Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Скалыга, Аналогии неравенств Марковых и Бернштейна для полиномов в банаховых пространствах, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 1, 141–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/im108>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 13:00:14

УДК 517.16

В. И. Скалыга

Аналоги неравенств Марковых и Бернштейна для полиномов в банаховых пространствах

Предложены аналоги неравенств А. А. и В. А. Марковых для алгебраических полиномов на кубе в $\mathbb{R}^m$ в метриках $l_2^{(m)}$ и $l_1^{(m)}$, а также для полиномов на выпуклых замкнутых ограниченных телах в банаховом пространстве и на таких же телах с центральной симметрией. Для последних двух случаев получены аналоги неравенства С. Н. Бернштейна.

Библиография: 13 наименований.

§ 1. Введение

Пусть $\mathfrak{P}_n$ – множество всех алгебраических полиномов степени не выше $n \in \mathbb{Z}_+$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\|P_n\|_{[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |P_n(x)|$. Известное (см. [1], [2]) неравенство А. А. и В. А. Марковых утверждает, что для любого $P_n \in \mathfrak{P}_n$

$$\|P_n^{(k)}\|_{[a,b]} \leq \frac{2^k n^2 (n^2 - 1^2) \dots (n^2 - (k-1)^2)}{(b-a)^k (2k-1)!!} \|P_n\|_{[a,b]}, \quad (1)$$

причем равенство достигается только на полиномах вида

$$P_n(x) = c T_n((2x - a - b)/(b - a)),$$

где $T_n(x) = \cos(\arccos x)$.

Неравенство (1) при $k = 1$ доказано А. А. Марковым, при $k \geq 2$ В. А. Марковым. Для внутренних точек отрезка $[a, b]$ справедливо неравенство С. Н. Бернштейна [3], согласно которому

$$|P_n'(x)| \leq n \|P_n\|_{[a,b]} / \sqrt{(x-a)(b-x)}. \quad (2)$$

Неравенства А. А. Маркова и С. Н. Бернштейна переносились на полиномы многих переменных. О. D. Kellogg [5] показал, что неравенство (1) при $k = 1$ переносится на случай шара из гильбертова пространства без изменений. D. R. Wilhelmsen [6] получил следующий результат: пусть $P_n(x) = \sum_{|i| \leq n} a_i x^i$, где $i = (i_1, \dots, i_m)$, $|i| = i_1 + \dots + i_m$, $x^i = x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m}$ – полином от m переменных степени не выше n , заданный на компактном выпуклом теле K из $\mathbb{R}^m$; тогда справедливо неравенство

$$\sup\{|DP_n(x)| : x \in K\} \leq (4n^2/\omega_K) \sup\{|P_n(x)| : x \in K\}, \quad (3)$$

где D – производная по любому направлению, а ω_K – ширина K . Для случая треугольника этот результат был получен в [7].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-011-16021).

Пусть X и Y – банаховы пространства над $\mathbb{R}$. Отображение $U: X^j \rightarrow Y$ называется j -*линейным* ($j \in \mathbb{Z}_+$), если оно линейно по каждому аргументу при фиксированных остальных и ограничено, т.е. существует $M > 0$ такое, что справедливо неравенство

$$\|U(x_1, \dots, x_j)\|_Y \leq M \|x_1\|_X \dots \|x_j\|_X, \quad x_k \in X, \quad k = \overline{1, j}.$$

Через $\mathfrak{P}_n(X, Y)$ обозначим пространство всех полиномов степени не выше n , т.е. множество всех отображений вида

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n u_j(x, \dots, x), \quad x \in X,$$

где $u_j: X^j \rightarrow Y$ – j -линейное отображение. В дальнейшем $\|P_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k(X, Y)}$ – норма оператора k -й производной по Фреше многочлена P_n в точке x в пространстве $\mathcal{L}^k(X, Y)$ всех ограниченных k -линейных операторов из X^k в Y . Мы здесь не делаем различия между $\mathcal{L}^k(X, Y)$ и изометрически изоморфным ему пространством

$$\underbrace{\mathcal{L}\left(X, \mathcal{L}(X, \dots, \mathcal{L}(X, Y) \dots)\right)}_{k \text{ раз}}.$$

Если $Y = \mathbb{R}$, то для обозначения производной k -го порядка будем применять знак ∇^k . Всюду в дальнейшем K – ограниченное, замкнутое, выпуклое тело из X , ∂K – его граница, $B(x, r)$ – замкнутый шар радиуса r с центром в x из X . Мы будем использовать следующие характеристики множества K :

$$\begin{aligned} r(x_0) &= \sup\{r > 0 : B(x_0, r) \in K\}, \\ r(K) &= \sup_{x_0 \in K} r(x_0), \\ K_{\rho(x_0)} &= \{x \in X : x_0 + (x - x_0)\rho^{-1} \in K\}, \quad \text{где } \rho < 1, \\ \rho(x, x_0) &= \inf\{\rho \geq 0 : x \in K_{\rho(x_0)}\}, \\ b(x) &= \inf_{x_0 \in K \setminus \partial K} \left[r(x_0)(1 - \rho(x, x_0))^{1/2} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Положим

$$\|P_n\|_K = \sup_{x \in K} \|P_n(x)\|_Y, \quad \|P_n^{(k)}\|_K = \sup_{x \in K} \|P_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k(X, Y)}.$$

В работе [8] доказаны следующие аналоги неравенств А. А. Маркова и С. Н. Бернштейна:

$$\|P'_n\|_K \leq (4n^2/r(K)) \|P_n\|_K, \quad (4)$$

$$\|P'_n(x)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq 3b(x)n \|P_n\|_K, \quad x \in K \setminus \partial K. \quad (5)$$

В настоящей работе получены следующие усиления оценок (4) и (5):

$$\begin{aligned} \|P'_n\|_K &\leq (4n^2/\omega_K) \|P_n\|_K \leq (2n^2/r(K)) \|P_n\|_K, \\ \|P'_n(x)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} &\leq b_1(x)n \|P_n\|_K \leq \sqrt{2}b(x)n \|P_n\|_K, \quad x \in K \setminus \partial K, \end{aligned}$$

где

$$\omega_K = \inf_{\ell \in X \setminus \{0\}} \sup_{\substack{y_1, y_2 \in K, \\ c \in \mathbb{R}, y_1 - y_2 = c\ell}} \|y_1 - y_2\|,$$

$$b_1(x) = \inf_{x_0 \in K \setminus \partial K} (1 + \rho(x, x_0))^{1/2} / \left(r(x_0)(1 - \rho(x, x_0))^{1/2} \right).$$

Кроме этого в данной работе получены аналоги неравенства (1) для m -мерного куба $Q^m(a)$ с длиной ребра a в m -мерных пространствах $X = \ell_2^{(m)}$ и $X = \ell_1^{(m)}$. В частности, для $X = \ell_2^{(m)}$

$$\begin{aligned} \|P'_n\|_{Q^m(a)} &\leq (2n^2/a) \|P_n\|_{Q^m(a)}, \\ \|P_n^{(2)}\|_{Q^m(a)} &\leq (4A/a^2) \|P_n\|_{Q^m(a)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$A = \min(2n^2(n^2 - 1)/3, n^2(n - 1)^2);$$

