Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Вик. С. Куликов, Модули Александра неприводимых C -групп, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 2, 105–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/im1053>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 15:12:03

УДК 514.154+512.772–512.774+512.54.03

Вик. С. Куликов

Модули Александера неприводимых C -групп

Дано полное описание модулей Александера заузленных n -мерных многообразий в сфере S^{n+2} при $n \geq 2$ и модулей Александера неприводимых кривых Гурвица. Это описание применено для исследования свойств групп первых гомологий циклических накрытий сфер S^{n+2} и комплексной проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$, разветвленных соответственно в заузленных n -мерных многообразиях и в неприводимых гурвицевских (в частности, алгебраических) кривых.

Библиография: 21 наименование.

Введение

Класс групп $\mathcal{C}$, состоящий из C -групп, и его подкласс $\mathcal{H}$, состоящий из гурвицевских C -групп (см. определения ниже) играют очень важную роль в геометрии подмногообразий коразмерности два. Например, хорошо известно, что группы узлов и зацеплений (заданных копредставлениями Виртингера) являются C -группами и каждая C -группа G может быть реализована как группа *зацепленного* n -мерного многообразия при $n \geq 2$, т.е. как фундаментальная группа $\pi_1(S^{n+2} \setminus V)$ дополнения к замкнутому ориентированному n -мерному многообразию V без границы в $(n+2)$ -мерной сфере S^{n+2} (см. [1]), верно также и обратное утверждение. Заметим, что C -группа G изоморфна группе $\pi_1(S^{n+2} \setminus \bigsqcup S^n)$ при $n \geq 3$ для некоторого зацепления n -мерных сфер $\bigsqcup S^n$ тогда и только тогда, когда $H_2G = 0$ (см. [2]). Некоторые другие результаты, относящиеся к описанию групп $\pi_1(S^{n+2} \setminus \bigsqcup S^n)$, содержатся в [3] и [4].

Пусть $H \subset \mathbb{CP}^2$ – либо алгебраическая, или, более общо, гурвицевская¹ кривая, либо псевдоголоморфная относительно некоторой ω -ручной почти комплексной структуры на $\mathbb{CP}^2$, где ω – симплектическая форма Фубини–Штуди на $\mathbb{CP}^2$, $\deg H = m$. Копредставление Зариского–ван Кампена группы $\pi_1 = \pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus (H \cup L))$ определяет на π_1 структуру гурвицевской C -группы степени m , где L – “бесконечно удаленная” прямая (т.е. L является слоем линейной проекции $\text{pr}: \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^1$, находящимся в общем положении по отношению к кривой H ; если H – псевдоголоморфная кривая, то проекция pr задана пучком псевдоголоморфных прямых). В [7] было доказано, что каждая гурвицевская C -группа G степени m может быть реализована как фундаментальная группа

¹Определение гурвицевских кривых можно найти в [5], либо в [6].

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ (№ 05-01-00455), НШ-489.2003.1, РФФИ 05-02-89000-НВО-а (NWO-RFBR 047.011.2004.026), РФФИ 06-01-72017-MNTI-а, RUM1-2692-MO-05 и INTAS-05-7805.

$\pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus (H \cup L))$ для некоторой гурвицевской (а также для некоторой псевдоголоморфной) кривой H , $\deg H = 2^n m$, имеющей особые точки вида $w^m - z^m = 0$, где число n зависит от гурвицевского C -копредставления группы G . Таким образом, класс групп $\mathcal{H}$ совпадает с классом $\{\pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus (H \cup L))\}$ фундаментальных групп дополнений к “аффинным” гурвицевским (соответственно, “аффинным” псевдоголоморфным) кривым, и он содержит подкласс фундаментальных групп дополнений к плоским аффинным алгебраическим кривым.

Согласно определению C -группа – это группа вместе с конечным копредставлением

$$G_W = \langle x_1, \dots, x_m \mid x_i = w_{i,j,k}^{-1} x_j w_{i,j,k}, w_{i,j,k} \in W \rangle, \quad (1)$$

где $W = \{w_{i,j,k} \in \mathbb{F}_m \mid 1 \leq i, j \leq m, 1 \leq k \leq h(i, j)\}$ – набор, состоящий из элементов свободной группы $\mathbb{F}_m$, свободно порожденной элементами $x_1, \dots, x_m$ (возможно, что $w_{i_1, j_1, k_1} = w_{i_2, j_2, k_2}$ для $(i_1, j_1, k_1) \neq (i_2, j_2, k_2)$), а $h: \{1, \dots, m\}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ – некоторая функция. Такое копредставление называется C -копредставлением (буква C означает, что все соотношения имеют вид сопряжений). Пусть $\varphi_W: \mathbb{F}_m \rightarrow G_W$ – канонический эпиморфизм. Элементы $\varphi_W(x_i) \in G$, $1 \leq i \leq m$, и элементы, сопряженные им, называются C -порождающими группы G . Пусть $f: G_1 \rightarrow G_2$ – гомоморфизм C -групп. Он называется C -гомоморфизмом, если образы C -порождающих группы G_1 при гомоморфизме f являются C -порождающими C -группы G_2 . Будем рассматривать C -группы с точностью до C -изоморфизмов. Некоторые свойства C -групп были исследованы в [7]–[10].

C -копредставление (1) называется гурвицевским C -копредставлением степени m , если для каждого $i = 1, \dots, m$ слово $w_{i,i,1}$ совпадает с произведением $x_1 \dots x_m$, и C -группа G называется гурвицевской C -группой (степени m), если для некоторого $m \in \mathbb{N}$ она обладает гурвицевским C -копредставлением степени m . Другими словами, C -группа G является гурвицевской C -группой степени m , если существуют такие C -порождающие $x_1, \dots, x_m$, что они порождают группу G и произведение $x_1 \dots x_m$ принадлежит центру группы G . Отметим, что степень гурвицевской C -группы G определена не канонически и она зависит от гурвицевского C -копредставления группы G . Обозначим через $\mathcal{H}$ класс всех гурвицевских C -групп.

Легко показать, что для любой C -группы G группа G/G' является конечно порожденной свободной абелевой группой, где $G' = [G, G]$ – коммутант группы G . C -группа G называется неприводимой, если $G/G' \simeq \mathbb{Z}$, и будем говорить, что G составлена из k неприводимых компонент, если $G/G' \simeq \mathbb{Z}^k$. Если гурвицевская C -группа G реализована как фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus (H \cup L))$ дополнения к некоторой гурвицевской кривой H , то число неприводимых компонент группы G совпадает с числом неприводимых компонент кривой H . Аналогично, если C -группа G , составленная из k неприводимых компонент, реализована как группа зацепленного n -мерного многообразия V , т. е. $G = \pi_1(S^{n+2} \setminus V)$, то число связных компонент многообразия V равно k .

Свободная группа $\mathbb{F}_n$ с фиксированными свободными порождающими является C -группой, и для любой C -группы G определен канонический C -эпиморфизм $\nu: G \rightarrow \mathbb{F}_1$, отображающий C -порождающие группы G в C -порождающий элемент группы $\mathbb{F}_1$. Обозначим через N его ядро. Отметим, что если G является неприводимой C -группой, то N совпадает с G' . Далее мы будем предполагать, что рассматриваемые ниже C -группы являются неприводимыми.

Пусть G – неприводимая C -группа. C -эпиморфизм ν индуцирует следующую точную последовательность групп:

$$1 \rightarrow G'/G'' \rightarrow G/G'' \xrightarrow{\nu_*} \mathbb{F}_1 \rightarrow 1,$$

где $G'' = [G', G']$. C -порождающий элемент группы $\mathbb{F}_1$ действует на G'/G'' сопряжениями: $\tilde{x}^{-1}g\tilde{x}$, где $g \in G'$ и $\tilde{x}$ – это один из C -порождающих элементов группы G . Обозначим это действие через t . Группа $A_0(G) = G'/G''$ является абелевой группой, и действие t определяет на $A_0(G)$ структуру Λ -модуля, где $\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ – кольцо многочленов Лорана с целыми коэффициентами. Λ -модуль $A_0(G)$ называется *модулем Александра C -группы G* . Действие t индуцирует действие $h_{\mathbb{C}}$ на $A_{\mathbb{C}} = A_0(G) \otimes \mathbb{C}$, и легко видеть, что его характеристический многочлен $\det(h_{\mathbb{C}} - t \text{Id})$ принадлежит $\mathbb{Q}[t]$. Многочлен $\Delta(t) = a \det(h_{\mathbb{C}} - t \text{Id})$, где $a \in \mathbb{N}$ – наименьшее натуральное число такое, что $a \det(h_{\mathbb{C}} - t \text{Id}) \in \mathbb{Z}[t]$, называется *многочленом Александра C -группы G* . Если H – либо алгебраическая, либо гурвицевская, либо псевдоголоморфная неприводимая кривая в $\mathbb{CP}^2$ (соответственно, $V \subset S^{n+2}$ – *заузленное* (т. е. связное гладкое ориентированное без границы) n -мерное многообразие, $n \geq 1$) и $G = \pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus (H \cup L))$ (соответственно, $G = \pi_1(S^{n+2} \setminus V)$), то модуль Александра $A_0(G)$ группы G и ее многочлен Александра $\Delta(t)$ называются *модулем Александра* и *многочленом Александра* кривой H (соответственно, заузленного многообразия V). Отметим, что модуль Александра $A_0(H)$ и многочлен Александра $\Delta(t)$ кривой H не зависят от выбора общей (псевдоголоморфной) прямой L . Некоторые результаты, относящиеся к модулям Александра заузленных сфер, можно найти в [11], [12].

В [6] и [13] были исследованы свойства многочленов Александра гурвицевских кривых, в частности было доказано, что если H – неприводимая гурвицевская кривая степени m , то ее многочлен Александра $\Delta(t)$ имеет следующие свойства:

- (i) $\Delta(t) \in \mathbb{Z}[t]$ и $\deg \Delta(t)$ является четным числом,
- (ii) $\Delta(0) = \Delta(1) = 1$,
- (iii) $\Delta(t)$ является делителем многочлена $(t^m - 1)^{m-2}$,

и, более того, многочлен $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$ является многочленом Александра некоторой неприводимой гурвицевской кривой тогда и только тогда, когда корни многочлена $P(t)$ являются корнями из единицы и $P(1) = 1$.

Пусть $G = \pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus (H \cup L))$ – фундаментальная группа дополнения к неприводимой “аффинной” гурвицевской кривой степени m (соответственно, $G = \pi_1(S^{n+2} \setminus V)$ – группа заузленного n -мерного многообразия, $n \geq 1$). Гомоморфизм $\nu: G \rightarrow \mathbb{F}_1$ определяет бесконечное циклическое накрытие $f_{\infty}: X_{\infty} \rightarrow \mathbb{CP}^2 \setminus (H \cup L)$ (соответственно, $f_{\infty}: X_{\infty} \rightarrow S^{n+2} \setminus V$). Имеем $H_1(X_{\infty}, \mathbb{Z}) = G'/G''$,

и действие t на $H_1(X_\infty, \mathbb{Z})$ совпадает с действием порождающего элемента h группы накрывающих преобразований накрытия f_∞ .

Для любого $k \in \mathbb{N}$ обозначим через $\text{mod}_k: \mathbb{F}_1 \rightarrow \mu_k = \mathbb{F}_1 / \langle t^k \rangle$ естественный эпиморфизм в циклическую группу μ_k порядка k . Накрытие f_∞ пропускается через циклическое накрытие $f'_k: X'_k \rightarrow \mathbb{CP}^2 \setminus (H \cup L)$ (соответственно, $f'_k: X'_k \rightarrow S^{n+2} \setminus V$), связанное с эпиморфизмом $\text{mod}_k \circ \nu$, $f_\infty = f'_k \circ g_k$. Так как гурвицевская кривая H имеет только аналитические особенности, то накрытие f'_k может быть продолжено (см. [6]) до отображения $\tilde{f}_k: \tilde{X}_k \rightarrow X$, разветвленного вдоль H и, возможно, вдоль L , где $\tilde{X}_k$ – это замкнутое четырехмерное многообразие, локально изоморфное над каждой особой точкой кривой H комплексно-аналитической особенности, заданной уравнением $w^k = F(u, v)$, где $F(u, v) = 0$ – локальное уравнение кривой H в ее особой точке. Кроме того, над окрестностью каждой точки пересечения кривой H и прямой L многообразие $\tilde{X}_k$ локально изоморфно особенности, заданной уравнением $w^k = vu^d$, где d – наименьшее неотрицательное целое число, для которого число $m + d$ делится на k . Многообразие $\tilde{X}_k$, если $\tilde{f}_k^{-1}(L) \subset \text{Sing } \tilde{X}_k$, может быть нормализовано (аналогично алгебраическому случаю), и в результате мы получим накрытие $\tilde{f}_{k, \text{norm}}: \tilde{X}_{k, \text{norm}} \rightarrow \mathbb{CP}^2$, в котором $\tilde{X}_{k, \text{norm}}$ является особым аналитическим многообразием в окрестности его конечного множества особых точек. Отображение $\tilde{f}_{k, \text{norm}}$ разветвлено вдоль кривой H и, возможно, вдоль “бесконечно удаленной” прямой L (если k не является делителем $\deg H$, то $\tilde{f}_{k, \text{norm}}$ разветвлено вдоль L). Мы можем разрешить особые точки многообразия $\tilde{X}_{k, \text{norm}}$ и получить гладкое многообразие $\bar{X}_k$, $\dim_{\mathbb{R}} \bar{X}_k = 4$. Пусть $\sigma: \bar{X}_k \rightarrow \tilde{X}_{k, \text{norm}}$ – разрешение особенностей, $E = \sigma^{-1}(\text{Sing } \tilde{X}_{k, \text{norm}})$ – прообраз множества особых точек многообразия $\tilde{X}_{k, \text{norm}}$ и $\bar{f}_k = \tilde{f}_{k, \text{norm}} \circ \sigma$. Действие h индуцирует действие $\bar{h}_k$ на $\bar{X}_k$ и действие $\bar{h}_{k*}$ на $H_1(\bar{X}_k, \mathbb{Z})$.

Аналогично, накрытие $f'_k: X'_k \rightarrow S^{n+2} \setminus V$ может быть продолжено до гладкого отображения $f_k: X_k \rightarrow S^{n+2}$, разветвленного вдоль V , где X_k – некоторое гладкое компактное $(n+2)$ -мерное многообразие, и действие h индуцирует действие h_k на X_k и действие h_{k*} на $H_1(X_k, \mathbb{Z})$. Действие h_{k*} определяет на $H_1(X_k, \mathbb{Z})$ структуру Λ -модуля.

В [6] было доказано, что для любой гурвицевской кривой H накрывающее пространство $\bar{X}_k$ может быть вложено как симплектическое подмногообразие в комплексное проективное рациональное трехмерное многообразие, симплектическая структура на котором задана целочисленной кэлеровой формой, а также было доказано, что первое число Бетти $b_1(\bar{X}_k) = \dim_{\mathbb{C}} H_1(\bar{X}_k, \mathbb{C})$ многообразия $\bar{X}_k$ равно $r_{k, \neq 1}$, где $r_{k, \neq 1}$ – число корней многочлена Александра $\Delta(t)$ кривой $\bar{H}$, которые являются не равными единице корнями из единицы степени k .

Пусть M – нётеров Λ -модуль. Скажем, что M является $(t-1)$ -обратимым, если умножение на $t-1$ является автоморфизмом модуля M . Λ -модуль M называется t -унипотентным, если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ умножение на t^n является тождественным автоморфизмом модуля M . Наименьшее $k \in \mathbb{N}$ такое, что

$$t^k - 1 \in \text{Ann}(M) = \{f(t) \in \Lambda \mid f(t)v = 0 \quad \forall v \in M\},$$

называется *индексом унипотентности* t -унипотентного модуля M .

Пусть M – нётеров $(t - 1)$ -обратимый Λ -модуль. t -унипотентный Λ -модуль $A_n(M) = M/(t^k - 1)M$ называется k -м *производным модулем Александера* модуля M , и если M является модулем Александера C -группы G (соответственно, заузленного n -мерного многообразия V или гурвицевской кривой H), то $A_k(M)$ называется k -м *производным модулем Александера* группы G (соответственно, многообразия V или кривой H) и он будет обозначаться через $A_k(G)$ (соответственно, $A_k(V)$ или $A_k(H)$).

Основными результатами настоящей статьи являются следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 0.1. *Λ -модуль M является модулем Александера заузленного n -мерного многообразия при $n \geq 2$ тогда и только тогда, когда M является нётеровым $(t - 1)$ -обратимым Λ -модулем.*

ТЕОРЕМА 0.2. *Пусть V – заузленное n -мерное многообразие, $n \geq 1$, и $f_k: X_k \rightarrow S^{n+2}$ – циклическое накрытие, разветвленное вдоль V . Тогда группа $H_1(X_k, \mathbb{Z})$ изоморфна k -му производному модулю Александера $A_k(V)$ многообразия V как Λ -модуль.*

Аналогичные утверждения имеют место в случае алгебраических и, более общё, в случае гурвицевских (соответственно, псевдоголоморфных) кривых. А именно, имеют место следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 0.3. *Λ -модуль M является модулем Александера неприводимой гурвицевской (соответственно, псевдоголоморфной) кривой тогда и только тогда, когда M является нётеровым $(t - 1)$ -обратимым t -унипотентным Λ -модулем. В частности, модуль Александера плоской неприводимой алгебраической кривой является нётеровым $(t - 1)$ -обратимым t -унипотентным Λ -модулем.*

Индекс унипотентности модуля Александера $A_0(H)$ плоской неприводимой алгебраической (соответственно, гурвицевской или псевдоголоморфной) кривой H является делителем ее степени $\deg H$.

СЛЕДСТВИЕ 0.4. *Модуль Александера $A_0(H)$ плоской неприводимой алгебраической (соответственно, гурвицевской или псевдоголоморфной) кривой H конечно порожден над $\mathbb{Z}$, т. е. $A_0(H)$ является конечно порожденной абелевой группой.*

Конечно порожденная абелева группа G является модулем Александера $A_0(H)$ некоторой неприводимой гурвицевской или псевдоголоморфной кривой H тогда и только тогда, когда существуют натуральное число m и автоморфизм $h \in \text{Aut}(G)$ такие, что $h^m = \text{Id}$, и $h - \text{Id}$ также является автоморфизмом группы G .

ТЕОРЕМА 0.5. *Пусть H – алгебраическая (соответственно, гурвицевская либо псевдоголоморфная) неприводимая кривая в $\mathbb{CP}^2$, $\deg H = m$, и пусть $\bar{f}_k: \bar{X}_k \rightarrow \mathbb{CP}^2$ – разрешение особенностей циклического накрытия степени $\deg \bar{f}_k = k$, разветвленного вдоль H и, возможно, вдоль “бесконечно удаленной”*

прямой L . Тогда

$$H_1(\overline{X}_k \setminus E, \mathbb{Z}) \simeq A_k(H), \quad H_1(\overline{X}_k, \mathbb{Q}) \simeq A_k(H) \otimes \mathbb{Q},$$

где $E = \sigma^{-1}(\text{Sing } \tilde{X}_{k, \text{norm}})$ и $A_k(H)$ – k -й производный модуль Александера кривой H .

Следует отметить, что в общем случае гурвицевских кривых эпиморфизм $H_1(\overline{X}_k \setminus E, \mathbb{Z}) \simeq A_k(H) \rightarrow H_1(\overline{X}_k, \mathbb{Z})$, индуцированный вложением $\overline{X}_k \setminus E \hookrightarrow \overline{X}_k$, не обязательно является изоморфизмом (см. далее пример 4.6).

