Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Сандраков, Осреднение нестационарной системы Стокса с вязкостью в перфорированной области, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 1, 113–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/im107>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 16:49:54

УДК 517.9

Г. В. Сандраков

Осреднение нестационарной системы Стокса с вязкостью в перфорированной области

Доказаны утверждения о предельном поведении решений начально-краевой задачи для нестационарной системы уравнений Стокса в периодической перфорированной области с малым периодом ε . Предполагается, что коэффициент вязкости ν в этой системе является положительным параметром и удовлетворяет при $\varepsilon \rightarrow 0$ одному из следующих трех условий: $\nu/\varepsilon^2 \rightarrow \infty, 1, 0$. Рассмотрены также вырожденная система уравнений Стокса с нулевым коэффициентом вязкости и система уравнений Навье–Стокса в случае, когда коэффициент вязкости не является слишком малым.

Библиография: 22 наименования.

§ 0. Введение

В работе рассматривается нестационарная система уравнений Стокса в периодической перфорированной области с малым периодом ε , моделирующая в линейном приближении течение вязкой несжимаемой жидкости в периодической пористой среде. Предполагается, что коэффициент вязкости ν в этой системе удовлетворяет при $\varepsilon \rightarrow 0$ одному из следующих трех условий:

$$\nu/\varepsilon^2 \rightarrow \infty, \quad (0.1)$$

$$\nu/\varepsilon^2 \rightarrow 1, \quad (0.2)$$

$$\nu/\varepsilon^2 \rightarrow 0. \quad (0.3)$$

Будут получены осредненные (предельные) уравнения, вид которых зависит от предельного поведения коэффициента вязкости, и доказаны утверждения о сходимости в подходящих пространствах при $\varepsilon \rightarrow 0$ решений рассматриваемой системы к решениям осредненных уравнений.

Пусть для $m \geq 2$ вектор-функция $u_\varepsilon = (u_1^\varepsilon, \dots, u_m^\varepsilon)$ и функция p_ε являются решениями начально-краевой задачи для нестационарной системы уравнений Стокса с положительными параметрами ε и ν :

$$\begin{aligned} (u_\varepsilon)'_t - \nu \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon &= f, \quad \operatorname{div} u_\varepsilon = 0 \quad \text{в } \Omega_\varepsilon \times (0, T), \\ u_\varepsilon &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega_\varepsilon \times (0, T), \quad u_\varepsilon|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \end{aligned} \quad (0.4)$$

где $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^m)$ и положительное T может быть произвольным. Зависящая от малого параметра ε перфорированная область Ω_ε определяется следующим

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 96-01-01394.

образом. Пусть F_1 является 1-периодической связной подобластью $\mathbb{R}^m$ и Ω – ограниченная связная подобласть $\mathbb{R}^m$ с (локально) липшицевой границей. Тогда

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \cap F_\varepsilon, \quad (0.5)$$

где $F_\varepsilon = \varepsilon F_1 = \{\varepsilon x, x = (x_1, \dots, x_m) \in F_1\}$, и 1-периодичность означает периодичность множества F_1 с периодом 1 по каждому $x_k, k = 1, \dots, m$. Предполагается, что область F_1 допускает представление в виде объединения конечного числа 1-периодических областей с липшицевыми границами и справедливо неравенство Фридрихса

$$\int_F |u|^2 dx \leq C \int_F |\nabla u|^2 dx \quad \forall u \in C^\infty(\bar{F}), \quad u|_S = 0, \quad (0.6)$$

где $F = \square \cap F_1$, $S = \square \cap \partial F_1$, $\square = (0, 1)^m$ – ячейка периодичности и C – положительная постоянная. Предполагается также, что множество F имеет положительную меру Лебега в $\mathbb{R}^m$. Отметим, что неравенство (0.6) заведомо выполнено, если множество $\square \setminus F$ имеет положительную меру Лебега в $\mathbb{R}^m$. В качестве примера двумерной ($m = 2$) области F_1 , удовлетворяющей сформулированным условиям, можно выбрать 1-периодическое продолжение дополнения в $\square$ к кругу с несколькими лучами (см. рисунок). Эта область F_1 не является 1-периодической областью с липшицевой границей, но допускает представление в виде объединения конечного числа таких областей.

Известно, что для фиксированных ε и ν существуют единственная вектор-функция $u_\varepsilon(t, x) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\varepsilon)^m)$ и распределение $p_\varepsilon(t, x)$, определенное с точностью до произвольной функции от t , удовлетворяющие (0.4) в соответствующем [1], [2] смысле. В дальнейшем предполагается, что вектор-функция u_ε (соответствующая скорости жидкости в Ω_ε) продолжена нулем на “твердую” фазу $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ и через $\omega \subset \subset \Omega$ обозначается произвольная подобласть $\mathbb{R}^m$ с липшицевой границей, замыкание которой $\bar{\omega}$ принадлежит Ω . Таким образом, для каждого ε вектор скорости u_ε определен в области Ω , а p_ε (соответствующее давление жидкости) определено только на “жидкой” фазе Ω_ε . Для каждого $\omega \subset \subset \Omega$ и достаточно малых ε ($\leq \varepsilon_\omega$ для некоторого положительного ε_ω) проверяется, что $p_\varepsilon \in L^2(0, T; L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon)/\mathbb{R})$ (определения используемых пространств см., например, в [1]).

Основные результаты работы составляют следующие теоремы о предельном поведении последовательностей $\{u_\varepsilon\}$ и $\{p_\varepsilon\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в предположении, что выполнено одно из условий (0.1)–(0.3). В этих теоремах через n и N обозначаются внешние нормали для $\partial\Omega$ и S , а через E – единичная матрица для $\mathbb{R}^m$. Кроме того, через $\langle \cdot \rangle$ обозначается интеграл по F от функций, определенных на этом множестве.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнено условие (0.1). Тогда для каждого $\omega \subset\subset \Omega$ и достаточно малых ε для последовательностей $\{u_\varepsilon\}$ и $\{p_\varepsilon\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют место соотношения

$$p_\varepsilon \rightarrow p \quad \text{в норме} \quad L^2(0, T; L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}) \quad (0.7)$$

и

$$(\nu/\varepsilon^2)u_\varepsilon \rightarrow u = A_1(f - \nabla p) \quad \text{слабо в} \quad L^2(0, T; L^2(\Omega)^m),$$

где $\operatorname{div} u = 0$ в Ω , $(u, n) = 0$ на $\partial\Omega$. Здесь $A_1 = \langle a \rangle$ и $a(y)$ является матричнозначным 1-периодическим решением краевой задачи для стационарной системы Стокса на F :

$$-\Delta a + \nabla b = E, \quad \operatorname{div} a = 0 \quad \text{в} \quad F, \quad a = 0 \quad \text{на} \quad S. \quad (0.8)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнено условие (0.2). Тогда для каждого $\omega \subset\subset \Omega$ и достаточно малых ε для последовательностей $\{u_\varepsilon\}$ и $\{p_\varepsilon\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют место соотношения (0.7) и

$$u_\varepsilon \rightarrow u = A_2(t) * (f - \nabla p) \quad \text{слабо в} \quad L^2(0, T; L^2(\Omega)^m),$$

где $\operatorname{div} u = 0$ в Ω , $(u, n) = 0$ на $\partial\Omega$ и $*$ обозначает свертку по t . Кроме того, $u_\varepsilon \rightarrow u$ слабо- $*$ в $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^m)$, если $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega)^m)$. Здесь $A_2(t) = \langle a(y, t) \rangle$ и $a(y, t)$ является матричнозначным 1-периодическим решением начально-краевой задачи для нестационарной системы Стокса на F :

$$\begin{aligned} a'_t - \Delta a + \nabla b &= 0, & \operatorname{div} a &= 0 \quad \text{в} \quad F \times (0, \infty), \\ a &= 0 \quad \text{на} \quad S \times (0, \infty), & a|_{t=0} &= Q(E) \quad \text{в} \quad F, \end{aligned} \quad (0.9)$$

где $Q(E) = E - \nabla B$ и $B(y)$ является векторнозначным 1-периодическим решением задачи Неймана на F :

$$\Delta B = 0 \quad \text{в} \quad F, \quad (\nabla B, N) = (E, N) \quad \text{на} \quad S. \quad (0.10)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнено условие (0.3) и конечное T фиксировано. Тогда для каждого $\omega \subset\subset \Omega$ и достаточно малых ε для последовательностей $\{u_\varepsilon\}$ и $\{p_\varepsilon\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют место соотношения (0.7) и

$$u_\varepsilon \rightarrow u = A_3 \int_0^t (f - \nabla p) dt \quad \text{слабо-}^* \quad \text{в} \quad L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^m),$$

где $\operatorname{div} u = 0$ в Ω , $(u, n) = 0$ на $\partial\Omega$. Кроме того, $(u_\varepsilon)'_t \rightarrow (u)'_t$ слабо в $L^2(0, T; L^2(\Omega)^m)$. Здесь $A_3 = \langle E - \nabla B \rangle$ и $B(y)$ является решением краевой задачи (0.10).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Можно показать, что в условиях теорем 1–3 соответствующие краевые задачи для “предельного” давления p имеют единственные решения, принадлежащие $L^2(0, T; H^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)/\mathbb{R})$. В случае выполнения условия (0.1) соответствующая краевая задача для осредненного уравнения:

$$\operatorname{div} A_1(f - \nabla p) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (A_1(f - \nabla p), n) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (0.11)$$

определяется как и для стационарной системы уравнений Стокса и зависит от времени только параметрически. В случае выполнения условия (0.3) осредненное уравнение имеет вид (0.11) с A_1 , замененным на A_3 . Краевая задача для осредненного уравнения из теоремы 2 имеет схожую структуру:

$$\operatorname{div} A_2 * (f - \nabla p) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (A_2 * (f - \nabla p), n) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (0.12)$$

но зависит от времени нелокальным образом.

Аналог теоремы 3 справедлив также для нестационарной системы уравнений Стокса с нулевой вязкостью. Пусть в обозначениях, используемых для задачи (0.4), вектор-функция v_ε и функция q_ε являются решениями начально-краевой задачи для вырожденной нестационарной системы уравнений Стокса с положительным параметром ε :

$$\begin{aligned} (v_\varepsilon)'_t + \nabla q_\varepsilon &= f, \quad \operatorname{div} v_\varepsilon = 0 \quad \text{в } \Omega_\varepsilon \times (0, T), \\ (v_\varepsilon, n_\varepsilon) &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega_\varepsilon \times (0, T), \quad v_\varepsilon|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \end{aligned} \quad (0.13)$$

где $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^m) \cap L^1(0, T; L^2(\Omega)^m)$ и n_ε – внешняя нормаль для $\partial\Omega_\varepsilon$. Известно, что для фиксированного ε существуют единственная вектор-функция $v_\varepsilon(t, x) \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon)^m)$ и распределение $q_\varepsilon(t, x)$, определенное с точностью до произвольной функции от t , удовлетворяющие (0.13) в соответствующем [2] смысле. Для каждого $\omega \subset\subset \Omega$ и достаточно малых ε проверяется, что $q_\varepsilon \in L^2(0, T; L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon)/\mathbb{R})$, $\nabla q_\varepsilon \in L^2(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon)^m)$, и предполагается, что вектор скорости v_ε продолжен нулем на “твердую” фазу $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$.

ТЕОРЕМА 4. Для каждого $\omega \subset\subset \Omega$ и достаточно малых ε для последовательностей $\{v_\varepsilon\}$ и $\{q_\varepsilon\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} q_\varepsilon &\rightarrow q \quad \text{в норме} \quad L^2(0, T; L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}), \\ \nabla q_\varepsilon &\rightarrow \nabla q \quad \text{в норме} \quad L^2(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon)^m), \\ v_\varepsilon &\rightarrow v = A_3 \int_0^t (f - \nabla q) dt \quad \text{слабо-* в} \quad L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^m), \end{aligned}$$

где $\operatorname{div} v = 0$ в Ω , $(v, n) = 0$ на $\partial\Omega$ и A_3 определено в теореме 3. Кроме того, $(v_\varepsilon)'_t \rightarrow (v)'_t$ слабо в $L^2(0, T; L^2(\Omega)^m)$.

Для системы уравнений (0.4) с неоднородным начальным условием также выполнены аналоги теорем 1–3, но в более слабой форме. Для точной формулировки этих утверждений определим функцию q_ε как решение краевой задачи Неймана с положительным параметром ε :

$$\operatorname{div}(\nabla q_\varepsilon - w) = 0 \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \quad (\nabla q_\varepsilon - w, n_\varepsilon) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_\varepsilon, \quad (0.14)$$

где $w \in L^2(\Omega)^m$ и использованы обозначения, введенные для задач (0.4) и (0.13). Известно [1], [2], что для фиксированного ε существует единственное (с точностью до постоянной) решение задачи (0.14) с конечным интегралом Дирихле и равенство

$$v_\varepsilon = w - \nabla q_\varepsilon \quad \text{на } \Omega_\varepsilon \quad (0.15)$$

определяет проекцию w на $H(\Omega_\varepsilon)$ (подпространство соленоидальных вектор-функций из $L^2(\Omega_\varepsilon)^m$ с нулевой нормальной составляющей на $\partial\Omega_\varepsilon$). Пусть u_ε и p_ε являются решениями задачи (0.4) с неоднородным начальным условием:

$$u_\varepsilon|_{t=0} = v_\varepsilon \quad \text{в } \Omega_\varepsilon. \quad (0.16)$$

Известно, что для фиксированных ε и ν существуют единственная вектор-функция $u_\varepsilon(t, x) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\varepsilon)^m)$ и распределение $p_\varepsilon(t, x)$, определенное с точностью до произвольной функции от t , удовлетворяющие (0.4), (0.16) в соответствующем [1], [2] смысле. Для каждого $\omega \subset\subset \Omega$ и достаточно малых ε проверяется, что $q_\varepsilon \in L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$, $\nabla q_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)^m$, $p_\varepsilon \in H^{-1}(0, T; L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon)/\mathbb{R})$, и предполагается, что вектор-функции v_ε , u_ε продолжены нулем на “твердую” фазу $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. Пространство $H^{-1}(0, T; L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon)/\mathbb{R})$ является сопряженным $H_0^1(0, T; L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon)/\mathbb{R})$ относительно скалярного произведения, продолженного с $L^2(0, T; L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon)/\mathbb{R})$, и наделяется естественной нормой.