для $X = \ell_1^{(m)}$

$$\begin{aligned} \|P'_n\|_{Q^m(a)} &\leq (2n^2/a) \|P_n\|_{Q^m(a)}, \\ \|P_n^{(2)}\|_{Q^m(a)} &\leq (4n^2(n^2 - 1)/3a^2) \|P_n\|_{Q^m(a)}. \end{aligned} \quad (7)$$

На основе оценок (6) и (7) для центрально-симметричного K из банахова пространства X при $\|P_n\|_K \leq 1$ получены оценки

$$\begin{aligned} \|P'_n\|_K &\leq B_1/r(K) \leq \sqrt{2}n^2/r(K), \\ \|P'_n(x)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} &\leq \sqrt{2}n / \left(r(K)(1 - \rho^2(x, x_0))^{1/2} \right), \quad x \in K \setminus \partial K, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\sup_{x \in K} \|\langle P_n^{(2)}(x)h, h \rangle\|_Y \leq C_1/r^2(K) \leq C_2/r^2(K), \quad \|h\| = 1,$$

где x_0 – центр симметрии K ,

$$\begin{aligned} B_1 &= \sup_{\tilde{P}_n} |\tilde{P}'_{nt_1}(1, 1) - \tilde{P}'_{nt_2}(1, 1)|, \\ B_2 &= \sup_{\tilde{P}_n} |\langle \nabla^2 \tilde{P}_n(1, 1)(1, -1)^T, (1, -1)^T \rangle|, \\ \tilde{P}_n(t) &\in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \quad \|\tilde{P}_n\|_{Q^2} \leq 1, \quad Q^2 = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : |t_i| \leq 1\}, \end{aligned}$$

$$C_0 = n(2n - 1)(n^2 - 1)/3, \quad C_1 = \min(2C_0, B_2), \quad C_2 = 2 \min(C_0, n^2(n - 1)^2).$$

Показано также, что для параллелограмма в любой норме, заданной на пространстве $\mathbb{R}^2$, справедливо неравенство

$$\|P_n^{(2)}\|_K \leq (C_2/r^2(K)) \|P_n\|_K.$$

Чтобы получить перечисленные оценки для любого банахова пространства Y , достаточно вывести их для $Y = \mathbb{R}$, что доказывает приведенная ниже лемма 1.

§ 2. Вспомогательные леммы

ЛЕММА 1. Пусть $K \subset X$, $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, Y)$, $\|P_n\|_K \leq 1$. Если для любого $\tilde{P}_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$ такого, что $\|\tilde{P}_n\|_K \leq 1$, справедливы неравенства

$$\|\tilde{P}_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k(X, \mathbb{R})} \leq C_k(x), \quad x \in K, \quad k = \overline{1, n}, \quad (9)$$

то и для P_n выполнены неравенства

$$\|P_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k(X, Y)} \leq C_k(x), \quad x \in K, \quad k = \overline{1, n}. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем неравенство (10) при $k = 1$, для других k доказательство аналогично.

Пусть $y^* \in Y^*$ и $\|y^*\|_{Y^*} = 1$. Обозначим $\tilde{P}_n(x) = y^*(P_n(x))$. Тогда

$$\tilde{P}_n'(x) \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) \quad \text{и} \quad \|\tilde{P}_n\|_K \leq 1.$$

В силу равенства

$$\tilde{P}_n'(x)h = y^*(P_n'(x)h), \quad h \in X$$

(см. [9, с. 50]), и (9) имеем для любого нормированного $h \in X$

$$|y^*(P_n'(x)h)| \leq C_1(x), \quad x \in K. \quad (11)$$

Так как (11) выполняется для любого нормированного $y^* \in Y^*$, то из него вытекает неравенство

$$\|P_n'(x)h\|_Y \leq C_1(x), \quad x \in K, \quad \|h\| = 1. \quad (12)$$

Из (12) следует (10).

Введем обозначения. Пусть $x_1^{(k-1)} > x_2^{(k-1)} > \dots > x_{n-k+1}^{(k-1)}$ — нули полинома $T_n^{(k-1)}(x)$ — $(k-1)$ -й производной полинома Чебышева $T_n(x)$;

$$\begin{aligned} d_{n,1} &= n, \\ d_{n,k} &= n(n^2 - 1^2) \dots (n^2 - (k-2)^2), \quad \text{если } k = 2p+1 \quad (p = 1, 2, \dots), \\ d_{n,k} &= n^2(n^2 - 2^2) \dots (n^2 - (k-2)^2), \quad \text{если } k = 2p \quad (p = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Пусть $X = \mathbb{R}$, $P_{n-k}(x) \in \mathfrak{P}_{n-k}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Пусть для $x \in [x_{n-k+1}^{(k-1)}, x_1^{(k-1)}]$ выполнено неравенство

$$|(1-x^2)^{k/2}P_{n-k}(x)| \leq 1. \quad (13)$$

Тогда справедливы неравенства

$$\max_{x \in [-1, 1]} |P_{n-k}(x)| \leq \max(T_n^{(k)}(1)/a_{n,k}, b_{n,k}) = m_{n,k}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} b_{n,k} &= \left(1 - (x_1^{(k-1)})^2\right)^{-k/2}, \\ a_{n,k} &= \min_{i=\overline{1, n-k+1}} |T_n^{(k)}(x_i^{(k-1)})(1 - (x_i^{(k-1)})^2)^{k/2}|, \\ m_{n,k} &= T_n^{(k)}(1)/a_{n,k} \quad \text{при } k = \overline{1, 6} \quad \text{и } k = n-2, n-1, n, \\ m_{n,n-2} &= ((2n-3)/2)(2(n-1)/(2n-5))^{(n-2)/2}, \\ m_{n,n-1} &= (2(n-1))^{n/2}/(2n-3)^{(n-1)/2}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} a_{n,k} &= c_{n,k} d_{n,k}, \\ c_{n,1} &= 1; \quad c_{n,2} = 1; \quad c_{n,3} \geq 0.9761; \quad c_{n,4} \geq 0.879; \\ c_{n,5} &\geq 0.512; \quad c_{n,6} \geq 0.482. \end{aligned} \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выпишем для полинома $P_{n-k}(x)$ интерполяционную формулу Лагранжа:

$$P_{n-k}(x) = \sum_{i=1}^{n-k+1} (T_n^{(k-1)}(x)P_{n-k}(x_i))/(T_n^{(k)}(x_i)(x-x_i)), \quad (17)$$

где $x_i = x_i^{(k-1)}$, $i = \overline{1, n-k+1}$.