СЛЕДСТВИЕ 0.6. Пусть H – алгебраическая (соответственно, гурвицевская либо псевдоголоморфная) неприводимая кривая в $\mathbb{CP}^2$, $\deg H = t$, и пусть $\tilde{f}_k: \overline{X}_k \rightarrow \mathbb{CP}^2$ – разрешение особенностей циклического накрытия степени $\deg f_k = k$, разветвленного вдоль кривой H и, возможно, вдоль “бесконечно удаленной” прямой. Тогда:

- (i) первое число Бетти $b_1(\overline{X}_k)$ многообразия $\overline{X}_k$ является четным числом;
- (ii) если $k = p^r$ для некоторого простого числа p , то $H_1(\overline{X}_k, \mathbb{Q}) = 0$;
- (iii) если k и t взаимно просты, то $H_1(\overline{X}_k, \mathbb{Z}) = 0$;
- (iv) $H_1(\overline{X}_2, \mathbb{Z})$ является конечной абелевой группой нечетного порядка.

Отметим также, что любая C -группа G может быть реализована (см. [7]) как $\pi_1(\Delta^2 \setminus (C \cap \Delta^2))$, где $\Delta^2 = \{|z| < 1\} \times \{|w| < 1\} \subset \mathbb{C}^2$ – бидиск и $C \subset \mathbb{C}^2$ – неособая алгебраическая кривая такая, что ограничение проекции $\text{pr}_1: \Delta^2 \rightarrow \{|z| < 1\}$ на $C \cap \Delta^2$ является собственным отображением. Поэтому аналог теорем 0.1 и 0.2 и следствий 0.4 и 0.6 также имеет место и в этом случае.

Доказательство теорем 0.1 и 0.3 приведено в §3. В §1 описаны свойства нётеровых $(t-1)$ -обратимых Λ -модулей, а в §2 изучаются свойства нётеровых t -унипотентных Λ -модулей. В §4 доказаны теоремы 0.2 и 0.5 и сформулированы некоторые другие следствия из них.

Автор благодарен институту Макса Планка (г. Бонн, Германия), во время пребывания в котором была выполнена настоящая работа.

§ 1. Свойства $(t-1)$ -обратимых Λ -модулей

1.1. Критерии $(t-1)$ -обратимости. Прежде чем описывать $(t-1)$ -обратимые Λ -модули, напомним, что $\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ является нётеровым кольцом. Каждый элемент $f \in \Lambda$ может быть записан в виде

$$f = \sum_{n_- \leq i \leq n_+} a_i t^i \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}],$$

где $n_-, n_+, i, a_i \in \mathbb{Z}$. Если $n_- \geq 0$ для элемента $f \in \Lambda$, то $f \in \mathbb{Z}[t]$ и такие элементы мы будем называть *многочленами*.

Для каждого $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, определен $\mathbb{Z}$ -гомоморфизм

$$f(t) = \sum a_i t^i \mapsto f(n) = \sum a_i n^i.$$

Образ $f(n)$ элемента $f(t)$ будем называть *значением* элемента $f(t)$ в n . Если $f(t)$ является многочленом, то также определено и его значение $f(0) = a_0$ в нуле.

ЛЕММА 1.1. *Нётеров Λ -модуль M является $(t-1)$ -обратимым тогда и только тогда, когда умножение на $t-1$ является сюръективным эндоморфизмом модуля M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма является частным случаем более общего утверждения. А именно, любой сюръективный Λ -эндоморфизм $f: M \rightarrow M$ нётероваго Λ -модуля M является изоморфизмом. Действительно, если $\ker f \neq 0$, то последовательность подмодулей

$$\ker f \subset \ker f^2 \subset \dots \subset \ker f^n \subset \dots$$

является строго возрастающей, так как эндоморфизм f сюръективен, но это противоречит нётеровости модуля M .

Пусть M – нётеров $(t-1)$ -обратимый Λ -модуль. Рассмотрим элемент $v \in M$ и обозначим через $M_v = \langle v \rangle$ главный подмодуль модуля M , порожденный элементом v . Так как M является нётеровым модулем, то любой главный подмодуль модуля M содержится в некотором максимальном главном подмодуле модуля M .

ЛЕММА 1.2. *Пусть M_v – максимальный главный подмодуль $(t-1)$ -обратимого модуля M . Тогда M_v является $(t-1)$ -обратимым модулем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку M является $(t-1)$ -обратимым модулем, то найдется элемент $v_1 \in M$ такой, что $v = (t-1)v_1$. Следовательно, $M_v \subset M_{v_1}$. Так как M_v является максимальным главным подмодулем модуля M , то $M_v = M_{v_1}$, поэтому $v_1 \in M_v$ и умножение на $t-1$ определяет сюръективный эндоморфизм модуля M_v . В завершение доказательства применим лемму 1.1.

Каждый главный подмодуль $M_v \subset M$ изоморфен модулю Λ / Ann_v , где $\text{Ann}_v = \{f \in \Lambda \mid fv = 0\}$ – *аннулятор* элемента v . Аннулятор Ann_v элемента $v \in M$ является идеалом кольца Λ . Обозначим через

$$\text{Ann}(M) = \bigcap_{v \in M} \text{Ann}_v = \{g(t) \in \Lambda \mid g(t)v = 0 \quad \forall v \in M\}$$

аннулятор модуля M .

ЛЕММА 1.3. *Главный Λ -модуль $M = \Lambda/I$ является $(t-1)$ -обратимым тогда и только тогда, когда идеал I содержит многочлен $f(t)$ такой, что $f(1) = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть модуль M порожден элементом $v \in M$. Если многочлен $f(t)$ такой, что $f(1) = 1$, принадлежит идеалу $I = \text{Ann}_v$, то $f(t)$ может быть записан в виде

$$f(t) = (t-1)g(t) + 1 \tag{2}$$

для некоторого многочлена $g(t)$. Следовательно, $v = (t - 1)v_1$, где $v_1 = -g(t)v$. Таким образом, умножение на $t - 1$ является сюръективным эндоморфизмом модуля M , и поэтому согласно лемме 1.1 умножение на $t - 1$ является автоморфизмом модуля M .

Обратно, если M является $(t - 1)$ -обратимым модулем, то найдется элемент $v_1 \in M$ такой, что $v = (t - 1)v_1$. Пусть $v_1 = h(t)v$ для некоторого элемента $h(t) \in \Lambda$. Имеем $(1 - (t - 1)h(t))v = 0$. Следовательно, $1 - (t - 1)h(t) \in \text{Ann}_v = I$, и найдется такое натуральное число k , что $f(t) = t^k(1 - (t - 1)h(t)) \in I \cap \mathbb{Z}[t]$. Легко видеть, что $f(1) = 1$.

В качестве следствия из леммы 1.3 получаем следующую лемму.

ЛЕММА 1.4. *Любой главный подмодуль главного $(t - 1)$ -обратимого модуля M является $(t - 1)$ -обратимым модулем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть модуль M порожден элементом $v \in M$, а его подмодуль M_1 порожден элементом $v_1 = h(t)v$. Тогда $\text{Ann}_v \subset \text{Ann}_{v_1}$.

Поскольку M является $(t - 1)$ -обратимым модулем, то согласно лемме 1.3 существует многочлен $f(t) \in \text{Ann}_v$ такой, что $f(1) = 1$. Применяя снова лемму 1.3, получаем, что M_1 является $(t - 1)$ -обратимым модулем, так как $f(t) \in \text{Ann}_{v_1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. *Каждый подмодуль нётерова $(t - 1)$ -обратимого Λ -модуля M является $(t - 1)$ -обратимым модулем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть N – подмодуль модуля M . Так как M – нётеров Λ -модуль, то подмодуль N порожден конечным числом элементов, скажем $v_1, \dots, v_n$. Согласно леммам 1.2 и 1.4 каждый главный подмодуль $M_{v_i} \subset N \subset M$ является $(t - 1)$ -обратимым модулем. Следовательно, умножение на $t - 1$ является сюръективным эндоморфизмом модуля N , так как оно сюръективно на каждом подмодуле $M_{v_i} \subset N$ и элементы $v_1, \dots, v_n$ порождают модуль N . Поэтому для завершения доказательства предложения достаточно применить лемму 1.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. *Каждый фактормодуль нётерова $(t - 1)$ -обратимого Λ -модуля M является $(t - 1)$ -обратимым модулем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 1.1.

ЛЕММА 1.7. *Пусть $M_1, \dots, M_k$ – нётеровы $(t - 1)$ -обратимые Λ -модули. Тогда прямая сумма $M = \bigoplus_{i=1}^k M_i$ является нётеровым $(t - 1)$ -обратимым Λ -модулем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

СЛЕДСТВИЕ 1.8. *Каждый нётеров $(t - 1)$ -обратимый Λ -модуль M является фактормодулем прямой суммы $\bigoplus_{j=1}^n \Lambda/I_j$ главных $(t - 1)$ -обратимых Λ -модулей Λ/I_j .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку M – нётеров Λ -модуль, то он порожден конечным множеством элементов $v_1, \dots, v_n$. Согласно предложению 1.5 каждый главный подмодуль $M_{v_i} \subset M$ является $(t-1)$ -обратимым и, очевидно, существует эпиморфизм $\bigoplus_{i=1}^n M_{v_i} \mapsto M$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.9. Абелева группа G допускает структуру $(t-1)$ -обратимого Λ -модуля тогда и только тогда, когда она имеет автоморфизм t такой, что $t-1$ также является автоморфизмом. Если группа G конечно порождена и выбран такой автоморфизм $t \in \text{Aut } G$, то G является нётеровым Λ -модулем.

Отметим, что в общем случае абелева группа допускает много различных структур $(t-1)$ -обратимых Λ -модулей. Например, группа $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ допускает три таких структуры: либо $tv = 2v$, либо $tv = 5v$, либо $tv = 8v$, где v – порождающий элемент группы $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

ТЕОРЕМА 1.10. *Нётеров Λ -модуль M является $(t-1)$ -обратимым тогда и только тогда, когда найдется многочлен $f(t) \in \text{Ann}(M)$ такой, что $f(1) = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если M является $(t-1)$ -обратимым модулем, то согласно предложению 1.5 каждый его главный подмодуль M_v тоже является $(t-1)$ -обратимым. Следовательно, согласно лемме 1.3 аннулятор Ann_v элемента $v \in M$ содержит многочлен $f_v(t)$ такой, что $f_v(1) = 1$. Если M порожден элементами $v_1, \dots, v_n$, то многочлен $f(t) = f_{v_1}(t) \dots f_{v_n}(t)$ является искомым.

Покажем, что если существует многочлен $f(t) \in \text{Ann}(M)$ такой, что $f(1) = 1$, то M является $(t-1)$ -обратимым модулем. Действительно, в этом случае согласно лемме 1.3 каждый главный подмодуль M_v модуля M является $(t-1)$ -обратимым. Следовательно, умножение на $t-1$ является изоморфизмом модуля M , так как это умножение является изоморфизмом на каждом главном подмодуле M_v модуля M .

Из теоремы 1.10 вытекает, что *каждый нётеров $(t-1)$ -обратимый модуль M является Λ -модулем кручения и, следовательно,*

$$\dim_{\mathbb{Q}} M \otimes \mathbb{Q} < \infty.$$

Следующее предложение будет использовано при доказательстве теорем 0.1 и 0.3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.11. *Каждый нётеров $(t-1)$ -обратимый Λ -модуль M изоморфен фактормодулю Λ^n/M_1 свободного Λ -модуля Λ^n , а подмодуль M_1 порождается некоторыми элементами $w_1, \dots, w_n, \dots, w_{n+k}$ модуля Λ^n такими, что:*

- (i) для $i = 1, \dots, n$ имеем $w_i = (0, \dots, 0, f_i(t), 0, \dots, 0)$, где многочлен $f_i(t)$ стоит на i -м месте, причем $f_i(1) = 1$;
- (ii) $w_{n+j} = (t-1)\bar{w}_{n+j} = ((t-1)g_{j,1}(t), \dots, (t-1)g_{j,n}(t))$ для $j = 1, \dots, k$, где $g_{j,l}(t)$ – некоторые многочлены;
- (iii) если многочлены вида $t^m - 1$ принадлежат $\text{Ann}(M)$, то для некоторого $m \in \mathbb{N}$ такого, что $t^m - 1 \in \text{Ann}(M)$, вектор w_{n+i} равен $(0, \dots, 0, t^m - 1, 0, \dots, 0)$, где многочлен $t^m - 1$ стоит на i -м месте при $i = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем порождающие элементы $v_1, \dots, v_n$ нётерова Λ -модуля M . Тогда согласно теореме 1.10 найдутся многочлены $f_i(t) \in \text{Ann}_{v_i}$ такие, что $f_i(1) = 1$. Очевидно, существует эпиморфизм

$$h: \bigoplus_{i=1}^n \Lambda / (f_i(t)) \rightarrow M$$

Λ -модулей такой, что $h(u_i) = v_i$ для $u_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где 1 стоит на i -м месте. Ядро $N = \ker h$ эпиморфизма h является нётеровым Λ -модулем. Пусть оно порождается элементами

$$u_{n+1} = (g_{1,1}(t), \dots, g_{1,n}(t)), \quad \dots, \quad u_{n+k} = (g_{k,1}(t), \dots, g_{k,n}(t)).$$

Не ограничивая общности, можем предполагать, что все $g_{i,j}(t)$ являются многочленами.

Согласно теореме 1.10 Λ -модуль $\bigoplus_{i=1}^n \Lambda / (f_i(t))$ является $(t-1)$ -обратимым, а из предложения 1.5 следует, что N также является $(t-1)$ -обратимым Λ -модулем. Следовательно, элементы $\bar{u}_{n+1} = (t-1)u_{n+1}, \dots, \bar{u}_{n+k} = (t-1)u_{n+k}$ также порождают модуль N .

Если для некоторого $m \in \mathbb{N}$ многочлен $t^m - 1$ принадлежит $\text{Ann}(M)$, то элементы вида $(0, \dots, 0, t^m - 1, 0, \dots, 0)$ принадлежат модулю N . В этом случае добавим элементы $(0, \dots, 0, t^m - 1, 0, \dots, 0)$ к множеству элементов $\bar{u}_{n+1}, \dots, \bar{u}_{n+k}$, порождающих модуль N , и перенумеруем элементы полученного множества порождающих элементов $\bar{u}_{n+1}, \dots, \bar{u}_{n+k}$ так (здесь мы переобозначили $k := n+k$), что $\bar{u}_{n+j} = (0, \dots, 0, t^m - 1, 0, \dots, 0)$ для $j = 1, \dots, n$, где многочлен $t^m - 1$ стоит на j -м месте.

Теперь, чтобы завершить доказательство, заметим, что ядро M_1 композиции $h \circ \nu: \Lambda^n \rightarrow M$ гомоморфизма h и естественного эпиморфизма $\nu: \Lambda^n \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \Lambda / (f_i(t))$ порождается элементами

$$w_i = (0, \dots, 0, f_i(t), 0, \dots, 0), \quad i = 1, \dots, n,$$

в которых многочлен $f_i(t)$ стоит на i -м месте, и элементами

$$w_{n+i} = (f_{i,1}(t), \dots, f_{i,n}(t)) \in \Lambda^n, \quad i = 1, \dots, k,$$

такими, что координаты $f_{i,j}(t)$ каждого из w_{n+i} совпадают с координатами $\bar{g}_{i,j}(t)$ элементов $\bar{u}_{n+i} = (\bar{g}_{i,1}(t), \dots, \bar{g}_{i,n}(t))$. Предложение доказано.

1.2. Подмодули $\mathbb{Z}$ -кручения $(t-1)$ -обратимых Λ -модулей. Скажем, что элемент v Λ -модуля M является элементом *конечного порядка*, если найдется такое $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, что $mv = 0$. Λ -модуль M называется модулем *$\mathbb{Z}$ -кручения*, если все его элементы являются элементами конечного порядка. Для каждого Λ -модуля M обозначим через M_{fin} подмножество в M , состоящее из всех его элементов конечного порядка. Легко видеть, что M_{fin} является Λ -модулем $\mathbb{Z}$ -кручения. Если M – нётеров $(t-1)$ -обратимый Λ -модуль, то M_{fin} также

является нётеровым $(t-1)$ -обратимым Λ -модулем и из предложений 1.5 и 1.6 следует, что существует точная последовательность Λ -модулей

$$0 \rightarrow M_{\text{fin}} \rightarrow M \rightarrow M_1 \rightarrow 0,$$

в которой M_1 – нётеров $(t-1)$ -обратимый Λ -модуль, не содержащий нетривиальных элементов конечного порядка.

Пусть $M = M_{\text{fin}}$ – нётеров $(t-1)$ -обратимый Λ -модуль. Поскольку M конечно порожден над кольцом Λ , то найдется целое число $d \in \mathbb{N}$ такое, что $dv = 0$ для всех $v \in M$ (назовем такое d *экспонентой* модуля M). Пусть $d = p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n}$ – разложение на простые множители. Обозначим через $M(p_i)$ подмножество в M , состоящее из всех элементов $v \in M$ таких, что $p_i^{r_i} v = 0$. Легко видеть, что $M(p_i)$ является Λ -подмодулем модуля M . Назовем $M(p_i)$ p_i -*подмодулем* модуля M .

ТЕОРЕМА 1.12. Пусть $M = M_{\text{fin}}$ – нётеров $(t-1)$ -обратимый Λ -модуль и $d = p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n}$ – его экспонента. Тогда M изоморфен прямой сумме его p_i -подмодулей:

$$M = \bigoplus_{i=1}^n M(p_i).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО совпадает с доказательством аналогичной теоремы для абелевых групп (см., например, [14, теорема 8.1]).

Поскольку кольцо $\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ является нётеровым, то каждый его идеал I конечно порожден. Обозначим через $I_{\text{pol}} = I \cap \mathbb{Z}[t]$ идеал в кольце многочленов $\mathbb{Z}[t]$. Как известно, $I = \Lambda I_{\text{pol}}$, т.е. каждый идеал I кольца Λ порождается многочленами.

Напомним, что $\mathbb{Z}[t]$ является кольцом с однозначным разложением на множители. Его единицы – это в точности единицы кольца $\mathbb{Z}$, и его простые элементы – это либо простые числа в $\mathbb{Z}$, либо такие многочлены $q(t) = \sum a_i t^i$, что, во-первых, они неприводимы в кольце $\mathbb{Q}[t]$, а во-вторых, наибольшие общие делители их коэффициентов a_i равны 1. Применяя алгоритм Евклида, легко видеть, что для любых двух ненулевых многочленов $q_1(t), q_2(t) \in \mathbb{Z}[t]$ найдутся многочлены $h_1(t), h_2(t), r(t) \in \mathbb{Z}[t]$ и константа $d \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0$, такие, что

$$h_1(t)q_1(t) + h_2(t)q_2(t) = dr(t), \quad (3)$$

где $r(t)$ – наибольший общий делитель многочленов $q_1(t)$ и $q_2(t)$.

ЛЕММА 1.13. Пусть M – нётеров $(t-1)$ -обратимый Λ -модуль, и пусть $t^n - 1 \in \text{Ann}(M)$ для некоторого $n = p^r$, где p – простое число. Тогда M является модулем $\mathbb{Z}$ -крючения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если многочлен $t^n - 1 = (t-1)(t^{n-1} + \dots + t + 1)$ принадлежит идеалу $\text{Ann}(M)$, то $g_n(t) = t^{n-1} + \dots + t + 1 \in \text{Ann}(M)$, так как M является $(t-1)$ -обратимым модулем. Для $n = p^r$ в разложении на множители

$$g_{p^r}(t) = \prod_{i=1}^r \Phi_{p^i}(t) = \prod_{i=1}^r \sum_{j=0}^{p-1} t^{jp^{i-1}}$$

каждый множитель является неприводимым элементом кольца Λ .

