Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жиков, М. Е. Рычаго, Усреднение нелинейных эллиптических уравнений второго порядка в перфорированных областях, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 1, 69–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/im105>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 17:28:48

УДК 517.97

В. В. Жиков, М. Е. Рычаго

Усреднение нелинейных эллиптических уравнений второго порядка в перфорированных областях

Классический метод усреднения эллиптических краевых задач основан на продолжении решения, заданного в перфорированной области, на всю исходную область. Этот метод требует существенных ограничений на перфорированную область (условие “сильной связности”). В работе предложен новый подход, не использующий технику продолжения. При этом “сильная связность” заменяется обычной связностью.

Библиография: 13 наименований.

§ 1. Введение

1. *Перфорированной областью* принято называть пересечение

$$\Omega \cap Q_\varepsilon, \quad (0.1)$$

где Ω – фиксированная ограниченная область в $\mathbb{R}^N$, $Q_\varepsilon = \varepsilon Q$ – гомотетическое сжатие периодического открытого множества $Q \subset \mathbb{R}^N$.

Усреднению линейных и нелинейных эллиптических уравнений в перфорированных областях посвящена многочисленная литература. Главные проблемы обычно связаны со структурой периодического множества Q . Классический метод основан на специальном продолжении решения, заданного в области (0.1), на всю исходную область Ω . Этот метод требует существенных ограничений на периодическую область Q (так называемое условие “сильной связности”).

В настоящей работе предложен более простой подход, совсем не использующий технику продолжения. При этом все требования на периодическое открытое множество Q сводятся к единственному условию – условию связности Q в $\mathbb{R}^N$.

Рассматривается нелинейное эллиптическое уравнение вида

$$-\operatorname{div}(a(\varepsilon^{-1}x, \nabla u^\varepsilon)) + b(\varepsilon^{-1}x, u^\varepsilon) = f \quad (0.2)$$

в области $\Omega \cap Q_\varepsilon$, которое дополняется краевым условием Неймана на части $\Omega \cap \partial Q_\varepsilon$ границы области (0.1) и условием Дирихле – на остальной части границы. Предполагается, что $a(y, \xi)$, $b(x, s)$ – периодические и измеримые по x функции на Q , сильно монотонные по $\xi \in \mathbb{R}^N$ для п.в. $x \in Q$ и удовлетворяющие определенным условиям роста по $\xi \in \mathbb{R}^N$ (см. п. 2, условия 1), 2)).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 93-011-1720) и ISF (грант NYV000).

При этих предположениях мы определяем усредненное уравнение, заданное уже во всей области Ω , и доказываем основные свойства сходимости решения (0.2) к решению усредненного уравнения.

Отметим, что в случае $Q = \mathbb{R}^N$ усреднение монотонных операторов изучалось многими авторами (см. [2]–[5], [12], общие свойства монотонных эллиптических операторов см. в [1], [2]).

2. Итак, пусть Q – периодическая связная область в $\mathbb{R}^N$, $\square = (0, 1)^N$ – ячейка периодичности, $\chi(x)$ – характеристическая функция Q ,

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in Q, \\ 0, & \text{если } x \in F = \mathbb{R}^N \setminus Q. \end{cases}$$

В перфорированной области $\Omega \cap Q_\varepsilon$ поставим следующую задачу:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(a(\varepsilon^{-1}x, \nabla u^\varepsilon)) + b(\varepsilon^{-1}x, u^\varepsilon) &= f, \\ a(\varepsilon^{-1}x, \nabla u^\varepsilon) \cdot n|_{\Omega \cap \partial Q_\varepsilon} &= 0, \\ u^\varepsilon|_{\partial \Omega \cap Q_\varepsilon} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где n – единичная внешняя нормаль к границе. Другими словами, на части $\Omega \cap \partial Q_\varepsilon$ границы области $\Omega \cap Q_\varepsilon$ ставится условие Неймана, а на остальной части – условие Дирихле.

Свойство монотонности и свойство роста функций $a(\cdot, \xi)$, $b(\cdot, s)$ будем характеризовать с помощью показателя $p > 1$. Точнее, мы предполагаем, что функции $a(y, \xi)$, $b(x, s)$, $f(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $a(\cdot, \xi)$, $b(\cdot, s)$ – периодические с периодом 1 и измеримые по x функции на Q ;
- 2) существует показатель p , $1 < p < \infty$, такой, что:

для п.в. $x \in Q$ и $\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N$

- i) $(a(x, \xi_1) - a(x, \xi_2))(\xi_1 - \xi_2) \geq \begin{cases} \alpha |\xi_1 - \xi_2|^p, & \text{если } p \geq 2, \\ \alpha |\xi_1 - \xi_2|^2 (|\xi_1| + |\xi_2|)^{p-2}, & \text{если } 1 < p \leq 2, \end{cases}$
- ii) $|a(x, \xi_1) - a(x, \xi_2)| \leq \begin{cases} \alpha^{-1} (1 + |\xi_1| + |\xi_2|)^{p-2} |\xi_1 - \xi_2|, & \text{если } p \geq 2, \\ \alpha^{-1} |\xi_1 - \xi_2|^{p-1}, & \text{если } 1 < p \leq 2, \end{cases}$

для п.в. $x \in Q$ и $\forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}^1$

- j) $(b(x, s_1) - b(x, s_2))(s_1 - s_2) \geq \begin{cases} \beta |s_1 - s_2|^p, & \text{если } p \geq 2, \\ \beta |s_1 - s_2|^2 (|s_1| + |s_2|)^{p-2}, & \text{если } 1 < p \leq 2, \end{cases}$
- jj) $|b(x, s_1) - b(x, s_2)| \leq \begin{cases} \beta^{-1} (1 + |s_1| + |s_2|)^{p-2} |s_1 - s_2|, & \text{если } p \geq 2, \\ \beta^{-1} |s_1 - s_2|^{p-1}, & \text{если } 1 < p \leq 2, \end{cases}$

где α, β – положительные константы;

- 3) $a(x, 0) = b(x, 0) = 0$, $f(x) \in L^{p'}(\Omega)$, $p' = \frac{p}{p-1}$.

Укажем некоторые примеры функции $a(x, \xi)$.

ПРИМЕР 1. Пусть

$$a(x, \xi) = |\xi|^{p-2} \xi, \quad b(x, s) = |s|^{p-2} s.$$

Тогда (1.1) есть уравнение Эйлера соответствующей вариационной задачи.

ПРИМЕР 2. Пусть $a(x, \xi) = a(x)\xi$, где матрица $a(x) = (a_{ij}(x))$, не обязательно симметрическая, такова, что:

а) $a_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \quad \forall i, j = 1, \dots, N$;

б) $\exists \alpha > 0$ такое, что

$$a(x)\xi \cdot \xi = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_j\xi_i \geq \alpha|\xi|^2$$

для п.в. $x \in \mathbb{R}^N$ и $\forall \xi \in \mathbb{R}^1$.

Непосредственно проверяется, что определенная таким образом функция $a(x, \xi)$ удовлетворяет условиям 1)–3) с $p = 2$.