Если $x \in [1, -1] \setminus [x_{n-k+1}, x_1]$, то из (17) и (13) следует (14), так как максимум модуля $T_n^{(k)}(x)$ достигается только на концах отрезка $[-1, 1]$ [4, с. 286]. Если $x \in [x_{n-k+1}, x_1]$, то из (13) следует (14).

При $k = 1$

$$\begin{aligned} x_i &= \cos((2i-1)\pi/(2n)), \quad i = \overline{1, n}, \\ T_n^{(1)}(x_i) &= (-1)^{i-1}n/(1-x_i^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

При $k = 2$

$$\begin{aligned} x_i &= \cos(i\pi/n), \quad i = \overline{1, n-1}, \\ T_n^{(2)}(x_i) &= (-1)^{i-1}n^2/(1-x_i^2). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $c_{n,1} = c_{n,2} = 1$ и $b_{n,1} \leq n$, $b_{n,2} \leq n^2/4$.

При $k = n-1$

$$T_n^{(n-2)}(x) = 2^{n-2}n!x^2 - n2^{n-3}(n-2)!, \quad x_1^2 = x_2^2 = 1/(2(n-1)).$$

Подставляя значение x_1 в (14), получим равенство

$$m_{n,n-1} = (2(n-1))^{n/2}/(2n-3)^{(n-1)/2}.$$

При $k = n-2$

$$\begin{aligned} T_n^{(n-3)}(x) &= 2^{n-1}n!x^3/3! - n2^{n-3}(n-2)!x, \\ x_1^2 &= x_3^2 = 3/(2(n-1)), \quad x_2 = 0. \end{aligned}$$

Подставив значения корней x_i в (14), получим равенство

$$m_{n,n-2} = ((2n-3)/2) \left((2(n-1))/(2n-5) \right)^{(n-2)/2}.$$

Докажем неравенства (16). При помощи тождества

$$(1-x^2)T_n^{(k)}(x) - (2k-3)xT_n^{(k-1)}(x) + (n^2 - (k-2)^2)T_n^{(k-2)}(x) \equiv 0 \quad (18)$$

нетрудно показать, что в точках

$$y_i^{(k)} = \cos((k/2 + i - 1)\pi/n)$$

и

$$z_i^{(k)} = \cos(((k+1)/2 + i - 1)\pi/n)$$

($i = \overline{1, n-k}$) для полинома $T_n^{(k)}(x)$ ($k = \overline{2, 5}$) справедливы равенства

$$\text{sign } T_n^{(k)}(y_i^{(k)}) = (-1)^{i-1}, \quad \text{sign } T_n^{(k)}(z_i^{(k)}) = (-1)^i.$$

Отсюда следует, что для нулей $x_i^{(k)}$ полинома $T_n^{(k)}(x)$ ($k = \overline{2, 5}$) справедливы неравенства

$$|z_i^{(k)}| < |x_i^{(k)}| < |y_i^{(k)}|, \quad i = \overline{1, n-k}.$$

Пусть $k = 5$. Зафиксируем некоторое $i \in \overline{1, n-k}$. Для точки $x_i^{(5)}$ из (18) следует равенство

$$(1 - (x_i^{(5)})^2)T_n^{(6)}(x_i^{(5)}) + (n^2 - 4^2)T_n^{(4)}(x_i^{(5)}) = 0. \quad (19)$$

В силу доказанного выше на отрезке $[z_i^{(5)}, y_i^{(5)}]$ найдется точка $x_{i+1}^{(3)}$, для которой $T_n^{(3)}(x_{i+1}^{(3)}) = 0$, и на этом отрезке точки $x_i^{(5)}$ и $x_{i+1}^{(3)}$ будут точками максимума функций $|T_n^{(4)}(x)|$ и $|T_n^{(2)}(x)|$ соответственно. Отсюда следуют неравенства

$$|T_n^{(4)}(x_i^{(5)})| > |T_n^{(4)}(x_{i+1}^{(3)})| > (n^2 - 4)|T_n^{(2)}(z_i^{(5)})|/(1 - (x_{i+1}^{(3)})^2). \quad (20)$$

Из теоремы о дифференциальных неравенствах [10, с. 15] следует, что функция $\sin(ax)/\sin(bx)$ при $0 < a < b$ на интервале $(0, \pi/2b)$ монотонно убывает вместе с x . Отсюда и из (19), (20) следует неравенство

$$c_{n,6} \geq \min_{i=\overline{1, n-5}} (\sin^4(5/2 + i - 1)\pi/n) / (\sin^4(3 + i - 1)\pi/n) \geq (5/6)^4 \approx 0.482.$$

Аналогично доказывается, что $c_{n,5} \geq (4/5)^3 = 0.512$; $c_{n,4} \geq (3/4)^2 = 0.5625$; $c_{n,3} > 2/3$.

Докажем для $c_{n,3}$ и $c_{n,4}$ более точные оценки. Введем замену переменной $x = \cos v$, $x \in [-1, 1]$. Выпишем представления первых двух производных $T_n'(x)$ и $T_n^{(2)}(x)$ через координату v :

$$T_{nx}'(\cos v) = n \sin(nv) / \sin v, \quad (21)$$

$$T_{nx}^{(2)}(\cos v) = -n(n \cos(nv) \sin v - \sin(nv) \cos v) / \sin^3 v. \quad (22)$$

Пусть $x_i^{(2)} = \cos v_i > 0$ — нули полинома $T_n^{(2)}(x)$, $i = \overline{1, i_1}$, $i_1 = [(n-2)/2]$, $x_1^{(2)} > x_2^{(2)} > \dots > x_{i_1}^{(2)}$. Тогда из (22) следует равенство

$$n \operatorname{tg} v_i = \operatorname{tg}(nv_i), \quad i = \overline{1, i_1}. \quad (23)$$

Если $v = \pi/2$ — нуль полинома $T_{nx^2}^{(2)}(\cos v)$, то n нечетно и $|\sin(nv)| = 1$. Поэтому из (18) и (23) следует, что $c_{n,3} = |\sin(nv_1)|$. Как показано выше, $v_1 \in (\pi/n, 3\pi/(2n))$. Из теоремы о дифференциальных неравенствах следует, что максимум функции $f(\alpha) = \cos(\alpha\pi)/(3/2 - \alpha)$ на отрезке $[0, 1/2]$ реализуется в одной точке α_0 . Тогда для любого $n \geq 2$ $v_1 = (3/2 - \alpha_1)\pi/n$, где $\alpha_1 \leq \alpha_0$. В предположении противного существуют n и $\alpha_1 > \alpha_0$, $\alpha_1 \in [0, 1/2]$, для которых выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_0\pi)/\cos(\alpha_1\pi) &< \sin((3/2 - \alpha_0)\pi/n)/\sin((3/2 - \alpha_1)\pi/n) \\ &< (3/2 - \alpha_0)/(3/2 - \alpha_1). \end{aligned} \quad (24)$$

Но (24) противоречит определению α_0 . Следовательно, $c_{n,3} \geq (\alpha_0\pi)$. Расчеты показывают, что $\alpha_0 \approx 0.06970$ и $\cos(\alpha_0\pi) \geq 0.9761$.