Согласно теореме 1.10 найдется многочлен $f(t) \in \text{Ann}(M)$ такой, что $f(1) = 1$, и если $n = p^r$ для некоторого простого числа p , то многочлены $f(t)$ и $g_{p^r}(t)$ не имеют общих неприводимых делителей. Действительно, если $g(t)$ является делителем многочлена $f(t)$, то мы должны иметь $g(1) = \pm 1$, так как $f(1) = 1$, но $\Phi_{p^i}(1) = p$ для каждого i . Следовательно, найдутся многочлены $h_1(t)$, $h_2(t)$ и константа $d \in \mathbb{N}$ такие, что $h_1(t)f(t) + h_2(t)g_{p^r}(t) = d$, и поэтому если $g_{p^r}(t) \in \text{Ann}(M)$, то $d \in \text{Ann}(M)$, т.е. M является модулем $\mathbb{Z}$ -крючения.

1.3. Главные $(t-1)$ -обратимые Λ -модули. Пусть I – ненулевой идеал кольца Λ . Обозначим через I_m подмножество в I_{pol} , состоящее из всех многочленов $f(t)$, имеющих наименьшую степень (пусть эта наименьшая степень равна m). Заметим, что если $f(t) \in I_m \setminus \{0\}$, то $f(0) \neq 0$.

Рассмотрим произвольные два многочлена $f_1(t), f_2(t) \in I_m$ и запишем их в виде $f_i(t) = d_i q_i(t)$, где $d_i \in \mathbb{Z}$ и наибольшие общие делители коэффициентов многочленов $q_i(t)$ равны 1. Имеем $q_1(t) = q_2(t)$. Действительно, для их общего наибольшего делителя $r(t)$ имеем $\deg r(t) \leq m$ и, более того, $\deg r(t) = m$ тогда и только тогда, когда $q_1(t) = q_2(t)$. С другой стороны, из (3) следует, что $d_2 h_1(t) f_1(t) + d_1 h_2(t) f_2(t) = d_1 d_2 dr(t)$ для некоторых многочленов $h_1(t), h_2(t)$. Поэтому $d_1 d_2 dr(t) \in I_{\text{pol}}$ и мы должны иметь равенство $\deg r(t) = m$.

Применяя алгоритм Евклида для целых чисел, получаем, что если два многочлена $f_i(t) = d_i q(t)$, $i = 1, 2$, принадлежат множеству I_m , то $d_0 q(t)$ также принадлежит множеству I_m , где d_0 – наибольший общий делитель чисел d_1 и d_2 . Таким образом, найдется многочлен $f_m(t) = d_m q(t) \in I_m$ такой, что каждый многочлен $f(t) \in I_m$ делится на $f_m(t)$. Данный многочлен $f_m(t)$ определен однозначно с точностью до умножения на ± 1 , и мы будем называть его *ведущим порождающим элементом* идеала I .

Пусть I – ненулевой идеал кольца Λ и $f(t) = d_m q(t)$ – его ведущий порождающий элемент. Тогда каждый многочлен $h(t) \in I$ делится на $q(t)$. Действительно, как и выше, легко показать, что если $r(t)$ – наибольший общий делитель многочленов $f(t)$ и $h(t)$, то найдется константа d такая, что $dr(t) \in I$, и так как степень $\deg q(t)$ является минимальной для многочленов, принадлежащих идеалу I , то мы должны иметь равенство $r(t) = q(t)$.

Приведенные выше рассуждения и лемма 1.3 доказывают следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.14. Пусть $M = M_v$ является главным $(t-1)$ -обратимым Λ -модулем, порожденным элементом v . Тогда идеал Ann_v порождается конечным множеством многочленов $f_1(t), \dots, f_k(t)$, где $f_i(t) = d_i q_i(t)$, $d_i \in \mathbb{Z}$, $d_i \neq 0$, и для каждого i наибольший общий делитель коэффициентов многочлена $q_i(t)$ равен 1, и, кроме того, многочлены $f_1(t), \dots, f_k(t)$ обладают следующими свойствами:

- (i) $\deg f_1 < \deg f_2 \leq \dots \leq \deg f_k$;
- (ii) $f_i(0) \neq 0$ для всех i ;
- (iii) $q_1(1) = 1$;
- (iv) $q_1(t) \mid q_i(t)$ для $i = 2, \dots, k$;

(v) если $k > 1$, то $|d_1| > 1$, а $d_k = 1$ и $q_k(1) = 1$.

Скажем, что множество порождающих элементов идеала Ann_v является *хорошим*, если оно обладает свойствами (i)–(v) из предложения 1.14.

Будем различать главные $(t - 1)$ -обратимые Λ -модули $M = M_v$ в зависимости от свойств, которыми обладают их аннуляторы. Скажем, что M_v является модулем *конечного типа*, если в хорошей системе $f_1(t), \dots, f_k(t)$ порождающих элементов идеала Ann_v ведущий элемент $f_1(t) \equiv d_1$ является константой (т.е. $q_1(t) \equiv 1$). Скажем, что M_v является модулем *смешанного типа*, если в хорошей системе $f_1(t), \dots, f_k(t)$ порождающих элементов идеала Ann_v степень ведущего многочлена $f_1 = d_1 q_1(t)$ больше нуля и $|d_1| \geq 2$. Приведенные выше рассуждения показывают, что если главный $(t - 1)$ -обратимый Λ -модуль $M = M_v$ не является модулем ни конечного, ни смешанного типов, то ведущий порождающий элемент $f_1(t)$ в хорошей системе порождающих элементов идеала Ann_v равен многочлену $q_1(t)$ такому, что $q_1(1) = 1$, и, следовательно, Ann_v является главным идеалом, порожденным многочленом $q_1(t)$, так как каждый многочлен $h(t) \in \text{Ann}_v$ делится на $q_1(t)$. Такие главные $(t - 1)$ -обратимые Λ -модули будем называть *биглавными*.

Легко видеть, что если $M = M_v$ является главным Λ -модулем конечного типа и $d_1 \in \mathbb{Z}$ – ведущий элемент хорошей системы порождающих элементов идеала Ann_v , то все элементы модуля M имеют порядок, являющийся делителем числа d_1 , т.е. главный Λ -модуль M_v является модулем конечного типа тогда и только тогда, когда он является модулем $\mathbb{Z}$ -кручения.

Если $M = M_v$ является биглавным Λ -модулем, то он не имеет ненулевых элементов конечного порядка. Действительно, пусть $q(t)$ – порождающий многочлен идеала Ann_v . Если элемент $v_1 = h(t)v$ имеет порядок m , то $mh(t) \in \text{Ann}_v$, т.е. $mh(t)$ делится на $q(t)$. Поскольку t является единицей кольца Λ , то мы можем предполагать, что $h(t)$ является многочленом, и так как M_v – биглавный модуль, то многочлен $h(t)$ должен делиться на $q(t)$, т.е. $v_1 = 0$.

Если $M = M_v$ является Λ -модулем смешанного типа, то имеет место точная последовательность Λ -модулей

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M \rightarrow M_2 \rightarrow 0,$$

в которой M_1 – главный Λ -модуль конечного типа, а M_2 – биглавный Λ -модуль. Действительно, пусть $d_1 q_1(t)$ – ведущий порождающий многочлен идеала Ann_v . Положим $v_1 = q_1(t)v$. Тогда легко видеть, что Λ -модуль $M_1 = M_{v_1} \subset M$, порожденный элементом v_1 , является модулем конечного типа, а Λ -модуль $M_2 = M/M_1 \simeq \Lambda/(q_1)$ является биглавным.

1.4. Конечно $\mathbb{Z}$ -порожденные $(t - 1)$ -обратимые Λ -модули. Каждый Λ -модуль M может быть рассмотрен как $\mathbb{Z}$ -модуль, т.е. как абелева группа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.15. *Нётеров Λ -модуль M конечно порожден над $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда найдется такой многочлен*

$$q(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i \in \text{Ann}(M),$$

что $a_n = a_0 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала предложение в случае, когда $M = M_v$ является главным Λ -модулем.

Легко видеть, что если существует многочлен $q(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i \in \text{Ann}_v$ такой, что $a_n = a_0 = 1$, то M порождается над $\mathbb{Z}$ элементами $v, tv, \dots, t^{n-1}v$.

Пусть Λ -модуль $M = M_v$ конечно порожден над $\mathbb{Z}$ элементами $h_1(t)v, \dots, h_m(t)v$. Поскольку умножение на t является изоморфизмом модуля M , то мы можем предполагать, что $h_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, являются такими многочленами, что $h_i(0) = 0$. Положим $n - 1 = \max(\deg h_1(t), \dots, \deg h_m(t))$. Так как элементы $h_1(t)v, \dots, h_m(t)v$ порождают модуль M над $\mathbb{Z}$, то найдутся целые числа $b_1, \dots, b_m$ и $c_1, \dots, c_m$ такие, что

$$v = \sum_{i=1}^m b_i h_i(t)v \quad \text{и} \quad t^n v = \sum_{i=1}^m c_i h_i(t)v.$$

Следовательно, многочлены $1 - \sum b_i h_i(t)$ и $t^n - \sum c_i h_i(t)$ принадлежат идеалу Ann_v . Поэтому многочлен $t^n + 1 - \sum (b_i + c_i) h_i(t)$ является искомым.

В общем случае нётеров $(t-1)$ -обратимый Λ -модуль M порождается конечным множеством элементов $v_1, \dots, v_m$. Поэтому модуль M является конечно порожденным над $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда для всех v_i главные подмодули $M_{v_i} \subset M$ конечно порождены над $\mathbb{Z}$.

Если $g(t) \in \text{Ann}(M)$, то $g(t) \in \text{Ann}_{v_i}$ для $i = 1, \dots, m$. В частности, если существует многочлен $q(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i \in \text{Ann}(M)$ такой, что $a_n = a_0 = 1$, то все M_{v_i} (и, следовательно, M) конечно порождены над $\mathbb{Z}$.

Если для всех i главные подмодули $M_{v_i} \subset M$ являются конечно порожденными над $\mathbb{Z}$, то найдутся многочлены $q_i(t) = \sum_{j=0}^{n_i} a_{i,j} t^j \in \text{Ann}_{v_i}$ такие, что $a_{i,n_i} = a_{i,0} = 1$. Положим $n = \sum n_i$. Тогда

$$q(t) = q_1(t) \dots q_n(t) = t^n + 1 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j t^j \in \text{Ann}(M),$$

так как $q(t) \in \text{Ann}_{v_i}$ для всех v_i . Предложение доказано.

Из предложения 1.15 следует, что существует очень много $(t-1)$ -обратимых биглавных модулей $M = \Lambda/I$, которые не являются конечно порожденными над $\mathbb{Z}$. Более точно, легко видеть, что *биглавный $(t-1)$ -обратимый модуль $M = \Lambda/I$ является конечно порожденным над $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда идеал $I = \langle q(t) \rangle$ порождается многочленом $q(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$ таким, что $q(1) = 1$ и его коэффициенты a_0 и a_n равны ± 1 .*

Например, $(t-1)$ -обратимый биглавный модуль

$$M_m = \Lambda / \langle (m+1)t - m \rangle$$

не является конечно порожденным модулем над $\mathbb{Z}$ для любого $m \in \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 1.16. Пусть M является нётеровым $(t-1)$ -обратимым модулем $\mathbb{Z}$ -крючения. Тогда M является модулем, конечно порожденным над $\mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 1.12 модуль M изоморфен прямой сумме $\oplus M(p_i)$ конечного числа его p_i -подмодулей. Поэтому достаточно доказать теорему для случая, когда модуль M имеет экспоненту p^r , где p – некоторое простое число. Согласно следствию 1.8 модуль M является фактормодулем прямой суммы $\bigoplus_{j=1}^n \Lambda/I_j$ главных $(t-1)$ -обратимых Λ -модулей Λ/I_j и в нашем случае, не ограничивая общности, можно предполагать, что каждый идеал I_j содержит константу p^{r_j} при некотором $r_j \in \mathbb{N}$. Таким образом, достаточно доказать теорему в случае, когда $M = M_v$ – это главный $(t-1)$ -обратимый Λ -модуль, имеющий экспоненту p^r , т. е. идеал $I = \text{Ann}_v$ содержит константу p^r и многочлен $g(t)$ такой, что $g(1) = 1$.

Пусть $r = 1$ и $g(t) = \sum a_i t^i$. Обозначим $g_1(t) = \sum_{p|a_i} a_i t^i$ и положим $\bar{g}(t) = g(t) - g_1(t)$. Тогда $\bar{g}(t) \in \text{Ann}_v$, так как $g(t), g_1(t) \in \text{Ann}_v$. Легко видеть, что числа $\bar{g}(1)$ и p взаимно просты, так как $g(1) = 1$ и $g_1(1) \equiv 0 \pmod{p}$. Более того, по построению многочлена $\bar{g}(t)$ каждый его коэффициент и число p также взаимно просты. Умножая этот многочлен на t^{-k} , можем предполагать, что $\bar{g}(0) \neq 0$. Пусть $\bar{g}(t) = \sum_{i=0}^m \bar{a}_i t^i$. Так как числа $\bar{a}_m$ и p взаимно просты, то можно найти целые числа b_1 и c_1 такие, что $b_1 \bar{a}_m + c_1 p = 1$. Аналогично, найдутся такие целые числа b_2 и c_2 , что $b_2 \bar{a}_0 + c_2 p = 1$. Следовательно, многочлен $(b_1 t + b_2) \bar{g}(t) + p(c_1 t^{m+1} + c_2)$ принадлежит I , и он может быть записан в виде

$$h(t) = t^{m+1} + 1 + \sum_{i=1}^m (b_1 \bar{a}_{i-1} + b_2 \bar{a}_i) t^i.$$

Поэтому согласно предложению 1.15 модуль M_v конечно порожден над $\mathbb{Z}$.

Рассмотрим теперь общий случай, когда главный $(t-1)$ -обратимый Λ -модуль имеет экспоненту p^r , и предположим, что любой главный $(t-1)$ -обратимый Λ -модуль M' , имеющий экспоненту p^{r_1} , где $r_1 < r$, является конечно порожденным над $\mathbb{Z}$. Пусть $M = M_v$ – главный $(t-1)$ -обратимый Λ -модуль, имеющий экспоненту p^r . Тогда подмодуль M_{v_1} модуля M , порожденный элементом $v_1 = p^{r-1}v$, имеет экспоненту p , а фактормодуль $M_{\bar{v}} = M_v/M_{v_1}$ имеет экспоненту p^{r-1} и доказательство теоремы следует из точной последовательности модулей

$$0 \rightarrow M_{v_1} \rightarrow M \rightarrow M/M_{v_1} \rightarrow 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 1.17. *Каждый нётеров $(t-1)$ -обратимый модуль $\mathbb{Z}$ -крючения является конечным модулем, т. е. он является конечной абелевой группой.*

ЛЕММА 1.18. *Группа $G = \bigoplus_{i=1}^n (\mathbb{Z}/2^{r_i}\mathbb{Z})^{m_i}$ не может быть снабжена структурой $(t-1)$ -обратимого Λ -модуля, если $r_i \neq r_j$ для $i \neq j$ и одна из экспонент m_i равна единице.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что группа G имеет некоторую структуру $(t-1)$ -обратимого Λ -модуля. Тогда для любого числа r подгруппа $2^r G$ группы G является его Λ -подмодулем и согласно предложениям 1.5 и 1.6 группы $2^r G$ и $G/2^r G$ являются $(t-1)$ -обратимыми Λ -модулями. Поэтому, не ограничивая

общности, можем предполагать, что

$$G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^n (\mathbb{Z}/2^{r_i}\mathbb{Z})^{m_i} \right),$$

где все $r_i \geq 2$ и $m_i \geq 2$. Выберем порождающие элементы $v_1, \dots, v_{m+1}$ группы G , $m = \sum_{i=1}^n m_i$, таким образом, что

$$G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})v_1 \oplus \left(\bigoplus_{i=2}^{m+1} (\mathbb{Z}/2^{\bar{r}_i}\mathbb{Z})v_i \right),$$

где все $\bar{r}_i \geq 2$. Рассмотрим $\mathbb{Z}$ -подмодуль $\bar{G}$ модуля G , состоящий из всех элементов $v \in G$, порядки которых не больше четырех. Очевидно, $\bar{G}$ является Λ -подмодулем модуля G , и он порождается над $\mathbb{Z}$ (и, следовательно, над Λ) элементом $\bar{v}_1 = v_1$ и элементами $\bar{v}_i = 2^{\bar{r}_i-2}v_i$, $i = 2, \dots, m+1$. Легко видеть, что группа $\bar{G}$ как абелева группа изоморфна группе

$$\bar{G} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\bar{v}_1 \oplus \left(\bigoplus_{i=2}^{m+1} (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\bar{v}_i \right).$$

Согласно предложению 1.5 модуль $\bar{G}$ является $(t-1)$ -обратимым Λ -модулем. Умножение на t является автоморфизмом модуля $\bar{G}$. Пусть

$$\begin{aligned} t\bar{v}_1 &= a_1\bar{v}_1 + 2 \sum_{i=2}^{m+1} b_i\bar{v}_i, \\ t\bar{v}_j &= a_j\bar{v}_1 + \sum_{i=2}^{m+1} c_{j,i}\bar{v}_i, \quad j = 2, \dots, m+1, \end{aligned} \tag{4}$$

где каждый коэффициент a_j равен нулю или единице.

Покажем, что $a_1 = 1$. Действительно, предположим, что $a_1 = 0$. Тогда, так как умножение на t является автоморфизмом и элементы $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{m+1}$ порождают модуль $\bar{G}$, должно иметь место равенство $\bar{v}_1 = \sum d_i t\bar{v}_i$, где одно из чисел d_i является нечетным при $i \geq 2$, если $a_1 = 0$. Затем, $\bar{v}_1$ является элементом второго порядка, поэтому $2 \sum_{i=2}^{m+1} d_i t\bar{v}_i = 0$. С другой стороны, элементы $t\bar{v}_2, \dots, t\bar{v}_{m+1}$ являются линейно независимыми над $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, так как $\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{m+1}$ линейно независимы над $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ и умножение на t является автоморфизмом. Поэтому равенство $2 \sum_{i=2}^{m+1} d_i t\bar{v}_i = 0$ является невозможным, если одно из чисел d_i нечетно, и, следовательно, коэффициент a_1 в (4) должен быть равен единице.

Покажем, что $\bar{G}$ не может быть $(t-1)$ -обратимым модулем. Действительно, имеем

$$t\bar{v}_1 = \bar{v}_1 + 2 \sum_{i=2}^{m+1} b_i\bar{v}_i.$$

Поэтому

$$(t-1)\bar{v}_1 = 2 \sum_{i=2}^{m+1} b_i\bar{v}_i$$

и, повторяя еще раз приведенные выше аргументы, заменив при этом t на $t - 1$, получим, что умножение на $t - 1$ не является автоморфизмом группы $\overline{G}$, так как элемент $(t - 1)\bar{v}_1$ является линейной комбинацией элементов $\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{m+1}$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1.19. *Абелева группа*

$$G = G_1 \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^n (\mathbb{Z}/2^{r_i}\mathbb{Z})^{m_i} \right),$$

где $r_i \neq r_j$ при $i \neq j$ и G_1 – группа нечетного порядка, имеет структуру $(t - 1)$ -обратимого Λ -модуля тогда и только тогда, когда $m_i \geq 2$ для всех $i = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 1.12 если $M = M_{\text{fin}}$ является нётеровым $(t - 1)$ -обратимым Λ -модулем и $d = p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n}$ – его экспонента, то

$$M = \bigoplus_{i=1}^n M(p_i),$$

т.е. M является прямой суммой его p_i -подмодулей, которые также являются $(t - 1)$ -обратимыми модулями согласно предложению 1.5. Каждый подмодуль $M(p_i)$ модуля M с нечетным p_i имеет нечетный порядок, и согласно лемме 1.18 подмодуль $M(2)$ модуля M изоморфен (как абелева группа) группе $\bigoplus_{i=1}^k (\mathbb{Z}/2^{r_i}\mathbb{Z})^{m_i}$, где $m_i \geq 2$ для всех $i = 1, \dots, k$.