3. Чтобы точно сформулировать задачу (1.1), введем пространство V_ε , равное замыканию множества $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\left(\int_{\Omega \cap Q_\varepsilon} (|\nabla u|^p + |u|^p) dx \right)^{1/p}. \quad (1.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $u^\varepsilon \in V_\varepsilon$ называется *решением задачи* (1.1), если

$$\int_{\Omega \cap Q_\varepsilon} a(\varepsilon^{-1}x, \nabla u^\varepsilon) \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\Omega \cap Q_\varepsilon} b(\varepsilon^{-1}x, u^\varepsilon) \varphi dx = \int_{\Omega \cap Q_\varepsilon} f \varphi dx \quad \forall \varphi \in V_\varepsilon. \quad (1.3)$$

Из теории монотонных эллиптических операторов (см. [1], [2]) следует, что задача (1.1) имеет единственное решение $u^\varepsilon \in V_\varepsilon$. Возьмем в (1.3) $\varphi = u^\varepsilon$. Тогда, применяя свойства ii) и jj) для a и b соответственно, получим такую оценку:

$$\int_{\Omega \cap Q_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^p dx + \int_{\Omega \cap Q_\varepsilon} |u^\varepsilon|^p dx \leq C \int_{\Omega \cap Q_\varepsilon} |f|^{p'} dx, \quad (1.4)$$

где константа C не зависит от ε .

Решение u^ε задачи (1.1) фактически определено только в перфорированной области $\Omega \cap Q_\varepsilon$, и в этом состоит главная трудность при изучении его поведения при $\varepsilon \rightarrow 0$. Представляется естественным предварительно продолжить это решение u^ε на всю область Ω до функции $\tilde{u}^\varepsilon \in W^{1,p}(\Omega)$ и изучать последовательность продолжений $\tilde{u}^\varepsilon(x)$. На идее продолжения базируются многочисленные работы по усреднению в перфорированных областях (см. [8]–[11]). Этот метод требует операторов продолжения со специальными оценками типа

$$\int_{\Omega} |\nabla \tilde{u}^\varepsilon|^p dx \leq c_0 \int_{\Omega} |\nabla u^\varepsilon|^p dx, \quad (1.5)$$

где константа c_0 не зависит от ε . Существование таких операторов возможно только при определенных ограничениях на периодическую область Q (так называемое условие “сильной связности”). Наиболее общая формулировка такова: подходящие операторы продолжения существуют, если Q связна и удовлетворяет условию Липшица (см. [11]). Для нелипшицевых областей такие операторы могут не

существовать, например, если $\mathbb{R}^3 \setminus Q$ – плотная кубическая упаковка шаров в $\mathbb{R}^3$. Заметим, что в этом примере Q связна.

Настоящая работа опирается на более простой подход (см. [6], [7]), совсем не использующий технику продолжения в соболевских пространствах. При этом на периодическую область Q накладывается только условие связности в $\mathbb{R}^N$. Интересно, что возможно и некоторое ослабление условия связности (так называемое условие p -связности). Этот вопрос обсуждается в работе [6].

4. Введем вспомогательную периодическую задачу. По существу она должна иметь вид

$$\begin{aligned} u(y) & \text{ – периодическая функция,} \\ \operatorname{div}(a(y, \xi + \nabla u(y))) &= 0 \quad \text{в } Q, \\ a(y, \xi + \nabla u(y)) \cdot n|_{\partial Q} &= 0, \end{aligned} \tag{1.6}$$

где ξ – фиксированный вектор из $\mathbb{R}^N$ (так что решение зависит от ξ , $u = u(y, \xi)$).

Однако при наших условиях на Q мы можем гарантировать не свойства потенциала $u(x)$, а лишь свойства градиента $\nabla u(x)$. В связи с этим вспомогательную периодическую задачу переформулируем таким образом.

Пусть $C_{\text{per}}^\infty(\square)$ – множество всех гладких периодических функций, $\mathcal{V}_{\text{pot}}^p(Q)$ – замыкание множества $\{\nabla \varphi : \varphi \in C_{\text{per}}^\infty(\square)\}$ по норме

$$\left(\int_Q |\nabla \varphi|^p dx \right)^{1/p}.$$

Элементы пространства $\mathcal{V}_{\text{pot}}^p(Q)$ состоят из потенциальных периодических векторов, заданных в области Q . Теперь задача (1.6) имеет вид

$$v \in \mathcal{V}_{\text{pot}}^p(Q), \quad \operatorname{div}(\chi(y)a(y, \xi + v)) = 0. \tag{1.7}$$

Это означает, что для решения задачи (1.7) должно выполняться тождество

$$\int_{\square \cap Q} a(y, \xi + v) \cdot \psi dx = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{V}_{\text{pot}}^p(Q). \tag{1.8}$$

Согласно теории монотонных операторов вспомогательная периодическая задача (1.7) имеет единственное решение.

С помощью задачи (1.7) определим усредненный оператор

$$a_0(\xi) = \int_{\square \cap Q} a(y, \xi + v(y)) dy. \tag{1.9}$$

Используя определение a_0 и свойства 2) и 3) для $a(y, \xi)$, можно непосредственно показать, что усредненный оператор также монотонный, коэрцитивный и удовлетворяет условиям типа ii). (Доказательство этих фактов приведем в § 4.)

Определим также оператор

$$b_0(s) = \int_{\square \cap Q} b(y, s) dy. \quad (1.10)$$

Очевидно, что оператор $b_0(s)$ тоже удовлетворяет условиям сильной монотонности. Кроме того, в силу условия jj) для b справедливо следующее соотношение

$$|b_0(s_1) - b_0(s_2)| \leq \begin{cases} \beta_0(1 + |s_1| + |s_2|)^{p-2} |s_1 - s_2|, & \text{если } p \geq 2, \\ \beta_0 |s_1 - s_2|^{p-1}, & \text{если } 1 < p < 2. \end{cases} \quad (1.11)$$

Таким образом, мы можем ввести усредненную задачу

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(a_0(\nabla u^0)) + b(u^0) &= \theta f, \\ u^0 &\in W_0^{1,p}(\Omega), \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $\theta = \int_{\square} \chi(x) dx$ – плотность множества Q . Ввиду указанных выше свойств a_0 и b_0 усредненная задача (1.12) имеет единственное решение.

Пусть

$$\chi_\varepsilon(x) = \chi(\varepsilon^{-1}x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in Q_\varepsilon, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R}^N \setminus Q_\varepsilon. \end{cases}$$

Сформулируем основной результат работы.

ТЕОРЕМА 1.1. *Предположим, что периодическое открытое множество Q связно в $\mathbb{R}^N$ и функции $a(y, \xi)$, $b(x, s)$ удовлетворяют условиям 1)–3).*

Тогда имеет место слабая сходимость потоков:

$$\chi_\varepsilon(x) a(\varepsilon^{-1}x, \nabla u^\varepsilon) \rightharpoonup a_0(\nabla u^0) \quad \text{слабо в } L^{p'}(\Omega), \quad (1.13)$$

$$\chi_\varepsilon(x) b(\varepsilon^{-1}x, u^\varepsilon) \rightharpoonup b_0(u^0) \quad \text{слабо в } L^{p'}(\Omega), \quad (1.14)$$

а также справедлива сильная сходимость решений в следующем смысле:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \cap Q_\varepsilon} |u^\varepsilon - u^0|^p dx = 0, \quad (1.15)$$

где u^ε – решение задачи (1.1), а u^0 – решение усредненной задачи (1.12).