Пусть $k = 3$. Вычисления показывают, что при $n \leq 8$ $c_{n,4} \geq 0.9689$. Пусть $n \geq 9$ и $x_i^{(3)} = \cos v_i$ ($i = \overline{1, [(n-3)/2]}$) — положительные корни полинома $T_n^{(3)}(x)$. Тогда из (18) для v_i следует равенство

$$3 \sin^2 v_i T_{nx^2}^{(2)}(\cos v_i) = (n^2 - 1) \sin(nv_i) \operatorname{tg} v_i. \quad (25)$$

Для v_i имеем представление $v_i = (i + 1 - \alpha_i)\pi/n$, где $\alpha_i \in (0, 1/2)$. При $i < j$ $\operatorname{tg} v_i < \operatorname{tg} v_j$, и если при этом $\alpha_j \geq \alpha_i$, то имеют место неравенства

$$|\sin(nv_j)| > |\sin(nv_i)|, \quad |(1 - x_j^2)T_n^{(2)}(x_j)| > |(1 - x_i^2)T_n^{(2)}(x_i)|. \quad (26)$$

Если $T_n^{(3)}(x)$ имеет корень $x = 0$, то n четно и $|T_n^{(2)}(0)| = n^2$.

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha, p) &= \left(\cos(\alpha\pi) + \sin(\alpha\pi)/(\pi(p - \alpha)) \right) / (p - \alpha)^2, \\ \psi(\alpha, p) &= \frac{\cos(\alpha\pi) + \sin(\alpha\pi) \sum_{j=0}^3 \left((-1)^j ((p - \alpha)\pi/9)^{2j} / (2j)! \right) / ((p - \alpha)\pi)}{(p - \alpha)^2}, \end{aligned}$$

где $p = 2, 3, \dots$; $\alpha \in [0, 1/2]$.

На каждом отрезке $[p - 1/2, p]\pi/n$, $p = \overline{2, [(n-3)/2] + 1}$, имеют место неравенства

$$(p - \alpha)^2 \varphi(\alpha, p) \geq |\sin^2 v T_{nx^2}^{(2)}(\cos v)/n^2| \geq (p - \alpha)^2 \psi(\alpha, p), \quad (27)$$

где $v = (p - \alpha)\pi/n$.

Зафиксируем p . Из теоремы о дифференциальных неравенствах следует, что функции $\varphi(\alpha, p)$ и $\psi(\alpha, p)$ имеют на отрезке $[0, 1/2]$ по одному локальному максимуму соответственно в точках $\alpha_1^{(p)}$ и $\alpha_2^{(p)}$. Пусть $\alpha_3^{(p)}$ минимальная из $\alpha \in [0, 1/2]$, для которой выполнены неравенства

$$\max(\alpha_1^{(p)}, \alpha_2^{(p)}) \leq \alpha_3^{(p)}, \quad \varphi(\alpha_3^{(p)}, p) \leq \psi(\alpha_3^{(p)}, p).$$

Тогда из (27) вытекают неравенства $\alpha_{p-1} \leq \alpha_3^{(p)}$ и

$$\begin{aligned} c_{n,4} &\geq \min_p \frac{\psi(\alpha_2^{(p)}, p) (p - \alpha_2^{(p)})^2 \sin^2((p - \alpha_3^{(p)})\pi/n)}{\sin^2((p - \alpha_2^{(p)})\pi/n)} \\ &\geq \min_p \psi(\alpha_2^{(p)}, p) (p - \alpha_3^{(p)})^2. \end{aligned} \quad (28)$$

Вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} \alpha_3^{(2)} &\approx 0.22344, \quad \psi(\alpha_2^{(2)}, 2) (2 - \alpha_3^{(2)})^2 \geq 0.879, \\ \alpha_3^{(3)} &\approx 0.16061, \quad \psi(\alpha_2^{(3)}, 3) (3 - \alpha_3^{(3)})^2 \geq 0.929. \end{aligned}$$

При $p \geq 4$

$$\psi(0, p) (p - \alpha_3^{(3)})^2 = (p - \alpha_3^{(3)})^2 / p^2 \geq 0.915. \quad (29)$$

Из (29) и (26) следует неравенство $c_{n,4} \geq 0.879$.

Из оценок сверху для $x_1^{(k)}$, $k = \overline{1, 5}$, вытекают оценки сверху для $b_{n,k+1}$:

$$\begin{aligned} b_{n,n} &= 1; \quad \text{при } n \geq k+1 \quad b_{n,3} \leq n^3 / (3.6)^3; \quad b_{n,4} \leq n^4 / (4.49)^4; \\ b_{n,5} &\leq n^5 / (5.19)^5; \quad b_{n,6} \leq n^6 / (6.3)^6. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $k = \overline{1, 6}$ $m_{n,k} = T_n^{(k)}(1) / a_{n,k}$. Лемма доказана.

§ 3. Оценки норм производных полиномов на кубе в $\mathbb{R}^m$

Введем обозначение $Q^m = \{x \in \mathbb{R}^m : |x_i| \leq 1, i = \overline{1, m}\}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $X = \ell_2^{(m)}$, $P_n(x) \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$ и $\|P_n\|_{Q^m} \leq 1$. Тогда справедливы неравенства

$$\|\nabla P_n\|_{Q^m} \leq n^2, \quad (30)$$

$$\|\nabla^2 P_n\|_{Q^m} \leq A = n^2(n-1) \min(2(n+1)/3, n-1). \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства неравенства (30) потребуется обобщенное неравенство Бернштейна, полученное в работе [11]. Приведем его формулировку.

Пусть V – центрально-симметричный выпуклый компакт в $\ell_2^{(m)}$, V^* – полярное множества V . Для $z = (z_1, z_2, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m$ положим

$$\|z\|_V = \sup_{t \in V^*} \left| \sum_{i=1}^m t_i z_i \right|.$$

Целая функция $f(z)$ имеет степень V , если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется A_ε такое, что

$$|f(z)| \leq A_\varepsilon \exp\{(1 + \varepsilon)\|z\|_{V^*}\}$$

для каждого $z \in \mathbb{C}^m$. Множество всех целых функций степени V , ограниченных на $\mathbb{R}^m$, обозначается $B(V)$. Пусть $\sigma > 0$ и $g \in B(\sigma V)$. Тогда имеет место неулучшаемое неравенство

$$\sup_{x \in \ell_2^{(m)}} \|\nabla g(x)\|_{\ell_2^{(m)}} \leq (\sigma \operatorname{diam}(V)/2) \sup_{x \in \ell_2^{(m)}} |g(x)|, \quad (32)$$

где $\operatorname{diam}(V) = \max_{x, y \in V} \|x - y\|_{\ell_2^{(m)}}$.