ТЕОРЕМА 5. Пусть конечное T фиксировано. Тогда для каждого $\omega \subset\subset \Omega$ и достаточно малых ε для последовательностей $\{v_\varepsilon\}$, $\{q_\varepsilon\}$, $\{u_\varepsilon\}$ и $\{p_\varepsilon\}$, удовлетворяющих (0.14), (0.15), (0.4) и (0.16), при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} q_\varepsilon &\rightarrow q \quad \text{в норме } L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}, & \nabla q_\varepsilon &\rightarrow \nabla q \quad \text{в норме } L^2(\Omega_\varepsilon)^m, \\ v_\varepsilon &\rightarrow v = A_3(w - \nabla q) & \text{слабо в } L^2(\Omega)^m, \end{aligned}$$

где $\operatorname{div} v = 0$ в Ω , $(v, n) = 0$ на $\partial\Omega$ и A_3 определено в теореме 3,

$$p_\varepsilon \rightarrow p \quad \text{в норме } H^{-1}(0, T; L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}),$$

и, кроме того:

(а) если выполнено условие (0.1), то

$$(\nu/\varepsilon^2)u_\varepsilon \rightarrow A_1(f - \nabla p) \quad \text{в } D'(\Omega \times (0, T))^m,$$

где p является решением краевой задачи (0.11) и A_1 определено в теореме 1;

(б) если выполнено условие (0.2), то

$$u_\varepsilon \rightarrow u = A_2(w - \nabla q) + A_2 * (f - \nabla p) \quad \text{слабо-* в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^m),$$

где $\operatorname{div} u = 0$ в Ω , $(u, n) = 0$ на $\partial\Omega$ и $A_2(t)$ определено в теореме 2;

(с) если выполнено условие (0.3), то

$$u_\varepsilon \rightarrow A_3(w - \nabla q) + A_3 \int_0^t (f - \nabla p) dt \quad \text{слабо-* в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^m),$$

где p является решением краевой задачи (0.11) с A_1 , замененным на A_3 .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Можно показать, что в условиях теоремы 5 соответствующая краевая задача для “предельного начального” давления q имеет единственное решение, принадлежащее $H^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)/\mathbb{R}$. Соответствующая краевая задача для “предельного” давления p из теоремы 5, (b):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} A_2 * (f - \nabla p) + \operatorname{div} A_2(w - \nabla q) &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ (A_2 * (f - \nabla p), n) + (A_2(w - \nabla q), n) &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (0.17)$$

также имеет единственное решение, принадлежащее $L^2(0, T; H^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)/\mathbb{R})$. В случае выполнения условий теоремы 5, (a) в задаче (0.4), (0.16) возникают погранслойные эффекты по времени, и поэтому сходимость (в смысле теории векторнозначных распределений на $\Omega \times (0, T)$) последовательности $\{(\nu/\varepsilon^2)u_\varepsilon\}$ достаточно слабая.

В случае, когда вязкость не слишком мала, аналог теоремы 1 выполнен также для трехмерной ($m = 3$) системы уравнений Навье–Стокса. Пусть в обозначениях, используемых для задачи (0.4), (0.16), вектор-функция u_ε и функция p_ε являются решениями начально-краевой задачи для нестационарной системы уравнений Навье–Стокса с положительными параметрами ε и ν :

$$\begin{aligned} (u_\varepsilon)'_t - \nu \Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon \nabla u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon &= f, \quad \operatorname{div} u_\varepsilon = 0 \quad \text{в } \Omega_\varepsilon \times (0, T), \\ u_\varepsilon &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega_\varepsilon \times (0, T), \quad u_\varepsilon|_{t=0} = (\varepsilon/\sqrt{\nu})v_\varepsilon \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \end{aligned} \quad (0.18)$$

где $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)$. Известно, что для фиксированных ε и ν существуют вектор-функция $u_\varepsilon(t, x) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\varepsilon)^3)$ и распределение $p_\varepsilon(t, x)$, определенное с точностью до произвольной функции от t , удовлетворяющие (0.18) в соответствующем [1], [2] смысле. Проверяется, что решение u_ε этой задачи определено однозначно, если выполнено условие

$$\varepsilon^{3/2}/\nu^2 \rightarrow 0. \quad (0.19)$$

Для каждого $\omega \subset\subset \Omega$ и достаточно малых ε проверяется также, что $p_\varepsilon \in H^{-1}(0, T; L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon)/\mathbb{R})$, и предполагается, что вектор скорости u_ε продолжен нулем на “твердую” фазу $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть выполнено условие (0.19) и конечное T фиксировано. Тогда для каждого $\omega \subset\subset \Omega$ и достаточно малых ε для последовательностей $\{u_\varepsilon\}$ и $\{p_\varepsilon\}$, удовлетворяющих (0.18), при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} p_\varepsilon &\rightarrow p \quad \text{в норме} \quad H^{-1}(0, T; L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}), \\ (\nu/\varepsilon^2)u_\varepsilon &\rightarrow A_1(f - \nabla p) \quad \text{слабо в} \quad L^2(0, T; L^2(\Omega)^3), \end{aligned}$$

где p является решением краевой задачи (0.11).

Пусть в обозначениях, используемых для задачи (0.4), вектор-функция u_ε и функция p_ε являются решениями краевой задачи для трехмерной стационарной системы уравнений Навье–Стокса с положительными параметрами ε и ν :

$$-\nu \Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon \nabla u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f, \quad \operatorname{div} u_\varepsilon = 0 \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \quad u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_\varepsilon, \quad (0.20)$$

где $f \in L^2(\Omega)^3$. Известно, что для фиксированных ε и ν существуют решение $u_\varepsilon(x) \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)^3$ и распределение $p_\varepsilon(x)$, определенное с точностью до произвольной постоянной, удовлетворяющие (0.20) в соответствующем [1], [2] смысле. Можно показать, что решение u_ε этой задачи определено однозначно, если выполнено условие (0.19). Для каждого $\omega \subset \subset \Omega$ и достаточно малых ε проверяется также, что $p_\varepsilon \in L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$, и предполагается, что вектор скорости u_ε продолжен нулем на “твердую” фазу $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть выполнено условие (0.19). Тогда для каждого $\omega \subset \subset \Omega$ и достаточно малых ε для последовательностей $\{u_\varepsilon\}$ и $\{p_\varepsilon\}$, удовлетворяющих (0.20), при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют место соотношения

$p_\varepsilon \rightarrow p$ в норме $L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$, $(\nu/\varepsilon^2)u_\varepsilon \rightarrow A_1(f - \nabla p)$ слабо в $L^2(\Omega)^3$, где p является решением краевой задачи (0.11).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для двумерных задач (0.18) и (0.20) теоремы 6 и 7 также выполнены, если в условии (0.19) величину $\varepsilon^{3/2}/\nu^2$ заменить на ε/ν .

Доказательства представленных здесь утверждений даны в §2. Несколько лемм, используемых в этих доказательствах, приведены в §1. В дальнейшем изложении C обозначает постоянные, не зависящие от ε и ν , а функции, определенные на Ω_ε и обнуляющиеся на $\partial\Omega_\varepsilon$, считаются, как правило, продолженными нулем на “твердую” фазу $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Вопросы осреднения стационарной системы уравнений Стокса в периодических перфорированных областях рассматривались в работах [3]–[6]. Для доказательства утверждений о сходимости в [3], [4] использовался технически сложный метод продолжения давлений, предложенный Л. Тартаром. В статье [6] предложен новый метод, не использующий такого продолжения и позволяющий рассматривать наиболее общие периодические перфорированные области. Метод продолжения давлений применялся также при изучении вопросов осреднения нестационарной системы уравнений Навье–Стокса в работе [7] и нестационарной системы уравнений Стокса с вязкостью порядка ε^2 в работах [8], [9]. Условия

(0.1)–(0.3) возникали ранее в [10] при осреднении линеаризованной системы уравнений гидродинамики с периодическими коэффициентами и малой вязкостью. Для доказательства приведенных здесь утверждений о сходимости будут использованы методы, разработанные в работах [6] и [10]. Некоторые из этих утверждений были анонсированы в заметке [11], где также применялся метод продолжения давлений. Использование здесь метода В. В. Жикова позволило значительно ослабить требования из [11] на рассматриваемые перфорированные области. Кроме того, следуя [6], из соотношения (0.7) несложно вывести существование продолжения (на область Ω) давления p_ε , сходящегося при $\varepsilon \rightarrow 0$ к “предельному” давлению p в норме $L^2(0, T; L^2(\omega)/\mathbb{R})$.

Автор выражает признательность Н. С. Бахвалову и В. В. Жикову за многочисленные полезные советы по рассматриваемым в статье вопросам.

§1. Леммы

ЛЕММА 1. Для $u_\varepsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\varepsilon))$ выполнено неравенство

$$\|u\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq \varepsilon C \|\nabla u\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для п.в. t (почти всех $t \in (0, T)$) функция $u(t)$ является элементом пространства $H_0^1(\Omega_\varepsilon)$. Следствием предположения (0.6) является (см., например, [3], [12]) оценка

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_\varepsilon).$$

Напомним, что функции из $H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ продолжаются нулем на $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. Таким образом, $\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \varepsilon^2 C \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$ для п.в. t , и интегрирование этого неравенства по $(0, T)$ завершает доказательство леммы 1.

ЛЕММА 2. Пусть распределение $p(x, t)$ определено на $\Omega_\varepsilon \times (0, T)$ и удовлетворяет условию $\nabla_x p \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega_\varepsilon)^m)$. Тогда для каждого $\omega \subset \subset \Omega$ и достаточно малых ε выполнено неравенство

$$\|p\|_{L^2(0, T; L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon)/\mathbb{R})} \leq \varepsilon^{-1} C \|\nabla p\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega_\varepsilon)^m)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для распределений $g(x)$, определенных на Ω_ε и удовлетворяющих условию $\nabla g \in H^{-1}(\Omega_\varepsilon)^m$, в работе [6] доказана следующая важная оценка: для каждого $\omega \subset \subset \Omega$ и достаточно малых ε

$$\|q\|_{L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}} \leq \varepsilon^{-1} C \|\nabla q\|_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon)^m}.$$

Отметим, что для фиксированных ω и (достаточно малых) ε включение $q \in L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$ следует из неравенства, доказанного в работе [13] (в случае, когда область F_1 липшицева, это включение следует также из [1, предложение 1.2]). Однако соответствующая константа в неравенстве из [13] зависит от ε , и явный вид этой зависимости установлен в работе [6]. Таким образом, $\|p(t)\|_{L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}}^2 \leq \varepsilon^{-2} C \|\nabla p(t)\|_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon)^m}^2$ для п.в. t , и интегрирование этого неравенства по $(0, T)$ завершает доказательство леммы 2.

ЛЕММА 3. Для $u_\varepsilon \in L^2(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon))$ выполнено неравенство

$$\|u\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega_\varepsilon))} \leq \varepsilon C \|u\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon))}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ и $(\cdot, \cdot)_\varepsilon$ обозначает скалярное произведение между элементами пространств $H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ и $H^{-1}(\Omega_\varepsilon)$. Тогда

$$\|v\|_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon)}^2 = ((-\Delta)^{-1} v, v)_\varepsilon,$$

где $(-\Delta)^{-1} v = \tilde{v}$ является решением задачи Дирихле

$$-\Delta \tilde{v} = v \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \quad \tilde{v} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_\varepsilon, \quad \tilde{v} \in H_0^1(\Omega_\varepsilon).$$

Для решения этой задачи из предположения (0.6) следует (см., например, [12]) оценка $\|\tilde{v}\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \varepsilon C \|v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$, и поэтому

$$\|v\|_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \|\tilde{v}\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} \|v\|_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon)} \leq \varepsilon C \|v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|v\|_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon)}.$$

Таким образом, $\|u(t)\|_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \varepsilon^2 C \|u(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2$ для п.в. t , и интегрирование этого неравенства по $(0, T)$ завершает доказательство леммы 3.

Отметим, что для $v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\varepsilon))$ непосредственно из определений следует равенство

$$\|\Delta u\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega_\varepsilon))} = \|\nabla u\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon)^m)}. \quad (1.1)$$

ЛЕММА 4. Для решений задачи (0.4) выполнены неравенства

$$\begin{aligned}\nu\varepsilon^{-1}\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{m\times m})} &\leq C\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}, \\ \nu\varepsilon^{-2}\|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^m)} &\leq C\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}, \\ \|(u_\varepsilon)_t'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^m)} &\leq C\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}, \\ \varepsilon^{-1}\|\nabla p_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_\varepsilon)^m)} &\leq C\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.\end{aligned}$$

Кроме того, если $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega)^m)$, то для п.в. t выполнено неравенство

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^m} \leq \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega)^m)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая скалярно в $L^2(\Omega_\varepsilon)^m$ первое уравнение (0.4) на u_ε , получаем

$$(\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^m}^2)_t' + 2\nu\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^{m\times m}}^2 = 2(f, u_\varepsilon)_{L^2(\Omega_\varepsilon)^m}. \quad (1.2)$$

Интегрируя это равенство по $(0, T)$ и используя лемму 1, имеем

$$\begin{aligned}\nu\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)^{m\times m})}^2 &\leq \int_0^T (f, u_\varepsilon)_{L^2(\Omega_\varepsilon)^m} dt \\ &\leq \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)^m)} \|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)^m)} \\ &\leq \varepsilon C\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^m)} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)^{m\times m})},\end{aligned}$$

что доказывает первое и второе неравенства леммы. Третье неравенство доказывается аналогично с помощью умножения первого уравнения (0.4) на $(u_\varepsilon)_t'$. Учитывая эти неравенства, (1.1) и лемму 3, заключаем, что

$$\begin{aligned}\|\nabla p_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_\varepsilon)^m)} &= \|f + \nu\Delta u_\varepsilon - (u_\varepsilon)_t'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_\varepsilon)^m)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_\varepsilon)^m)} + \nu\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)^{m\times m})} \\ &\quad + \|(u_\varepsilon)_t'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_\varepsilon)^m)} \leq \varepsilon C\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)^m)}.\end{aligned}$$

Кроме того, из (1.2) следует неравенство $(\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^m})_t' \leq \|f\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^m}$, и интегрирование этого неравенства по $(0, t)$ завершает доказательство леммы 4.