Ниже мы покажем, что условия теоремы 1.1 могут быть ослаблены. В частности, можно рассматривать функцию

$$b(x, u) = \lambda u(x), \quad \lambda > 0.$$

Этот случай важен для параболических уравнений.

§ 2. Вспомогательные результаты

В этом параграфе мы изложим некоторые факты, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Напомним хорошо известное *свойство среднего значения* периодических функций.

Пусть $q(x)$ – периодическая функция, $q \in L^\alpha_{\text{per}}(\square)$, $\alpha \geq 1$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$q(\varepsilon^{-1}x) \rightharpoonup \langle q \rangle = \int_{\square} q(x) dx \quad \text{слабо в } L^\alpha(\square).$$

Далее, для доказательства основной теоремы мы используем некоторые обобщения леммы о компенсированной компактности. Дадим сначала формулировку этой леммы.

ЛЕММА 2.1 (см. [9, с. 12]). Пусть $p^\varepsilon, v^\varepsilon$ – векторы из $L^p(\Omega)$,

$$p^\varepsilon \rightharpoonup p^0, \quad v^\varepsilon \rightharpoonup v^0 \quad \text{слабо в } L^p(\Omega).$$

Если дополнительно $\text{rot } v^\varepsilon = 0$ и $\text{div } p^\varepsilon = f^\varepsilon$, где $f^\varepsilon \rightharpoonup f$ слабо в $L^{p'}(\Omega)$, то при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$p^\varepsilon \cdot v^\varepsilon \xrightarrow{*} p^0 \cdot v^0 \quad \text{в } L^1(\Omega),$$

т.е.

$$\int_{\Omega} \varphi p^\varepsilon \cdot v^\varepsilon dx = \int_{\Omega} \varphi p^0 \cdot v^0 dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Приведем некоторое уточнение леммы 2.1. Для этого напомним известный критерий слабой компактности в $L^1(\Omega)$ (см. [13, с. 238]).

Следующие утверждения равносильны:

- а) последовательность $w^\varepsilon \in L^1$ слабо компактна в $L^1(\Omega)$;
- б) последовательность w^ε равномерно интегрируема, т.е. для любого натурального n найдется $\delta = \delta(n)$ такое, что

$$\int_A |w^\varepsilon| dx \leq \frac{1}{n}$$

для $\forall \varepsilon > 0$ и всякого измеримого множества A с $|A| \leq \delta$;

- с) $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{\varepsilon} \int_{|w^\varepsilon| \geq N} |w^\varepsilon| dx = 0$.

Имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 2.2. Пусть $p(x) \in (L^{p'}(\Omega))^N$,

$$p^\varepsilon \rightharpoonup p^0 \quad \text{слабо в } L^{p'}(\Omega),$$

причем $\text{div } p^\varepsilon = f^\varepsilon$, где $f^\varepsilon \rightharpoonup f$ слабо в $L^{p'}(\Omega)$.

Тогда если $v(x) \in L^p_{\text{per}}(\square)$ – потенциальный периодический вектор, $v_\varepsilon = v(\varepsilon^{-1}x)$, то при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$p^\varepsilon \cdot v_\varepsilon \rightharpoonup p^0 \cdot \langle v \rangle \quad \text{слабо в } L^1(\Omega).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $p^\varepsilon \cdot v_\varepsilon \xrightarrow{*} p^0 \cdot \langle v \rangle$ по лемме 2.1, то достаточно проверить, что последовательность $p^\varepsilon \cdot v_\varepsilon$ слабо компактна в $L^1(\Omega)$.

Заметим, что последовательность $|v_\varepsilon|^p$ не только ограничена в $L^1(\Omega)$, но и слабо компактна в $L^1(\Omega)$, так как по свойству среднего значения она слабо сходится в $L^1(\Omega)$ к $\langle |v|^p \rangle$. Поэтому в силу критерия слабой компактности семейство $|v_\varepsilon|^p$ равномерно интегрируемо. Но тогда и семейство $p^\varepsilon \cdot v_\varepsilon$ равномерно интегрируемо, так как

$$\int_A |p^\varepsilon \cdot v_\varepsilon| dx \leq \left(\int_{A \cap Q_\varepsilon} |p^\varepsilon|^{p'} dx \right)^{1/p'} \cdot \left(\int_A |v_\varepsilon|^p dx \right)^{1/p} \leq C\delta,$$

если только $|A|$ достаточно мало.

Итак, последовательность $p^\varepsilon \cdot v_\varepsilon$ слабо компактна в $L^1(\Omega)$, и лемма доказана.

Следующий факт не столь тривиален. Пусть дана последовательность $u^\varepsilon \in V_\varepsilon$ (см. определение (1.2) пространства V_ε) такая, что

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \cap Q_\varepsilon} |u^\varepsilon|^p dx < +\infty, \quad \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \cap Q_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^p dx < +\infty. \quad (2.1)$$

Иначе говоря, последовательности

$$\chi_\varepsilon u^\varepsilon, \quad \chi_\varepsilon \nabla u^\varepsilon \quad \text{ограничены в } L^p(\Omega). \quad (2.2)$$

Без потери общности считаем, что

$$\chi_\varepsilon u^\varepsilon \rightharpoonup \theta u^0 \quad \text{слабо в } L^p(\Omega). \quad (2.3)$$

Справедлива такая лемма.

ЛЕММА 2.3. Пусть последовательность $u^\varepsilon \in V_\varepsilon$ удовлетворяет условиям (2.1), (2.3). Тогда $u^0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ и

$$\int_\Omega |\nabla u^0|^p dx \leq c_0 \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \cap Q_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^p dx,$$

где константа c_0 зависит только от области Q .

Кроме того, если

$$z \in (L_{\text{per}}^{p'}(\square))^N, \quad \text{div } z = 0, \quad z|_{\mathbb{R}^N \setminus Q} = 0,$$

то при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\nabla u^\varepsilon \cdot z(\varepsilon^{-1}x) \rightharpoonup \nabla u^0 \cdot \langle z \rangle \quad \text{слабо в } L^1(\Omega).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы дано в работе [6, с. 398].

§ 3. Доказательство основной теоремы

1. Пусть u^ε – решение задачи (1.1). Оценка (1.4) означает, что для этого решения u^ε выполнены условия (2.1). Без потери общности считаем, что имеет место слабая сходимоссть (2.3).