Введем замену переменных $x_i = \cos v_i$. Нетрудно проверить, что тригонометрический полином $P_n(\cos v_1, \dots, \cos v_m)$ является целой функцией степени n в E , где E – шар радиуса единица в пространстве $\ell_1^{(m)}$: $E = \{v \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m |v_i| \leq 1\}$. Диаметр шара E в метрике $\ell_2^{(m)}$ равен 2, поэтому из (32) для полинома $P_n(x)$ следует неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^m (1 - x_i^2)^{1/2} P'_{nx_i}(x) h_i \right| \leq n, \quad (33)$$

где $x \in Q^m$, $h = (h_1, \dots, h_m) \in \ell_2^{(m)}$, $\|h\| \leq 1$.

Пусть $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_m) \in Q^m$ и $|\hat{x}_{i_1}| = \max_{1 \leq i \leq m} |\hat{x}_i|$. Пусть d – отрезок прямой $\{k_1 x_{i_1}, k_2 x_{i_1}, \dots, k_m x_{i_1}\}$, $x_{i_1} \in [-1, 1]$, проходящий через точки 0 и $\hat{x}$ ($k_i = \hat{x}_i / \hat{x}_{i_1}$) и принадлежащий Q^m . Для $x \in d$ $|x_i| \leq |x_{i_1}|$, $i = \overline{1, m}$, поэтому, подставив в (33) вектор h^1 ($h_i^1 = h_i((1 - x_{i_1}^2)/(1 - x_i^2))^{1/2}$, $i = \overline{1, m}$), получим неравенство

$$(1 - x_{i_1}^2)^{1/2} |(\nabla P_n(x), h)| \leq n, \quad x \in d. \quad (34)$$

В силу леммы 2 из (34) следует (30).

Докажем неравенство (31). Пусть $U_n(v_1, \dots, v_m) = P_n(\cos v_1, \dots, \cos v_m)$. Тогда для любого нормированного вектора $h \in \ell_2^{(m)}$ справедливы неравенства

$$|(\nabla U(v), h)| \leq n, \quad (35)$$

$$\|\nabla^2 U(v) h\|_{\ell_2^{(m)}} \leq n^2, \quad (36)$$

которые вытекают из неравенства (32). Пусть $A(x) = D \nabla^2 P_n(x) D$, где D – диагональная матрица с элементами $\sin v_i$ ($i = \overline{1, m}$) по диагонали. Вследствие (36) и (30) имеем неравенство

$$\|A(x)\|_{\ell_2^{(m)}} \leq 2n^2, \quad x \in Q^m. \quad (37)$$

Пусть D_1 – диагональная матрица с элементами $\sin v_{i_1} / \sin v_i$ ($i = \overline{1, m}$). Тогда для точек отрезка $d \subset Q^m$ имеем неравенство

$$\|\sin^2 v_{i_1} \nabla^2 P_n(x)\|_{\ell_2^{(m)}} = \|D_1 A(x) D_1\|_{\ell_2^{(m)}} \leq 2n^2, \quad x \in d.$$

Пусть h и h_1 – произвольные нормированные векторы из $\ell_2^{(m)}$. Тогда для полинома $(\nabla^2 P_n(x) h, h_1)$ на отрезке d справедливо неравенство

$$|(1 - x_{i_1}^2)(\nabla^2 P_n(x) h, h_1)| \leq 2n^2. \quad (38)$$

Из (38) и леммы 2 вытекает неравенство (31). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда справедливы неравенства

$$(1/3)^p \prod_{i=0}^{p-1} (n-2i)^2 ((n-2i)^2 - 1) = M_{2p};$$

при $k = 2p$

$$\|\nabla^k P_n\|_{Q^m} \leq N_{2p} = \min_{0 \leq i \leq p} \left\{ 2^{p-i} M_{2(p-i)} \prod_{j=2i}^1 (n - (k-j)^2) \right\},$$

при $k = 2p + 1$

$$\|\nabla^k P_n\|_{Q^m} \leq N_{2p} (n - 2p)^2, \quad p \geq 1.$$

Доказательство следует из последовательного применения теоремы 1 к полиному $\langle \nabla^k P_n(x), [h_1, h_2, \dots, h_k] \rangle$, его градиенту $\langle \nabla^{k+1} P_n(x), [h_1, h_2, \dots, h_k] \rangle$ или гессиану $\langle \nabla^{k+2} P_n(x), [h_1, h_2, \dots, h_k] \rangle$. Здесь h_j ($j = \overline{1, k}$) – произвольные фиксированные нормированные векторы из $\ell_2^{(m)}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть U – линейный оператор из $\ell_2^{(m)}$ в $\ell_2^{(m)}$, $T = UQ$, $y = Ux$, $x \in Q^m$. Пусть $B_n(y) \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$ и $\|B_n\|_T \leq 1$.

Тогда для полинома $B_n(y)$ при $y \in T$ справедливо неравенство

$$\|U^* \nabla B_n(y)\|_{\ell_2^{(m)}} \leq n^2,$$

и если U невырождено, то

$$\|\nabla B_n(y)\|_{\ell_2^{(m)}} \leq \left(\min_{1 \leq j \leq m} \lambda_j \right)^{-1/2} n^2,$$

где λ_j – собственные значения матрицы UU^* .

Подобные неравенства можно распространить и на последующие производные, учитывая следствие 1.

Пусть на $\mathbb{R}^m$ определена некоторая норма $\|\cdot\|$. Пусть

$$S_n(x) = \sin(\arccos x), \quad x \in [-1, 1], \quad k, j = \overline{1, n}, \quad i = (-1)^{1/2},$$

$$B_n^j = \max_{x \in [-1, 1]} (1 - x^2)^{j/2} \min\{|T_n^{(j)}(x) + iS_n^{(j)}(x)|, T_n^{(j)}(1)\},$$

$$A_n^{j,k} = \max_{x \in [x_{n-k+1}^{(k-1)}, x_1^{(k-1)}]} (1 - x^2)^{j/2} |T_n^{(j)}(x) + iS_n^{(j)}(x)|,$$

где $x_1^{(k-1)} \geq x_2^{(k-1)} \geq \dots \geq x_{n-k+1}^{(k-1)}$ – корни полинома $T_n^{(k-1)}(x)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $X = \mathbb{R}^m$, $P_n(x) \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$, $\|P_n\|_{Q^m} \leq 1$. Пусть $k = \sum_{i=1}^p k_i$, где $k_i \in \mathbb{Z}_+$, $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_p$. Тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \max_{x \in Q^m} \left| \frac{\partial^k P_n(x)}{\partial x_{j_1}^{k_1} \dots \partial x_{j_p}^{k_p}} \right| &\leq B_n^{k_1} B_{n-k_1}^{k_2} \dots B_{n-\sum_{j=1}^{p-2} k_j}^{k_{p-1}} A_{n-\sum_{j=1}^{p-1} k_j}^{k_p, k} m_{n, k} \\ &= C(n, k, k_1, \dots, k_p), \end{aligned} \quad (39)$$