Для доказательства обратного утверждения заметим, что, во-первых, конечная прямая сумма $(t - 1)$ -обратимых Λ -модулей также является $(t - 1)$ -обратимым Λ -модулем, во-вторых, для любого простого $p > 2$ каждый $(t - 1)$ -обратимый Λ -модуль $M = \Lambda/I$, где идеал I порожден числом p^r и многочленом $2t - 1$, как абелева группа изоморфен группе $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$, в-третьих, если $n \geq 2$, то $(t - 1)$ -обратимый Λ -модуль $M = \Lambda/I$, где идеал I порожден числом 2^r и многочленом $t^n - t + 1$, как абелева группа изоморфен группе $(\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})^n$.

§ 2. t -унипотентные $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -модули

2.1. Свойства t -унипотентных Λ -модулей. Сформулированное ниже предложение является простым следствием предложений 1.5 и 1.6.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Каждый Λ -подмодуль M_1 и каждый фактормодуль M/M_1 нётерова $(t - 1)$ -обратимого t -унипотентного Λ -модуля M является $(t - 1)$ -обратимым t -унипотентным Λ -модулем.*

ЛЕММА 2.2. *Прямая сумма $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ нётеровых $(t - 1)$ -обратимых t -унипотентных Λ -модулей $M_1, \dots, M_n$ является нётеровым $(t - 1)$ -обратимым t -унипотентным Λ -модулем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 1.7 модуль M является нётеровым $(t - 1)$ -обратимым Λ -модулем и, кроме того, найдутся такие $k_i \in \mathbb{N}$, что

$t^{k_i} - 1 \in \text{Ann}(M_i)$. Легко видеть, что $t^k - 1 \in \text{Ann}(M)$, где $k = k_1 \dots k_n$, так как каждый многочлен $t^{k_i} - 1$ при $i = 1, \dots, n$ является делителем многочлена $t^k - 1$. Лемма доказана.

Предложение 2.1 и лемма 2.2 влекут следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Нётеров Λ -модуль M является $(t - 1)$ -обратимым t -унипотентным модулем тогда и только тогда, когда каждый его главный подмодуль M_v является $(t - 1)$ -обратимым t -унипотентным модулем.*

ТЕОРЕМА 2.4. *Любой нётеров $(t - 1)$ -обратимый Λ -модуль $\mathbb{Z}$ -кручения является t -унипотентным модулем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – нётеров $(t - 1)$ -обратимый Λ -модуль $\mathbb{Z}$ -кручения. Согласно следствию 1.17 модуль M состоит из конечного числа элементов. Следовательно, автоморфизм модуля M , определенный умножением на t , имеет конечный порядок, скажем k , т. е. $t^k v = v$ для всех $v \in M$, другими словами, $t^k - 1 \in \text{Ann}(M)$. Теорема доказана.

Следующие два предложения дают описания биглавных $(t - 1)$ -обратимых t -унипотентных модулей и главных $(t - 1)$ -обратимых t -унипотентных модулей смешанного типа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Пусть $M = \Lambda/I$ – биглавный $(t - 1)$ -обратимый t -унипотентный Λ -модуль, и пусть идеал $I = \langle g(t) \rangle$ порожден многочленом $g(t)$. Тогда:*

- (i) *все корни многочлена $g(t)$ являются корнями из единицы;*
- (ii) *многочлен $g(t)$ не имеет кратных корней;*
- (iii) *если ξ – корень k -й степени из единицы (т. е. $\xi^k = 1$) и $k = p^r$ для некоторого простого числа p , то ξ не является корнем многочлена $g(t)$;*
- (iv) $g(1) = \pm 1$;
- (v) $\deg g(t)$ *является четным числом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждений (i) и (ii) заметим, что найдется такое k , что $t^k - 1 \in I$, так как M является t -унипотентным модулем. Следовательно, $g(t)$ является делителем многочлена $t^k - 1$.

Докажем утверждения (iii)–(v). Согласно теореме 1.10 найдется многочлен $f(t) \in I$ такой, что $f(1) = 1$. Имеем $f(t) = h(t)g(t)$ для некоторого многочлена $h(t) \in \mathbb{Z}[t]$, так как идеал I порожден многочленом $g(t)$. Поэтому $g(1) = \pm 1$ (и можем предполагать, что $g(1) = 1$), так как имеет место равенство

$$1 = f(1) = h(1)g(1),$$

в котором $h(1), g(1) \in \mathbb{Z}$.

С другой стороны, если для некоторого простого числа p примитивный корень из единицы ξ степени p^r является корнем многочлена $g(t)$, то $g(t)$ должен делиться на p^r -й циклотомический многочлен $\Phi_{p^r}(t)$, т. е. найдется многочлен $h(t) \in \mathbb{Z}[t]$ такой, что $g(t) = \Phi_{p^r}(t)h(t)$. Следовательно, $1 = g(1) = \Phi_{p^r}(1)h(1)$, и мы получаем противоречие, так как $\Phi_{p^r}(1) = p$.

Для завершения доказательства заметим, что согласно утверждениям (iii) и (iv) числа $\xi = \pm 1$ не являются корнями многочлена $g(t)$, и поэтому все корни многочлена $g(t)$, не являются вещественными числами. Таким образом, если ξ – корень многочлена $g(t)$, то число $\bar{\xi}$, комплексно сопряженное к ξ , также является корнем многочлена $g(t)$, так как $g(t) \in \mathbb{Z}[t]$. Следовательно, $\deg g(t)$ является четным числом, так как $\bar{\xi} \neq \xi$ для всех корней из единицы, не равных ± 1 . Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Пусть $M = \Lambda/I$ – главный $(t-1)$ -обратимый t -унипотентный Λ -модуль смешанного типа, и пусть $f(t) = dg(t)$ – ведущий порождающий элемент идеала I , где $d \in \mathbb{N}$ и многочлен $g(t)$ таков, что наибольший общий делитель его коэффициентов равен единице. Тогда многочлен $g(t)$ удовлетворяет условиям (i)–(v) предложения 2.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть v – порождающий элемент модуля M . Обозначим через M_1 подмодуль Λ -модуля M , порожденный элементом $v_1 = g(t)v$. Имеем точную последовательность Λ -модулей

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M \rightarrow M/M_1 \rightarrow 0,$$

в которой M_1 является главным модулем конечного типа и $M_2 = M/M_1$ – би-главный Λ -модуль, изоморфный модулю $\Lambda/\langle g(t) \rangle$. Согласно предложению 2.1 модуль M_2 является $(t-1)$ -обратимым t -унипотентным модулем, поэтому предложение следует из предложения 2.5.

Пусть M – нётеров $(t-1)$ -обратимый t -унипотентный Λ -модуль. Наименьшее $k \in \mathbb{N}$ такое, что $t^k - 1 \in \text{Ann}(M)$, называется *индексом унипотентности* модуля M .

ЛЕММА 2.7. Если нётеров $(t-1)$ -обратимый t -унипотентный Λ -модуль M имеет индекс унипотентности k , то $\sum_{i=0}^{k-1} t^i \in \text{Ann}(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $t^k - 1 = (t-1) \sum_{i=0}^{k-1} t^i \in \text{Ann}(M)$. Следовательно, $(\sum_{i=0}^{k-1} t^i)v = 0$ для всех $v \in M$, так как M – это $(t-1)$ -обратимый Λ -модуль. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.8. Нётеров $(t-1)$ -обратимый Λ -модуль M индекса унипотентности 2 является конечным $\mathbb{Z}$ -модулем нечетного порядка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1.13 и следствия 1.17 вытекает, что M является конечным модулем. Согласно лемме 2.7 многочлен $t+1$ принадлежит $\text{Ann}(M)$. Следовательно, $tv = -v$ для всех $v \in M$. В частности, если элемент v имеет порядок 2, то $tv = v$. Но это невозможно, так как M является $(t-1)$ -обратимым модулем. Следовательно, M не имеет элементов четного порядка. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. Циклическая группа G порядка $n = p_1^{r_1} \dots p_m^{r_m}$, где $p_1, \dots, p_m$ – простые числа, обладает структурой $(t-1)$ -обратимого Λ -модуля индекса унипотентности k тогда и только тогда, когда для каждого $j = 1, \dots, m$ многочлен $\sum_{i=0}^{k-1} t^i$ имеет корень $a_j \neq 1$ в поле $\mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 1.12 достаточно рассмотреть только случай, когда $m = 1$, т. е. $n = p^r$ для некоторого простого числа p .

Пусть циклическая группа G порядка $n = p^r$ имеет структуру $(t-1)$ -обратимого Λ -модуля индекса унипотентности k ; тогда ее подгруппа $G_p = p^{r-1}G$, состоящая из элементов порядка p , также является $(t-1)$ -обратимым Λ -модулем индекса унипотентности k . Поэтому $\sum_{i=0}^{k-1} t^i \in \text{Ann}(G_p)$. Пусть $v \in G_p$ – порождающий элемент группы G_p ; тогда $tv = av$ для некоторого $a \not\equiv 1 \pmod{p}$, так как G_p является $(t-1)$ -обратимым модулем. Имеем $\sum_{i=0}^{k-1} a^i v = 0$. Следовательно, $\sum_{i=0}^{k-1} a^i \equiv 0 \pmod{p}$, т. е. многочлен $\sum_{i=0}^{k-1} t^i$ имеет не равный единице корень в поле $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Обратно, пусть $a \not\equiv 1 \pmod{p}$ является корнем многочлена $\sum_{i=0}^{k-1} t^i$ в поле $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, и пусть v – порождающий элемент циклической группы G порядка p^r . Если определить действие t на $\mathbb{Z}$ -модуле G , положив $t(v) = av$, получим на группе G структуру $(t-1)$ -обратимого Λ -модуля, так как $a \not\equiv 1 \pmod{p}$. Легко видеть, что $t^k - 1 \in \text{Ann}(G)$. Предложение доказано.

ТЕОРЕМА 2.10. *Каждый нётеров $(t-1)$ -обратимый t -унипотентный Λ -модуль M конечно порожден над $\mathbb{Z}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема следует из предложения 1.15, так как для некоторого $k \in \mathbb{Z}$ многочлен $t^k - 1$ принадлежит $\text{Ann}(M)$.

Из теоремы 2.10 и структурной теоремы для конечно порожденных $\mathbb{Z}$ -модулей следует, что нётеров $(t-1)$ -обратимый t -унипотентный Λ -модуль M как $\mathbb{Z}$ -модуль изоморфен модулю

$$M \simeq M_{\text{fin}} \oplus \mathbb{Z}^k, \quad (5)$$

где M_{fin} – подмодуль модуля M , состоящий из элементов конечного порядка. Ранг k свободной части модуля M в разложении (5) называется *числом Бетти* нётерова $(t-1)$ -обратимого t -унипотентного Λ -модуля M .

ТЕОРЕМА 2.11. *Число Бетти нётерова $(t-1)$ -обратимого t -унипотентного Λ -модуля M является четным числом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению число Бетти модуля M совпадает с числом Бетти нётерова $(t-1)$ -обратимого t -унипотентного Λ -модуля $M_{\text{free}} = M/M_{\text{fin}}$.

Модуль M_{free} не имеет ненулевых элементов конечного порядка. Поэтому аннулятор Ann_v каждого его элемента v является главным идеалом, порожденным многочленом $g_v(t)$, удовлетворяющим свойствам (i)–(v) из предложения 2.5.

Пусть модуль M_{free} порождается над кольцом Λ элементами $v_1, \dots, v_m$. Тогда существует сюръективный Λ -гомоморфизм

$$f: \Lambda/\langle g_{v_1}(t) \rangle \oplus \dots \oplus \Lambda/\langle g_{v_m}(t) \rangle \rightarrow M_{\text{free}}.$$

Рассмотрим модули $\widetilde{M} = \oplus \Lambda/\langle g_{v_i}(t) \rangle$ и M_{free} как свободные $\mathbb{Z}$ -модули и обозначим через $h_{\widetilde{M}}$ и $h_{M_{\text{free}}}$ автоморфизмы соответственно модулей $\widetilde{M}$ и M_{free} ,

определенных умножением на t . Легко видеть, что характеристический многочлен $\tilde{\Delta}(t) = \det(h_{\tilde{M}} - t \text{Id})$ совпадает с точностью до знака с произведением $g_{v_1}(t) \dots g_{v_m}(t)$. Характеристический многочлен $\Delta(t) = \det(h_{M_{\text{free}}} - t \text{Id})$ является делителем многочлена $\tilde{\Delta}(t)$, так как гомоморфизм f является сюръективным и t -эквивариантным. Следовательно, все корни многочлена $\Delta(t)$ являются корнями из единицы, не равными ± 1 , и поэтому $\deg \Delta(t)$ является четным числом. В завершение доказательства заметим, что число Бетти модуля M_{free} совпадает с $\deg \Delta(t)$.

2.2. Производные модули Александера. Сопоставим каждому нётерову $(t-1)$ -обратимому Λ -модулю M бесконечную последовательность нётеровых $(t-1)$ -обратимых t -унипотентных Λ -модулей

$$A_n(M) = M/(t^n - 1)M, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Модуль $A_n(M)$ называется n -м производным модулем Александера Λ -модуля M .

Заметим, что $A_1(M) = 0$, так как M является $(t-1)$ -обратимым модулем. Также очевидно, что $A_n(A_n(M)) = A_n(M)$.

Легко видеть, что Λ -гомоморфизм $f: M_1 \rightarrow M_2$ $(t-1)$ -обратимых модулей определяет последовательность Λ -гомоморфизмов

$$f_{n*}: A_n(M_1) \rightarrow A_n(M_2),$$

$n \in \mathbb{N}$, т.е. отображение $M \mapsto \{A_n(M)\}$ является функтором из категории нётеровых $(t-1)$ -обратимых Λ -модулей в категорию бесконечных последовательностей нётеровых $(t-1)$ -обратимых t -унипотентных Λ -модулей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.12. Если $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \rightarrow 0$ является точной последовательностью нётеровых $(t-1)$ -обратимых Λ -модулей, то

$$A_n(M_2) \simeq A_n(M) / \text{im } f_{n*}(A_n(M_1)).$$

Если модуль $M = \bigoplus_{i=1}^k M_i$ является прямой суммой нётеровых $(t-1)$ -обратимых Λ -модулей M_i , то

$$A_n(M) \simeq \bigoplus_{i=1}^k A_n(M_i).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.13. Пусть p – простое число и $r \in \mathbb{N}$. Тогда для любого нётерова $(t-1)$ -обратимого Λ -модуля M его производный модуль Александера $A_{p^r}(M)$ является конечным модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 1.13 и следствия 1.17.

ПРИМЕР 2.14. Для модуля $M_m = \Lambda / \langle (m+1)t - m \rangle$, где $m \in \mathbb{N}$, его n -й производный модуль Александера

$$A_n(M_m) \simeq \mathbb{Z} / ((m+1)^n - m^n) \mathbb{Z}$$

является циклической группой порядка $(m+1)^n - m^n$ и умножение на t задано равенством

$$tv = (-1)^{n+1} m \left(\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} (m+1)^{n-i-1} \right) v$$

для всех $v \in A_n(M_m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Модуль $M_m = \Lambda / \langle (m+1)t - m \rangle$ изоморфен Λ -подмодулю $\mathbb{Z} \left[\frac{m}{m+1}, \frac{m+1}{m} \right] \subset \mathbb{Q}$, если мы положим $t = \frac{m}{m+1}$ и $tv = \frac{m}{m+1}v$ для $v \in \mathbb{Q}$. Поэтому

$$A_n(M_m) \simeq M_m / (t^n - 1)M_m \simeq \mathbb{Z} \left[\frac{m+1}{m}, \frac{m}{m+1} \right] / \left\langle \left(\frac{m}{m+1} \right)^n - 1 \right\rangle.$$

Легко видеть, что модуль $\mathbb{Z} \left[\frac{m}{m+1}, \frac{m+1}{m} \right]$ совпадает с суммой $\mathbb{Z}$ -подмодулей $\mathbb{Z} \left[\frac{1}{m+1} \right], \mathbb{Z} \left[\frac{1}{m} \right] \subset \mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Z} \left[\frac{m}{m+1}, \frac{m+1}{m} \right] = \mathbb{Z} \left[\frac{1}{m+1} \right] + \mathbb{Z} \left[\frac{1}{m} \right].$$

Действительно, очевидно, что

$$\mathbb{Z} \left[\frac{m}{m+1}, \frac{m+1}{m} \right] \subset \mathbb{Z} \left[\frac{1}{m+1} \right] + \mathbb{Z} \left[\frac{1}{m} \right].$$

Кроме того, имеем

$$\left(\frac{m+1}{m} \right)^n = \frac{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} m^{n-i}}{m^n},$$

и поэтому

$$\frac{1}{m^n} = \left(\frac{m+1}{m} \right)^n - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \frac{1}{m^i}.$$

Аналогично, имеем

$$\frac{1}{(m+1)^n} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n+1+i} \binom{n}{i} \frac{1}{(m+1)^i} + (-1)^n \left(\frac{m}{m+1} \right)^n.$$

В частности, $\frac{1}{m} = \frac{m+1}{m} - 1$ и $\frac{1}{m+1} = 1 - \frac{m}{m+1}$. По индукции получаем, что $\frac{1}{m^n}, \frac{1}{(m+1)^n} \in \mathbb{Z} \left[\frac{m}{m+1}, \frac{m+1}{m} \right]$ для всех n , и поэтому

$$\mathbb{Z} \left[\frac{1}{m+1} \right] + \mathbb{Z} \left[\frac{1}{m} \right] \subset \mathbb{Z} \left[\frac{m}{m+1}, \frac{m+1}{m} \right].$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} A_n(M_m) &\simeq \mathbb{Z} \left[\frac{m+1}{m}, \frac{m}{m+1} \right] / \left\langle \left(\frac{m}{m+1} \right)^n - 1 \right\rangle \\ &\simeq \mathbb{Z} \left[\frac{m}{m+1}, \frac{m+1}{m} \right] / \langle (m+1)^n - m^n \rangle. \end{aligned}$$

Покажем, что каждый элемент $v \in \mathbb{Z}\left[\frac{m}{m+1}, \frac{m+1}{m}\right]$ эквивалентен некоторому элементу $v_{in} \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}\left[\frac{m}{m+1}, \frac{m+1}{m}\right]$ по модулю идеала $I = \langle (m+1)^n - m^n \rangle$. Для этого достаточно показать, что для каждого k найдутся элементы $v_{in,k}, u_{in,k} \in \mathbb{Z}$ такие, что

$$\frac{1}{m^k} \equiv v_{in,k} \pmod{I}, \quad \frac{1}{(m+1)^k} \equiv u_{in,k} \pmod{I}.$$

Мы докажем существование элемента $v_{in,k}$, поскольку доказательство существования элемента $u_{in,k}$ аналогично. Имеем

$$\frac{(m+1)^n - m^n}{m^k} = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} m^{n-i-k} \equiv 0 \pmod{I},$$

и поэтому

$$\frac{1}{m^k} \equiv - \sum_{j=k+1-n}^{k-1} \binom{n}{n+j-k} \frac{1}{m^j} \pmod{I}.$$

В частности,

$$\frac{1}{m} \equiv - \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n}{n-j-1} m^j \pmod{I}.$$

Теперь существование требуемого элемента $v_{in,k}$ доказывается индукцией по k .