Далее положим

$$p_\varepsilon(x) = \chi_\varepsilon a(\varepsilon^{-1}x, \nabla u^\varepsilon), \quad h_\varepsilon(x) = \chi_\varepsilon b(\varepsilon^{-1}x, u^\varepsilon). \quad (3.1)$$

Тогда имеем такое уравнение:

$$-\operatorname{div} p_\varepsilon + h_\varepsilon = \chi_\varepsilon f \quad \text{в } \Omega. \quad (3.2)$$

Из условий ii), jj) для $a(y, \xi)$ и $b(x, s)$ следует, что

$$p_\varepsilon(x), \quad h_\varepsilon(x) \quad \text{ограничены в } L^{p'}(\Omega). \quad (3.3)$$

Без ограничения общности считаем, что

$$p_\varepsilon \rightharpoonup p_0, \quad h_\varepsilon \rightharpoonup h_0 \quad \text{слабо в } L^{p'}(\Omega). \quad (3.4)$$

Тогда, переходя к пределу в (3.2), получим

$$-\operatorname{div} p_0 + h_0 = \theta f. \quad (3.5)$$

Очевидно, требуется проверить равенства

$$p_0 = a_0(\nabla u^0), \quad h_0 = b_0(u^0). \quad (3.6)$$

Тогда в силу единственности решения усредненной задачи (1.12) соотношения (1.13) и (1.14) будут доказаны. После этого нам останется доказать сильную сходимость решений в смысле (1.15).

2. Пусть $v(y, \xi)$ – решение вспомогательной периодической задачи (1.7). Тогда по определению пространства $\mathcal{V}_{\text{pot}}^p(Q)$ $\forall \delta > 0$ найдется вектор $N^\delta(y) = N^\delta(y, \xi) \in C_{\text{per}}^\infty(\square)$ такой, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\square \cap Q} |v - \nabla N^\delta|^p dx = 0. \quad (3.7)$$

Очевидно, что при этом

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\square \cap Q} a(y, \xi + \nabla N^\delta) dx = a_0(\xi). \quad (3.8)$$

Кроме того, ввиду (1.9) и (3.8) справедливо следующее соотношение:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| \chi(y) (a(y, \xi + v) - a(y, \xi + \nabla N^\delta)) \right\|_{L^{p'}(\square)} = 0. \quad (3.9)$$

Теперь введем пробную функцию

$$w^\varepsilon(x) = \xi \cdot x + \varepsilon N^\delta(y), \quad y = \varepsilon^{-1}x,$$

и заметим, что $\nabla w^\varepsilon = \xi + \nabla N^\delta$, $w^\varepsilon \rightharpoonup \xi \cdot x$ в $W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Через K обозначим произвольную подобласть области Ω . По монотонности имеем неравенство

$$\int_K \chi_\varepsilon (a(\varepsilon^{-1}x, \nabla u^\varepsilon) - a(\varepsilon^{-1}x, \nabla w^\varepsilon)) \cdot (\nabla u^\varepsilon - \nabla w^\varepsilon) dx \geq 0, \quad (3.10)$$

левая часть которого содержит четыре слагаемых, и в каждом из них требуется перейти к пределу сначала при $\varepsilon \rightarrow 0$, а затем при $\delta \rightarrow 0$.

Для первого слагаемого имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{J}_\varepsilon^1 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K \chi_\varepsilon a(\varepsilon^{-1}x, \nabla w^\varepsilon) \cdot \nabla w^\varepsilon dx \\ &= \int_K \langle \chi(y) a(y, \xi + \nabla N^\delta) \cdot (\xi + \nabla N^\delta) \rangle dx \end{aligned}$$

по свойству среднего значения. Отсюда в силу (3.7), (3.8)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{J}_\varepsilon^1 = \int_K a_0(\xi) \cdot \xi dx.$$

Рассмотрим второе слагаемое из (3.10):

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{J}_\varepsilon^2 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K \chi_\varepsilon a(\varepsilon^{-1}x, \nabla w^\varepsilon) \cdot \nabla u^\varepsilon dx \\ &= \int_K \langle \chi(y) a(y, \xi + \nabla N^\delta) \rangle \cdot \nabla u^0 dx. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались леммой 2.3. Далее, согласно (3.8)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{J}_\varepsilon^2 = \int_K a_0(\xi) \cdot \nabla u^0 dx.$$

Для третьего слагаемого имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{J}_\varepsilon^3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K \chi_\varepsilon a(\varepsilon^{-1}x, \nabla u^\varepsilon) \cdot \nabla w^\varepsilon dx = \int_K p_0 \cdot \xi dx$$

в силу леммы 2.2.

Оставшееся слагаемое

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K \chi_\varepsilon a(\varepsilon^{-1}x, \nabla u^\varepsilon) \cdot \nabla u^\varepsilon dx$$

мы пока не вычисляем (заметим только, что оно не зависит от выбора пробной функции $w^\varepsilon(x)$).

Таким образом, неравенство (3.10) принимает вид

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K p_\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon dx + \int_K a_0(\xi) \cdot \xi dx - \int_K a_0(\xi) \cdot \nabla u^0 dx - \int_K p_0 \cdot \xi dx \geq 0. \quad (3.11)$$

Теперь мы распространим его на кусочно аффинные функции $\omega(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Пусть $\Omega_j \subset \Omega$ есть участки аффинности $\omega(x)$, $\nabla \omega|_{\Omega_j} = \xi^j$. Возьмем в (3.11) $K = \Omega_j$ и $\xi = \xi^j$; получим

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega p_\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon dx + \int_\Omega a_0(\nabla \omega) \cdot \nabla \omega dx - \int_\Omega a_0(\nabla \omega) \cdot \nabla u^0 dx \\ - \int_\Omega p_0 \cdot \nabla \omega dx \geq 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Далее проведем аналогичные рассуждения для слагаемого $h_\varepsilon = \chi_\varepsilon b(\varepsilon^{-1}x, u^\varepsilon)$. Имеем по монотонности

$$\int_K \chi_\varepsilon (b(\varepsilon^{-1}x, u^\varepsilon) - b(\varepsilon^{-1}x, \eta)) \cdot (u^\varepsilon - \eta) dx \geq 0. \quad (3.13)$$

Рассмотрим первое слагаемое из (3.13). По свойству среднего значения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K \chi_\varepsilon b(\varepsilon^{-1}x, \eta) \eta dx = \int_K \langle \chi(y) b(y, \eta) \eta \rangle dx = \int_K b_0(\eta) \eta dx.$$

Для вычисления второго слагаемого, именно

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K \chi_\varepsilon b(\varepsilon^{-1}x, \eta) u^\varepsilon dx,$$

нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 3.1 (см. [6, с. 400]). . Пусть

$$g(x) \in L_{\text{per}}^{p'}(\square), \quad g|_{\mathbb{R}^N \setminus Q} = 0, \quad \langle g \rangle = 0.$$

Если $w^\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega})$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \chi_\varepsilon (|w^\varepsilon|^p + |\nabla w^\varepsilon|^p) dx < +\infty,$$

то

$$g(\varepsilon^{-1}x) w^\varepsilon(x) \rightharpoonup 0 \quad \text{слабо в } L^1(\Omega).$$