где $m_{n, k}$ определено в лемме 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m) \in Q^m$ и $|\hat{x}_{i_1}| = \max |x_i|$ ($i = \overline{1, m}$). Пусть d – отрезок прямой $\{k_1 x_{i_1}, \dots, k_m x_{i_1}\}$ ($k_i = \hat{x}_i / \hat{x}_{i_1}, x_{i_1} \in [-1, 1]$), принадлежащий Q^m . Рассмотрим неравенство, полученное в работе [12]; если $\|P_n\|_{[-1, 1]} \leq 1$, то

$$|P_n^{(j)}(x)| \leq |T_n^{(j)}(x) + iS_n^{(j)}(x)|, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad j = \overline{1, n}. \quad (40)$$

Из (40) вытекает очевидное неравенство для $x \in [-1, 1]$:

$$(1 - x^2)^{j/2} |P_n^{(j)}(x)| \leq (1 - x^2)^{j/2} \min\{|T_n^{(j)}(x) + iS_n^{(j)}(x)|, T_n^{(j)}(1)\} \leq B_n^j. \quad (41)$$

Применяя последовательно $p - 1$ раз неравенство (41) и один раз неравенство (40), получим для точек x , принадлежащих отрезку d ,

$$\max_{x_{n-k+1}^{(k-1)} \leq x_{i_1} \leq x_1^{(k-1)}} (1 - x_{i_1}^2)^{k/2} \left| \frac{\partial^k P_n(x)}{\partial x_{j_1}^{k_1} \dots \partial x_{j_p}^{k_p}} \right| \leq B_n^{k_1} \dots B_n^{k_{p-1}} A_{n - \sum_{j=1}^{p-2} k_j}^{k_p, k_j}. \quad (42)$$

Из (42) и леммы 2 следует (39). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $X = \ell_1^{(m)}$, $P_n(x) \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$ и $\|P_n\|_{Q^m} \leq 1$. Тогда имеет место неравенство при $k = \overline{2, n}$

$$\|\nabla^k P_n\|_{Q^m} \leq \max\{T_n^{(k)}(1), \max C(n, k, k_1, \dots, k_p)\},$$

$$p = \overline{2, k}, \quad k = \sum_{j=1}^p k_j, \quad k_j \in \mathbb{Z}_+.$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $X = \mathbb{R}^m$, $P_n(x) \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$, $\Pi = \{x : |x_i| \leq a_i, i = \overline{1, m}\}$, $\|P_n\|_{\Pi} \leq 1$. Тогда справедливо неравенство

$$\max_{x \in \Pi} \left| \frac{\partial^k P_n(x)}{\partial x_{j_1}^{k_1} \dots \partial x_{j_p}^{k_p}} \right| \leq \left| \frac{C(n, k, k_1, \dots, k_p)}{a_{j_1}^{k_1} \dots a_{j_p}^{k_p}} \right|, \quad k = \overline{2, n}, \quad p \geq 2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При небольших k ($k \leq 6$) и $k = n - 2$, $p = n - 2$; $k = n - 1$, $p = n - 1$; $k = n$, $p = n$ значения $C(n, k, k_1, \dots, k_p)$ достаточно просто вычисляются. Заметим, что

$$\begin{aligned} |T_n^{(1)}(x) + iS_n^{(1)}(x)| &= n / \sin v, \\ |T_n^{(2)}(x) + iS_n^{(2)}(x)| &= (n^2 / \sin^2 v)(1 + \operatorname{ctg}^2 v / n^2)^{1/2}, \\ |T_n^{(3)}(x) + iS_n^{(3)}(x)| &= (n(n^2 - 1) / \sin^3 v) \\ &\quad \times \left(1 + (3(n^2 + 2) \operatorname{ctg}^2 v + 9 \operatorname{ctg}^4 v) / (n^2 - 1)^2\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

где $x = \cos v$.

Выпишем значения и оценки $C(n, k, k_1, \dots, k_p)$ для конкретных значений $k, k_1, \dots, k_p$:

$$C(n, n, 1, \dots, 1) = n!, \quad p = n;$$

$$C(n, n-1, 1, \dots, 1) = n!(2(n-1))^{n/2}/(2n-3)^{(n-1)/2}, \quad p = n-1;$$

$$C(n, n-2, 1, \dots, 1) = n!((2n-3)/4)(2(n-1)/(2n-5))^{(n-2)/2}, \quad p = n-2;$$

$k = 2$:

$$C(n, 2, 1, 1) = n(n-1)(n^2-1)/3;$$

$$k = 3: D = n^2(n-1)(n^2-2^2)/(3 \cdot 5),$$

$$C(n, 3, 1, 1, 1) \leq 1.0245(n-2)D, \quad C(n, 3, 1, 2) \leq 1.0801(n-1)D;$$

$$k = 4: D = n(n^2-1)(n^2-3^2)/(3 \cdot 5 \cdot 7),$$

$$C(n, 4, 1, 1, 1, 1) \leq 1.1377(n-1)(n-2)(n-3)D;$$

$$C(n, 4, 1, 1, 2) \leq 1.2085(n-1)(n-2)^2D;$$

$$C(n, 4, 1, 3) \leq 1.2861(n-1)((n-1)^2-1)D;$$

$$C(n, 4, 2, 2) \leq 1.3693n(n-2)^2D;$$

$$k = 5: D = n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)/(3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9),$$

$$C(n, 5, 1, 1, 1, 1, 1) \leq 1.9532(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)D;$$

$$C(n, 5, 1, 1, 1, 2) \leq 2.1021(n-1)(n-2)(n-3)^2D;$$

$$C(n, 5, 1, 1, 3) \leq 2.2721(n-1)(n-2)((n-2)^2-1)D;$$

$$C(n, 5, 1, 2, 2) \leq 2.3818(n-1)^2(n-3)^2D;$$

$$C(n, 5, 2, 3) \leq 2.5778n(n-2)((n-2)^2-1)D;$$

$$C(n, 5, 1, 4) \leq 3.1568(n-1)^2((n-1)^2-1)D;$$

$$k = 6: D = n(n^2-1)(n^2-3^2)(n^2-5^2)/(3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11),$$

$$C(n, 6, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \leq 2.0736(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)D;$$

$$C(n, 6, 1, 1, 1, 1, 2) \leq 2.2198(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)^2D;$$

$$C(n, 6, 1, 1, 1, 3) \leq 2.3838(n-1)(n-2)(n-3)((n-3)^2-1)D;$$

$$C(n, 6, 1, 1, 2, 2) \leq 2.5151(n-1)(n-2)^2(n-4)^2D;$$

$$C(n, 6, 1, 2, 3) \leq 2.4115(n-1)^2(n-3)((n-3)^2-1)D;$$

$$C(n, 6, 2, 2, 2) \leq 2.8556n(n-2)^2(n-4)^2D;$$

$$C(n, 6, 3, 3) \leq 3.0590(n^2-1)(n-3)((n-3)^2-1)D;$$

$$C(n, 6, 2, 4) \leq 3.3043n(n-2)^2((n-2)^2-1)D;$$

$$C(n, 6, 1, 1, 4) \leq 3.2664(n-1)(n-2)^2((n-2)^2-1)D;$$

$$C(n, 6, 1, 5) \leq 4.03(n-1)((n-1)^2-1)((n-1)^2-6)D.$$

§ 4. Оценки норм производных полиномов на выпуклых телах в банаховом пространстве