Обозначим через $H_P^1(F, S)$ замыкание в $H^1(F)$ множества $C_P^\infty(F, S)$ – гладких 1-периодических функций, обнуляющихся вблизи S , а через $H_P^{-1}(F, S)$ – пространство, сопряженное $H_P^1(F, S)$ относительно скалярного произведения, продолженного с $L^2(F)$. Определим также множества вектор-функций

$$\begin{aligned}H(F) &= \{a \in L^2(F)^m : \operatorname{div} a = 0 \text{ в } F, \quad (a, N) = 0 \text{ на } S\}, \\ H(\Omega) &= \{u \in L^2(\Omega)^m : \operatorname{div} u = 0 \text{ в } \Omega, \quad (u, n) = 0 \text{ на } \partial\Omega\},\end{aligned} \quad (1.3)$$

являющиеся (см., например, [1]) замкнутыми подпространствами в $L^2(F)^m$ и $L^2(\Omega)^m$ соответственно.

Следующее утверждение следует из результатов работы [13] (в случае, когда область F_1 липшицева, это утверждение следует также из [1, предложение 1.2, лемма 6.1]).

ЛЕММА 5. Нормы $\|\cdot\|_{L^2(F)/\mathbb{R}}$ и $\|\nabla(\cdot)\|_{H_P^{-1}(F,S)}$ на пространстве $L^2(F)/\mathbb{R}$ эквивалентны.

ЛЕММА 6. Пусть $a \in H(F)$. Тогда найдется последовательность $\{a_k\} \subset C_P^\infty(F, S)^m$ соленоидальных ($\operatorname{div} a_k = 0$ в F) вектор-функций, сходящаяся к a в норме $L^2(F)^m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение следует из леммы 5 и результатов, доказанных в [1, теорема 1.4].

ЛЕММА 7. Пусть $u \in L^2(0, T; H(\Omega))$. Тогда найдется последовательность $\{u_k\} \subset C_0^\infty((0, T) \times \Omega)^m$ соленоидальных ($\operatorname{div} u_k = 0$ в Ω) вектор-функций, сходящаяся к u в норме $L^2(0, T; L^2(\Omega)^m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [1, теорема 1.4], что в $H(\Omega)$ плотно множество $V(\Omega)$ соленоидальных вектор-функций из $C_0^\infty(\Omega)^m$. Пространство $H(\Omega)$ является замкнутым подпространством сепарабельного пространства $L^2(\Omega)^m$. Следовательно, найдется последовательность $\{\varphi_k\} \subset V(\Omega)$ таких вектор-функций, образующая ортонормированный базис в $H(\Omega)$. Аналогично, найдется последовательность $\{a_s\} \subset C_0^\infty(0, T)$, образующая ортонормированный базис в $L^2(0, T)$. Утверждение из [14, гл. 2, § 4] о том, что конечные линейные комбинации векторов вида $a_s \varphi_k$ образуют плотное подмножество в $L^2(0, T; H(\Omega))$, завершает доказательство леммы 7.

ЛЕММА 8. Пусть $a \in L^2(F)/\mathbb{R}$. Тогда найдется такое $w \in H_P^1(F, S)^m$, что $\operatorname{div} w = a$ и

$$\|w\|_{H_P^1(F, S)^m} \leq C \|a\|_{L^2(F)/\mathbb{R}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае, когда область F_1 имеет границу класса C^2 , это утверждение доказано в [5, гл. 4, § 7]. С учетом результатов работы [15] общий случай рассматривается аналогичным образом.

Следуя [16], определим пространство $E_0(C^+; L^2(\Omega))$ как множество функций $U(\sigma) = U(\alpha + i\beta)$ со значениями в $L^2(\Omega)$, заданных и голоморфных в комплексной полуплоскости $C^+ = \{\sigma \in C : \sigma = \alpha + i\beta, \alpha > 0\}$, для которых конечна величина

$$\|U(\sigma)\|_{E_0(C^+; L^2(\Omega))}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \|U(i\beta)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\beta,$$

где интеграл определяется как предел в среднем интеграла от K до $-K$ при $K \rightarrow \infty$. Последнее равенство определяет норму в пространстве $E_0(C^+; L^2(\Omega))$.

Следующий вариант теоремы Пэли–Винера доказан в [16].

ТЕОРЕМА 9. Преобразование Лапласа

$$\widehat{u(t)} = \int_0^\infty e^{-\sigma t} u(t) dt = U(\sigma)$$

отображает пространство $L^2(0, \infty; L^2(\Omega))$ на пространство $E_0(C^+; L^2(\Omega))$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно.

Аналогично определяются пространства $E_0(C^+; H_0^1(\Omega))$ и $E_0(C^+; L^2(F))$, для которых также выполнен аналог теоремы 9. Кроме того [16], преобразование Лапласа коммутирует с дифференцированиями по пространственным переменным и оператор свертки по t переводится преобразованием Лапласа в оператор поточечного умножения.

§ 2. Доказательства

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. В соответствии с результатами [1] и леммой 5 решение $a(y), b(y)$ задачи (0.8) с компонентами из $H_P^1(F, S), L^2(F)/\mathbb{R}$ существует и единственно. Определим $a_\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon)$, $(\nabla_y a)_\varepsilon(x) = (\nabla_y a)(x/\varepsilon)$, $b_\varepsilon(x) = b(x/\varepsilon)$ и продолжим эти функции по ε -периодичности на Ω_ε (точнее, продолжим, например, $a(x/\varepsilon)$ как ε -периодическую функцию на F_ε и возьмем ограничение полученной функции на $\Omega_\varepsilon \subset F_\varepsilon$) и a_ε нулем на $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. Тогда (см., например, [3], [4])

$$\|a_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^{m \times m}} \leq C, \quad \|(\nabla_y a)_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^{m \times m \times m}} \leq C, \quad \|b_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^m} \leq C. \quad (2.1)$$

Известно [3], что $A_1 = \langle a \rangle$ является симметричной положительно определенной матрицей с постоянными компонентами. Кроме того [10], найдется такое $W_\varepsilon(x) \in H^1(\Omega)^{m \times m \times m}$, что $\|W_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^{m \times m \times m}} \leq C$ и

$$a_\varepsilon - A_1 = \varepsilon \operatorname{div}(W_\varepsilon). \quad (2.2)$$

Для доказательства этого утверждения достаточно выбрать $W(y) = \nabla_y \Delta_y^{-1}(a - A_1)$, продолжить функцию $W(x/\varepsilon)$ по ε -периодичности на Ω и положить $W_\varepsilon(x) = W(x/\varepsilon)$. Здесь $\tilde{a} = \Delta_y^{-1}(a - A_1)$ обозначает 1-периодическое решение задачи $\Delta_y \tilde{a} = a - A_1$ (подробно изученной, например, в [5]).

По предположению меры Лебега $|F|$ множества F положительна, и поэтому $A_1/|F| - a \in (L^2(F)/\mathbb{R})^{m \times m}$. В силу леммы 8 найдется такое $w(y) \in H_P^1(F, S)^{m \times m \times m}$, что $\operatorname{div}_y w = A_1/|F| - a$. По определению найдется последовательность $\{w^s(y)\} \subset C_P^\infty(F, S)^{m \times m \times m}$, сходящаяся к $w(y)$ в норме $H_P^1(F, S)^{m \times m \times m}$. Определим $w_\varepsilon^s(x) = w^s(x/\varepsilon)$, $(\operatorname{div}_y w^s)_\varepsilon(x) = (\operatorname{div}_y w^s)(x/\varepsilon)$, продолжим эти функции по ε -периодичности на Ω_ε и w_ε нулем на $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. Из ограниченности области Ω_ε следует, что равномерно по ε выполнено соотношение

$$\begin{aligned} & \|(\operatorname{div}_y w^s)_\varepsilon - A_1/|F| + a_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^{m \times m}} \\ & \leq C \|\operatorname{div}_y w^s(y) - A_1/|F| + a(y)\|_{L^2(F)^{m \times m}} \rightarrow 0 \quad \text{при } s \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Матрица A_1 положительно определена, и поэтому осредненное уравнение (0.11) имеет для п.в. t единственное решение $p(t) \in H^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)/\mathbb{R}$, удовлетворяющее соответствующей априорной оценке (см., например, [12]). Интегрирование этой оценки по $(0, T)$ приводит к неравенству

$$\|p\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)/\mathbb{R})} + \|\nabla p\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^m)} \leq C \|f\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}. \quad (2.4)$$

Пусть $G = A_1(f - \nabla p)$. Тогда $\operatorname{div} G = 0$ в Ω и $(G, n) = 0$ на $\partial\Omega$. В силу леммы 7 найдется последовательность $\{G_k\} \subset C_0^\infty((0, T) \times \Omega)^m$ соленоидальных вектор-функций, сходящаяся к G в норме $L^2(0, T; L^2(\Omega)^m)$. Пусть $P_k = A_1^{-1}G_k$. Тогда

$$\operatorname{div} A_1 P_k = A_1 \nabla P_k = 0. \quad (2.5)$$

Вновь учитывая положительную определенность матрицы A_1 , имеем соотношение

$$\begin{aligned} & \|f - \nabla p - P_k\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^m)} \\ & \leq C \|A_1(f - \nabla p - P_k)\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^m)} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Используя введенные выше функции, определим последовательности v_ε^{sk} и q_ε^k , “приближающие” решение задачи (0.4):

$$v_\varepsilon^{sk} = \frac{\varepsilon^2}{\nu} a_\varepsilon P_k + \frac{\varepsilon^3}{\nu} w_\varepsilon^s \nabla P_k, \quad q_\varepsilon^k = p + \varepsilon b_\varepsilon P_k. \quad (2.7)$$

Отметим, что, заменяя в (2.7) функции P_k и w_ε^s на (их пределы при фиксированном ε и $s, k \rightarrow \infty$) $f - \nabla p$ и w_ε , получим начальные члены асимптотического разложения для решений задачи (0.4). Здесь мы следуем основной идее работы [6]: для доказательства сходимости следует оценить разность точных решений задачи и подходящие сглаженных членов асимптотического разложения и перейти к пределу по параметрам сглаживания и затем по ε . Для осуществления этого плана вычислим предварительно $\operatorname{div} v_\varepsilon^{sk}$.

Учитывая обычные для теории осреднения формулы дифференцирования (см., например, [3], [5], [12]), имеем равенства

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v_\varepsilon^{sk} &= \frac{\varepsilon^2}{\nu} a_\varepsilon \nabla P_k + \frac{\varepsilon^2}{\nu} (\operatorname{div}_y w_\varepsilon^s) \nabla P_k + \frac{\varepsilon^3}{\nu} w_\varepsilon^s \nabla \nabla P_k \\ &= \frac{\varepsilon^2}{\nu} ((\operatorname{div}_y w_\varepsilon^s)_\varepsilon - A_1/|F| + a_\varepsilon) \nabla P_k + \frac{\varepsilon^3}{\nu} w_\varepsilon^s \nabla \nabla P_k \end{aligned} \quad (2.8)$$

(в естественных обозначениях, вполне очевидных в координатной записи), где учтено, что $\operatorname{div}_y a(y) = 0$, и равенство (2.5), умноженное на $\varepsilon^2/\nu|F|$. Поскольку функции w_ε^s и P_k являются гладкими и финитными, из (0.4) и (2.8) получаем неравенство

$$\|\operatorname{div}(u_\varepsilon - v_\varepsilon^{sk})\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))} \leq \frac{\varepsilon^2}{\nu} \delta_s C_k + \frac{\varepsilon^3}{\nu} C_{sk}, \quad (2.9)$$

где C_{sk} , C_k , δ_s не зависят от ε и, кроме того, δ_s достаточно мало при больших s в соответствии с (2.3). Аналогично, из (0.4) и (2.7) имеем равенство

$$\begin{aligned} (u_\varepsilon - v_\varepsilon^{sk})'_t - \nu \Delta(u_\varepsilon - v_\varepsilon^{sk}) + \nabla(p_\varepsilon - q_\varepsilon^k) &= f - \nabla p + (\Delta_y a - \nabla_y b)_\varepsilon P_k \\ - (v_\varepsilon^{sk})'_t + 2\varepsilon(\nabla_y a)_\varepsilon \nabla P_k + \varepsilon^2 a_\varepsilon \Delta P_k - \varepsilon b_\varepsilon \nabla P_k \\ + \varepsilon(\Delta_y w_\varepsilon^s)_\varepsilon \nabla P_k + 2\varepsilon^2(\nabla_y w_\varepsilon^s)_\varepsilon \nabla \nabla P_k + \varepsilon^3 w_\varepsilon^s \Delta \nabla P_k. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Пусть $\varepsilon A_\varepsilon^{sk}$ обозначает последние шесть слагаемых в правой части равенства (2.10) и $D_k = f - \nabla p - P_k$, $B_\varepsilon^{sk} = -a_\varepsilon(P_k)'_t - \varepsilon w_\varepsilon^s(\nabla P_k)'_t$. Тогда в силу первого уравнения в (0.8) выполнено равенство

$$(u_\varepsilon - v_\varepsilon^{sk})'_t - \nu \Delta(u_\varepsilon - v_\varepsilon^{sk}) + \nabla(p_\varepsilon - q_\varepsilon^k) = D_k + \varepsilon A_\varepsilon^{sk} + (\varepsilon^2/\nu) B_\varepsilon^{sk}. \quad (2.11)$$

Используя (2.1), ограниченность Ω и гладкость w_ε^s , P_k , имеем неравенства

$$\begin{aligned} \|A_\varepsilon^{sk}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)^m)} &\leq C_{sk}, \quad \|B_\varepsilon^{sk}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)^m)} \leq C_{sk}, \\ \|D_k\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)^m)} &\leq \delta_k, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где C_{sk} , δ_k не зависят от ε и, кроме того, δ_k достаточно мало при больших k в соответствии с (2.6).