Из приведенного выше рассмотрения следует, что

$$A_n(M_m) \simeq \mathbb{Z}\left[\frac{m}{m+1}, \frac{m+1}{m}\right] \Big/ \langle (m+1)^n - m^n \rangle$$

является циклической группой, порожденной образом $\bar{1}$ элемента

$$1 \in \mathbb{Z}\left[\frac{m}{m+1}, \frac{m+1}{m}\right].$$

Имеем $((m+1)^n - m^n)\bar{1} = 0$, и поэтому порядок группы $A_n(M_m)$ является делителем числа $(m+1)^n - m^n$.

Покажем, что порядок группы $A_n(M_m)$ равен $(m+1)^n - m^n$. Пусть число $k \in \mathbb{Z}$ таково, что $k\bar{1} = 0$. Тогда

$$k = \left(\sum_{i_1 \leq i \leq i_2} a_i \frac{1}{(m+1)^i} + \sum_{j_1 \leq j \leq j_2} b_j \frac{1}{m^j} \right) ((m+1)^n - m^n),$$

где $a_i, b_j \in \mathbb{Z}$. Умножая обе части этого равенства на $(m+1)^{i_2}$ и m^{j_2} , если $i_2 > 0$ либо $j_2 > 0$, получим равенство

$$(m+1)^{i_2} m^{j_2} k = C((m+1)^n - m^n)$$

с некоторой константой $C \in \mathbb{Z}$, которое показывает, что число $(m+1)^n - m^n$ является делителем числа k , так как числа m , $m+1$ и $(m+1)^n - m^n$ являются взаимно простыми.

Для вычисления действия t на циклической группе

$$A_n(M_m) \simeq \mathbb{Z}/((m+1)^n - m^n)\mathbb{Z}$$

заметим, что

$$t\bar{1} = \frac{\overline{m}}{m+1} = (-1)^{n+1} m \left(\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} (m+1)^{n-i-1} \right) \bar{1},$$

так как можно показать, произведя вычисления, аналогичные приведенным выше, что

$$\frac{1}{m+1} \equiv (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} (m+1)^{n-i-1} \pmod{I}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.15. *Абелева группа G изоморфна (как $\mathbb{Z}$ -модуль) производному модулю Александра $A_2(M)$ некоторого нётерова $(t-1)$ -обратимого Λ -модуля M тогда и только тогда, когда G является конечной группой нечетного порядка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2.8 нужно только показать, что для любой конечной группы G нечетного порядка найдется нётеров $(t-1)$ -обратимый Λ -модуль M , для которого $A_2(M) \simeq G$.

Представим G в виде прямой суммы циклических групп:

$$G = \bigoplus_{i=1}^k G_i,$$

и пусть $n_i = 2m_i + 1$ – порядок группы G_i .

Для каждого i рассмотрим Λ -модуль M_{m_i} из примера 2.14. Тогда модуль $A_2(M_{m_i})$ является циклической группой порядка $(m_i + 1)^2 - m_i^2 = 2m_i + 1$. Поэтому предложение следует из предложения 2.12, если положить

$$M = \bigoplus_{i=1}^k M_{m_i}.$$

ТЕОРЕМА 2.16. *Пусть M – нётеров $(t-1)$ -обратимый t -унипотентный Λ -модуль индекса унипотентности k . Тогда последовательность его производных модулей Александра $A_1(M), \dots, A_n(M), \dots$ имеет период k , т.е. $A_n(M) \simeq A_{n+k}(M)$ для всех n . Если n и k взаимно просты, то $A_n(M) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если индекс унипотентности модуля M равен k , то согласно лемме 2.7 многочлен $f_k(t) = \sum_{i=0}^{k-1} t^i$ принадлежит $\text{Ann}(M)$. Кроме того, чтобы получить модуль $A_n(M)$ из модуля M , достаточно профакторизовать модуль M по соотношениям $f_n(t)v = 0$ для всех $v \in M$, где $f_n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} t^i$. Теперь, чтобы доказать периодичность последовательности (6), достаточно заметить, что

$$f_{n+k}(t) = t^n f_k(t) + f_n(t).$$

Пусть n и k – взаимно простые числа, и пусть многочлены $f_k(t)$ и $f_n(t)$ принадлежат идеалу $\text{Ann}(M)$. Применяя алгоритм Евклида к многочленам $f_k(t)$ и $f_n(t)$, легко показать, что найдутся многочлены $g_k(t)$ и $g_n(t)$ такие, что

$$f_k(t)g_k(t) + f_n(t)g_n(t) = 1,$$

так как числа n и k взаимно просты. Следовательно, $\text{Ann}(M) = \Lambda$, и поэтому $A_n(M) = 0$.

ПРИМЕР 2.17. Λ -модуль $M = \Lambda/\langle t^2 - t + 1 \rangle$ имеет следующие производные модули Александера:

$$A_{6k\pm 1}(M) = 0, \quad A_{6k\pm 2}(M) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad A_{6k+3}(M) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2,$$

где умножение на t в группе $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ совпадает с умножением на 2, а умножение на t в группе $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ совпадает с циклической перестановкой ненулевых элементов модуля $A_{6k+3}(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индекс унитарности модуля M равен 6, так как $t^2 - t + 1$ является делителем многочлена $t^6 - 1$. Следовательно, $A_{6k\pm 1}(M) = 0$.

Для нахождения модулей $A_{6k+2}(M)$ достаточно найти модуль $A_2(M)$. Имеем $A_2(M) = \Lambda/\langle t^2 - t + 1, t + 1 \rangle$, и так как

$$t^2 - t + 1 = (t - 2)(t + 1) + 3,$$

то $\Lambda/\langle t^2 - t + 1, t + 1 \rangle = \Lambda/\langle t + 1, 3 \rangle \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Для нахождения модулей $A_{6k+3}(M)$ достаточно найти модуль $A_3(M)$. Имеем $A_3(M) = \Lambda/\langle t^2 - t + 1, t^2 + t + 1 \rangle$, и так как

$$t^2 + t + 1 = t^2 - t + 1 + 2t,$$

то $\Lambda/\langle t^2 - t + 1, t^2 + t + 1 \rangle = \Lambda/\langle t^2 + t + 1, 2 \rangle \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

Для нахождения модулей $A_{6k+4}(M)$ достаточно найти модуль $A_4(M)$. Имеем $A_4(M) = \Lambda/\langle t^2 - t + 1, t^3 + t^2 + t + 1 \rangle$, и так как

$$t^3 + t^2 + t + 1 = (t + 2)(t^2 - t + 1) + 2t - 1,$$

то модуль $\Lambda/\langle t^2 - t + 1, t^3 + t^2 + t + 1 \rangle = \Lambda/\langle t^2 - t + 1, 2t - 1 \rangle$ изоморфен фактормодулю $M/(2t - 1)M$. Пусть v – порождающий элемент биглавногo модуля M . Легко проверить, что в базисе $v_1 = v, v_2 = tv$ модуля M над $\mathbb{Z}$ модуль $(2t - 1)M$ порождается элементами $2v_2 - v_1$ и $t(2v_2 - v_1) = v_2 - 2v_1$, так как $tv_2 = v_2 - v_1$. В новом базисе $e_1 = v_1, e_2 = v_2 - 2v_1$ имеем $2v_2 - v_1 = 2e_2 + 3e_1$, т. е. $(2t - 1)M$ порождается над $\mathbb{Z}$ элементами $3e_1$ и e_2 . Следовательно, $A_4(M) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

§ 3. Модули Александра неприводимых C -групп

3.1. Доказательство теорем 0.1 и 0.3. Напомним, что класс неприводимых C -групп совпадает с классом фундаментальных групп заузленных n -мерных многообразий V при каждом $n \geq 2$ и что группы узлов также являются C -группами, если они заданы копредставлениями Виртингера. Аналогично, класс неприводимых гурвицевских C -групп совпадает с классом фундаментальных групп дополнений к неприводимым “аффинным” гурвицевским (соответственно, псевдоголоморфным) кривым и содержит подкласс фундаментальных групп дополнений к алгебраическим плоским неприводимым аффинным кривым. Следовательно, говорить о модулях Александра заузленных n -мерных многообразий и о модулях Александра неприводимых гурвицевских (соответственно, псевдоголоморфных) кривых – это то же самое, что говорить о модулях Александра неприводимых C -групп и модулях Александра неприводимых гурвицевских C -групп. Поэтому теоремы 0.1 и 0.3 эквивалентны следующим двум теоремам.

ТЕОРЕМА 3.1. *Λ -модуль M является модулем Александра неприводимой C -группы тогда и только тогда, когда он является нётеровым $(t-1)$ -обратимым модулем.*

ТЕОРЕМА 3.2. *Λ -модуль M является модулем Александра неприводимой гурвицевской C -группы тогда и только тогда, когда он является нётеровым $(t-1)$ -обратимым t -унипотентным Λ -модулем. Индекс унипотентности модуля Александра $A_0(G)$ неприводимой гурвицевской C -группы G степени t является делителем числа t .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$G = \langle x_1, \dots, x_m \mid r_1, \dots, r_n \rangle \quad (7)$$

– C -копредставление C -группы G и $\mathbb{F}_m$ – свободная группа, свободно порожденная C -порождающими элементами $x_1, \dots, x_m$. Обозначим через $\frac{\partial}{\partial x_i}$ дифференцирование Фокса (см. [15]), т.е. эндоморфизм группового кольца $\mathbb{Z}[\mathbb{F}_m]$ над $\mathbb{Z}$ свободной группы $\mathbb{F}_m$ в себя такой, что $\frac{\partial}{\partial x_i} : \mathbb{Z}[\mathbb{F}_m] \rightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{F}_m]$ является $\mathbb{Z}$ -линейным отображением, удовлетворяющим свойствам

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{i,j}, \quad \frac{\partial uv}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} + u \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad (8)$$

для всех $u, v \in \mathbb{Z}[\mathbb{F}_m]$. Матрица

$$\mathcal{A}(G) = \nu_* \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$$

называется *матрицей Александра C -группы G* , заданной копредставлением (7), где r_i , $i = 1, \dots, n$, – определяющие соотношения группы G и гомоморфизм $\nu_* : \mathbb{Z}[\mathbb{F}_m] \rightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{F}_1] \simeq \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ индуцирован каноническим C -эпиморфизмом $\nu : \mathbb{F}_m \rightarrow \mathbb{F}_1$.

Следующая лемма является обобщением на случай C -групп хорошо известного утверждения о матрицах Александера копредставлений Виртингера групп одномерных узлов (см. [15]).

ЛЕММА 3.3. *Сумма столбцов матрицы Александера $\mathcal{A}(G)$ C -группы G , заданной копредставлением (7), равна нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждое соотношение r_i имеет вид

$$r = wx_jw^{-1}x_l^{-1},$$

где w – некоторое слово, состоящее из букв $x_1^{\pm 1}, \dots, x_m^{\pm 1}$, и x_j, x_l – некоторые две буквы.

Применяя индукцию по длине $l(w)$ слова w , покажем, что

$$\sum_{k=1}^m \nu_* \left(\frac{\partial r}{\partial x_k} \right) = 0.$$

Если $l(w) = 0$, т. е. $r := x_j x_l^{-1}$, то

$$\nu_* \left(\frac{\partial r}{\partial x_k} \right) = \begin{cases} 1, & \text{если } k = j, \\ -1, & \text{если } k = l, \\ 0, & \text{если } k \neq j \text{ и } k \neq l, \end{cases}$$

и в этом случае получаем, что $\sum_{k=1}^m \nu_* \left(\frac{\partial r}{\partial x_k} \right) = 0$.

Предположим, что для всех слов $r = wx_jw^{-1}x_l^{-1}$ имеет место равенство $\sum_{k=1}^m \nu_* \left(\frac{\partial r}{\partial x_k} \right) = 0$, если $l(w) \leq L$. Рассмотрим слово $r = wx_jw^{-1}x_l^{-1}$ длины $l(w) = L + 1$. Положим $r_1 = w_1 x_j w_1^{-1} x_l^{-1}$, где $w = x_i^\varepsilon w_1$, $\varepsilon = \pm 1$, и $l(w_1) = L$. Рассмотрим случай, когда $i \neq j$, $i \neq l$, $j \neq l$ и $\varepsilon = 1$. Так как все остальные случаи являются аналогичными, то и проверка равенства $\sum_{k=1}^m \nu_* \left(\frac{\partial r}{\partial x_k} \right) = 0$ в этих случаях аналогична.

Из (8) следует, что

$$\nu_* \left(\frac{\partial r}{\partial x_k} \right) = \begin{cases} t\nu_* \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_k} \right), & \text{если } k \neq i, \quad k \neq j, \quad k \neq l, \\ 1 + t\nu_* \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_k} \right) - t, & \text{если } k = i, \\ t\nu_* \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_k} \right), & \text{если } k = j, \\ t(\nu_* \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_k} \right) + 1) - 1, & \text{если } k = l, \end{cases}$$

и легко видеть, что $\sum_{k=1}^m \nu_* \left(\frac{\partial r}{\partial x_k} \right) = 0$. Лемма доказана.

Сопоставим каждому многочлену $a_i t^i \in \mathbb{Z}[t]$ слово

$$w_{a_i t^i}(x_1, x_2) = (x_2^i x_1 x_2^{-(i+1)})^{a_i},$$

а многочлену $g(t) = \sum_{i=0}^k a_i t^i \in \mathbb{Z}[t]$ – слово

$$w_{g(t)}(x_1, x_2) = \prod_{i=0}^k w_{a_i t^i}(x_1, x_2).$$

Затем сопоставим многочлену $f(t) = (1 - t)g(t) + 1$ слово

$$r_{f(t)}(x_1, x_2) = w_{g(t)}(x_1, x_2)x_1w_{g(t)}^{-1}(x_1, x_2)x_2^{-1}, \quad (9)$$

а также сопоставим вектору $u = (1 - t)\bar{u} = ((1 - t)g_1(t), \dots, (1 - t)g_m(t))$ слово

$$r_u(x_1, \dots, x_{m+1}) = w_u(x_1, \dots, x_{m+1})x_{m+1}w_u^{-1}(x_1, \dots, x_{m+1})x_{m+1}^{-1}, \quad (10)$$

где

$$w_u(x_1, \dots, x_{m+1}) = \prod_{i=1}^m w_{g_i(t)}(x_i, x_{m+1}).$$

ЛЕММА 3.4. Для многочлена $f(t) = (1 - t)g(t) + 1$ и вектора

$$u = ((1 - t)g_1(t), \dots, (1 - t)g_m(t))$$

имеют место следующие равенства:

$$\nu_*\left(\frac{\partial r_{f(t)}}{\partial x_1}\right) = f(t), \quad \nu_*\left(\frac{\partial r_u}{\partial x_i}\right) = (1 - t)g_i(t), \quad i = 1, \dots, m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(t) = (1 - t)g(t) + 1$. Из (8) следует, что

$$\nu_*\left(\frac{\partial w_{g(t)}(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right) = -\nu_*\left(\frac{\partial w_{g(t)}^{-1}(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right) = g(t),$$

так как $w_{g(t)}(x_1, x_2)w_{g(t)}^{-1}(x_1, x_2) = 1$, а также

$$\begin{aligned} \nu_*(w_{g(t)}(x_1, x_2)) &= \nu_*(w_{a_i t^i}(x_1, x_2)) = 1, \\ \nu_*\left(\frac{\partial w_{a_i t^i}(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right) &= a_i t^i. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \nu_*\left(\frac{\partial r_{f(t)}}{\partial x_1}\right) &= \nu_*\left(\frac{\partial (w_{g(t)}(x_1, x_2)x_1w_{g(t)}^{-1}(x_1, x_2)x_2^{-1})}{\partial x_1}\right) \\ &= g(t) + 1 - tg(t) = f(t). \end{aligned}$$

Проверка второго равенства в утверждении леммы аналогична. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Модуль Александра $A_0(G)$ C -группы G , заданной копредставлением (7), изоморфен фактормодулю $\Lambda^{m-1}/M(G)$, где подмодуль $M(G)$ модуля Λ^{m-1} порожден строками матрицы $\bar{A}$, сформированной из первых $m - 1$ столбцов матрицы Александра $A(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При описании модуля Александера C -группы G мы следуем работе [16] (см. также [8]). Сопоставим C -группе G , заданной C -копредставлением (7), двумерный комплекс K , имеющий единственную вершину x_0 , его одномерный остов является букетом ориентированных окружностей s_i , $1 \leq i \leq m$, взаимно однозначно соответствующих C -порождающим элементам группы G в копредставлении (7). Кроме того, $K \setminus (\bigcup s_i) = \bigsqcup_{i=1}^n \overset{\circ}{D}_i$ является несвязным объединением открытых дисков. Каждый диск D_i соответствует соотношению $r_i = x_{j_i,1}^{\varepsilon_{i,1}} \dots x_{j_i,k_i}^{\varepsilon_{i,k_i}}$ из копредставления (7), где $\varepsilon_{i,j} = \pm 1$, и он подклеивается к букету $\vee s_i$ с помощью отождествления границы $\partial D_j = D_j \setminus \overset{\circ}{D}_i$ с замкнутым путем $s_{j_i,1}^{\varepsilon_{i,1}} \dots s_{j_i,k_i}^{\varepsilon_{i,k_i}} \subset \vee s_i$. Ясно, что $\pi_1(K, x_0) \simeq G$.

C -гомоморфизм $\nu: G \rightarrow \mathbb{F}_1$ определяет бесконечное циклическое накрытие $f: \tilde{K} \rightarrow K$ такое, что $\pi_1(\tilde{K}) = N$ и $H_1(\tilde{K}, \mathbb{Z}) = N/N'$, где $N = \ker \nu$. Группа $\mathbb{F}_1$ действует на комплексе $\tilde{K}$.

Пусть $\tilde{K}_0 = f^{-1}(x_0)$ и $\tilde{K}_1$ – одномерный остов комплекса $\tilde{K}$. Рассмотрим следующую точную последовательность гомоморфизмов групп гомологий с коэффициентами из $\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & H_1(\tilde{K}) & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 \longrightarrow & H_2(\tilde{K}, \tilde{K}_1) & \xrightarrow{\alpha} & H_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0) & \xrightarrow{\beta} & H_1(\tilde{K}, \tilde{K}_0) & \longrightarrow 0 \quad (11) \\
 & & & & \downarrow \partial & & \\
 & & & & H_0(\tilde{K}_0) & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & &
 \end{array}$$

Действие группы $\mathbb{F}_1$ на комплексе $\tilde{K}$ задает на группах, входящих в эти последовательности, структуры Λ -модулей. Зафиксируем вершину $p_0 \in \tilde{K}_0$. Пусть $p_i = t^i p_0$ – вершина, являющаяся образом вершины p_0 в результате действия элемента $t^i \in \mathbb{F}_1$. Тогда $H_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0)$ является свободным Λ -модулем, порождающие элементы $\bar{s}_i$ которого – это ребра, соединяющие вершину p_0 с вершиной p_1 , причем эти ребра проектируются отображением f на петли s_i . Результат действия элемента t^i на порождающем элементе $\bar{s}_j$ – это ребро, начинающееся в вершине p_i , которое проектируется отображением f в петлю s_j .