Итак, по лемме 3.1 имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K \chi_\varepsilon b(\varepsilon^{-1}x, \eta) u^\varepsilon dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K \chi_\varepsilon (b(\varepsilon^{-1}x, \eta) - \theta^{-1} b_0(\eta)) u^\varepsilon dx \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K \chi_\varepsilon \theta^{-1} b_0(\eta) u^\varepsilon dx = \int_K b_0(\eta) u^0 dx. \end{aligned}$$

Кроме того, согласно (3.4)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K h_\varepsilon \eta \, dx = \int_K h_0 \eta \, dx.$$

Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K h_\varepsilon u^\varepsilon \, dx + \int_K b_0(\eta) \eta \, dx - \int_K b_0(\eta) u^0 \, dx - \int_K h_0 \eta \, dx \geq 0. \quad (3.14)$$

Рассмотрим кусочно постоянную функцию $\lambda(x)$ и возьмем в (3.14) $K = \Omega_j$, $\eta = \eta_j$. Здесь $\Omega_j \subset \Omega : \lambda(x)|_{\Omega_j} = \eta_j$. Тогда получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega h_\varepsilon(x) u^\varepsilon \, dx + \int_\Omega b_0(\lambda(x)) \lambda(x) \, dx \\ - \int_\Omega b_0(\lambda(x)) u^0(x) \, dx - \int_\Omega h_0(x) \lambda(x) \, dx \geq 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

После этого, складывая неравенства (3.12) и (3.15), имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega p_\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon \, dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega h_\varepsilon u^\varepsilon \, dx + \int_\Omega a_0(\nabla \omega) \cdot \nabla \omega \, dx \\ - \int_\Omega a_0(\nabla \omega) \cdot \nabla u^0 \, dx - \int_\Omega p_0 \cdot \nabla \omega \, dx \\ + \int_\Omega b_0(\lambda) \lambda \, dx - \int_\Omega b_0(\lambda) u^0 \, dx - \int_\Omega h_0 \lambda \, dx \geq 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

По основному тождеству (1.3)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega p_\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon \, dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega h_\varepsilon u^\varepsilon \, dx = \theta \int_\Omega f u^0 \, dx. \quad (3.17)$$

Сравнивая это равенство с (3.5), получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega p_\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon \, dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega h_\varepsilon u^\varepsilon \, dx = \int_\Omega p_0 \cdot \nabla u^0 \, dx + \int_\Omega h_0 u^0 \, dx. \quad (3.18)$$

Поэтому неравенство (3.16) окончательно примет вид

$$\int_\Omega (p_0 - a_0(\nabla \omega)) \cdot (\nabla u^0 - \nabla \omega) \, dx + \int_\Omega (h_0 - b_0(\lambda))(u^0 - \lambda) \, dx \geq 0. \quad (3.19)$$

Из оценок типа ii) для a_0 (см. § 4) и (1.11) для b_0 заключаем, что в последнем неравенстве в качестве $\omega(x)$ и $\lambda(x)$ можно взять произвольные функции из $W_0^{1,p}(\Omega)$ и $L^p(\Omega)$ соответственно.

Остается воспользоваться известными рассуждениями Минти (см., например, [1, с. 184]). Именно, возьмем в (3.19) вместо $\omega(x)$ и $\lambda(x)$ функции $u^0 + t \cdot k$ и $u^0 + t \cdot l$ соответственно, где $k(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $l(x) \in L^p(\Omega)$, $t \in \mathbb{R}^1$. В результате получим

$$-t \int_{\Omega} (p_0 - a_0(\nabla u^0 + t \cdot \nabla k)) \cdot \nabla k \, dx - \int_{\Omega} (h_0 - b_0(u^0 + tl)) \cdot l(x) \, dx \geq 0.$$

Переходя к пределу при $t \rightarrow 0$ и сокращая на t , получаем

$$\int_{\Omega} (p_0 - a_0(\nabla u^0)) \cdot \nabla k(x) \, dx + \int_{\Omega} (h_0 - b_0(u^0))l(x) \, dx = 0.$$

Отсюда ввиду произвольности функций $k(x)$, $l(x)$ следует, что

$$\operatorname{div} p_0 = \operatorname{div} a_0(\nabla u^0), \quad h_0 = b_0(u^0).$$

Таким образом, доказано, что предельная функция u^0 есть решение усредненно-го уравнения (1.12). Кроме того, доказана слабая сходимость

$$\chi_{\varepsilon}(x)b(\varepsilon^{-1}x, u^{\varepsilon}) \rightharpoonup b_0(u^0) \quad \text{слабо в } L^{p'}(\Omega).$$

3. Установим теперь сильную сходимость решений в смысле (1.15). Полагая $\omega(x) = u^0(x)$ в (3.12) и $\lambda(x) = u^0(x)$ в (3.15), получим следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} p_{\varepsilon} \cdot \nabla u^{\varepsilon} \, dx &\geq \int_{\Omega} p_0 \cdot \nabla u^0 \, dx, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} h_{\varepsilon} u^{\varepsilon} \, dx &\geq \int_{\Omega} h_0 u^0 \, dx, \end{aligned}$$

что в сравнении с (3.18) означает точные равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} p_{\varepsilon} \cdot \nabla u^{\varepsilon} \, dx = \int_{\Omega} p_0 \cdot \nabla u^0 \, dx, \quad (3.20)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \chi_{\varepsilon} b(\varepsilon^{-1}x, u^{\varepsilon}) u^{\varepsilon} \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \chi_{\varepsilon} b(\varepsilon^{-1}x, u^{\varepsilon}) u^0 \, dx. \quad (3.21)$$

Последнее соотношение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \chi_{\varepsilon} (b(\varepsilon^{-1}x, u^{\varepsilon}) - b(\varepsilon^{-1}x, u^0)) (u^{\varepsilon} - u^0) \, dx \\ + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \chi_{\varepsilon} b(\varepsilon^{-1}x, u^0) (u^{\varepsilon} - u^0) \, dx = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Заметим, что до сих пор мы использовали лишь монотонность $a(y, \xi)$ и $b(x, s)$. Теперь воспользуемся сильной монотонностью функции $b(x, s)$. Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \chi_{\varepsilon} b(\varepsilon^{-1}x, u^0) (u^{\varepsilon} - u^0) \, dx = 0. \quad (3.23)$$

Для этого левую часть (3.23) запишем так:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \chi_{\varepsilon} (b(\varepsilon^{-1}x, u^0) - \theta^{-1}b_0(u^0))(u^{\varepsilon} - u^0) dx \\ & + \int_{\Omega} \chi_{\varepsilon} \theta^{-1}b_0(u^0)(u^{\varepsilon} - u^0) dx = I_1^{\varepsilon} + I_2^{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2^{\varepsilon} = 0$ в силу (3.2). Для изучения слагаемого I_1^{ε} обозначим

$$g(\varepsilon^{-1}x, u^0) = \chi_{\varepsilon} (b(\varepsilon^{-1}x, u^0) - \theta^{-1}b_0(u^0))$$

и возьмем кусочно постоянную функцию u^{δ} такую, что

$$\int_{\Omega} |u^0 - u^{\delta}|^p dx \leq \delta \quad \forall \delta > 0.$$

Тогда в силу условий jj) для $b(x, s)$

$$\int_{\Omega} |g(\varepsilon^{-1}x, u^0) - g(\varepsilon^{-1}x, u^{\delta})|^{p'} dx \leq C\delta \quad \forall \varepsilon > 0,$$

где константа C не зависит от ε . Отсюда по лемме 3.1 получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1^{\varepsilon} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega} g(\varepsilon^{-1}x, u^{\delta})(u^{\varepsilon} - u^0) dx \right. \\ & \left. + \int_{\Omega} (g(\varepsilon^{-1}x, u^0) - g(\varepsilon^{-1}x, u^{\delta}))(u^{\varepsilon} - u^0) dx \right) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (3.23) имеет место.