Функция P_k финитна, и поэтому (см. доказательство леммы 7) найдется $\omega_k \subset \subset \Omega$, содержащее x -носитель P_k для всех $t \in [0, T]$. Поскольку p_ε определено

с точностью до произвольной функции от t , из лемм 2, 4 и неравенств (2.1), (2.4) следует, что

$$\|p_\varepsilon - q_\varepsilon^k\|_{L^2(0,T;L^2(\omega_k \cap \Omega_\varepsilon))} \leq C_k, \quad (2.13)$$

где C_k не зависит от ε . Фиксируем $\omega \subset \subset \Omega$. Без ограничения общности можно считать, что $\omega \subset \omega_k$ для всех k . В силу ограниченности области Ω имеем неравенство

$$\|p_\varepsilon - q_\varepsilon^k\|_{L^2(0,T;L^1(\omega \cap \Omega_\varepsilon))} \leq C \|p_\varepsilon - q_\varepsilon^k\|_{L^2(0,T;L^2(\omega_k \cap \Omega_\varepsilon))}$$

с постоянной C , не зависящей от ε и k . Следовательно, для п.в. t определен интеграл $|\omega \cap \Omega_\varepsilon|^{-1} \int_{\omega \cap \Omega_\varepsilon} (p_\varepsilon - q_\varepsilon^k) dx$, вычитая который из p_ε , можно считать, что $\int_{\omega \cap \Omega_\varepsilon} (p_\varepsilon - q_\varepsilon^k) dx = 0$. При этом равенство (2.11) и неравенство (2.13) сохраняются. Умножая скалярно в $L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)^m)$ равенство (2.11) на $u_\varepsilon - v_\varepsilon^{sk}$, как и в лемме 4 получаем

$$\begin{aligned} & \nu \|\nabla(u_\varepsilon - v_\varepsilon^{sk})\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)^{m \times m})}^2 \leq \int_0^T (p_\varepsilon - q_\varepsilon^k, \operatorname{div}(u_\varepsilon - v_\varepsilon^{sk}))_{L^2(\omega_k \cap \Omega_\varepsilon)} dt \\ & \quad + \int_0^T \left(D_k + \varepsilon A_\varepsilon^{sk} + \frac{\varepsilon^2}{\nu} B_\varepsilon^{sk}, (u_\varepsilon - v_\varepsilon^{sk}) \right)_{L^2(\Omega_\varepsilon)^m} dt \\ & \leq \left(\frac{\varepsilon^2}{\nu} \delta_s C_k + \frac{\varepsilon^3}{\nu} C_{sk} \right) \|p_\varepsilon - q_\varepsilon^k\|_{L^2(0,T;L^2(\omega_k \cap \Omega_\varepsilon))} \\ & \quad + \left(\varepsilon \delta_k + \varepsilon^2 C_{sk} + \frac{\varepsilon^3}{\nu} C_{sk} \right) \|\nabla(u_\varepsilon - v_\varepsilon^{sk})\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)^{m \times m})} \\ & \leq \frac{\varepsilon^2}{\nu} \delta_s C_k + \frac{\varepsilon^3}{\nu} C_{sk} + \frac{\varepsilon^2 \delta_k^2}{2\nu} + \frac{\varepsilon^4}{2\nu} C_{sk}^2 + \frac{\varepsilon^6}{2\nu^3} C_{sk}^2 \\ & \quad + \frac{\nu}{2} \|\nabla(u_\varepsilon - v_\varepsilon^{sk})\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)^{m \times m})}^2, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где учтены неравенства (2.9), (2.12), (2.13), лемма 1 и принадлежность x -носителя функции $\operatorname{div}(u_\varepsilon - v_\varepsilon^{sk}) = -\operatorname{div} v_\varepsilon^{sk}$ множеству $\omega_k \cap \Omega_\varepsilon$. Здесь использовано также ε -неравенство, записанное в виде $|\alpha\beta| \leq (\varepsilon/2)\alpha^2 + \beta^2/(2\varepsilon)$ для положительных ε и произвольных α, β . Вновь применяя лемму 1, из (2.14) имеем

$$\begin{aligned} & (\nu/\varepsilon^2) \|u_\varepsilon - v_\varepsilon^{sk}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^m)} \leq (\nu/\varepsilon) C \|\nabla(u_\varepsilon - v_\varepsilon^{sk})\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)^{m \times m})} \\ & \leq \sqrt{\varepsilon} C_{sk} + \delta_s C_k + \delta_k C + (\varepsilon^2/\nu) C_{sk}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Здесь и далее $C_{sk}, C_k, \delta_s, \delta_k$ не зависят от ε и, кроме того, δ_s, δ_k достаточно малы при больших s и k .

Аналогично, умножая скалярно в $L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)^m)$ равенство (2.11) на $(u_\varepsilon - v_\varepsilon^{sk})'_t$, получаем оценку

$$\begin{aligned} & \|(u_\varepsilon - v_\varepsilon^{sk})'_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^m)}^2 \leq \int_0^T (q_\varepsilon^k - p_\varepsilon, \operatorname{div}(v_\varepsilon^{sk})'_t)_{L^2(\omega_k \cap \Omega_\varepsilon)} dt \\ & \quad + \int_0^T (D_k + \varepsilon A_\varepsilon^{sk} + (\varepsilon^2/\nu) B_\varepsilon^{sk}, (u_\varepsilon - v_\varepsilon^{sk})'_t)_{L^2(\Omega_\varepsilon)^m} dt, \end{aligned}$$

из которой и из (2.8), (2.12) следует неравенство

$$\|(u_\varepsilon - v_\varepsilon^{sk})'_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^m)} \leq \sqrt{\varepsilon} C_{sk} + \delta_s C_k + \delta_k C + (\varepsilon^2/\nu) C_{sk}. \quad (2.16)$$

Следовательно, используя леммы 2, 3 и равенство (2.11), имеем неравенства

$$\begin{aligned} \|p_\varepsilon - q_\varepsilon^k\|_{L^2(0,T;L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon))} &\leq (C/\varepsilon) \|\nabla(p_\varepsilon - q_\varepsilon^k)\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_\varepsilon)^m)} \\ &\leq C \|D_k + \varepsilon A_\varepsilon^{sk} + (\varepsilon^2/\nu) B_\varepsilon^{sk} - (u_\varepsilon - v_\varepsilon^{sk})'_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)^m)} \\ &\quad + (\nu/\varepsilon) C \|\nabla(u_\varepsilon - v_\varepsilon^{sk})\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)^{m \times m})} \\ &\leq \sqrt{\varepsilon} C_{sk} + \delta_s C_k + \delta_k C + (\varepsilon^2/\nu) C_{sk}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где учтены неравенства (2.12), (2.15) и (2.16).

Из (2.1), (2.3), (2.6) и (2.17) уже следует соотношение (0.7) теоремы 1. Действительно, для произвольного $\delta > 0$ можно выбрать k и s так, чтобы $\delta_s C_k + \delta_k C < \delta/2$. Тогда, учитывая (0.1) и (2.1), найдется такое $\varepsilon(\delta)$, что $\varepsilon \|b_\varepsilon P_k\|_{L^2(0,T;L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon))} + \sqrt{\varepsilon} C_{sk} + (\varepsilon^2/\nu) C_{sk} < \delta/2$ и

$$\|p_\varepsilon - p\|_{L^2(0,T;L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon))} < \delta \quad \text{при} \quad \varepsilon < \varepsilon(\delta),$$

что эквивалентно соотношению (0.7), поскольку p_ε и p определены с точностью до произвольных функций от t .

Для завершения доказательства теоремы 1 достаточно доказать (см., например, [3]), что для фиксированного $\varphi \in C_0^\infty((0,T) \times \Omega)^m$ и произвольного $\delta > 0$ найдется такое $\varepsilon(\delta)$, что

$$I = \left| \int_0^T \left(\frac{\nu}{\varepsilon^2} u_\varepsilon - A_1(f - \nabla p), \varphi \right)_{L^2(\Omega)^m} dt \right| < \delta \quad \text{при} \quad \varepsilon < \varepsilon(\delta). \quad (2.18)$$

Из соотношений (2.2), (2.6), (2.7) и (2.15) имеем неравенства

$$\begin{aligned} I &\leq \left| \int_0^T \left(\frac{\nu}{\varepsilon^2} u_\varepsilon - a_\varepsilon P_k, \varphi \right)_{L^2(\Omega)^m} dt \right| + \left| \int_0^T ((a_\varepsilon - A_1) P_k, \varphi)_{L^2(\Omega)^m} dt \right| \\ &\quad + \left| \int_0^T (A_1(P_k - f + \nabla p), \varphi)_{L^2(\Omega)^m} dt \right| \\ &\leq C \left\| \frac{\nu}{\varepsilon^2} u_\varepsilon - a_\varepsilon P_k \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^m)} + \varepsilon \left| \int_0^T (W_\varepsilon, \nabla(P_k \varphi))_{L^2(\Omega)^{m \times m \times m}} dt \right| \\ &\quad + C \|A_1(P_k - f + \nabla p)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^m)} \\ &\leq \sqrt{\varepsilon} C_{sk} + \delta_s C_k + \delta_k C + (\varepsilon^2/\nu) C_{sk}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Таким образом, найдется $\varepsilon(\delta)$, удовлетворяющее (2.18), и теорема 1 доказана.

Отметим, что из (2.15) еще не следует соотношение

$$\left\| \frac{\nu}{\varepsilon^2} u_\varepsilon - a_\varepsilon(f - \nabla p) \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^m)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.20)$$

Однако, например, для $m = 3$ и $\partial F_1 \in C^2$ это соотношение имеет место. Действительно, в этом случае $a(y) \in W_2^2(F) \subset C^0(\bar{F})$ (см., например, [1]), и поэтому $\max_{\bar{\Omega}} |a_\varepsilon| \leq C$ с постоянной C , не зависящей от ε . Таким образом,

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\nu}{\varepsilon^2} u_\varepsilon - a_\varepsilon(f - \nabla p) \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^m)} \\ &\leq \left\| \frac{\nu}{\varepsilon^2} u_\varepsilon - a_\varepsilon P_k \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^m)} + \|a_\varepsilon(P_k - f + \nabla p)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^m)} \\ &\leq \left\| \frac{\nu}{\varepsilon^2} u_\varepsilon - a_\varepsilon P_k \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^m)} + C \|P_k - f + \nabla p\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^m)}, \end{aligned}$$

и (2.20) следует из (2.6), (2.7) и (2.15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. В соответствии с результатами [1], [2] решение $B(y)$ задачи (0.10) с компонентами из $H_P^1(F) \cap L^2(F)/\mathbb{R}$ существует и единственно. Здесь $H_P^1(F)$ – соболевское пространство 1-периодических функций из $H^1(F)$ (см., например, [5], [12]). Аналогично, решение $a(y, t)$, $b(y, t)$ задачи (0.9) с компонентами из $L^2(0, \infty; H_P^1(F, S))$, $L^2(0, \infty; L^2(F)/\mathbb{R})$ существует и единственно. Обозначим через λ_l и e_l собственные значения и собственные функции 1-периодической задачи Стокса на F :

$$-\Delta e_l + \nabla b_l = \lambda_l e_l, \quad \operatorname{div} e_l = 0 \quad \text{в } F, \quad e_l = 0 \quad \text{на } S.$$

Для каждого $l = 1, 2, \dots$ рассмотрим матричнозначную функцию $a_l(y)$, столбцами которой являются $e_l(y)$. В соответствии с [2] имеем равенства

$$a(y, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \langle Q(E) a_l \rangle a_l^*(y) e^{-\lambda_l t} = \sum_{l=1}^{\infty} \langle a_l \rangle a_l^*(y) e^{-\lambda_l t}, \quad (2.21)$$

где $*$ обозначает матричное сопряжение и ряды сходятся в пространстве $L^2(0, \infty; H_P^1(F)^{m \times m})$. Кроме того [2], ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \langle a_l \rangle \langle a_l \rangle^* e^{-\lambda_l t} = \langle a(y, t) \rangle = A_2(t) \quad (2.22)$$

сходится в $\mathbb{R}^{m \times m}$ для каждого неотрицательного t , поскольку $Q(E) \in H(F)$ и все λ_l положительны. Из последнего утверждения следует, что

$$A_2(t)_t' = \langle a(y, t)_t' \rangle \in L^1(0, \infty; \mathbb{R}^{m \times m}). \quad (2.23)$$

Действительно, прямое вычисление дает неравенство

$$\begin{aligned} \|\langle a(y, t)_t' \rangle\|_{L^1(0, \infty; \mathbb{R}^{m \times m})} &= \int_0^\infty \left\| \sum_{l=1}^{\infty} \langle a_l \rangle \langle a_l \rangle^* (-\lambda_l) e^{-\lambda_l t} \right\|_{\mathbb{R}^{m \times m}} dt \\ &\leq \sum_{l=1}^{\infty} \|\langle a_l \rangle\|_{\mathbb{R}^{m \times m}}^2 \int_0^\infty \lambda_l e^{-\lambda_l t} dt = \sum_{l=1}^{\infty} \|\langle a_l \rangle\|_{\mathbb{R}^{m \times m}}^2, \end{aligned}$$

и сходимость последнего ряда эквивалентна сходимости при $t = 0$ ряда (2.22). Здесь и в дальнейшем $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^{m \times m}}$ обозначает операторную норму матрицы.