Свободный Λ -модуль $H_2(\tilde{K}, \tilde{K}_1)$ порождается дисками $\bar{D}_i$, $i = 1, \dots, n$, соответствующими соотношениям $r_i = x_{j_i,1}^{\varepsilon_{i,1}} \dots x_{j_i,k_i}^{\varepsilon_{i,k_i}}$ и такими, что каждый диск $\bar{D}_i$ подклеен к одномерному остову вдоль произведения путей

$$t^{\delta(\varepsilon_{i,1})} \bar{s}_{j_i,1}^{\varepsilon_{i,1}}, t^{\delta(\varepsilon_{i,2}) + \varepsilon_{i,1}} \bar{s}_{j_i,2}^{\varepsilon_{i,2}}, \dots, t^{\delta(\varepsilon_{i,k_i}) + \sum_{l=1}^{k_i-1} \varepsilon_{i,l}} \bar{s}_{j_i,k_i}^{\varepsilon_{i,k_i}},$$

где $\delta(1) = 0$ и $\delta(-1) = -1$. Легко проверить, что координаты элементов $\alpha(\bar{D}_i) \in H_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0)$ в базисе $\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_m$ совпадают со строками $\mathcal{A}_i$ матрицы Александра $\mathcal{A}(G)$ C -группы G , заданной копредставлением (7).

Из вертикальной точной последовательности в (11) следует, что для каждого порождающего элемента $\bar{s}_i$ модуля $H_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0)$ имеет место равенство $\partial(\beta(\bar{s}_i)) = (t-1)p_0$. Выберем новый базис модуля $H_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0)$: $e_i = \bar{s}_i - \bar{s}_m$, $i = 1, \dots, m-1$, $e_m = \bar{s}_m$. Тогда $\beta(e_i) \in \ker \partial$ при $i = 1, \dots, m-1$ и $\ker \partial$ порождается элементами $\beta(e_1), \dots, \beta(e_{m-1})$. Поэтому можно отождествить модуль $H_1(\tilde{K})$ с модулем $\beta(H'_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0))$, где $H'_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0)$ – свободный Λ -подмодуль свободного модуля $H_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0)$, порожденный элементами $e_1, \dots, e_{m-1}$.

В базисе $e_1, \dots, e_m$ матрица, сформированная из координат элементов $\alpha(\bar{D}_i)$, совпадает с матрицей $\tilde{\mathcal{A}}(G)$, полученной из матрицы $\mathcal{A}(G)$ с помощью замены последнего столбца столбцом нулей. Поэтому модуль $H_1(\tilde{K})$ изоморфен фактормодулю свободного Λ -модуля $H'_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0) \simeq \bigoplus_{i=1}^{m-1} \Lambda e_i$ по подмодулю $M(G)$, порожденному строками матрицы $\tilde{\mathcal{A}}(G)$, образованной первыми $m-1$ столбцами матрицы $\mathcal{A}(G)$. Предложение доказано.

Применим предложение 1.11 для доказательства того, что нётеров $(t-1)$ -обратимый (соответственно, t -унипотентный) Λ -модуль M является модулем Александра некоторой неприводимой (соответственно, гурвицевской) C -группы. Согласно предложению 1.11 каждый нётеров $(t-1)$ -обратимый Λ -модуль M изоморфен фактормодулю Λ^m/M_1 свободного Λ -модуля Λ^m , где подмодуль M_1 порожден элементами $u_1, \dots, u_m, \dots, u_{m+k}$ модуля Λ^m такими, что:

- (i) при $i = 1, \dots, m$ имеем $u_i = (0, \dots, 0, f_i(t), 0, \dots, 0)$, где многочлен $f_i(t)$ стоит на i -м месте, причем $f_i(1) = 1$,
- (ii) $u_{m+j} = (1-t)\bar{u}_{m+j} = ((1-t)g_{j,1}(t), \dots, (1-t)g_{j,m}(t))$ при $j = 1, \dots, k$, где $g_{j,l}(t)$ – некоторые многочлены,

и если M является t -унипотентным Λ -модулем индекса унипотентности n , то можно считать, что

- (iii) при $i = 1, \dots, m$ имеем $u_{m+k+i} = (0, \dots, 0, t^n - 1, 0, \dots, 0)$, где многочлен $t^n - 1$ стоит на i -м месте.

Запишем каждый многочлен $f_i(t)$ в виде $f_i(t) = (1-t)g_i(t) + 1$ и рассмотрим C -группу

$$G = \langle x_1, \dots, x_{m+1} \mid r_1, \dots, r_{m+k} \rangle,$$

определяющие соотношения в которой – это $r_i := r_{f_i(t)}(x_i, x_{m+1})$ при $i = 1, \dots, m$ и $r_{m+j} := r_u(x_1, \dots, x_{m+1})$ при $j = 1, \dots, k$, где $r_{f(t)}$ и r_u – слова, определенные формулами (9) и (10). Обозначим $r_{m+k+i} := x_{m+1}^n x_i x_{m+1}^{-n} x_i^{-1}$, если

$$u_{m+k+i} = (0, \dots, 0, t^n - 1, 0, \dots, 0) \in M_1$$

для $i = 1, \dots, m$, и обозначим через $\bar{G}$ группу, заданную копредставлением:

$$\bar{G} = \langle x_1, \dots, x_{m+1} \mid r_1, \dots, r_{2m+k} \rangle.$$

Из леммы 3.4 следует, что матрица $\tilde{\mathcal{A}}(G)$ (соответственно, $\tilde{\mathcal{A}}(\bar{G})$), образованная из первых m столбцов матрицы Александра $\mathcal{A}(G)$ (соответственно, $\mathcal{A}(\bar{G})$), совпадает с матрицей $\mathcal{U}$ (соответственно, $\bar{\mathcal{U}}$), сформированной из строк $u_1, \dots, u_{m+k}$ (соответственно, $u_1, \dots, u_{2m+k}$). Поэтому согласно предложению 3.5 модуль Александра $A_0(G)$ (соответственно, $A_0(\bar{G})$) совпадает с модулем $M = \Lambda^n / M_1$, где M_1 – подмодуль, порожденный строками $u_1, \dots, u_{m+k}$ (соответственно, $u_1, \dots, u_{2m+k}$).

Заметим, что G (соответственно, $\bar{G}$) является неприводимой C -группой, так как все C -порождающие элементы $x_1, \dots, x_m$ сопряжены элементу x_{m+1} . Более того, $\bar{G}$ является гурвицевской C -группой. Действительно, из соотношений r_{m+k+j} , $j = 1, \dots, m$, следует, что элемент x_{m+1}^n принадлежит центру группы $\bar{G}$. Поскольку все x_i сопряжены элементу x_{m+1} , то имеют место равенства $x_i^n = x_{m+1}^n$ для всех $i = 1, \dots, m$. Следовательно, произведение $x_1^n \dots x_{m+1}^n$ также принадлежит центру группы $\bar{G}$, и группа $\bar{G}$ обладает гурвицевским копредставлением:

$$\begin{aligned} \bar{G} = \langle y_1, \dots, y_{n(m+1)} \mid & \tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_{2m+k}, \\ & y_{in+1} y_{in+j}^{-1}, i = 0, 1, \dots, m, j = 2, \dots, n, \\ & [y_i, (y_1 \dots y_{n(m+1)})], i = 1, \dots, n(m+1) \rangle, \end{aligned}$$

где соотношения $\tilde{r}_i = \tilde{r}_i(y_1, \dots, y_{n(m+1)})$ получены из соотношений $r_i = r_i(x_1, \dots, x_{m+1})$ с помощью подстановки буквы y_{jn+1} вместо буквы x_j для $j = 1, \dots, m+1$.

Следующие две леммы завершают доказательство теорем 0.1 и 0.3.

ЛЕММА 3.6 [17]. *Модуль Александра $A_0(G) = G'/G''$ неприводимой C -группы G является нётеровым $(t-1)$ -обратимым Λ -модулем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для неприводимой C -группы G ее коммутант G' совпадает с ядром C -эпиморфизма $\nu: G \rightarrow \mathbb{F}_1$. Применяв метод Рейдемейстера – Шрайера, можно показать, что если C -порождающие элементы $x_1, \dots, x_m$ порождают группу G , то элементы $a_{i,n} = x_m^n x_i x_m^{-(n+1)}$, $i = 1, \dots, m-1$, $n \in \mathbb{Z}$, порождают группу G' . Следовательно, модуль $A_0(G) = G'/G''$ порождается образами $\bar{a}_{i,n}$ элементов $a_{i,n}$ при естественном эпиморфизме $G' \rightarrow G'/G''$. Действие t на $A_0(G)$ определяется сопряжением $a \mapsto x_m a x_m^{-1}$ для $a \in G'$. Следовательно, $t\bar{a}_{i,n} = \bar{a}_{i,n+1}$. Поэтому модуль $A_0(G)$ порождается над кольцом Λ элементами $\bar{a}_{1,0}, \dots, \bar{a}_{m-1,0}$ и, следовательно, является нётеровым Λ -модулем.

Чтобы показать, что $A_0(G)$ является $(t-1)$ -обратимым Λ -модулем, заметим, что каждый элемент $g \in G$ может быть записан в виде $g = x_m^k a$, где $a \in G'$ и $k = \nu(g)$. Следовательно, группа G' порождается элементами вида $[x_m^n a, x_m^k b]$, где $a, b \in G'$, и поэтому $A_0(G)$ порождается их образами $[\bar{x}_m^n a, \bar{x}_m^k b]$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} [x_m^n a, x_m^k b] &= [x_m^n, a] (a x_m^{n+k} [b, a^{-1}] x_m^{-(n+k)} a^{-1}) [a, x_m^{n+k}] \\ &\quad \cdot (x_m^{n+k} [b, x_m^{-n}] x_m^{-(n+k)}). \end{aligned} \quad (12)$$

Из (12) следует, что

$$\begin{aligned} \overline{[x_m^n a, x_m^k b]} &= (t^n - 1)\bar{a} + (1 - t^{n+k})\bar{a} + t^{n+k}(1 - t^{-n})\bar{b} \\ &= t^n(1 - t^k)\bar{a} + t^k(t^n - 1)\bar{b} = (t - 1) \left(\sum_{i=0}^{n-1} t^{i+k}\bar{b} - \sum_{i=0}^{k-1} t^{i+n}\bar{a} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

так как $ax_m^{n+k}[b, a^{-1}]x_m^{-(n+k)}a^{-1} \in G''$. Теперь легко видеть, что умножение на $t - 1$ является эпиморфизмом модуля $A_0(G)$ в себя, так как элементы вида $\overline{[x_m^n a, x_m^k b]}$ порождают $A_0(G)$ над $\mathbb{Z}$. Чтобы завершить доказательство, осталось применить лемму 1.1.

ЛЕММА 3.7 [13]. *Модуль Александера гурвицевской неприводимой C -группы степени m является нётеровым $(t - 1)$ -обратимым t -унипотентным Λ -модулем индекса унипотентности d , где d – некоторый делитель числа m .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если G – гурвицевская группа степени m , то она порождается C -порождающими элементами $x_1, \dots, x_m$ такими, что произведение $x_1 \dots x_m$ принадлежит центру группы G . Согласно лемме 3.6 модуль Александера $A_0(G) = G'/G''$ является нётеровым $(t - 1)$ -обратимым Λ -модулем. Умножение на t в модуле $A_0(G)$ индуцировано сопряжением $a \mapsto x_m a x_m^{-1}$ для $a \in G'$. Так как $\nu(x_m^m) = \nu(x_1 \dots x_m)$, то найдется элемент $a_0 \in G'$ такой, что $x_m^m = a_0 x_1 \dots x_m$, и поэтому сопряжение на элемент x_m^m является внутренним автоморфизмом группы G' . Следовательно, индуцированный автоморфизм t^m модуля G'/G'' является тождественным.

3.2. Модули Александера C -произведений C -групп. Пусть G_1 и G_2 – две неприводимые C -группы, и пусть $x \in G_1$ (соответственно, $y \in G_2$) – один из C -порождающих элементов группы G_1 (соответственно, G_2). Рассмотрим амальгамированное произведение $G_1 *_{\{x=y\}} G_2$. Если группы G_1 и G_2 заданы C -копредставлениями:

$$\begin{aligned} G_1 &= \langle x_1, \dots, x_n \mid \mathcal{R}_1 \rangle, \\ G_2 &= \langle y_1, \dots, y_m \mid \mathcal{R}_2 \rangle, \end{aligned} \quad (14)$$

где $x = x_n$ и $y = y_m$, то группа $G_1 *_{\{x=y\}} G_2$ задается C -копредставлением

$$\langle x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{m-1}, z \mid \tilde{\mathcal{R}}_1 \cup \bar{\mathcal{R}}_2 \rangle, \quad (15)$$

в котором каждое соотношение $\tilde{r}_i \in \tilde{\mathcal{R}}_1$ (соответственно, $\bar{r}_i \in \bar{\mathcal{R}}_2$) получено из соотношения $r_i \in \mathcal{R}_1$ (соответственно, из $r_i \in \mathcal{R}_2$) с помощью подстановки буквы z вместо буквы x_n (соответственно, вместо буквы y_m).

Если $x' \in G_1$ и $y' \in G_2$ – два других C -порождающих элемента этих групп, то найдутся внутренние C -изоморфизмы $f_i: G_i \rightarrow G_i$ такие, что $f_1(x') = x$ и $f_2(y') = y$, так как все C -порождающие элементы неприводимых C -групп сопряжены друг другу. Следовательно, существует C -изоморфизм

$$f_1 * f_2: G_1 *_{\{x'=y'\}} G_2 \rightarrow G_1 *_{\{x=y\}} G_2,$$

т. е. группа $G_1 *_{\{x=y\}} G_2$ с точностью до C -изоморфизма не зависит от выбора C -порождающих элементов x и y , и поэтому эту группу будем обозначать через $G_1 *_C G_2$ и называть C -произведением неприводимых C -групп G_1 и G_2 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. *Модуль Александера C -произведения $G = G_1 *_C G_2$ неприводимых C -групп G_1 и G_2 изоморфен прямой сумме модулей Александера групп G_1 и G_2 :*

$$A_0(G) = A_0(G_1) \oplus A_0(G_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это предложение является простым следствием из предложения 3.5. Действительно, если G_1 и G_2 заданы копредставлениями (14), то согласно предложению 3.5 модуль Александера $A_0(G)$ неприводимой C -группы $G = G_1 *_C G_2$, заданной копредставлением (15), изоморфен фактормодулю $\Lambda^{n+m-1}/M(G)$, где подмодуль $M(G)$ модуля Λ^{n+m-1} порожден строками матрицы

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{A}_1 & 0 \\ 0 & \bar{A}_2 \end{pmatrix},$$

в которой $\bar{A}_1$ (соответственно, $\bar{A}_2$) – матрица, сформированная из первых $n - 1$ (соответственно, $m - 1$) столбцов матрицы $A(G_1)$ (соответственно, $A(G_2)$). Отсюда легко видеть, что $A_0(G) = A_0(G_1) \oplus A_0(G_2)$. Предложение доказано.

Пусть

$$G = \langle x_1, \dots, x_m \mid r_1, \dots, r_n \rangle \quad (16)$$

– C -копредставление C -группы G . Число $d_P = m - n$ называется C -дефицитом копредставления (16), и число $d_G = \max d_P$, где минимум взят по всем C -копредставлениям C -группы G , называется C -дефицитом группы G . Очевидно, что для C -группы, составленной из k неприводимых компонент, ее C -дефицит $d_G \leq k$ и, в частности, если G – неприводимая C -группа, то $d_G \leq 1$.

ЛЕММА 3.9. *Пусть $G = G_1 *_C G_2$ – C -произведение неприводимых C -групп G_1 и G_2 . Тогда*

$$d_G \geq d_{G_1} + d_{G_2} - 1.$$

В частности, если $d_{G_1} = d_{G_2} = 1$, то $d_G = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из формулы (15).

3.3. Графы копредставлений C -групп. Сопоставим каждому C -копредставлению (16) его *граф копредставления* Γ_P . Вершины графа Γ_P занумерованы порождающими элементами, входящими в копредставление (16) (и, в частности, вершины графа Γ_P находятся во взаимно однозначном соответствии с этими порождающими элементами), а ребра графа Γ_P взаимно однозначно соответствуют соотношениям r_j из копредставления (16), и если $r_j := w_j^{-1}(x_1, \dots, x_m)x_{i_1}w_j(x_1, \dots, x_m)x_{i_2}^{-1}$, то соответствующее ребро соединяет вершины x_{i_1} и x_{i_2} .

Очевидно, что для C -дефицита имеет место равенство

$$d_P = \dim H_0(\Gamma_P, \mathbb{R}) - \dim H_1(\Gamma_P, \mathbb{R}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что C -дефицит C -группы, заданной копредставлением

$$G = \langle x_1, x_2 \mid wx_1w^{-1}x_2^{-1} \rangle, \quad (18)$$

где $w = w(x_1, x_2)$ – слово, состоящее из букв x_1, x_2 и обратных к ним, равен единице. Применяя предложение 3.5, видим, что модуль Александера $A_0(G)$ неприводимой C -группы G , заданной копредставлением (18), является биглавым $(t-1)$ -обратимым Λ -модулем.

Обратно, при доказательстве теоремы 3.1 было показано, что каждый биглавный $(t-1)$ -обратимый Λ -модуль $M = \Lambda/\langle f(t) \rangle$ является модулем Александера некоторой неприводимой C -группы, заданной копредставлением (18). Поэтому доказательство предложения следует из предложения 3.8 и замечания 3.10.

СЛЕДСТВИЕ 3.13. Пусть $M = \bigoplus_{i=1}^m M_i$ – прямая сумма биглавных $(t-1)$ -обратимых Λ -модулей $M_i = \Lambda/\langle f_i(t) \rangle$. Тогда для каждого $n \geq 2$ найдется заузленная сфера $S^n \subset S^{n+2}$ такая, что

$$A_0(\pi_1(S^{n+2} \setminus S^n)) \simeq M.$$

В частности, $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ является многочленом Александера $\Delta(t)$ некоторой заузленной сферы $S^n \subset S^{n+2}$ при $n \geq 2$ тогда и только тогда, когда $f(1) = \pm 1$. Более того, жордановы блоки в жордановой канонической форме матрицы автоморфизма $h_{\mathbb{C}}$, действующего на пространстве $A_0(S^n) \otimes \mathbb{C}$, могут быть произвольных размеров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [1] было показано, что если неприводимая C -группа задана простым C -копредставлением, граф которого является деревом, то для каждого $n \geq 2$ найдется заузленная сфера $S^n \subset S^{n+2}$ такая, что $\pi_1(S^{n+2} \setminus S^n) \simeq G$. Следствие доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.14. Пусть G – неприводимая C -группа, имеющая C -дефицит $d_G = 1$. Тогда ее модуль Александера $A_0(G)$ не имеет ненулевых элементов $\mathbb{Z}$ -крючения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть группа G задана C -копредставлением:

$$G = \langle x_1, \dots, x_m \mid r_1, \dots, r_{m-1} \rangle. \quad (19)$$

Согласно предложению 3.5 ее модуль Александера $A_0(G)$ изоморфен фактормодулю $\Lambda^{m-1}/M(G)$, где подмодуль $M(G)$ модуля Λ^{m-1} порожден строками матрицы $\bar{\mathcal{A}}$, состоящей из первых $m-1$ столбцов матрицы Александера $\mathcal{A}(G)$ группы G , заданной копредставлением (19). Поэтому матрица $\bar{\mathcal{A}}$ имеет размер $(m-1) \times (m-1)$.

ЛЕММА 3.15. Определитель $\Delta(t) = \det \bar{\mathcal{A}}$ матрицы $\bar{\mathcal{A}}$ обладает следующим свойством: $\Delta(1) = \pm 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО совпадает с доказательством аналогичного утверждения для групп узлов (см. доказательство, например, в [15]).