Далее X – банахово пространство.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $K \subset X$, $P_n(x) \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$, $\|P_n\|_K \leq 1$. Тогда для любого нормированного вектора $h \in X$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} |\langle \nabla P_n(x), h \rangle| &\leq \inf_{y_1, y_2 \in K} (2n^2 / \|y_1 - y_2\|) (\|x - y_1\| / \|y_1^1 - y_1^2\| \\ &\quad + \|x - y_2\| / \|y_2^1 - y_2^2\|) \leq 4n^2 / \omega_K(h) \\ &\leq 4n^2 / \omega_K \leq 2n^2 / r(K), \end{aligned} \quad (43)$$

где $x, y_1, y_2 \in K$, $y_1 - y_2 = ch$, $y_i^j \in \partial K$ ($i, j = 1, 2$), $y_i, x \in [y_i^1, y_i^2]$ ($i = 1, 2$), $\omega_K(h) = \sup_{y_1, y_2} \|y_1 - y_2\|$, $\omega_K = \inf_{\|h\|=1} \omega_K(h)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y_1, y_2 \in K$, $y_1 - y_2 = ch$. Тогда для произвольной точки $x \in K$ имеем неравенство

$$|\langle \nabla P_n(x), y_1 - y_2 \rangle| \leq |\langle \nabla P_n(x), x - y_1 \rangle| + |\langle \nabla P_n(x), x - y_2 \rangle|. \quad (44)$$

Разделив обе части неравенства (44) на $\|y_1 - y_2\|$ и применив в оценке двух членов правой части неравенство (1), получим неравенство (43). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5. При условиях теоремы 3 выполнено неравенство

$$\|\nabla^k P_n\|_K \leq (4/\omega_k)^k n^2 (n-1)^2 \dots (n-(k-1))^2.$$

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть K является m -мерным симплексом. Если $|P_n(x)| \leq 1$ при $x \in K$, то справедливо неравенство

$$\|\nabla P_n(x)\|_K \leq 4n^2 / \min h_i, \quad i = \overline{1, m+1},$$

где h_i – минимальное расстояние между i -й вершиной и противоположной гранью симплекса.

Для правильного m -мерного симплекса с ребром 1 в метрике $\ell_2^{(m)}$ получим оценку

$$\max_{x \in K} \|\nabla P_n(x)\|_{\ell_2^{(m)}} \leq 4n^2 \sqrt{2m/(m+1)}.$$

Для правильного двумерного симплекса K с ребром 1 в метрике $\ell_2^{(2)}$ и основанием, параллельным оси Ox_1 , для пространства $\ell_\infty^{(2)}$ получим оценку

$$\max_{x \in K} \|\nabla P_n(x)\|_{\ell_1^{(2)}} \leq \frac{8n^2}{3 - \sqrt{3}} < \frac{12n^2}{\sqrt{3}} < \frac{4n^2}{2\sqrt{3} - 3},$$

где $\sqrt{3}/6$, $(2\sqrt{3} - 3)/2$ – радиусы максимальных шаров, содержащихся в K , в метрике $\ell_2^{(2)}$ и $\ell_\infty^{(2)}$ соответственно.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $K \subset X$, $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$, $\|P_n\|_K \leq 1$, $x \in K \setminus \partial K$. Тогда

$$\|\nabla P_n(x)\|_{\mathcal{L}(X, \mathbb{R})} \leq b_1(x)n \leq \sqrt{2}b(x)n. \quad (45)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_0, x \in K \setminus \partial K$, $h \in X$ и $\|h\| = 1$. Пусть $\tilde{x} \in \partial K$, $x \in [x_0, \tilde{x}]$, отрезок $[y_1, y_2]$ является диаметром шара с центром в точке x_0 и $\|y_1 - x_0\| = r_1(x_0) \geq r(x_0) - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), $y_1 - y_2 = ch$. Пусть в точках $y_1, y_2, \tilde{x}$ сосредоточены соответственно массы 1, 1, $2\rho(x, x_0)/(1 - \rho(x, x_0))$.

В силу определения $\rho(x, x_0) = \rho$ имеем равенство

$$\|\tilde{x} - x_0\|\rho(x, x_0) = \|x - x_0\|, \quad (46)$$

откуда следует, что точка x является центром тяжести системы материальных точек $(y_1, 1), (y_2, 1), (\tilde{x}, 2\rho/(1 - \rho))$.

Пусть прямая, содержащая точки y_1 и x , пересекает отрезок $[y_2, \tilde{x}]$ в точке x_1 . Аналогично определим точку x_2 . Точки x_1 и x_2 являются центрами тяжести систем материальных точек $(y_2, 1), (\tilde{x}, 2\rho/(1 - \rho))$ и $(y_1, 1), (\tilde{x}, 2\rho/(1 - \rho))$ соответственно. Отсюда следуют равенства

$$(1 - \rho)\|x - y_i\| = (1 + \rho)\|x_i - x\|, \quad i = 1, 2. \quad (47)$$

Из (47) и (2) вытекают равенства

$$|(\nabla P_n(x), y_i - x)| \leq n\sqrt{1 + \rho}/\sqrt{1 - \rho}, \quad i = 1, 2. \quad (48)$$

Так как $y_1 - y_2 = (y_1 - x) - (y_2 - x) = 2hr_1(x_0)$, то из (48) следует (45).

ТЕОРЕМА 5. Пусть K – центрально-симметричное ограниченное замкнутое выпуклое тело из X . Пусть $P_n(x) \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$ и $\|P_n\|_K \leq 1$.

Тогда справедливы неравенства

$$\|\nabla P_n\|_K \leq B_1/r(K) \leq \sqrt{2}n^2/r(K), \quad (49)$$

$$\|\nabla P_n(x)\|_{\mathcal{L}(X, \mathbb{R})} \leq \sqrt{2}n/\left(r(K)(1 - \rho^2(x, x_0))^{1/2}\right), \quad x \in K \setminus \partial K, \quad (50)$$

$$\sup_{x \in K} |\langle \nabla^2 P_n(x)h, h \rangle| \leq C_1/r^2(K) \leq C_2/r^2(K), \quad (51)$$

где x_0 – центр симметрии K , $\|h\| \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу выпуклости K точка x_0 будет центром шара $B(x_0, r(K)) \subset K$. Пусть $x \in K$ и $[y_1, y_2]$ – некоторый диаметр шара $B(x_0, r(K))$. Положим $u_1 = (y_1 - x)$, $u_2 = (y_2 - x)$.