Определим $a_\varepsilon = a(x/\varepsilon, t)$, $(\nabla_y a)_\varepsilon = (\nabla_y a)(x/\varepsilon, t)$, $b_\varepsilon = b(x/\varepsilon, t)$, $B_\varepsilon = B(x/\varepsilon)$ и продолжим эти функции по ε -периодичности на Ω_ε и a_ε нулем на $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. Из ограниченности области Ω_ε и аналога леммы 4 для задачи (0.9) следуют неравенства

$$\begin{aligned} \|a_\varepsilon\|_{L^2(0, \infty; L^2(\Omega)^{m \times m})} &\leq C, & \|b_\varepsilon\|_{L^2(0, \infty; L^2(\Omega_\varepsilon)^m)} &\leq C, \\ \|(\nabla_y a)_\varepsilon\|_{L^2(0, \infty; L^2(\Omega_\varepsilon)^{m \times m \times m})} &\leq C, & \|B_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^m} &\leq C. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Кроме того [10], найдется такое $W_\varepsilon(x, t) \in L^2(0, \infty; H^1(\Omega)^{m \times m \times m})$, что $\|W_\varepsilon\|_{L^2(0, \infty; L^2(\Omega)^{m \times m \times m})} \leq C$ и

$$a_\varepsilon - A_2 = \varepsilon \operatorname{div}(W_\varepsilon). \quad (2.25)$$

Для доказательства этого равенства достаточно повторить для п.в. t доказательство равенства (2.2) и учесть принадлежность a_ε и A_2 соответствующим пространствам.

Аналогично, поскольку $A_2/|F| - a \in L^2(0, \infty; (L^2(F)/\mathbb{R})^{m \times m})$, найдется такое $w(y, t) \in L^2(0, \infty; H_P^1(F, S)^{m \times m \times m})$, что $\operatorname{div}_y w = A_2/|F| - a$. Для доказательства этого равенства можно также воспользоваться представлениями (2.21), (2.22) и разложить $w(y, t)$ в ряд по экспонентам, коэффициенты которого находятся с помощью леммы 8. Тогда сходимость этого ряда в пространстве $L^2(0, \infty; H_P^1(F, S)^{m \times m \times m})$ будет следовать из сходимости рядов (2.21), (2.22) в соответствующих пространствах. По определению найдется последовательность $\{w^s(y, t)\} \subset L^2(0, \infty; C_P^\infty(F, S)^{m \times m \times m})$, сходящаяся к $w(y, t)$ в норме $L^2(0, \infty; H_P^1(F, S)^{m \times m \times m})$. Определим $w_\varepsilon^s = w^s(x/\varepsilon, t)$, $(\operatorname{div}_y w^s)_\varepsilon = (\operatorname{div}_y w^s)(x/\varepsilon, t)$, продолжим эти функции по ε -периодичности на Ω_ε и w_ε нулем на $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. Тогда равномерно по ε выполнено соотношение

$$\begin{aligned} & \|(\operatorname{div}_y w^s)_\varepsilon - A_2/|F| + a_\varepsilon\|_{L^2(0, \infty; L^2(\Omega_\varepsilon)^{m \times m})} \\ & \leq C \|\operatorname{div}_y w^s(y) - A_2/|F| + a(y)\|_{L^2(0, \infty; L^2(F)^{m \times m})} \rightarrow 0 \quad \text{при } s \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Осредненная задача для “предельного” давления p в рассматриваемом случае имеет вид (0.12), или, в вариационной форме,

$$\int_0^\infty (A_2 * (f - \nabla p), \nabla \varphi)_{L^2(\Omega)^m} dt = 0 \quad \forall \varphi \in L^2(0, \infty; H^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)/\mathbb{R}). \quad (2.27)$$

Здесь предполагается, что $f \in L^2(0, \infty; L^2(\Omega)^m)$. Докажем, что существует решение $p \in L^2(0, \infty; H^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)/\mathbb{R})$ этой задачи, удовлетворяющее неравенству (2.4). В соответствии с [16] для этого достаточно доказать, что для каждого $\sigma \in C^+$ существует решение задачи (образа задачи (2.27) при преобразовании Лапласа):

$$(\hat{A}(\sigma)(\hat{f}(\sigma) - \nabla \hat{p}(\sigma)), \nabla \varphi)_{L^2(\Omega)^m} = 0 \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)/\mathbb{R}, \quad (2.28)$$

для которого выполнено неравенство

$$\|\hat{p}(\sigma)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \hat{p}(\sigma)\|_{L^2(\Omega)^m} \leq C \|\hat{f}(\sigma)\|_{L^2(\Omega)^m} \quad (2.29)$$

с постоянной C , не зависящей от $\sigma \in C^+$. Действительно, тогда $\hat{p}(\sigma)$ голоморфно, $\|\nabla \hat{p}\|_{E_0(C^+; L^2(\Omega)^m)} \leq C \|\hat{f}\|_{E_0(C^+; L^2(\Omega)^m)}$ и существование подходящего p будет следовать из теоремы 9 и неравенства Пуанкаре. Здесь $\hat{A}$, $\hat{f}$ и $\hat{p}$ обозначают преобразования Лапласа от A_2 , f и p .

Применяя преобразование Лапласа к первому уравнению в (0.9), получаем

$$\sigma \hat{a} - \Delta \hat{a} + \nabla \hat{b} = E - \nabla B. \quad (2.30)$$

Будем обозначать через $\hat{a}^*$ матрицу, транспонированную и комплексно-сопряженную к $\hat{a}$. Умножая равенство (2.30) на $\hat{a}^*$ справа, сопряженное к (2.30) равенство на $\hat{a}$ слева и интегрируя полученные соотношения по F , имеем

$$\begin{aligned} \sigma \langle \hat{a} \hat{a}^* \rangle + \langle \nabla \hat{a} \nabla \hat{a}^* \rangle &= \hat{A}^*, \\ \bar{\sigma} \langle \hat{a} \hat{a}^* \rangle + \langle \nabla \hat{a} \nabla \hat{a}^* \rangle &= \hat{A} \end{aligned} \quad (2.31)$$

для каждого $\sigma \in C^+$ и по непрерывности [16] для каждого $\sigma \in \overline{C}^+ = \{\sigma \in C : \sigma = \alpha + i\beta, \alpha \geq 0\}$. Пусть $\sigma = \alpha + i\beta$; тогда

$$\operatorname{Im} \hat{A} = -\beta \langle \hat{a} \hat{a}^* \rangle, \quad \operatorname{Re} \hat{A} = \alpha \langle \hat{a} \hat{a}^* \rangle + \langle \nabla \hat{a} \nabla \hat{a}^* \rangle \quad (2.32)$$

являются симметричными матрицами. Матрицы $\langle \hat{a} \hat{a}^* \rangle$, $\langle \nabla \hat{a} \nabla \hat{a}^* \rangle$ и поэтому $\operatorname{Re} \hat{A}$ неотрицательно определены. Действительно, для каждого $\sigma \in \overline{C}^+$ и $\xi \in \mathbb{R}^m$ из (2.32) получаем

$$\xi(\operatorname{Re} \hat{A})\xi^* = \alpha \|\xi \hat{a}\|_{L^2(F)^m}^2 + \|\nabla(\xi \hat{a})\|_{L^2(F)^{m \times m}}^2 \geq 0. \quad (2.33)$$

Фиксируем $\sigma \in \overline{C}^+$. В соответствии с [3] существует такая соленоидальная матрица e с компонентами из $H_P^1(F, S)$, что $\langle e \rangle = E$ и для $\xi \in \mathbb{R}^m$ из (2.30) следует, что

$$\sigma \langle \xi \hat{a} e \xi^* \rangle + \langle \nabla(\xi \hat{a}) \nabla(e \xi^*) \rangle = \xi^2. \quad (2.34)$$

Предположим, что $\xi(\operatorname{Re} \hat{A})\xi^* = 0$ для некоторого $\xi \in \mathbb{R}^m$. Тогда, учитывая (2.33), в $L^2(F)^m$ и $L^2(F)^{m \times m}$ выполнены равенства $\xi \hat{a} = 0$, $\nabla(\xi \hat{a}) = 0$, и поэтому $\xi = 0$ в силу (2.34).

Таким образом, для каждого $\sigma \in \overline{C}^+$ матрица $\operatorname{Re} \hat{A}$ положительно определена и найдется такое положительное $C(\sigma)$, что

$$C(\sigma)\xi^2 \leq \xi(\operatorname{Re} \hat{A})\xi^* \quad \text{для} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m. \quad (2.35)$$

Обозначим через K некоторое компактное подмножество из $\overline{C}^+$. Тогда в силу компактности единичной сферы в $\mathbb{R}^m$ для $\sigma \in K$ постоянную $C(\sigma)$ в (2.35) можно выбрать не зависящей от σ . Поскольку $a \in L^2(0, \infty; L^2(F)^{m \times m})$, из представления (2.22) следует, что $A_2 \in L^1(0, \infty; \mathbb{R}^{m \times m})$, и поэтому

$$\|\hat{A}(\sigma)\|_{C^{m \times m}} = \left\| \int_0^\infty e^{-\sigma t} A_2(t) dt \right\|_{C^{m \times m}} \leq \int_0^\infty \|A_2(t)\|_{C^{m \times m}} dt \leq C, \quad (2.36)$$

где C не зависит от $\sigma \in \overline{C}^+$. Из неравенств (2.35) и (2.36) следует (см., например, [17, гл. 3, § 1]), что для каждого $\sigma \in \overline{C}^+$ решение задачи (2.28), принадлежащее $H^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)/\mathbb{R}$, существует и единственно. Однако из неравенства (2.35) выводится неравенство (2.29) только для $\sigma \in K$.

Следуя, например, [18], проинтегрируем по частям в преобразовании Лапласа $\hat{A}(\sigma)$ от $A_2(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} \hat{A}(\sigma) &= \int_0^\infty e^{-\sigma t} \langle a \rangle dt = \sigma^{-1} \langle a \rangle|_{t=0} + \sigma^{-1} \int_0^\infty e^{-\sigma t} \langle a \rangle'_t dt \\ &= \sigma^{-1} \langle Q(E) \rangle + \sigma^{-1} \int_0^\infty e^{-\sigma t} A_2(t)'_t dt. \end{aligned}$$

Эти равенства имеют смысл в силу соотношений (2.22) и (2.23). Более того, последний интеграл стремится к нулевой матрице при $|\sigma| \rightarrow \infty$ в силу (2.23) и леммы Римана–Лебега (см., например, [18]). Таким образом, $\sigma \hat{A}(\sigma) = \langle Q(E) \rangle + I$, где

$\|I\|_{C^m \times m}$ стремится к нулю при $|\sigma| \rightarrow \infty$. Известно [12], что симметрическая матрица $\langle Q(E) \rangle$ с постоянными действительными компонентами положительно определена, и поэтому для достаточно больших σ_0 при $|\sigma| \geq \sigma_0$ выполнены неравенства

$$C_1 \xi^2 \leq \xi \operatorname{Re}(\sigma \hat{A}) \xi^*, \quad |\sigma| \|\hat{A}(\sigma)\|_{C^m \times m} \leq C_2 \quad (2.37)$$

с постоянными C_1 и C_2 , не зависящими от $\xi \in \mathbb{R}^m$ и от σ при $|\sigma| \geq \sigma_0$. Следовательно, умножая (2.28) на σ и учитывая (2.37), получаем неравенство (2.29) для $|\sigma| \geq \sigma_0$. Поскольку множество $\{\sigma \in \overline{C}^+ : |\sigma| \leq \sigma_0\}$ компактно, неравенство (2.29) выполнено для всех $\sigma \in \overline{C}^+$, что завершает доказательство существования подходящего решения задачи (2.27).

Из неравенств (2.35), (2.37) следует, что матрица $\hat{A}(\sigma)^{-1}$ определена для всех $\sigma \in \overline{C}^+$, голоморфна и удовлетворяет неравенству

$$\|\hat{A}(\sigma)^{-1}\|_{C^m \times m} \leq C(1 + |\sigma|) \quad (2.38)$$

с постоянной C , не зависящей от $\sigma \in \overline{C}^+$. Следовательно [19, гл. 2, § 10], существует матричнозначное распределение $A_2^{-1}(t)$ с компонентами из $D'_+(0)$, преобразование Лапласа которого совпадает с $\hat{A}(\sigma)^{-1}$. Кроме того, оператор $A_2^{-1}(t) *$ определен на $C_0^\infty(0, \infty)^m$ и переводит это пространство в пространство $S(0, \infty)^m$ гладких, быстро убывающих на бесконечности и обнуляющихся в нуле вектор-функций.

Пусть $G = A_2 * (f - \nabla p)$. Тогда $\operatorname{div} G = 0$ в Ω и $(G, n) = 0$ на $\partial\Omega$. В силу леммы 7 найдется последовательность $\{G_k\} \subset C_0^\infty((0, T) \times \Omega)^m$ соленоидальных вектор-функций, сходящаяся к G в норме $L^2(0, \infty; L^2(\Omega)^m)$. Для каждого $k = 1, 2, \dots$ вектор-функция G_k является конечной линейной комбинацией векторов вида $a_s(t)\varphi_l(x)$ с $a_s(t) \in C_0^\infty(0, \infty)$. Следовательно, вектор-функция $P_k = A_2^{-1}(t) * G_k$ определена на $(0, \infty) \times \Omega$, финитна по x , быстро убывает по t и является гладкой по t и x . Кроме того, $A_2 * P_k = G_k$, и поэтому

$$\operatorname{div} A_2 * P_k = A_2 * \nabla P_k = 0. \quad (2.39)$$

Пусть $R \in L^1(0, \infty)$ и $g \in L^2(0, \infty; L^2(\Omega))$. Тогда $R * g = g * R$, и, повторяя доказательство соответствующего неравенства из [20, § 3.1.6], заключаем, что

$$\|R * g\|_{L^2(0, \infty; L^2(\Omega))} \leq \|R\|_{L^1(0, \infty)} \|g\|_{L^2(0, \infty; L^2(\Omega))}. \quad (2.40)$$

Кроме того, для подходящих R и g имеем равенства

$$(R * g)'_t = R(0)g + R'_t * g = Rg(0) + R * g'_t. \quad (2.41)$$

Предположим дополнительно в лемме 7, что $u \in H_0^1(0, \infty; H(\Omega))$. Тогда последовательность $\{u_k\} \subset C_0^\infty((0, \infty) \times \Omega)^m$, определенная в этой лемме, сходится к u в норме $H_0^1(0, \infty; L^2(\Omega)^m)$. Действительно, по определению множество $C_0^\infty(0, \infty)$ плотно в $H_0^1(0, \infty)$. Поэтому можно считать, что последовательность $\{a_s\} \subset C_0^\infty(0, \infty)$, использованная при доказательстве леммы 7, образует ортонормированный базис в $H_0^1(0, \infty)$. Следовательно, конечные линейные комбинации векторов вида $a_s \varphi_l$ образуют плотное подмножество в $H_0^1(0, \infty; H(\Omega))$.

