

Поступило в редакцию
 10.04.2006

И. Г. ШАНДРА
 Финансовая академия при Правительстве РФ
E-mail: igor-shandra@mtu-net.ru