Поэтому из (3.22) заключаем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \chi_{\varepsilon} (b(\varepsilon^{-1}x, u^{\varepsilon}) - b(\varepsilon^{-1}x, u^0))(u^{\varepsilon} - u^0) dx = 0,$$

и в силу условия j) сильной монотонности $b(x, s)$ отсюда следует утверждение о сильной сходимости решений в смысле (1.15).

4. Теперь докажем свойство сходимости потоков (1.13). Для этого воспользуемся тем, что сильная сходимость решений (1.15) уже доказана, и перепишем исходную задачу (1.1) так:

$$-\operatorname{div}(\chi_{\varepsilon} a(\varepsilon^{-1}x, \nabla u^{\varepsilon})) = \chi_{\varepsilon} g_{\varepsilon}, \quad (3.24)$$

где $g_{\varepsilon} = f - b(\varepsilon^{-1}x, u^{\varepsilon})$ и выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \chi_{\varepsilon} |g_{\varepsilon} - g_0|^{p'} dx &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \chi_{\varepsilon} (|\nabla u^{\varepsilon}|^p + |u^{\varepsilon}|^p) dx &< +\infty, \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \chi_{\varepsilon} |u^{\varepsilon} - u^0|^p dx = 0, \quad (3.26)$$

$u^0(x)$ – решение усредненной задачи

$$-\operatorname{div}(a_0(\nabla u^0)) = g_0.$$

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. По монотонности имеем

$$\int_{\Omega} \varphi [a(\varepsilon^{-1}x, \nabla u^\varepsilon) - a(\varepsilon^{-1}x, \nabla w^\varepsilon)] \cdot [\nabla u^\varepsilon - \nabla w^\varepsilon] dx \geq 0, \quad (3.27)$$

где $w^\varepsilon(x)$ – пробная функция, определенная в п. 2.

Это выражение содержит четыре слагаемых. Предел трех из них вычисляется, как и ранее. Теперь мы имеем возможность вычислить предел слагаемого

$$\mathcal{J}_\varepsilon = \int_{\Omega} \chi_\varepsilon \varphi a(\varepsilon^{-1}x, \nabla u^\varepsilon) \cdot \nabla u^\varepsilon dx.$$

Действительно, из уравнения (3.24) имеем

$$\int_{\Omega} \varphi \chi_\varepsilon a(\varepsilon^{-1}x, \nabla u^\varepsilon) \cdot \nabla u^\varepsilon dx + \int_{\Omega} \chi_\varepsilon a(\varepsilon^{-1}x, \nabla u^\varepsilon) u^\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} \chi_\varepsilon g_\varepsilon u^\varepsilon \varphi dx.$$

В силу соотношений сильной сходимости (3.25), (3.26)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{J}_\varepsilon = \int_{\Omega} g_0 u^0 \varphi dx - \int_{\Omega} p_0 u^0 \cdot \nabla \varphi dx.$$

С другой стороны, полагая в интегральном тождестве

$$\int_{\Omega} \chi_\varepsilon a(\varepsilon^{-1}x, \nabla u^\varepsilon) \cdot \nabla \psi = \int_{\Omega} \chi_\varepsilon g_\varepsilon \psi dx$$

$\psi = \varphi u^0$ и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\int_{\Omega} \varphi p_0 \cdot \nabla u^0 dx + \int_{\Omega} p_0 u^0 \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} g_0 u^0 \varphi dx.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{J}_\varepsilon = \int_{\Omega} \varphi p_0 \cdot \nabla u^0 dx.$$

Это позволяет перейти к пределу в неравенстве (3.27) и получить

$$\int_{\Omega} \varphi (p_0 - a_0(\xi)) \cdot (\nabla u^0 - \xi) dx \geq 0.$$

Отсюда ввиду произвольности функции $\varphi \geq 0$

$$(p_0 - a_0(\xi)) \cdot (\nabla u^0 - \xi) \geq 0 \quad \text{для п.в. } x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N,$$

и лемма Минти дает искомое равенство $p_0 = a_0(\nabla u^0)$. Тем самым получена слабая сходимость потоков (1.13), и теорема 1.1 доказана.

5. Как отмечалось в § 1, условия теоремы 1.1 могут быть ослаблены. В частности, для применения к параболическим уравнениям важен случай, когда

$$b(x, u) = \lambda u(x), \quad \text{где } \lambda > 0. \quad (3.28)$$

До сих пор свойства монотонности и свойства роста функций $a(\cdot, \xi)$, $b(\cdot, s)$ характеризовались одним показателем p . Теперь, сохраняя показатель p для $a(y, \xi)$, будем характеризовать свойства функции $b(x, s)$ показателем $q > 1$, никак не связанным с p , именно для п.в. $x \in Q$ и $\forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}^1 \exists \beta > 0$:

$$\begin{aligned} & (b(x, s_1) - b(x, s_2)) \cdot (s_1 - s_2) \\ & \geq \begin{cases} \beta |s_1 - s_2|^q, & \text{если } q \geq 2, \\ \beta |s_1 - s_2|^2 (|s_1| + |s_2|)^{q-2}, & \text{если } 1 < q \leq 2, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$|b(x, s_1) - b(x, s_2)| \leq \begin{cases} \beta^{-1} (1 + |s_1| + |s_2|)^{q-2} |s_1 - s_2|, & \text{если } q \geq 2, \\ \beta^{-1} |s_1 - s_2|^{q-1}, & \text{если } 1 < q \leq 2. \end{cases} \quad (3.30)$$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть в условиях теоремы 1.1 функция $b(x, s)$ удовлетворяет условиям (3.29), (3.30). Тогда имеет место слабая сходимость потоков

$$\chi_\varepsilon(x) a(\varepsilon^{-1} x, \nabla u^\varepsilon) \rightharpoonup a_0(\nabla u^0) \quad \text{слабо в } L^{p'}(\Omega), \quad (3.31)$$

$$\chi_\varepsilon(x) b(\varepsilon^{-1} x, u^\varepsilon) \rightharpoonup b_0(u^0) \quad \text{слабо в } L^{q'}(\Omega), \quad (3.32)$$

а также справедлива сильная сходимость решений в смысле

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \cap Q_\varepsilon} |u^\varepsilon - u^0|^q dx = 0, \quad (3.33)$$

где u^ε – решение задачи (1.1), а u^0 – решение усредненной задачи (1.12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что в целом доказательство теоремы 1.1 остается прежним. Изменения касаются только леммы 2.3 и леммы 3.1.