Непосредственно из определений и (2.41) имеем равенства $G(0) = 0$ и $G'_t = \langle Q(E) \rangle (f - \nabla p) + A_2(t)'_t * (f - \nabla p)$. Учитывая соотношения (2.23), (2.27) и (2.40),

закключаем, что $G \in H_0^1(0, \infty; H(\Omega))$. Следовательно, $\{G_k\} \subset C_0^\infty((0, \infty) \times \Omega)^m$ сходится к G в норме $H_0^1(0, \infty; L^2(\Omega)^m)$. Тогда из теоремы 9 следует, что

$$\|\hat{A}(f - \nabla \hat{p} - \hat{P}_k)\|_{E_0(C^+; L^2(\Omega)^m)} + \|\sigma \hat{A}(f - \nabla \hat{p} - \hat{P}_k)\|_{E_0(C^+; L^2(\Omega)^m)} \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow \infty$, и поэтому, используя неравенства (2.35) и (2.37), имеем соотношение

$$\|f - \nabla p - P_k\|_{L^2(0, \infty; L^2(\Omega)^m)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.42)$$

Пусть $R \in L^2(0, \infty; L^2(\Omega_\varepsilon))$ и $g = a\varphi$ с $a \in L^1(0, \infty)$ и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)^m$. Тогда свертка $R * g$ определена на $(0, \infty) \times \Omega_\varepsilon$ и выполнено неравенство

$$\|R * g\|_{L^2(0, \infty; L^2(\Omega_\varepsilon))} \leq \|a\|_{L^1(0, \infty)} \|\varphi\|_{C^0(\overline{\Omega})^m} \|R\|_{L^2(0, \infty; L^2(\Omega_\varepsilon)^{m \times m})}. \quad (2.43)$$

Действительно, используя для оценки каждой компоненты $R * g = a * R\varphi$ неравенство (2.40), получаем $\|R * g\|_{L^2(0, \infty; L^2(\Omega_\varepsilon))} \leq \|a\|_{L^1(0, \infty)} \|R\varphi\|_{L^2(0, \infty; L^2(\Omega_\varepsilon))}$, что и доказывает (2.43). Таким образом, определены последовательности v_ε^{sk} и q_ε^k , “приближающие” решение задачи (0.4):

$$v_\varepsilon^{sk} = \frac{\varepsilon^2}{\nu} a_\varepsilon * P_k + \frac{\varepsilon^3}{\nu} w_\varepsilon^s * \nabla P_k, \quad q_\varepsilon^k = p + \varepsilon b_\varepsilon * P_k + \varepsilon B_\varepsilon P_k. \quad (2.44)$$

Учитывая (2.39) и соленоидальность $a(y, t)$, получаем равенство

$$\operatorname{div} v_\varepsilon^{sk} = \frac{\varepsilon^2}{\nu} ((\operatorname{div}_y w^s)_\varepsilon - A_2/|F| + a_\varepsilon) * \nabla P_k + \frac{\varepsilon^3}{\nu} w_\varepsilon^s * \nabla \nabla P_k.$$

Следовательно, в силу (2.26) и (2.43) выполнено неравенство (2.9). Аналогично, из (0.4), (2.41) и (2.44) имеем равенство

$$\begin{aligned} & (u_\varepsilon - v_\varepsilon^{sk})'_t - \nu \Delta(u_\varepsilon - v_\varepsilon^{sk}) + \nabla(p_\varepsilon - q_\varepsilon^k) \\ &= f - \nabla p - (a_\varepsilon|_{t=0})P_k + (1 - \varepsilon^2/\nu)(a_\varepsilon|_{t=0})P_k \\ & \quad + (\Delta_y a - \nabla_y b - a'_t)_\varepsilon * P_k + (1 - \varepsilon^2/\nu)(a'_t)_\varepsilon * P_k \\ & \quad - (\nabla_y B)_\varepsilon P_k + 2\varepsilon(\nabla_y a)_\varepsilon * \nabla P_k + \varepsilon^2 a_\varepsilon * \Delta P_k \\ & \quad - \varepsilon b_\varepsilon * \nabla P_k - \varepsilon B_\varepsilon \nabla P_k + \varepsilon(\Delta_y w^s)_\varepsilon * \nabla P_k \\ & \quad + 2\varepsilon^2(\nabla_y w^s)_\varepsilon * \nabla \nabla P_k + \varepsilon^3 w_\varepsilon^s * \Delta \nabla P_k \\ & \quad - \varepsilon(\varepsilon^2/\nu)w_\varepsilon^s * \nabla(P_k)'_t. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Пусть $\varepsilon A_\varepsilon^{sk}$ обозначает последние восемь слагаемых справа в равенстве (2.45) и $D_k = f - \nabla p - P_k$, $B_\varepsilon^{sk} = (a_\varepsilon|_{t=0})P_k + (a'_t)_\varepsilon * P_k$. Тогда, используя (0.2), (0.8) и неравенства (2.24), заключаем, что выполнены равенство (2.11) (с ε^2/ν , замененным на $1 - \varepsilon^2/\nu$) и неравенства (2.12). Следовательно, учитывая (2.25), (2.42), (2.43) и повторяя окончание доказательства теоремы 1, получаем при $\varepsilon \rightarrow 0$ соотношение (0.7) и слабую сходимость последовательности $\{(\nu/\varepsilon^2)u_\varepsilon\}$ к $A_2 * (f - \nabla p)$ в $L^2(0, T; L^2(\Omega)^m)$. В силу условия (0.2) последовательности $\{u_\varepsilon\}$ и $\{(\nu/\varepsilon^2)u_\varepsilon\}$ имеют совпадающие слабые пределы.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы 2 остается доказать, что $u_\varepsilon \rightarrow u$ слабо-* в $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^m)$, если $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega)^m)$. Из леммы 4 имеем $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^m)} \leq C$, и поэтому [3] некоторая подпоследовательность последовательности $\{u_\varepsilon\}$ сходится слабо-* в $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^m)$ к некоторому пределу v . Следовательно, повторяя доказательство (2.18), заключаем, что $v = A_2 * (f - \nabla p)$, и теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. В соответствии с результатами [1], [2] решение $B(y)$ задачи (0.10) с компонентами из $H_P^1(F) \cap L^2(F)/\mathbb{R}$ существует и единственно. Следовательно, $a(y) = E - \nabla B(y) \in L^2(F)^{m \times m}$. Определим $a_\varepsilon = a(x/\varepsilon)$, $B_\varepsilon = B(x/\varepsilon)$, $(\nabla_y B)_\varepsilon = (\nabla_y B)(x/\varepsilon)$ и продолжим эти функции по ε -периодичности на Ω_ε . Тогда

$$\|a_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^{m \times m}} \leq C, \quad \|B_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^m} \leq C. \quad (2.46)$$

Известно [12], что $A_3 = \langle a \rangle$ является симметричной, положительно определенной матрицей с постоянными компонентами. Кроме того, найдется такое $W_\varepsilon \in H^1(\Omega)^{m \times m \times m}$, что $\|W_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^{m \times m \times m}} \leq C$ и выполнено соотношение (2.2). Здесь и далее при ссылках на формулы из доказательства теоремы 1 предполагается, что A_1 в этих формулах заменено на A_3 . Аналогично, найдется такое $w \in H_P^1(F, S)^{m \times m \times m}$, что $\operatorname{div}_y w = A_3/|F| - a$. Далее, существует последовательность $\{w^s\} \subset C_P^\infty(F, S)^{m \times m \times m}$, сходящаяся к w в норме $H_P^1(F, S)^{m \times m \times m}$. Определим $w_\varepsilon^s = w^s(x/\varepsilon)$, $(\operatorname{div}_y w^s)_\varepsilon = (\operatorname{div}_y w^s)(x/\varepsilon)$, продолжим эти функции по ε -периодичности на Ω_ε и w_ε^s нулем на $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. Тогда равномерно по ε выполнено соотношение (2.3).

В соответствии с (0.10) имеем $\operatorname{div}_y a = 0$ в F и $(a, N) = 0$ на S . Из леммы 6 следует, что найдется последовательность $\{a_l\} \subset C_P^\infty(F, S)^{m \times m}$ соленоидальных вектор-функций, сходящаяся к a в норме $L^2(F)^{m \times m}$. Определим $a_\varepsilon^l = a_l(x/\varepsilon)$, продолжим эти функции по ε -периодичности на Ω_ε и нулем на $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. Тогда $\operatorname{div} a_\varepsilon^l = 0$ для каждого $l = 1, 2, \dots$ и равномерно по ε выполнено соотношение

$$\|a_\varepsilon^l - a_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^{m \times m}} \leq C \|a_l - a\|_{L^2(F)^{m \times m}} \rightarrow 0 \quad \text{при } l \rightarrow \infty. \quad (2.47)$$

Осредненная задача для “предельного” давления p в рассматриваем случае имеет вид

$$\operatorname{div} A_3 \int_0^t (f - \nabla p) dt = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \left(A_3 \int_0^t (f - \nabla p) dt, n \right) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (2.48)$$

Разумеется, эти соотношения можно продифференцировать по t и предположить (например, по определению), что p является решением задачи (0.11) с A_1 , замененным на A_3 . Тогда существование и единственность решения $p \in L^2(0, T; H^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)/\mathbb{R})$ этой задачи следует из положительной определенности матрицы A_3 . Пусть $G = A_3(f - \nabla p)$. В силу леммы 7 найдется последовательность $\{G_k\} \subset C_0^\infty((0, T) \times \Omega)^m$ соленоидальных вектор-функций, сходящаяся к G в норме $L^2(0, T; L^2(\Omega)^m)$. Пусть $P_k = A_3^{-1}G_k$. Тогда выполнены равенство (2.5) и соотношение (2.6).

Используя введенные выше функции, определим последовательности v_ε^{slk} и q_ε^k , “приближающие” решение задачи (0.4):

$$v_\varepsilon^{slk} = a_\varepsilon^l \int_0^t P_k dt + \varepsilon w_\varepsilon^s \nabla \int_0^t P_k dt, \quad q_\varepsilon^k = p + \varepsilon B_\varepsilon P_k. \quad (2.49)$$

Учитывая (2.5) и соленоидальность a_ε^l , получаем равенство

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v_\varepsilon^{slk} &= ((\operatorname{div}_y w^s)_\varepsilon - A_3/|F| + a_\varepsilon) \nabla \int_0^t P_k dt \\ &\quad + (a_\varepsilon^l - a_\varepsilon) \nabla \int_0^t P_k dt + \varepsilon w_\varepsilon^s \nabla \nabla \int_0^t P_k dt. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Поскольку функции w_ε^s и P_k являются гладкими и конечное T фиксировано, из (0.4) и (2.50) получаем неравенство

$$\|\operatorname{div}(u_\varepsilon - v_\varepsilon^{slk})\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))} \leq \delta_{sl}C_k + \varepsilon C_{sk}, \quad (2.51)$$

где C_{sk} , δ_{sl} не зависят от ε и, кроме того, δ_{sl} достаточно мало при больших s и l в соответствии с (2.3) и (2.47). Кроме того, из условия (0.3) и (2.51) следует, что выполнено неравенство

$$\|\operatorname{div}(u_\varepsilon - v_\varepsilon^{slk})\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))} \leq \frac{\varepsilon^2}{\nu} \delta_{sl}C_k + \frac{\varepsilon^3}{\nu} C_{sk} \quad (2.52)$$

с постоянными C_{sk} , δ_{sl} из неравенства (2.51). Аналогично, из (0.4) и (2.49) имеем равенство

$$\begin{aligned} (u_\varepsilon - v_\varepsilon^{slk})'_t - \nu \Delta(u_\varepsilon - v_\varepsilon^{slk}) + \nabla(p_\varepsilon - q_\varepsilon^k) &= f - \nabla p - (\nabla_y B)_\varepsilon P_k \\ &- a_\varepsilon P_k - (a_\varepsilon^l - a_\varepsilon)P_k + (\nu/\varepsilon^2)\Delta(\varepsilon^2 v_\varepsilon^{slk}) - \varepsilon B_\varepsilon \nabla P_k - \varepsilon w_\varepsilon^s \nabla P_k. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Пусть $\varepsilon A_\varepsilon^{sk}$ обозначает последние два слагаемых в правой части равенства (2.53) и $D_k = f - \nabla p - P_k$, $D_\varepsilon^{lk} = (a_\varepsilon - a_\varepsilon^l)P_k$, $B_\varepsilon^{slk} = \Delta(\varepsilon^2 v_\varepsilon^{slk})$. Тогда в силу определения $a_\varepsilon = E - (\nabla_y B)_\varepsilon$ выполнено равенство

$$(u_\varepsilon - v_\varepsilon^{slk})'_t - \nu \Delta(u_\varepsilon - v_\varepsilon^{slk}) + \nabla(p_\varepsilon - q_\varepsilon^k) = D_k + D_\varepsilon^{lk} + \varepsilon A_\varepsilon^{sk} + (\nu/\varepsilon^2)B_\varepsilon^{slk}. \quad (2.54)$$

Используя (2.46) и гладкость a_ε^l , w_ε^s , P_k , имеем неравенства

$$\begin{aligned} \|A_\varepsilon^{sk}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)^m)} &\leq C_{sk}, \quad \|B_\varepsilon^{slk}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)^m)} \leq C_{slk}, \\ \|D_k\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)^m)} &\leq \delta_k, \quad \|D_\varepsilon^{lk}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)^m)} \leq \delta_l C_k, \end{aligned} \quad (2.55)$$

где C_{slk} , C_{sk} , C_k , δ_k , δ_l не зависят от ε и, кроме того, δ_k и δ_l достаточно малы при больших k и l в соответствии с (2.6) и (2.47).