В силу центральной симметрии тела K в нем содержится параллелограмм P с центром в x_0 , одна из вершин параллелограмма есть точка x , а стороны совпадают с векторами u_1 и u_2 . Каждая точка $y \in P$ представляется в виде

$$y = x_0 - (t_1 u_1 + t_2 u_2)/2, \quad |t_i| \leq 1.$$

Полином $U_n(t) = P_n(x_0 - (t_1 u_1 + t_2 u_2)/2)$ является полиномом n -й степени от двух переменных t_1 и t_2 . Применяя теорему 1, получим неравенство

$$\begin{aligned} |\langle \nabla P_n(x), y_1 - y_2 \rangle|/2 &= |\langle \nabla P_n(x), u_1 \rangle - \langle \nabla P_n(x), u_2 \rangle|/2 \\ &= |U'_{nt_1}(t_1, t_2) - U'_{nt_2}(t_1, t_2)|_{t_1=t_2=1} \leq \sqrt{2}n^2. \end{aligned} \quad (52)$$

Из (52) следует (49). В силу теоремы 1 имеет место неравенство

$$\begin{aligned} |\langle \nabla^2 P_n(x)(y_1 - y_2), y_1 - y_2 \rangle|/4 &= |\langle \nabla^2 P_n(x)u_1, u_1 \rangle + \langle \nabla^2 P_n(x)u_2, u_2 \rangle \\ &\quad - 2\langle \nabla^2 P_n(x)u_1, u_2 \rangle|/4 = |\langle \nabla^2 U_n(1, 1)(1, -1)^T, (1, -1)^T \rangle| \\ &\leq 2\|\nabla^2 U_n(1, 1)\|_{\ell_2^{(2)}} \leq 2n^2(n-1) \min(2(n+1)/3, n-1). \end{aligned} \quad (53)$$

С другой стороны, в силу теоремы 2 имеем неравенство

$$|\langle \nabla^2 P_n(x)u_1, u_2 \rangle|/4 = |U''_{nt_1 t_2}(1, 1)| \leq n(n-1)(n^2-1)/3. \quad (54)$$

Из (1) и (54) вытекает неравенство

$$|\langle \nabla^2 P_n(x)(y_1 - y_2), y_1 - y_2 \rangle|/4 \leq 2n(2n-1)(n^2-1)/3. \quad (55)$$

Из (55) и (53) следует (51).

Пусть $x \in [x_0, \bar{x}]$, где $\bar{x} \in \partial K$ и $x \neq \bar{x}$. Пусть P – параллелограмм с вершиной в точке $\bar{x}$, центром в точке x_0 и сторонами $u_1 = y_1 - \bar{x}$, $u_2 = y_2 - \bar{x}$. Точке $x \in P$ в представлении

$$x = x_0 - (t_1 u_1 + t_2 u_2)/2$$

соответствуют $t_1(x) = t_2(x)$. Поэтому из обобщенного неравенства Бернштейна (32) вытекает неравенство

$$|\langle \nabla P_n(x), y_1 - y_2 \rangle|/2 \leq \sqrt{2}\|\nabla U_n(t_1(x), t_1(x))\|_{\ell_2^{(2)}} \leq \sqrt{2}n/(1 - t_1^2(x))^{1/2}. \quad (56)$$

Так как $\rho(x, x_0) = |t_1(x)|$, то из (56) следует (50).

СЛЕДСТВИЕ 7. Если X – гильбертово пространство, то в условиях теоремы 5 оценка (51) есть оценка $\|\nabla^2 P_n\|_K$ [13, с. 75] и имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \|\nabla^k P_n\|_K &\leq \left(4/(3r^2(K))\right)^p \prod_{i=0}^{p-1} (n-2i)(n-2i-1/2) \\ &\quad \times ((n-2i)^2 - 1) = \widetilde{M}_{2p}, \quad k = 2p, \quad p \geq 1; \\ \|\nabla^k P_n\|_K &\leq \sqrt{2}\widetilde{M}_{2p}(n-2p)^2/r(K), \quad k = 2p+1. \end{aligned}$$

Если X – банахово пространство, то справедливо неравенство

$$\|\nabla^k P_n\|_K \leq 2^{k/2} \prod_{i=0}^{k-1} (n-i)^2/r^k(K).$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть на $\mathbb{R}^2$ задана норма $\|\cdot\|$ и K – параллелограмм, принадлежащий $\mathbb{R}^2$. Пусть $P_n(x) \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ и $\|P_n\|_K \leq 1$. Тогда имеет место неравенство

$$\|\nabla^2 P_n\|_K \leq C_2/r^2(K). \quad (57)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть d_1 и d_2 – векторы полудиagonalей параллелограмма K . Точно так же, как в теореме 5, доказывается, что имеют место неравенства

$$|\langle \nabla^2 P_n(x)d_i, d_j \rangle| \leq C_2, \quad x \in K, \quad i, j = 1, 2. \quad (58)$$

Пусть h_1 и h_2 – векторы, имеющие начало в центре K и принадлежащие K . Тогда $h_i = \alpha_1^i d_1 + \alpha_2^i d_2$, где $|\alpha_1^i| + |\alpha_2^i| \leq 1$, и справедливо неравенство

$$|\langle \nabla^2 P_n(x)h_1, h_2 \rangle| \leq (|\alpha_1^1| + |\alpha_2^1|)(|\alpha_1^2| + |\alpha_2^2|)C_2, \quad x \in K. \quad (59)$$

Из (59) вытекает (57). Теорема доказана.

Список литературы

1. Марков А. А. Об одном вопросе Д.И. Менделеева // Избранные труды. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948.
2. Марков В. А. О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. СПб., 1892.
3. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. Т. 1. М.: Изд. АН СССР, 1952.
4. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. Т. 2. М.: Изд. АН СССР, 1954.
5. Kellogg O. D. On bounded polynomials on several variables // Math. Zeit. 1927. В. 27. № 1. S. 55–66.
6. Don R. Wilhelmsen A. Markov Inequality in Several Dimensions // J. of Approx. Theory. 1974. V. 11. № 3.
7. Наджмиддинов Д., Субботин Ю. Н. Неравенство Маркова на треугольниках // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 2. С. 76–82.
8. Андрианов А. В. Аналоги неравенств А. Маркова и С. Бернштейна для многочленов в банаховых пространствах // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 5. С. 13–21.
9. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
10. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.
11. Ганзбург М. И. Теоремы Джексона и Бернштейна в $\mathbb{R}^m$ // УМН. 1979. Т. 34. № 1. С. 225–226.
12. Schaffer A. S., Duffin R. J. On some inequalities of S. Bernstein and W. Markoff for derivatives of polynomials // Bull. Am. Math. Soc. 1938. V. 44. P. 289–297.
13. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.

Поступило в редакцию
30.VI.1995