В лемме 2.3 условия (2.1), (2.3) могут быть ослаблены. В частности, справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 3.3. Предположим, что последовательность $u^\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ такова, что:

1) $\chi_\varepsilon u^\varepsilon$ слабо компактна в $L^1(\Omega)$;

2) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \chi_\varepsilon |\nabla u^\varepsilon|^p dx < +\infty$.

Тогда $u^0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, и если

$$z \in (L_{\text{per}}^{p'}(\square))^N, \quad \operatorname{div} z = 0, \quad z|_{\mathbb{R}^N \setminus Q} = 0,$$

то при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\nabla u^\varepsilon \cdot z(\varepsilon^{-1} x) \rightharpoonup \nabla u^0 \langle z \rangle \quad \text{слабо в } L^1(\Omega). \quad (3.34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем срезки

$$u^{\varepsilon, N} = \begin{cases} u^\varepsilon, & \text{если } |u^\varepsilon| \leq N, \\ \pm N, & \text{если } |u^\varepsilon| \geq N, \end{cases} \quad (3.35)$$

и положим

$$K^{\varepsilon, N} = \{x \in \Omega \cap Q_\varepsilon : |u^\varepsilon| \geq N\}.$$

Тогда в силу критерия слабой компактности в $L^1(\Omega)$ имеем

$$|K^{\varepsilon, N}| \leq \sigma(N), \quad (3.36)$$

$$\int_\Omega \chi_\varepsilon |u^{\varepsilon, N} - u^\varepsilon| dx \leq \sigma(N), \quad (3.37)$$

где $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sigma(N) = 0$. Без потери общности считаем, что при фиксированном N имеет место слабая сходимость

$$\chi_\varepsilon u^{\varepsilon, N} \rightharpoonup \theta u^{0, N} \quad \text{слабо в } L^2(\Omega) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0$$

(в данном случае $u^{0, N}$ – обозначение для слабого предела, а не срезки u^0). Тогда из (3.37) получаем

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_\Omega |u^{0, N} - u^0| dx \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sigma(N) = 0. \quad (3.38)$$

По лемме 2.3

$$u^{0, N} \in W_0^{1, p}(\Omega), \quad \int_\Omega |\nabla u^{0, N}|^p dx \leq c_0,$$

где c_0 не зависит от N . Поэтому последовательность $u^{0, N}$ ограничена в $W_0^{1, p}(\Omega)$ при $N \rightarrow +\infty$. Согласно (3.38)

$$u^{0, N} \rightharpoonup u^0 \quad \text{слабо в } W_0^{1, p}(\Omega) \quad (3.39)$$

и, следовательно, $u^0 \in W_0^{1, p}(\Omega)$.

Теперь докажем свойство (3.34). Легко проверить (аналогично доказательству леммы 2.2), что семейство $\nabla u^\varepsilon \cdot z_\varepsilon$, где $z_\varepsilon = z(\varepsilon^{-1}x)$, слабо компактно в $L^1(\Omega)$. Поэтому для доказательства (3.34) достаточно доказать соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \varphi \nabla u^\varepsilon \cdot z_\varepsilon dx = \int_\Omega \varphi \nabla u^0 \cdot \langle z \rangle dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Имеем

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}^\varepsilon - \mathcal{J}^{\varepsilon, N}| &\stackrel{\text{def}}{=} \left| \int_{\Omega \cap Q_\varepsilon} \varphi \nabla u^\varepsilon \cdot z_\varepsilon dx - \int_{\Omega \cap Q_\varepsilon} \varphi \nabla u^{\varepsilon, N} \cdot z_\varepsilon dx \right| \\ &= \left| \int_{K^{\varepsilon, N}} \varphi \nabla u^\varepsilon \cdot z_\varepsilon dx \right| \leq \sup |\varphi| \left(\int_{\Omega \cap Q_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^p dx \right)^{1/p} \\ &\quad \times \left(\int_{K^{\varepsilon, N}} |z_\varepsilon|^{p'} dx \right)^{1/p'} \leq C \left(\int_{K^{\varepsilon, N}} |z_\varepsilon|^{p'} dx \right)^{1/p'} \leq \gamma(N). \end{aligned}$$

Так как семейство функций $|z_\varepsilon|^{p'}$ равностепенно интегрируемо, то $\lim_{N \rightarrow +\infty} \gamma(N) = 0$. При фиксированном $N > 0$ функция $u^{\varepsilon, N}$, очевидно, удовлетворяет условиям леммы 2.3. Поэтому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{J}^{\varepsilon, N} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \cap Q_\varepsilon} \varphi \nabla u^{\varepsilon, N} \cdot z_\varepsilon dx = \int_{\Omega} \varphi \nabla u^{0, N} \cdot \langle z \rangle dx \quad \forall \varphi \in L^\infty(\Omega).$$

Остается в последнем равенстве перейти к пределу при $N \rightarrow +\infty$, используя сходимость (3.39). Лемма доказана.

Теперь дадим подходящее обобщение леммы 3.1.

ЛЕММА 3.4. Пусть $d(x) \in L_{\text{per}}^{q'}(\square)$, $q' = \frac{q}{q-1}$, $d|_{\mathbb{R}^N \setminus Q} = 0$, $\langle d \rangle = 0$. Если $w^\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \chi_\varepsilon (|w^\varepsilon|^q + |\nabla w^\varepsilon|) dx < +\infty,$$

то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \chi_\varepsilon d(\varepsilon^{-1}x) w^\varepsilon(x) dx = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [6, с. 405] показано, что справедливо следующее представление:

$$\forall \delta > 0 \quad d(x) = d_0(x) + \frac{\partial}{\partial x_i} d_i(x) \quad \text{в } \mathbb{R}^N, \quad (3.40)$$

где

$$d_i \in C_{\text{per}}^\infty(\square), \quad d_i|_{\square \setminus Q} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad \|d_0\|_{L^{q'}(\Omega)}^{q'} \leq \delta.$$

Поэтому, используя (3.40), получим

$$\int_{\Omega} \chi_\varepsilon d(\varepsilon^{-1}x) w^\varepsilon(x) dx = \int_{\Omega \cap Q_\varepsilon} d_0(\varepsilon^{-1}x) w^\varepsilon(x) dx - \varepsilon \int_{\Omega \cap Q_\varepsilon} d_i(\varepsilon^{-1}x) \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_i} dx. \quad (3.41)$$

Рассмотрим первое слагаемое в (3.41). Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega} d_0(\varepsilon^{-1}x) w^\varepsilon(x) dx \right| &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega \cap Q_\varepsilon} |d_0(\varepsilon^{-1}x)|^{q'} dx \right)^{1/q'} \\ &\times \left(\int_{\Omega} \chi_\varepsilon |w^\varepsilon|^q dx \right)^{1/q} \leq C |\Omega| \left(\int_{\square \cap Q} |d_0|^{q'} dx \right)^{1/q'} \leq C |\Omega| \delta \end{aligned}$$

по свойству среднего значения.