Учитывая (2.52), (2.55) и повторяя доказательство неравенств (2.15), (2.16), получаем оценку

$$\begin{aligned} \|(u_\varepsilon - v_\varepsilon^{slk})'_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^m)} + (\nu/\varepsilon) \|\nabla(u_\varepsilon - v_\varepsilon^{sk})\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)^{m \times m})}^2 \\ \leq \sqrt{\varepsilon} C_{sk} + \delta_{sl}C_k + \delta_s C_k + \delta_k C + (\nu/\varepsilon^2)C_{slk}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Здесь и далее C_{slk} , C_{sk} , C_k , δ_{sl} , δ_k , δ_l не зависят от ε и, кроме того, δ_{sl} , δ_k , δ_l достаточно малы при больших s , k и l . Таким образом, выполнен аналог неравенства (2.17), из которого (при достаточно больших k , затем при достаточно больших s , l и, наконец, при достаточно малых ε , ν/ε^2) и следует соотношение (0.7) теоремы 3.

Умножая скалярно в $L^2(\Omega_\varepsilon)^m$ равенство (2.54) на $u_\varepsilon - v_\varepsilon^{slk}$ и интегрируя полученное соотношение по $(0, t)$, имеем (см. (1.2)) неравенства

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - v_\varepsilon^{slk}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^m)}^2 &\leq 2 \int_0^T (p_\varepsilon - q_\varepsilon^k, \operatorname{div}(u_\varepsilon - v_\varepsilon^{slk}))_{L^2(\omega_k \cap \Omega_\varepsilon)} dt \\ &+ 2 \int_0^T (D_k + D_\varepsilon^{lk} + \varepsilon A_\varepsilon^{sk} + (\nu/\varepsilon^2)B_\varepsilon^{slk}, (u_\varepsilon - v_\varepsilon^{slk}))_{L^2(\Omega_\varepsilon)^m} dt \\ &\leq \varepsilon C_{sk} + \delta_{sl}C_k + (\delta_k + \delta_l C_k + \varepsilon C_{sk} + (\nu/\varepsilon^2)C_{slk}) \|u_\varepsilon - v_\varepsilon^{sk}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^m)}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

где учтены неравенства (2.13), (2.51), (2.55) и конечность фиксированного T . Учитывая ε -неравенство, из (2.57) получаем оценку

$$\|u_\varepsilon - v_\varepsilon^{sk}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^m)} \leq \sqrt{\varepsilon} C_{sk} + \delta_{sl} C_k + \delta_s C_k + \delta_k C + (\nu/\varepsilon^2) C_{slk}. \quad (2.58)$$

Повторяя доказательство соотношения (2.18), из неравенств (2.56), (2.58) (при достаточно больших k, s, l и при достаточно малых $\varepsilon, \nu/\varepsilon^2$) заключаем, что

$$u_\varepsilon \rightarrow A_3 \int_0^t (f - \nabla p) dt \quad \text{слабо-}^* \text{ в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^m)$$

и $(u_\varepsilon)'_t \rightarrow A_3(f - \nabla p)$ слабо в $L^2(0, T; L^2(\Omega)^m)$. Теорема 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Повторяем доказательство теоремы 3 до равенства (2.50), заменяя p на q в задаче (2.48). Учитывая, что $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega)^m)$, для решения этой задачи имеем $q \in L^1(0, T; H^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)/\mathbb{R}) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)/\mathbb{R})$. Поскольку функции w_ε^s и P_k являются гладкими и финитными, из (0.4) и (2.50) получаем неравенство

$$\|\operatorname{div}(v_\varepsilon - v_\varepsilon^{slk})'_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))} \leq \delta_{sl} C_k + \varepsilon C_{sk}. \quad (2.59)$$

Здесь и далее C_{sk}, C_k, δ_{sl} не зависят от ε и, кроме того, δ_{sl} достаточно мало при больших s и l в соответствии с (2.3) и (2.47). Аналогично, из (0.13) и (2.49) следует равенство

$$(v_\varepsilon - v_\varepsilon^{slk})'_t + \nabla(q_\varepsilon - q_\varepsilon^k) = D_k + D_\varepsilon^{lk} + \varepsilon A_\varepsilon^{sk}, \quad (2.60)$$

где $A_\varepsilon^{sk} = -B_\varepsilon \nabla P_k - w_\varepsilon^s \nabla P_k$, $D_k = f - \nabla p - P_k$, $D_\varepsilon^{lk} = (a_\varepsilon - a_\varepsilon^l) P_k$ удовлетворяют неравенствам (2.55). В этих неравенствах и далее $C_{slk}, \delta_k, \delta_l$ не зависят от ε и, кроме того, δ_k и δ_l достаточно малы при больших k и l в соответствии с (2.6) и (2.47).

Умножим скалярно в $L^2(\Omega_\varepsilon)^m$ первое уравнение (0.13) на ∇q_ε . Тогда для п.в. t имеем неравенство

$$\|\nabla q_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^m} \leq \|f\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^m}. \quad (2.61)$$

Следовательно, $\nabla q_\varepsilon \in L^1(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon)) \cap L^2(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon))$ и выполнено неравенство (2.13) с p_ε , замененным на q_ε . Умножая скалярно в $L^2(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon)^m)$ равенство (2.60) на $(v_\varepsilon - v_\varepsilon^{slk})'_t$, получаем оценку

$$\begin{aligned} \|(v_\varepsilon - v_\varepsilon^{slk})'_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)^m)}^2 &\leq \int_0^T (q_\varepsilon - q_\varepsilon^k, \operatorname{div}(v_\varepsilon - v_\varepsilon^{slk})'_t)_{L^2(\omega_k \cap \Omega_\varepsilon)} dt \\ &+ \int_0^T (D_k + D_\varepsilon^{lk} + \varepsilon A_\varepsilon^{sk}, (v_\varepsilon - v_\varepsilon^{slk})'_t)_{L^2(\Omega_\varepsilon)^m} dt, \end{aligned}$$

из которой и из (2.13), (2.55), (2.59) следует неравенство

$$\|(v_\varepsilon - v_\varepsilon^{slk})'_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)^m)} \leq \sqrt{\varepsilon} C_{sk} + \delta_{sl} C_k + \delta_l C_k + \delta_k C. \quad (2.62)$$

Следовательно, используя леммы 2, 3 и равенство (2.60), для $\omega \subset \subset \Omega$ имеем неравенства

$$\begin{aligned} \|q_\varepsilon - q_\varepsilon^k\|_{L^2(0,T;L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon))} &\leq (C/\varepsilon) \|\nabla(q_\varepsilon - q_\varepsilon^k)\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_\varepsilon)^m)} \\ &\leq C \|\nabla(q_\varepsilon - q_\varepsilon^k)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)^m)} \\ &= C \|D_k + D_\varepsilon^{lk} + \varepsilon A_\varepsilon^{sk} - (v_\varepsilon - v_\varepsilon^{slk})'_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)^m)} \\ &\leq \sqrt{\varepsilon} C_{sk} + \delta_{sl} C_k + \delta_l C_k + \delta_k C, \end{aligned} \quad (2.63)$$

где учтены неравенства (2.55) и (2.62). Из неравенств (2.62) и (2.63), как и в доказательстве теоремы 1, выводятся утверждения теоремы 4 о сходимости q_ε и $(v_\varepsilon)'_t$ к соответствующим пределам. Однако для доказательства утверждения о сходимости v_ε потребуются дополнительные рассуждения.

Предположим в условиях леммы 7, что $u \in L^1(0,T;H(\Omega))$. Тогда найдется последовательность $\{u_k\} \subset C_0^\infty((0,\infty) \times \Omega)^m$ солениоидальных вектор-функций, сходящаяся к u в норме $L^1(0,T;H(\Omega))$. Действительно, в соответствии с [21, гл. 6, § 7] в $L^1(0,T;H(\Omega))$ плотно множество ступенчатых функций. Каждая ступенчатая функция приближается конечной линейной комбинацией векторов вида $a_s \varphi_l$ с $\{a_s\} \subset C_0^\infty(0,\infty)$, $\varphi_l \in V(\Omega)$, что и требуется доказать. Таким образом, заменяя при необходимости P_k в (2.49), получаем неравенства

$$\begin{aligned} \|A_\varepsilon^{sk}\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)^m)} &\leq C_{sk}, \quad \|D_k\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)^m)} \leq \delta_k, \\ \|D_\varepsilon^{lk}\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)^m)} &\leq \delta_l C_k. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Повторяя доказательства лемм 2 и 3, заключаем, что выполнено неравенство

$$\|q_\varepsilon - q_\varepsilon^k\|_{L^1(0,T;L^2(\omega_k \cap \Omega_\varepsilon))} \leq C_k \quad (2.65)$$

с соответствующим $\omega_k \subset \subset \Omega$ (см. доказательство (2.13)). Кроме того, из (0.13) и (2.50) следует неравенство

$$\|\operatorname{div}(v_\varepsilon - v_\varepsilon^{slk})\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))} \leq \delta_{sl} C_k + \varepsilon C_{sk}. \quad (2.66)$$

Отметим, что в силу определений w_ε^s , P_k и (2.50) неравенство (2.66) выполнено для произвольных T , в отличие от неравенства (2.51). Используя (2.64)–(2.66) при оценке соответствующих интегралов в аналоге соотношения (2.57), имеем неравенство

$$\|v_\varepsilon - v_\varepsilon^{slk}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^m)} \leq \sqrt{\varepsilon} C_{sk} + \delta_{sl} C_k + \delta_l C_k + \delta_k C.$$

Из этого неравенства, как и в доказательстве (2.18), выводим, что

$$v_\varepsilon \rightarrow A_3 \int_0^t (f - \nabla p) dt \quad \text{слабо-* в } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^m),$$

и теорема 4 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Соотношения (0.14), (0.15) можно записать в виде краевой задачи

$$v_\varepsilon + \nabla q_\varepsilon = w, \quad \operatorname{div} v_\varepsilon = 0 \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \quad (v_\varepsilon, n_\varepsilon) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_\varepsilon, \quad (2.67)$$

где $w \in L^2(\Omega)^m$. Таким образом, имеется “стационарная” аналогия с задачей (0.13). Следовательно, повторяя начало доказательства теоремы 4, получаем соотношения (2.2), (2.3), (2.46) и (2.47). Осредненная задача для “предельного” давления q в рассматриваемом случае имеет вид

$$\operatorname{div} A_3(w - \nabla q) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (A_3(w - \nabla q), n) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (2.68)$$

Существование и единственность решения $q \in H^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ этой задачи следует из положительной определенности матрицы A_3 . Пусть $G = A_3(w - \nabla q)$. В силу плотности множества $V(\Omega)$ в $H(\Omega)$ (см. доказательство леммы 7) найдется последовательность $\{G_k\} \subset C_0^\infty(\Omega)^m$ соленоидальных вектор-функций, сходящаяся к G в норме $L^2(\Omega)^m$. Пусть $P_k = A_3^{-1}G_k$. Тогда выполнены равенство (2.5) с A_1 , замененным на A_3 , и соотношение

$$\|w - \nabla q - P_k\|_{L^2(\Omega)^m} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (2.69)$$

Используя введенные выше функции, определим последовательности v_ε^{slk} и q_ε^k , “приближающие” решение задачи (2.67):

$$v_\varepsilon^{slk} = a_\varepsilon^l P_k + \varepsilon w_\varepsilon^s \nabla P_k, \quad q_\varepsilon^k = p + \varepsilon B_\varepsilon P_k. \quad (2.70)$$

Учитывая (2.3), (2.5) и (2.47), из (2.67) и (2.70) получаем неравенство

$$\|\operatorname{div}(v_\varepsilon - v_\varepsilon^{slk})\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \delta_{sl} C_k + \varepsilon C_{sk}. \quad (2.71)$$

Аналогично, из (2.67) и (2.70) имеем равенство

$$v_\varepsilon - v_\varepsilon^{slk} + \nabla(q_\varepsilon - q_\varepsilon^k) = D_k + D_\varepsilon^{lk} + \varepsilon A_\varepsilon^{sk}, \quad (2.72)$$

где $A_\varepsilon^{sk} = -B_\varepsilon \nabla P_k - w_\varepsilon^s \nabla P_k$, $D_k = f - \nabla p - P_k$, $D_\varepsilon^{lk} = (a_\varepsilon - a_\varepsilon^l) P_k$ удовлетворяют “стационарному варианту” неравенств (2.55). Кроме того, выполнено неравенство (2.61). Следовательно, повторяя доказательство неравенств (2.62) и (2.63), для $\omega \subset \subset \Omega$ имеем неравенства

$$\begin{aligned} \|v_\varepsilon - v_\varepsilon^{slk}\|_{L^2(\Omega)^m} &\leq \sqrt{\varepsilon} C_{sk} + \delta_{sl} C_k + \delta_l C_k + \delta_k C, \\ \|q_\varepsilon - q_\varepsilon^k\|_{L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon)} &\leq C \|\nabla(q_\varepsilon - q_\varepsilon^k)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^m} \\ &\leq \sqrt{\varepsilon} C_{sk} + \delta_{sl} C_k + \delta_l C_k + \delta_k C, \end{aligned} \quad (2.73)$$

где использованы соотношения (2.55), (2.68), (2.71), (2.72) и неравенства из доказательства лемм 2 и 3. Из неравенств (2.73), как и в доказательстве теоремы 1, выводятся утверждения теоремы 5 о сходимости q_ε и v_ε к соответствующим пределам.