Обозначим через $\mathcal{A}_j$, $j = 1, \dots, m-1$, строки матрицы $\bar{\mathcal{A}}$. Модуль $A_0(G)$ имеет ненулевой элемент $\mathbb{Z}$ -кручения тогда и только тогда, когда найдется вектор $u = (f_1(t), \dots, f_{m-1}(t))$ такой, что $u \notin M(G)$ и $ku \in M(G)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что такой вектор u существует. Тогда существуют такие элементы $g_j(t) \in \Lambda$, что $ku = \sum g_j(t)\mathcal{A}_j$ и хотя бы у одного из этих $g_j(t)$ один из его коэффициентов не делится на k .

Не ограничивая общности, можем предполагать, что все элементы $f_i(t)$ и $g_j(t)$ принадлежат кольцу $\mathbb{Z}[t]$. По теореме Крамера имеем

$$g_j(t) = \frac{\Delta_j(t)}{\Delta(t)},$$

где $\Delta_j(t)$ – определитель матрицы, полученной из матрицы $\bar{\mathcal{A}}$ после подстановки строки ku вместо строки $\mathcal{A}_j$. Следовательно, все коэффициенты всех многочленов $\frac{\Delta_j(t)}{\Delta(t)}$ делятся на k . Противоречие. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.16. Если G является неприводимой C -группой, заданной копредставлением, C -дефицит которого $d_P = d_G = 1$, то определитель $\Delta(t) = \det \bar{\mathcal{A}}$ матрицы $\bar{\mathcal{A}}$, полученной из матрицы Александра $\mathcal{A}$ после удаления ее последнего столбца, совпадает с многочленом Александра $\Delta_G(t)$ группы G .

3.5. Конечно порожденные над $\mathbb{Z}$ модули Александра неприводимых C -групп. Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.17. *Модуль Александра $A_0(G)$ неприводимой C -группы G конечно порожден над $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда старший коэффициент a_n и свободный член a_0 многочлена Александра $\Delta_G(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$ группы G равны ± 1 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 3.1 модуль $A_0(G)$ является нётеровым $(t-1)$ -обратимым Λ -модулем. Пусть $A_0(G)_{\text{fin}}$ – подмодуль $\mathbb{Z}$ -кручения модуля Александра $A_0(G)$. Из теоремы 1.16 следует, что модуль $A_0(G)_{\text{fin}}$ является конечно порожденным над $\mathbb{Z}$.

Рассмотрим фактормодуль $M = A_0(G)/A_0(G)_{\text{fin}}$. Он свободен от элементов $\mathbb{Z}$ -кручения. Поэтому существует естественное вложение $M \hookrightarrow M_{\mathbb{Q}} = M \otimes \mathbb{Q}$. Имеем $\dim_{\mathbb{Q}} M_{\mathbb{Q}} < \infty$, так как M – нётеров модуль Λ -кручения.

Обозначим через $h_{\mathbb{Q}}$ автоморфизм модуля $M_{\mathbb{Q}}$, индуцированный умножением на t . Тогда по определению имеем $\Delta_G(t) = a \det(h_{\mathbb{Q}} - t \text{Id})$, где $a \in \mathbb{N}$ – это наименьшее натуральное число такое, что $a \det(h_{\mathbb{Q}} - t \text{Id}) \in \mathbb{Z}[t]$.

Если модуль Александра $A_0(G)$ конечно порожден над $\mathbb{Z}$, то M также является конечно порожденным $\mathbb{Z}$ -модулем. Обозначим через h автоморфизм модуля M , индуцированный умножением на t . Имеем $\det h = \pm 1$ и

$$\det(h - t \text{Id}) = \det(h_{\mathbb{Q}} - t \text{Id}) \in \mathbb{Z}[t].$$

Следовательно, $\Delta_G(t) = \det(h - t \text{Id})$, и его старший коэффициент равен $a_n = (-1)^n$, где $n = \text{rk } M$, а $a_0 = \det h = \pm 1$.

Пусть старший коэффициент a_n и свободный член a_0 многочлена Александра $\Delta_G(t)$ группы G равны ± 1 . Из теоремы Кэли–Гамильтона следует, что $\Delta_G(t) \in \text{Ann}(M_{\mathbb{Q}})$. Поэтому $\Delta_G(t) \in \text{Ann}(M)$ и модуль M является конечно порожденным над $\mathbb{Z}$ согласно предложению 1.15. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.18. Пусть неприводимая C -группа G задана C -копредставлением: $G = \langle x_1, \dots, x_m \mid r_1, \dots, r_n \rangle$, и пусть $A(G)$ – ее матрица Александра. Тогда многочлен Александра $\Delta_G(t)$ совпадает (с точностью до умножения на $\pm t^k$) с наибольшим общим делителем всех миноров $(m-1)$ -го порядка матрицы $A(G)$.

3.6. Модули Александра некоторых неприводимых C -групп. В завершение этого параграфа вычислим модули Александра для некоторых неприводимых C -групп.

ПРИМЕР 3.19. Модуль Александра $A_0(\text{Br}_{m+1})$ группы кос Br_{m+1} является тривиальным модулем, если $m \geq 4$ (либо $m = 1$), и изоморфен модулю $\Lambda/\langle t^2 - t + 1 \rangle$ при $m = 2, 3$.

Этот пример является хорошо известным утверждением, но для полноты изложения приведем его доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа кос Br_{m+1} задается копредставлением

$$\text{Br}_{m+1} = \langle x_1, \dots, x_m \mid [x_i, x_j] \text{ при } |i - j| \geq 2, \\ x_i x_{i+1} x_i x_{i+1}^{-1} x_i^{-1} x_{i+1}^{-1} \text{ при } i = 1, \dots, m-1 \rangle.$$

Заметим, что это копредставление является C -копредставлением неприводимой C -группы.

Согласно предложению 3.5 для вычисления модуля $A_0(\text{Br}_{m+1})$ нужно найти матрицу $\bar{A}(\text{Br}_{m+1})$.

Соотношения $[x_m, x_i]$, $i = 1, \dots, m-2$, дают строки

$$(0, \dots, 0, t-1, 0, \dots, 0), \quad (20)$$

в которых многочлен $t-1$ стоит на i -м месте для $i = 1, \dots, m-2$, и если $m \geq 4$, то соотношение $[x_{m-1}, x_1]$ дает строку

$$(t-1, 0, \dots, 0, 1-t). \quad (21)$$

Если $m \geq 4$, то строки из (20) вместе со строкой (21) порождают подмодуль $(t-1)\Lambda^{m-1}$ модуля Λ^{m-1} . С другой стороны, эти строки принадлежат модулю $M(\text{Br}_{m+1})$. Следовательно, $A_0(\text{Br}_{m+1}) = 0$, так как модуль $A_0(\text{Br}_{m+1}) \simeq \Lambda^{m-1}/M(\text{Br}_{m+1})$ является нётеровым $(t-1)$ -обратимым Λ -модулем и, кроме того, $(t-1)\Lambda^{m-1} \subset M(\text{Br}_{m+1})$.

Если $m = 2$, то имеется только одно соотношение в копредставлении группы Br_3 , именно

$$r := x_1 x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1}.$$

Имеем $\nu_*\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right) = 1 + t^2 - t$ и, следовательно, $A_0(\text{Br}_3) \simeq \Lambda/\langle t^2 - t + 1 \rangle$.

Если $m = 3$, то имеется только три соотношения в копредставлении группы Br_4 , именно

$$\begin{aligned} r_1 &:= x_1 x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1}, \\ r_2 &:= x_2 x_3 x_2 x_3^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1}, \\ r_3 &:= x_1 x_3 x_1^{-1} x_3^{-1}. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \nu_*\left(\frac{\partial r_1}{\partial x_1}\right) &= -\nu_*\left(\frac{\partial r_1}{\partial x_2}\right) = \nu_*\left(\frac{\partial r_2}{\partial x_2}\right) = t^2 - t + 1, \\ \nu_*\left(\frac{\partial r_3}{\partial x_1}\right) &= 1 - t. \end{aligned}$$

Следовательно, модуль $M(\text{Br}_3) \subset \Lambda^2$ порождается векторами

$$v_1 = (t^2 - t + 1, -(t^2 - t + 1)), \quad v_2 = (0, t^2 - t + 1), \quad v_3 = (1 - t, 0),$$

и поэтому $A_0(\text{Br}_3) \simeq \Lambda/\langle t^2 - t + 1 \rangle$.

ПРИМЕР 3.20. Модуль Александера C -группы

$$G_m = \langle x_1, x_2 \mid (x_1^{-1} x_2)^m x_1 (x_1^{-1} x_2)^{-m} x_2^{-1} \rangle, \quad m \in \mathbb{N},$$

изоморфен модулю $A_0(G) \simeq \Lambda/\langle (m+1)t - m \rangle$.

Эти неприводимые C -группы интересны тем, что они не являются хопфовыми группами при $m \geq 2$ и, следовательно, не являются конечно аппроксимируемыми. (Группа G_m изоморфна группе Баумслага–Солитера $\langle a, x_1 \mid x_1^{-1} a^m x_1 a^{-(m+1)} \rangle$ (см. [18]), если положить $x_2 = x_1 a$.) Отметим также, что согласно следствию 3.13 каждая из этих групп может быть реализована как $\pi_1(S^4 \setminus S^2)$ для некоторой заузленной сферы $S^2 \subset S^4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямые вычисления приводят к равенству

$$\nu_*\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right) = -mt^{-1} + m + 1,$$

где $r := (x_1^{-1} x_2)^m x_1 (x_1^{-1} x_2)^{-m} x_2^{-1}$. Следовательно, модуль Александера $A_0(G)$ изоморфен $\Lambda/\langle (m+1)t - m \rangle$.

§ 4. Первые группы гомологий циклических накрытий

4.1. Доказательство теорем 0.2 и 0.5. Теоремы 0.2 и 0.5 будем доказывать одновременно.

В обозначениях, использованных во введении, пусть X – это либо сфера S^{n+2} (случай I), либо проективная плоскость $\mathbb{CP}^2$ (случай II), и пусть X' –

это соответственно либо дополнение к заузленному n -мерному многообразию V в сфере S^{n+2} , либо дополнение к объединению неприводимой гурвицевской кривой H и “бесконечно удаленной” прямой L в проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$. Напомним, что фундаментальная группа $G = \pi_1(X')$ является неприводимой C -группой.

Рассмотрим бесконечное циклическое накрытие $f = f_\infty: X_\infty \rightarrow X'$, соответствующее C -эпиморфизму $\nu: G \rightarrow \mathbb{F}_1$ с ядром $\ker \nu = G'$. Пусть $h \in \text{Deck}(X_\infty/X') \simeq \mathbb{F}_1$ – накрывающее преобразование, соответствующее C -порождающему элементу $x \in \mathbb{F}_1$. Пространство X' будет рассматриваться как факторпространство $X' = X_\infty/\mathbb{F}_1$. В этой ситуации Милнор [19] рассмотрел точную последовательность цепных комплексов

$$0 \rightarrow C.(X_\infty) \xrightarrow{h-\text{id}} C.(X_\infty) \xrightarrow{f_*} C.(X') \rightarrow 0,$$

которая приводит к точной последовательности групп гомологий с целыми коэффициентами:

$$\cdots \rightarrow H_1(X_\infty) \xrightarrow{t-\text{id}} H_1(X_\infty) \xrightarrow{f_*} H_1(X') \xrightarrow{\partial} H_0(X_\infty) \rightarrow 0, \quad (22)$$

где $t = h_*$.

Действие h_* определяет на каждой группе $H_i(X_\infty)$ структуру Λ -модуля (так что $H_1(X_\infty) \simeq G'/G''$ – модуль Александра C -группы G). Если группы $H_i(X')$ рассматривать как Λ -модули, на которых t действует тривиально, то последовательность (22) превращается в точную последовательность Λ -модулей. Отметим, что действие $t \in \Lambda$ на группе $H_0(X_\infty) \simeq \mathbb{Z}$ является тривиальным, т. е. умножение на t является тождественным автоморфизмом группы $H_0(X_\infty)$.

Если $\langle h^k \rangle \subset \mathbb{F}_1$ – бесконечная циклическая группа, порожденная элементом h^k , то многообразие X'_k можно рассматривать как фактормногообразие: $X'_k = X_\infty/\langle h^k \rangle$, кроме того, $X' = X'_k/\mu_k$, где $\mu_k = \mathbb{F}_1/\langle h^k \rangle$ – циклическая группа порядка k . Обозначим через h_k автоморфизм многообразия X'_k , индуцированный автоморфизмом h . Тогда h_k является порождающим элементом группы накрывающих преобразований $\text{Deck}(X'_k/X') = \mu_k$, действующей на многообразии X'_k .

Легко видеть, что в случае I многообразие X'_k можно вложить в компактное гладкое многообразие X_k , удовлетворяющее следующим условиям:

(i) действие h_k на многообразии X'_k и отображение $f'_k: X'_k \rightarrow X'$ продолжаются до действия на многообразии X_k (обозначим его снова через h_k) и до гладкого отображения

$$f_k: X_k \rightarrow X \simeq X_k/\{h_k\};$$

(ii) множество неподвижных точек действия h_k совпадает с $f_k^{-1}(V) = \bar{V}$ и ограничение $f_{k|\bar{V}}: \bar{V} \rightarrow V$ отображения f_k на $\bar{V}$ является гладким изоморфизмом.

В случае II накрытие f'_k может быть продолжено до отображения $\tilde{f}_{k \text{ norm}}: \tilde{X}_{k, \text{ norm}} \rightarrow X$, разветвленного вдоль кривой H и, возможно, вдоль L , где $\tilde{X}_{k, \text{ norm}}$ – некоторое многообразие, являющееся особым аналитическим многообразием в окрестности его конечного множества особых точек. Пусть

$\sigma: \bar{X}_k \rightarrow \tilde{X}_{k,\text{norm}}$ – разрешение особенностей, $E = \sigma^{-1}(\text{Sing } \tilde{X}_{k,\text{norm}})$ – прообраз множества особых точек многообразия $\tilde{X}_{k,\text{norm}}$ и $\bar{f}_k = \tilde{f}_{k,\text{norm}} \circ \sigma$. Обозначим через $R = \tilde{f}_{k,\text{norm}}^{-1}(H)$ и $R_\infty = \tilde{f}_{k,\text{norm}}^{-1}(L)$ прообразы кривой H и прямой L . Заметим, что ограничение отображения $\tilde{f}_{k,\text{norm}}$ на многообразии R является взаимно однозначным отображением, а ограничение отображения $\tilde{f}_{k,\text{norm}}$ на многообразии R_∞ является k_0 -листным циклическим накрытием, где $k_0 = \text{НОК}(k, m)$, и индекс ветвления отображения $\tilde{f}_{k,\text{norm}}$ вдоль R_∞ равен $k_\infty = \frac{k}{k_0}$. Как и в алгебраическом случае, легко показать, что многообразие R_∞ является неприводимым. Обозначим через $\bar{R} = \sigma^{-1}(R)$ прообраз многообразия R . Заметим, что число k_0 является делителем числа m . Положим $m_0 = \frac{m}{k_0}$. Имеем $m_0 \in \mathbb{N}$.

Обозначим через $X_k = \bar{X}_k \setminus E$ неособую часть многообразия $\tilde{X}_{k,\text{norm}}$. Имеем два вложения $i_k: X'_k \hookrightarrow X_k$ и $j_k: X_k \hookrightarrow \bar{X}_k$.

В случаях I и II действие h_k на многообразии X_k индуцирует на группе $H_1(X_k, \mathbb{Z})$ (соответственно, на $H_1(X'_k, \mathbb{Z})$) структуру Λ -модуля такую, что гомоморфизм

$$i_{k*}: H_1(X'_k, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X_k, \mathbb{Z}),$$

индуцированный вложением $i: X'_k \hookrightarrow X_k$, является Λ -гомоморфизмом. Очевидно, что гомоморфизм i_{k*} является эпиморфизмом.

В случае I пусть $S \subset X_k$ – росток гладкой поверхности, пересекающей трансверсально многообразие $\bar{V}$ в точке $p \in \bar{V}$, и пусть $\bar{\gamma} \subset S$ – окружность малого радиуса с центром в точке p . Тогда $\ker i_{k*}$ порождается классом гомологий $[\bar{\gamma}] \in H_1(X'_k, \mathbb{Z})$, содержащим цикл $\bar{\gamma}$, так как $\bar{V}$ является гладким связным подмногообразием многообразия X_k коразмерности два.

Очевидно, что $t([\bar{\gamma}]) = [\bar{\gamma}]$, где $t = h_{k*}$, и

$$f_{k*}([\bar{\gamma}]) = \pm k[\gamma] \in H_1(X', \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z},$$

где $[\gamma]$ – порождающий элемент группы $H_1(X', \mathbb{Z})$, представленный простой петлей γ , обходящей вокруг V и лежащей в трансверсальной к V поверхности.

В случае II пусть $S \subset X_k$ – росток гладкой поверхности, пересекающей трансверсально многообразие R в точке $p \in R$, и пусть $\bar{\gamma} \subset S$ – окружность малого радиуса с центром в точке p . Очевидно, что класс гомологий $[\bar{\gamma}] \in H_1(X'_k, \mathbb{Z})$ является инвариантным при умножении на t и $f_{k*}([\bar{\gamma}]) = k[\gamma]$, где $[\gamma]$ – порождающий элемент группы $H_1(\mathbb{CP}^2 \setminus (H \cup L), \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

Аналогично, пусть комплексная прямая $L_1 \subset \mathbb{CP}^2$ пересекает трансверсально прямую L в точке $q \in L \setminus H$, и пусть γ_∞ – простая малая петля, лежащая в L_1 и обходящая вокруг точки q . Тогда прообраз $f_k^{-1}(\gamma_\infty)$ распадается в несвязное объединение k_0 простых петель $\bar{\gamma}_{\infty,i}$, $i = 1, \dots, k_0$. Так как многообразие R_∞ неприводимо, то каждые две петли $\bar{\gamma}_{\infty,i}$ и $\bar{\gamma}_{\infty,j}$ принадлежат одному и тому же классу гомологий группы $H_1(X'_k, \mathbb{Z})$ (обозначим его через $[\bar{\gamma}_\infty]$). Легко видеть, что $t(\bar{\gamma}_{\infty,i}) = \bar{\gamma}_{\infty,i+1}$. Следовательно, класс гомологий $[\bar{\gamma}_\infty] \in H_1(X'_k, \mathbb{Z})$ является инвариантным при умножении на t . Отметим также, что $f_{k*}([\bar{\gamma}_\infty]) = k_\infty m[\gamma] = k m_0[\gamma]$, так как $[\gamma_\infty] = m[\gamma]$.

ЛЕММА 4.1. Λ -модуль $H_1(X'_k, \mathbb{Z})$ изоморфен модулю

$$A_k(G) \oplus H_1(X'_k)_1 \simeq A_k(G) \oplus \mathbb{Z},$$

где $A_k(G)$ – k -й производный модуль Александера C -группы G , а

$$H_1(X'_k)_1 = \{h \in H_1(X'_k, \mathbb{Z}) \mid (t-1)h = 0\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для вычисления групп $H_1(X'_k, \mathbb{Z})$ применим точную последовательность

$$\cdots \rightarrow H_1(X_\infty, \mathbb{Z}) \xrightarrow{t^k - \text{id}} H_1(X_\infty, \mathbb{Z}) \xrightarrow{g_{k*}} H_1(X'_k, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} H_0(X_\infty, \mathbb{Z}) \rightarrow 0 \quad (23)$$

для бесконечного циклического накрытия $g_k = g_{\infty, k}: X_\infty \rightarrow X'_k$, которая строится аналогично последовательности (22).