Аналогично устанавливается, что второе слагаемое в (3.41) стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Лемма 3.4 доказана.

В остальном доказательство теоремы 1.1 остается без изменений.

§ 4. Свойства усредненного оператора

Докажем некоторые свойства усредненного оператора $a_0(\xi)$, указанные в § 1.

1. Во-первых, очевидно, что ввиду сильной монотонности $a(y, \xi)$ из определения a_0 (см. (1.9)) и свойств i) следует, что усредненный оператор будет строго монотонным.

Во-вторых, покажем, что справедлива оценка

$$a_0(\xi) \cdot \xi \geq \alpha_0 |\xi|^p, \quad \alpha_0 > 0, \quad (4.1)$$

обеспечивающая коэрцитивность a_0 .

Действительно, из (1.9), учитывая условие 3) и свойства i) для $a(y, \xi)$, имеем

$$a_0(\xi) \cdot \xi = \int_{\square} \chi(y) (a(y, \xi + v) - a(y, 0)) \cdot \xi \, dy \geq \alpha \int_{\square} \chi |\xi + v|^p \, dy. \quad (4.2)$$

Но для вариационной задачи

$$f_0(\xi) = \min \int_{\square} \chi(y) |\xi + v(y)|^p \, dy$$

известно, что f_0 коэрцитивен (см. [6]), т.е.

$$f_0(\xi) \geq c_0 |\xi|^p, \quad c_0 > 0 \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}^N),$$

поэтому отсюда и из (4.2) сразу получаем неравенство (4.1).

Таким образом, коэрцитивность усредненного оператора a_0 доказана.

2. Получим теперь оценки типа ii) для усредненного оператора. Предварительно докажем следующую лемму.

ЛЕММА 4.1. *Имеем*

$$|a_0(\xi)| \leq c(1 + |\xi|)^{p-1}, \quad (4.3)$$

где $c = c(\alpha, p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v(y, \xi)$ – решение вспомогательной периодической задачи (1.7) для фиксированного ξ . Тогда в силу ii) имеем

$$\left| a_0(\xi) - \int_{\square} a(y, 0) \, dy \right| \leq \alpha^{-1} \int_{\square} (1 + |z|)^{p-1} \, dy, \quad (4.4)$$

где мы положили $z(y, \xi) = \xi + v(y, \xi)$.

С другой стороны, учитывая сильную монотонность i) и условие 3), получим

$$\alpha \int_{\square} |z|^p \, dy \leq \int_{\square} (a(y, z) - a(y, 0)) \cdot z \, dy = a_0(\xi) \cdot \xi.$$

Отсюда и из (4.4) следует, что

$$\int_{\square} |z|^p \, dy \leq c(1 + |\xi|)^p, \quad c = c(\alpha, p). \quad (4.5)$$

Снова возвращаясь к (4.4), заключаем, что неравенство (4.3) имеет место. Лемма 4.1 доказана.

Пусть $v_1 = v(y, \xi_1)$ и $v_2 = v(y, \xi_2)$ – решения вспомогательной периодической задачи (1.7) для ξ_1 и ξ_2 соответственно. Положим также $z_1 = \xi_1 + v_1$, $z_2 = \xi_2 + v_2$. Тогда справедлива следующая

ЛЕММА 4.2. *Имеем $\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N$*

$$|a_0(\xi_1) - a_0(\xi_2)| \leq \begin{cases} c(1 + |\xi_1| + |\xi_2|)^{\frac{p(p-2)}{p-1}} |\xi_1 - \xi_2|^{\frac{1}{p-1}}, & \text{если } p \geq 2, \\ c(1 + |\xi_1| + |\xi_2|)^{\frac{(2-p)(p-1)}{3-p}} |\xi_1 - \xi_2|^{\frac{p-2}{3-p}}, & \text{если } 1 < p \leq 2, \end{cases} \quad (4.6)$$

где $c = c(\alpha, p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $p \geq 2$. Используя сильную монотонность i) функции $a(y, \xi)$ и применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} \alpha \int_{\square} |z_1 - z_2|^p dy &\leq \int_{\square} (a(y, z_1) - a(y, z_2)) \cdot (z_1 - z_2) dy \\ &\leq |\xi_1 - \xi_2|^{\frac{p}{p-1}} (1 + |\xi_1| + |\xi_2|)^{\frac{p(p-2)}{p-1}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

С другой стороны, согласно ii) и (4.5) имеем

$$\begin{aligned} |a_0(\xi_1) - a_0(\xi_2)| &= \int_{\square} |a(y, z_1) - a(y, z_2)| dy \\ &\leq c(1 + |\xi_1| + |\xi_2|)^{p-2} \left(\int_{\square} |z_1 - z_2|^p dy \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Отсюда и из оценки (4.7) получаем первое неравенство (4.6).

Рассуждая аналогично в случае $1 < p \leq 2$ и учитывая соответствующее условие i), имеем

$$\alpha \int_{\square} |z_1 - z_2|^2 (|z_1| + |z_2|)^{p-2} dy \leq \int_{\square} (a(y, z_1) - a(y, z_2)) \cdot (z_1 - z_2) dy. \quad (4.8)$$

Далее применим к левой части (4.8) обратное неравенство Гёльдера и воспользуемся оценкой

$$|a_0(\xi_1) - a_0(\xi_2)| \leq \alpha^{-1} \int_{\square} |z_1 - z_2|^{p-1} dy, \quad (4.9)$$

которая следует из соответствующего условия ii) для $a(y, \xi)$. Тогда из (4.8), (4.9), принимая во внимание оценку (4.5), заключаем, что и второе неравенство (4.6) имеет место. Лемма 4.2 доказана.

Список литературы

1. Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
2. Дубинский Ю. А. Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка // УМН. 1968. Т. 23. № 1. С. 45–90.
3. Панков А. А. Об усреднении и G -сходимости нелинейных эллиптических операторов // ДАН СССР. 1984. Т. 278. № 1. С. 37–41.
4. Fusco N., Moskariello G. On the homogenization of quasilinear divergence structure operators // Ann. Mat. Pura Appl. 1987. V. 147. P. 1–13.
5. Tartar L. Cours Peccot au College de France. Paris, 1977.
6. Zhikov V. V. On the homogenization of nonlinear variational problems in perforated domains // Russian J. of mathem. physics. 1994. V. 2. № 3. P. 393–408.
7. Жиков В. В. Об усреднении в перфорированных случайных областях общего вида // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 1. С. 41–58.
8. Жиков В. В. Усреднение функционалов вариационного исчисления и теории упругости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. № 4. С. 675–711.
9. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Наука, 1993.
10. Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во МГУ, 1990.
11. Acerbi E., Chiado Piat V., Dal Maso G., Percivale D. An extension theorem for connected sets and homogenization in general periodic domains // Nonlinear Anal. 1992. V. 18. № 5. P. 481–496.
12. Chiado Piat V., Defranceschi A. Homogenization of monotone operators // Nonlinear Anal. 1990. V. 14. P. 717–732.
13. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.

Поступило в редакцию
10.VII.1995