Пусть u_ε и p_ε являются решениями начально-краевой задачи (0.4), (0.16). Определим

$$\begin{aligned} U_\varepsilon &= \int_0^t u_\varepsilon(\tau) d\tau, \quad P_\varepsilon = \int_0^t p_\varepsilon(\tau) d\tau, \quad F = \int_0^t f(\tau) d\tau, \\ \tilde{P}_\varepsilon &= P_\varepsilon + q_\varepsilon, \quad \tilde{F} = F + \omega. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Тогда в соответствии с [1] (см. также [7]) имеем для U_ε и $\tilde{P}_\varepsilon$ начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} (U_\varepsilon)'_t - \nu \Delta U_\varepsilon + \nabla \tilde{P}_\varepsilon &= \tilde{F}, \quad \operatorname{div} U_\varepsilon = 0 \quad \text{в } \Omega_\varepsilon \times (0, T), \\ U_\varepsilon &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega_\varepsilon \times (0, T), \quad U_\varepsilon|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \end{aligned} \quad (2.75)$$

где $\tilde{F} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^m)$, поскольку конечное T фиксировано. Таким образом, для вычисления пределов последовательностей $\{U_\varepsilon\}$ и $\{\tilde{P}_\varepsilon\}$ можно использовать теоремы 1, 2 или 3.

Пусть выполнено условие (0.1). Тогда в силу теоремы 1 для $\omega \subset \subset \Omega$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\varepsilon &\rightarrow \tilde{P} \quad \text{в норме } L^2(0, T; L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}), \\ (\nu/\varepsilon^2)U_\varepsilon &\rightarrow A_1(\tilde{F} - \nabla \tilde{P}) \quad \text{слабо в } L^2(0, T; L^2(\Omega)^m), \end{aligned} \quad (2.76)$$

где $\tilde{P}$ является решением краевой задачи

$$\operatorname{div} A_1(\tilde{F} - \nabla \tilde{P}) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (A_1(\tilde{F} - \nabla \tilde{P}), n) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (2.77)$$

Учитывая единственность решения и линейность задачи (2.77), получаем представление

$$\tilde{P} = s + \int_0^t p(\tau) d\tau,$$

где p является решением краевой задачи (0.11) и s удовлетворяет (2.68) с A_3 , замененным на A_1 . Непосредственно из определений и (2.76) получаем соотношение

$$P_\varepsilon = \tilde{P}_\varepsilon - q_\varepsilon \rightarrow s - q + \int_0^t p(\tau) d\tau \quad \text{в норме } L^2(0, T; L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}).$$

Но тогда $p = (P_\varepsilon)'_t$ сходится к p в норме $H^{-1}(0, T; L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon)/\mathbb{R})$. Пусть $\varphi \in C_0^\infty((0, T) \times \Omega)^m$. Тогда $(\varphi)'_t \in C_0^\infty((0, T) \times \Omega)^m$ и из (2.76) следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\frac{\nu}{\varepsilon^2} u_\varepsilon, \varphi \right)_{L^2(\Omega)^m} dt &= \int_0^T \left(\frac{\nu}{\varepsilon^2} U_\varepsilon, \varphi'_t \right)_{L^2(\Omega)^m} dt \\ &\rightarrow \int_0^T (U, \varphi'_t)_{L^2(\Omega)^m} dt = \int_0^T (A_1(f - \nabla p), \varphi)_{L^2(\Omega)^m} dt \end{aligned} \quad (2.78)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, что и доказывает теорему 5, (а).

Пусть выполнено условие (0.2). Тогда в силу теоремы 2 для $\omega \subset \subset \Omega$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\varepsilon &\rightarrow \tilde{P} \quad \text{в норме } L^2(0, T; L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}), \\ U_\varepsilon &\rightarrow A_2 * (\tilde{F} - \nabla \tilde{P}) \quad \text{слабо в } L^2(0, T; L^2(\Omega)^m), \end{aligned} \quad (2.79)$$

где $\tilde{P}$ является решением краевой задачи

$$\operatorname{div} A_2 * (\tilde{F} - \nabla \tilde{P}) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (A_2 * (\tilde{F} - \nabla \tilde{P}), n) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (2.80)$$

Учитывая первое равенство из (2.41), продифференцируем соотношения (2.80) по t и положим $t = 0$. Тогда для $\tilde{P}|_{t=0}$ получим краевую задачу (2.68). Напомним,

что $A_2(0) = A_3$. Следовательно, выполнено равенство $\tilde{P}|_{t=0} = q$. Учитывая второе равенство из (2.41), получаем соотношение

$$U'_t = A_2(w - \nabla q) + A_2 * (f - \nabla \tilde{P}'_t).$$

Поскольку $\operatorname{div} U'_t = 0$ в Ω и $(U'_t, n) = 0$ на $\partial\Omega$, для $p = \tilde{P}'_t$ имеем краевую задачу (0.17). Используя (2.22) и повторяя доказательство существования единственного решения задачи (2.27), заключаем, что $p \in L^2(0, T; H^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)/\mathbb{R})$, удовлетворяющее (0.17), существует и единственно. Таким образом,

$$P_\varepsilon = \tilde{P}_\varepsilon - q_\varepsilon \rightarrow \int_0^t p(\tau) d\tau \quad \text{в норме} \quad L^2(0, T; L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon)/\mathbb{R})$$

и $p_\varepsilon = (P_\varepsilon)'_t$ сходится к p в норме $H^{-1}(0, T; L^2(\omega \cap \Omega_\varepsilon)/\mathbb{R})$. Для начально-краевой задачи (0.4), (0.16) выполнено тождество (1.2). Следовательно, выполнено неравенство $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^m)} \leq C$, и поэтому [3] некоторая подпоследовательность последовательности $\{u_\varepsilon\}$ сходится слабо-* в $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^m)$ к некоторому пределу v . Таким образом, повторяя доказательство (2.78), заключаем, что $v = U'_t$ и теорема 5, (b) доказана.

Доказательство теоремы 5, (c) вполне аналогично доказательствам в рассмотренных случаях. Теорема 5 доказана.

Пусть v_ε определено равенством (0.15) и выполнено условие (0.1). Рассмотрим задачу (0.4) с “малым” неоднородным начальным условием

$$u_\varepsilon|_{t=0} = (\varepsilon/\sqrt{\nu})v_\varepsilon \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon. \quad (2.81)$$

Из соотношения (1.2) для u_ε , удовлетворяющего (0.4), (2.81), имеем неравенство

$$2\nu \int_0^T \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^{m \times m}}^2 dt \leq 2 \int_0^T (f, u_\varepsilon)_{L^2(\Omega_\varepsilon)^m} dt + (\varepsilon^2/\nu) \|v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^m}^2. \quad (2.82)$$

Следовательно, как и в лемме 4, получаем оценки

$$(\nu/\varepsilon) \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^{m \times m})} \leq C, \quad (\nu/\varepsilon^2) \|u_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^m)} \leq C. \quad (2.83)$$

Тогда некоторая подпоследовательность последовательности $\{(\nu/\varepsilon^2)u_\varepsilon\}$ слабо сходится в $L^2(0, T; L^2(\Omega)^m)$ к некоторому пределу. Поэтому, повторяя доказательство (2.78), выводим для решения u_ε задачи (0.4), (2.81) при $\varepsilon \rightarrow 0$ соотношение

$$(\nu/\varepsilon^2)u_\varepsilon \rightarrow A_1(f - \nabla p) \quad \text{слабо в} \quad L^2(0, T; L^2(\Omega)^m),$$

где p является решением краевой задачи (0.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Условие (0.19) подразумевает, что выполнено (0.1). Повторяем доказательство теоремы 1 до равенства (2.10). Пусть U_ε , P_ε и F определены равенствами (2.74). Тогда

$$\begin{aligned} -\nu \Delta U_\varepsilon + \nabla P_\varepsilon &= F - u_\varepsilon + (\varepsilon/\sqrt{\nu})v_\varepsilon - \int_0^t u_\varepsilon \nabla u_\varepsilon dt, \\ \operatorname{div} U_\varepsilon &= 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon \times (0, T), \\ U_\varepsilon &= 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega_\varepsilon \times (0, T), \quad U_\varepsilon|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon. \end{aligned}$$

В соответствии с [1], [2] решение u_ε задачи (0.18) удовлетворяет неравенству (2.82) и поэтому оценкам (2.83). Пусть $v \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$. Тогда

$$\left| \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon \nabla u_\varepsilon v \, dx \right| = \left| \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon \nabla v u_\varepsilon \, dx \right| \leq C \|u_\varepsilon\|_{L^4(\Omega_\varepsilon)^m}^2 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^{m \times m}}.$$

Следовательно, используя известную оценку L^4 -нормы для трехмерных областей [2, гл. 1, § 1], получаем неравенства

$$\|u_\varepsilon \nabla u_\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon)^m} \leq C \|u_\varepsilon\|_{L^4(\Omega_\varepsilon)^m}^2 \leq C \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^m}^{1/2} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^{m \times m}}^{3/2} \quad (2.84)$$

(в двумерном случае $\|u_\varepsilon \nabla u_\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon)^m} \leq C \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^m} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^{m \times m}}$). Таким образом,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} \left\| \int_0^t u_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \, dt \right\|_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon)^m} &\leq C \varepsilon^{-1} \int_0^T \|u_\varepsilon \nabla u_\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon)^m} \, dt \\ &\leq C \varepsilon^{-1} \int_0^T \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^m}^{1/2} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^{m \times m}}^{3/2} \, dt \\ &\leq C \varepsilon^{-1} \|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^m)}^{1/2} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{m \times m})}^{3/2} \leq C \varepsilon^{3/2} / \nu^2, \end{aligned} \quad (2.85)$$

где учтены неравенства (2.83) (в двумерном случае величина $\varepsilon^{3/2} / \nu^2$ заменяется на ε^2 / ν^2). Используя неравенства (2.83), (2.85) и повторяя окончание доказательства теоремы 1, устанавливаем для U_ε , P_ε соотношения (2.76), из которых и следуют утверждения теоремы 6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. В соответствии с [1], [2] решение u_ε задачи (0.20) удовлетворяет неравенству $\nu \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^{m \times m}}^2 \leq (f, u_\varepsilon)_{L^2(\Omega_\varepsilon)^m}$ и поэтому оценкам

$$(\nu/\varepsilon) \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^{m \times m}} \leq C, \quad (\nu/\varepsilon^2) \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^m} \leq C. \quad (2.86)$$

Следовательно, учитывая (2.84), получаем неравенство

$$\varepsilon^{-1} \|u_\varepsilon \nabla u_\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon)^m} \leq C \varepsilon^{3/2} / \nu^2,$$

и для доказательства теоремы 7 достаточно повторить “стационарный” вариант доказательства теоремы 6.

Проверим единственность решения задачи (0.20) в случае, когда выполнено условие (0.19). Пусть u_ε^1 и u_ε^2 – два решения этой задачи. Тогда для $u_\varepsilon = u_\varepsilon^1 - u_\varepsilon^2$ имеем неравенства

$$\begin{aligned} \nu \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^{m \times m}}^2 &= - \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon \nabla u_\varepsilon^1 u_\varepsilon \, dx \\ &\leq C \|u_\varepsilon\|_{L^4(\Omega_\varepsilon)^m}^2 \|\nabla u_\varepsilon^1\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^{m \times m}} \leq C (\varepsilon^{3/2} / \nu) \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^{m \times m}}^2, \end{aligned}$$

где учтены оценки (2.86) для u_ε^1 , неравенства из доказательства леммы 1 и (2.84). Следовательно,

$$(1 - (\varepsilon^{3/2} / \nu^2) C) \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^{m \times m}}^2 \leq 0$$

и $\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^{m \times m}} = 0$ в силу (0.19). Таким образом, для достаточно малых ε решение u_ε задачи (0.20) определено однозначно. Единственность решения u_ε задачи (0.18) доказывается аналогично.

Отметим в заключение, что в случае, когда множество $\square \setminus F$ имеет положительную меру Лебега в $\mathbb{R}^m$, или в случае, когда множество S имеет положительную меру Лебега на ∂F , неравенство (0.6) доказано в [22].

Список литературы

1. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. М.: Мир, 1981.
2. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
3. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
4. *Allaire G.* Homogenization of the Stokes flow in a connected porous medium // *Asymptotic Anal.* 1989. V. 2. P. 203–222.
5. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
6. *Жиков В.В.* Об усреднении системы уравнений Стокса в перфорированной области // *ДАН СССР.* 1994. Т. 334. №2. С. 144–147.
7. *Mikelić A.* Homogenization of nonstationary Navier–Stokes equations in a domain with grained boundary // *Annali di Matematica pura ed applicata.* 1991. V. CLVIII. P. 167–179.
8. *Mikelić A.* Mathematical derivation of the Darcy-type law with memory effects, governing transient flow through porous media // *Glasnik Mat.* 1994. V. 29. P. 57–77.
9. *Allaire G.* Homogenization of the unsteady Stokes equations in porous medium // *Progress in partial differential equations: calculus of variations, applications.* London: Longman Scientific and Technical, 1992.
10. *Сандраков Г.В.* Осреднение линеаризованной системы гидродинамики с малой вязкостью и скоростью звука в смесях. Препринт № 178. М.: ОВМ АН СССР, 1987.
11. *Сандраков Г.В.* Осреднение нестационарного потока Стокса в периодической перфорированной среде // *ДАН.* 1996. Т. 347. №3. С. 312–315.
12. *Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во МГУ, 1990.
13. *Валединский В.Д., Кобельков Г.М.* О разностном аналоге неравенства $\|p\|_{L^2} \leq C \|\operatorname{grad} p\|_{W_2^{-1}}$. Препринт № 67. М.: ОВМ АН СССР, 1983.
14. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1. М.: Мир, 1977.
15. *Боговский М.Е.* Решение первой краевой задачи для уравнения неразрывности несжимаемой среды // *ДАН СССР.* 1979. Т. 248. №5. С. 1037–1040.
16. *Агранович М.С., Вишик М.И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // *УМН.* 1964. Т. 19. №3. С. 53–161.
17. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
18. *MacCamy R.C., Wong J.S.W.* Stability theorems for some functional equations // *Trans. AMS.* 1972. V. 164. P. 1–37.
19. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
20. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. М.: Мир, 1985.
21. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. М.: Высш. школа, 1982.
22. *Мазья В.Г.* Пространства Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986.

Поступило в редакцию
27.IV.1995