Последовательность (23) приводит к точной последовательности

$$0 \rightarrow H_1(X_\infty)/(t^k - 1)H_1(X_\infty) \xrightarrow{g_{k*}} H_1(X'_k) \xrightarrow{\partial} H_0(X_\infty) \rightarrow 0, \quad (24)$$

которая является точной последовательностью Λ -модулей.

Введем следующие обозначения:

$$M_1 = \ker \partial = \text{im } g_{k*} \simeq H_1(X_\infty)/(t^k - 1)H_1(X_\infty)$$

и $M_2 = H_1(X'_k)_1$.

Имеем $H_0(X_\infty, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$. Выберем порождающий элемент $u \in H_0(X_\infty, \mathbb{Z})$, и пусть $v_1 \in H_1(X'_k, \mathbb{Z})$ – такой элемент, что $\partial(v_1) = u$. Тогда $(t-1)v_1 \in \ker \partial$, так как $H_0(X_\infty, \mathbb{Z})$ является тривиальным Λ -модулем и ∂ является Λ -гомоморфизмом. Зафиксируем этот элемент v_1 .

Согласно теоремам 0.1 и 0.3 модуль $H_1(X_\infty, \mathbb{Z}) = A_0(G)$ является нётеровым $(t-1)$ -обратимым Λ -модулем. Поэтому согласно предложению 1.6

$$M_1 \simeq H_1(X_\infty)/(t^k - 1)H_1(X_\infty) = A_k(G)$$

также является нётеровым $(t-1)$ -обратимым Λ -модулем, и из теоремы 1.10 следует, что найдется такой многочлен $g_1(t) \in \text{Ann}(M_1)$, что $g_1(1) = 1$. Зафиксируем этот многочлен $g_1(t)$.

Рассмотрим элемент $\bar{v}_1 = g_1(t)v_1$. Имеем $\partial(\bar{v}_1) = g_1(1)u = u$, и поэтому

$$(t-1)\bar{v}_1 = (t-1)g_1(t)v_1 = g_1(t)(t-1)v_1 = 0,$$

так как $(t-1)v_1 \in M_1$. Следовательно, $\bar{v}_1 \in M_2$.

Заметим, что $M_1 \cap M_2 = 0$, так как M_1 является $(t-1)$ -обратимым модулем. Следовательно, ∂ отображает модуль M_2 изоморфно на $H_0(X_\infty, \mathbb{Z})$, т. е. точная последовательность (24) расщепляется, и поэтому $H_1(X'_k, \mathbb{Z}) \simeq M_1 \oplus M_2$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.2. Для гомоморфизма $f_{k*}: H_1(X'_k, \mathbb{Z}) \rightarrow H_0(X', \mathbb{Z})$ имеет место:

- (i) $\ker f_{k*} = A_k(G) \subset H_1(X'_k, \mathbb{Z})$;
- (ii) $\operatorname{im} f_{k*} = k\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \simeq H_1(X', \mathbb{Z})$ и ограничение гомоморфизма f_{k*} на $H_1(X'_k)_1$ является изоморфизмом группы $H_1(X'_k)_1$ с ее образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа $H_1(X', \mathbb{Z})$ изоморфна группе $G/G' \simeq \mathbb{Z}$. Аналогично, группа $H_1(X'_k, \mathbb{Z})$ изоморфна группе G_k/G'_k , где $G_k = \ker \nu_k$,

$$\nu_k = \operatorname{mod}_k \circ \nu: G \rightarrow \mu_k = \mathbb{Z}/\langle h^k \rangle,$$

и гомоморфизм $f_{k*}: H_1(X'_k, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X', \mathbb{Z})$ совпадает с гомоморфизмом

$$i_{k*}: G_k/G'_k \rightarrow G/G',$$

индуцированным вложением $i_k: G_k \hookrightarrow G$.

Пусть C -группа G задана C -представлением (7). Чтобы описать ядро $\ker i_{k*}$ и образ $\operatorname{im} i_{k*}$, рассмотрим еще раз двумерный комплекс K , описанный в п. 3.1. Напомним, что комплекс K имеет единственную вершину x_0 , его одномерный остов является букетом ориентированных окружностей s_j , $1 \leq j \leq t$, взаимно однозначно соответствующих порождающим элементам группы G , входящим в копредставление (7), и $K \setminus (\bigcup_{j=1}^l \mathring{D}_j)$ является несвязным объединением открытых дисков $\mathring{D}_j$, $j = 1, \dots, l$, каждый из которых соответствует соотношению r_j , входящему в копредставление (7) (здесь через l обозначено число соотношений r_i в копредставлении (7)).

Вложение групп $i_k: G_k \hookrightarrow G$ определяет неразветвленное накрытие $f_k: K_k \rightarrow K$, где K_k – двумерный комплекс, имеющий k вершин $p_1, \dots, p_k$, причем $f_k(p_j) = x_0$; прообраз $f^{-1}(s_j) = \bigsqcup_{s=1}^k \bar{s}_{j,s}$ каждого ребра s_j является несвязным объединением k ребер $\bar{s}_{j,s}$, $1 \leq s \leq k$; и прообраз $f^{-1}(\mathring{D}_j) = \bigsqcup_{s=1}^k \mathring{D}_{j,s}$ каждого диска $\mathring{D}_j$ также является несвязным объединением k открытых дисков $\mathring{D}_{j,s}$, $1 \leq s \leq k$.

Пусть h_k – порождающий элемент группы накрывающих преобразований $\operatorname{Deck}(K_k/K) = \mu_k$, действующей на комплексе K_k . Гомеоморфизм h_k индуцирует действие h_{k*} на цепном комплексе $C.(K_k)$ и действие t на группах $H_i(K_k, \mathbb{Z})$, так что это действие определяет на группах $H_i(K_k, \mathbb{Z})$ структуры Λ -модулей. Легко видеть, что эта структура на $H_1(K_k, \mathbb{Z})$ совпадает с определенной выше структурой на $H_1(X'_k, \mathbb{Z})$, если мы отождествим группы $H_1(K_k, \mathbb{Z})$ и $H_1(X'_k, \mathbb{Z})$ с помощью изоморфизмов $H_1(K_k, \mathbb{Z}) \simeq G_k/G'_k$ и $H_1(X'_k, \mathbb{Z}) \simeq G_k/G'_k$.

Рассмотрим точную последовательность цепных комплексов

$$C.(K_k) \xrightarrow{h_{k*} - \operatorname{id}} C.(K_k) \xrightarrow{f_{k*}} C.(K) \rightarrow 0.$$

Легко видеть, что имеют место равенства $\operatorname{im}(h_{k*} - \operatorname{id}) = \ker f_{k*}$ и

$$\ker(h_{k*} - \operatorname{id}) = \left(\sum_{j=0}^{k-1} h_{k*}^j \right) C.(K_k),$$

и поэтому доказательство леммы следует из точной последовательности

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_1(C.(K_k/\ker(h_{k*} - \text{id}))) &\xrightarrow{t^k-1} H_1(K_k) \xrightarrow{f_{k*}} H_1(K) \\ &\xrightarrow{\partial} H_0(C.(K_k/\ker(h_{k*} - \text{id}))) \xrightarrow{t^k-1} H_0(K_k) \xrightarrow{f_{k*}} H_0(K) \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (25)$$

так как

$$\begin{aligned} \text{im}[H_1(C.(K_k/\ker(h_{k*} - \text{id}))) &\xrightarrow{t^k-1} H_1(K_k)] = A_k(G), \\ H_1(K) &\simeq \mathbb{Z}, \\ H_0(C.(K_k/\ker(h_{k*} - \text{id}))) &\simeq \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, \\ H_0(K_k) &\xrightarrow{f_{k*}} H_0(K) \simeq \mathbb{Z} \end{aligned}$$

являются Λ -модулями, на которых t действует тривиально, и точная последовательность (25) является последовательностью Λ -гомоморфизмов Λ -модулей. Лемма доказана.

Теперь теорема 0.2 следует из лемм 4.1 и 4.2, так как ядро $\ker i_{k*}$ порождается элементом $[\bar{\gamma}] \in H_1(X'_1)$ и имеет место равенство $f_{k*}([\bar{\gamma}]) = k[\gamma]$.

Аналогично, в случае II имеем $\ker i_{k*} = H_1(X'_1)_1$. Действительно, ядро $\ker i_{k*}$ порождается элементами $\bar{\gamma}$ и $\bar{\gamma}_\infty \in H_1(X'_1)_1 \simeq \mathbb{Z}$, и, кроме того, $f_{k*}([\bar{\gamma}]) = k[\gamma]$. Следовательно, группа $H_1(X'_1)_1$ порождается элементом $[\bar{\gamma}]$.

В качестве следствия получаем, что ограничение гомоморфизма i_{k*} на подмодуль $A_k(G)$ модуля $H_1(X'_1, \mathbb{Z})$ является изоморфизмом модуля $A_k(G)$ с модулем $H_1(X_k, \mathbb{Z})$, и поэтому следующая лемма влечет теорему 0.5.

ЛЕММА 4.3 [6]. Гомоморфизм $j_{k*}: H_1(X_k, \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(\bar{X}_k, \mathbb{Q})$ является изоморфизмом.

4.2. Следствия из теорем 0.2 и 0.5. Приведем некоторые следствия, вытекающие из теорем 0.2 и 0.5.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Пусть V – заузленное n -мерное многообразие, $n \geq 1$, и $f_k: X_k \rightarrow S^{n+2}$ – циклическое накрытие степени k , разветвленное вдоль V . Тогда:

- (i) первое число Бетти $b_1(X_k)$ многообразия X_k является четным числом;
- (ii) если $k = p^r$, где p – простое число, то $H_1(X_k, \mathbb{Z})$ является конечной группой;

(iii) конечно порожденная абелева группа G может быть реализована как $H_1(X_k, \mathbb{Z})$ для некоторого заузленного n -мерного многообразия V при $n \geq 2$ тогда и только тогда, когда существует автоморфизм $h \in \text{Aut}(G)$ такой, что $h^k = \text{Id}$ и $h - \text{Id}$ также является автоморфизмом группы G ; в частности, $H_1(X_2, \mathbb{Z})$ является конечной абелевой группой нечетного порядка, и любая конечная абелева группа G нечетного порядка может быть реализована как $H_1(X_2, \mathbb{Z})$ для некоторой заузленной n -мерной сферы при $n \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теорем 0.1, 0.2, 2.11, предложения 2.13, следствия 3.13 и примеров 2.14, 3.20.

Теоремы 0.3 и 2.10 влекут следствие 0.4.

Следствие 0.6 непосредственно вытекает из леммы 4.3 и следствия 4.5, так как гомоморфизм $j_{k*}: H_1(X_k, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\bar{X}_k, \mathbb{Z})$ является изоморфизмом и имеет место изоморфизм $H_1(\bar{X}_k, \mathbb{Q}) \simeq A_k(H) \otimes \mathbb{Q}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.5. Пусть H – алгебраическая (соответственно, гурвицевская либо псевдоголоморфная) неприводимая кривая в $\mathbb{CP}^2$, $\deg H = m$, и $\bar{f}_k: \bar{X}_k \rightarrow \mathbb{CP}^2$ – разрешение особенностей циклического накрытия степени k , разветвленного вдоль кривой H и, возможно, вдоль “бесконечно удаленной” прямой L , и пусть $X_k = \bar{X}_k \setminus E$, где E – прообраз особых точек циклического накрытия. Тогда:

- (i) последовательность групп $H_1(X_1, \mathbb{Z}), \dots, H_1(X_k, \mathbb{Z}), \dots$ имеет период m , т. е. $H_1(X_k, \mathbb{Z}) \simeq H_1(X_{k+m}, \mathbb{Z})$;
- (ii) первое число Бетти $b_1(\bar{X}_k) = r_{k, \neq 1}$, где $r_{k, \neq 1}$ – число корней многочлена Александра $\Delta(t)$ кривой H , которые являются не равными единице корнями из единицы степени k ; в частности, $b_1(\bar{X}_k)$ является четным числом;
- (iii) если $k = p^r$, где p – простое число, то $H_1(X_k, \mathbb{Z})$ и $H_1(\bar{X}_k, \mathbb{Z})$ являются конечными группами;
- (iv) если k и m являются взаимно простыми числами, то $H_1(\bar{X}_k, \mathbb{Z}) = 0$;
- (v) конечно порожденная абелева группа G может быть реализована как $H_1(X_k, \mathbb{Z})$ для некоторой гурвицевской (соответственно, псевдоголоморфной) кривой H , если и только если существует автоморфизм $h \in \text{Aut}(G)$ такой, что $h^d = \text{Id}$ и $h - \text{Id}$ также является автоморфизмом группы G , где d – некоторый делитель числа k , и, более того, если группа G реализована как $H_1(X_k, \mathbb{Z})$ для некоторой кривой H , то d является делителем степени $\deg H$; в частности, $H_1(\bar{X}_2, \mathbb{Z})$ является конечной абелевой группой нечетного порядка, и любая абелева группа G нечетного порядка может быть реализована как $H_1(X_2, \mathbb{Z})$ для некоторой гурвицевской (соответственно, псевдоголоморфной) кривой H четной степени.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теорем 0.3, 0.5, 2.11, 2.16 и предложений 2.13, 2.15.

Отметим, что существуют плоские алгебраические кривые H , для которых гомоморфизмы $j_{k*}: H_1(X_k, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\bar{X}_k, \mathbb{Z})$ не являются изоморфизмами.

ПРИМЕР 4.6. Пусть $H \subset \mathbb{CP}^2$ – кривая степени 6, заданная уравнением

$$Q^3(z_0, z_1, z_2) + C^2(z_0, z_1, z_2) = 0,$$

где Q и C – однородные формы степеней $\deg Q = 2$, $\deg C = 3$ такие, что коника и кубика, заданные уравнениями $Q = 0$ и $C = 0$, пересекаются трансверсально в шести точках. Тогда $A_2(H) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, но $H_1(\bar{X}_2, \mathbb{Z}) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кривая H имеет шесть особых точек (каспов), лежащих на конике $Q = 0$. Известно ([20], см. также [21]), что $\pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus (H \cup L)) \simeq \text{Br}_3$ как C -группа. Следовательно, $A_2(H) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (см. примеры 2.17 и 3.19). Также хорошо известно, что разрешение особенностей двулистного накрытия

плоскости $\mathbb{CP}^2$, разветвленного вдоль кривой H , является КЗ-поверхностью, которая односвязна.

Отметим, что в случае заузленных n -мерных многообразий $V \subset S^{n+2}$ последовательность групп гомологий $H_1(X_k, \mathbb{Z})$, $k \in \mathbb{N}$, не обязательно является периодической. Например, если $S^2 \subset S^4$ – заузленная сфера, для которой $\pi_1(S^4 \setminus S^2) \simeq G_m$, где G_m – группа, рассмотренная в примере 3.20 (согласно следствию 3.13 эта группа может быть реализована как группа заузленной сферы), то $H_1(X_k, \mathbb{Z})$ является циклической группой порядка $(m+1)^k - m^k$ (см. пример 2.14).

Список литературы

1. Вик. С. Куликов, “Геометрическая реализация C -групп”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:4 (1994), 194–203; англ. пер.: V. S. Kulikov, “A geometric realization of C -groups”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **45**:1 (1995), 197–206.
2. M. A. Kervaire, “On higher dimensional knots”, *Differential and combinatorial topology*, A Symposium in Honor of Marston Morse, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1965, 105–119.
3. J. Levin, “Some results on higher dimensional knot groups”, *Knot theory*, Proc. Sem. (Plans-sur-Bex, 1977), Lecture Notes in Math., **685**, Springer, Berlin, 1978, 243–273.
4. M. Kervaire, C. Weber, “A survey of multidimensional knots”, *Knot theory*, Proc. Sem. (Plans-sur-Bex, 1977), Lecture Notes in Math., **685**, Springer, Berlin, 1978, 61–134.
5. Вик. С. Куликов, В. М. Харламов, “О брэйд-мономорфизмах разложениях на множители”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:3 (2003), 79–118; англ. пер.: V. M. Kharlamov, V. S. Kulikov, “On braid monodromy factorizations”, *Izv. Math.*, **67**:3 (2003), 499–534.
6. Г.-М. Гроель, Вик. С. Куликов, “О симплектических накрытиях проективной плоскости”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:4 (2005), 19–58; англ. пер.: G.-M. Greuel, V. S. Kulikov, “On symplectic coverings of the projective plane”, *Izv. Math.*, **69**:4 (2005), 667–701.
7. Вик. С. Куликов, “Формула разложения на множители полного поворота с удвоенным числом нитей”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:1 (2004), 123–158; англ. пер.: V. S. Kulikov, “A factorization formula for the full twist of double the number of string”, *Izv. Math.*, **68**:1 (2004), 125–158.
8. Вик. С. Куликов, “Многочлены Александра плоских алгебраических кривых”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **57**:1 (1993), 76–101; англ. пер.: V. S. Kulikov, “Alexander polynomials of plane algebraic curves”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **42**:1 (1994), 67–89.
9. Ю. В. Кузьмин, “Об одном способе построения C -групп”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **59**:4 (1995), 105–124; англ. пер.: Yu. V. Kuz'min, “On a method of constructing C -groups”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **59**:4 (1995), 765–783.
10. О. В. Куликова, “О фундаментальных группах дополнений к кривым Гурвица”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:1 (2005), 125–132; англ. пер.: O. V. Kulikova, “On the fundamental groups of the complements of Hurwitz curves”, *Izv. Math.*, **69**:1 (2005), 123–130.
11. J. P. Levin, “Algebraic structure of knot modules”, *Lecture Notes in Math.*, **772**, Springer, Berlin, 1980.
12. J. Levin, “Knot modules. I”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **229** (1977), 1–50.
13. Вик. С. Куликов, “О многочленах Александра кривых Гурвица”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:1 (2006), 75–94; англ. пер.: V. S. Kulikov, “Alexander polynomials of Hurwitz curves”, *Izv. Math.*, **70**:1 (2006), 69–86.

14. С. Ленг, *Алгебра*, Мир, М., 1968.
15. R. H. Crowell, R. H. Fox, *Introduction to knot theory*, Based upon lectures given at Haverford College under the Philips Lecture Program, Ginn, Boston, MA, 1963.
16. J. Milnor, “Singular points of complex hypersurfaces”, *Annals of Mathematics Studies*, **61**, Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1968.
17. Ю. В. Кузьмин, “Группы заузленных компактных поверхностей и центральные расширения”, *Матем. сб.*, **187**:2 (1996), 81–102; англ. пер.: Yu. V. Kuz'min, “The groups of knotted compact surfaces, and central extensions”, *Sb. Math.*, **187**:2 (2006), 237–257.
18. G. Baumslag, D. Solitar, “Some two-generator one-relator non-Hopfian groups”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **68** (1962), 199–201.
19. J. W. Milnor, “Infinite cyclic covers”, *Conference on the Topology of Manifolds* (Michigan State Univ., 1967), Prindle, Weber & Schmidt, Boston, MA, 1968, 115–133.
20. O. Zariski, “On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve”, *Amer. J. Math.*, **51**:2 (1929), 305–328.
21. Вик. С. Куликов, “О фундаментальных группах дополнений к торическим кривым”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **61**:1 (1997), 89–112; англ. пер.: V. S. Kulikov, “On the fundamental groups of complements of toral curves”, *Izv. Math.*, **61**:1 (1997), 89–112.

Вик. С. Куликов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: kulikov@mi.ras.ru

Поступило в редакцию

02.05.2006,

08.05.2007