Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Г. Скляренко, О гомологических умножениях, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 1, 157–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/im109>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 03:20:27

УДК 515.142.21

Е. Г. Скляренко

О гомологических умножениях

С помощью аппарата гомологической алгебры и теории пучков исследуется общая конструкция $\frown$ -умножения гомологий на когомологии. В наиболее общей форме установлена связь умножения с фильтрацией Зимана в гомологиях. Показывается, что умножение на общих пространствах определяется умножениями на компактных и замкнутых локально компактных подпространствах. Вскрыта новая природа результата умножения в случае гомологий и когомологий пар. Дана естественная интерпретация $\frown$ -умножения в терминах диагонального вложения пространства в его декартов квадрат. В случае многообразий (в том числе обобщенных) для классов гомологий и когомологий, двойственных по Пуанкаре, установлено тождество общих конструкций $\frown$ -умножения и $\smile$ -умножения, в терминах умножения дано описание самой двойственности.

Библиография: 19 наименований.

Настоящая работа тесно примыкает к статье автора [6] и в сущности является ее продолжением. Напомню, что в [6] для произвольного градуированного дифференциального пучка модулей $\mathcal{L}_*$ с дифференциалом ∂ степени -1 и любого пучка модулей $\mathcal{G}$ на топологическом пространстве X определено единственное естественное по обоим аргументам умножение

$$\frown: \mathbb{H}_n^\varphi(\mathcal{L}_*) \otimes H_\psi^q(X; \mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{H}_{n-q}^{\varphi \cap \psi}(\mathcal{L}_* \otimes \mathcal{G}). \quad (1)$$

Здесь $\mathbb{H}_n^\varphi(\mathcal{L}_*)$ – гипергомологии $\mathcal{L}_*$ (в смысле [12]) для функтора Γ_φ сечений с носителями в семействе φ , а $H_\psi^q(X; \mathcal{G})$ – пучковые когомологии X с коэффициентами в $\mathcal{G}$ и с носителями в ψ . Поскольку имеются индуцированные включением $\mathcal{L}_*$ в инъективную резольвенту Картана–Эйленберга $\mathcal{J}^*(\mathcal{L}_*)$ преобразования $H_n(\Gamma_\varphi(\mathcal{L}_*)) \rightarrow \mathbb{H}_n^\varphi(\mathcal{L}_*)$, определено также умножение

$$\frown: H_n(\Gamma_\varphi(\mathcal{L}_*)) \otimes H_\psi^q(X; \mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{H}_{n-q}^{\varphi \cap \psi}(\mathcal{L}_* \otimes \mathcal{G}). \quad (2)$$

Для θ -ациклических пучков $\mathcal{L}_*$ (в частности, для любых вялых или для мягких, когда семейство θ паракомпактифицирующее; см. [14, п. 4.13 гл. II])

$$H_*(\Gamma_\theta(\mathcal{L}_*)) = \mathbb{H}_*(\mathcal{L}_*)$$

(см. [15, замечание 3 в п. 2.4]). Поэтому в случае φ -ациклических $\mathcal{L}_*$ оба определения умножения совпадают, а при $(\varphi \cap \psi)$ -ациклических пучках $\mathcal{L}_* \otimes \mathcal{G}$ символ $\mathbb{H}_{n-q}^{\varphi \cap \psi}(\mathcal{L}_* \otimes \mathcal{G})$ во второй операции можно заменить на $H_{n-q}(\Gamma_{\varphi \cap \psi}(\mathcal{L}_* \otimes \mathcal{G}))$.

Изучаемая операция обладает всеми стандартными свойствами классического $\frown$ -умножения. В случае, когда $\mathcal{L}_* = \mathcal{L}$, $\mathbb{H}_n^\varphi(\mathcal{L}) = H_\psi^n(X; \mathcal{L})$, и операция превращается в обычное $\smile$ -умножение классов когомологий. То же самое происходит

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 96-01-01403), а также Международного научного фонда и правительства России (грант № JH2100).

в случае, когда $\mathcal{L}_*$ – любая (в том числе не ацикличная) резольвента $\mathcal{L}^*$ пучка $\mathcal{L}$. В случае, когда $\mathcal{L}_*$ – дифференциальный пучок цепей, определяющих гомологии X , конструкция дает возможность определить $\frown$ -умножение гомологий на когомологии. Этот подход позволил объединить в форме частных случаев и тем самым установить эквивалентность отдельных общих конструкций умножения гомологий на когомологии (например, конструкции из [11] и [16]), а при естественных ограничениях на X установить также связь с классическим $\frown$ -умножением в сингулярной теории (совпадение с точностью до множителя $(-1)^{q(n-q)}$).

В §1 настоящей работы вскрывается простая связь общей операции $\frown$ -умножения с двумя естественными фильтрациями в гипергомологиях дифференциального пучка $\mathcal{L}_* \otimes \mathcal{G}$. Следствием оказывается далеко продвинутое обобщение одного геометрического результата Зимана, касающегося классического $\frown$ -умножения на симплициальных комплексах.

В остальной части работы (как, в основном, и в [6]) общая конструкция $\frown$ -умножения применяется для изучения умножения гомологий на когомологии.

В случае общих (не локально компактных) пространств θ -ацикличность пучков цепей гарантирована только для паракомпактифицирующих семейств носителей θ , поэтому содержащийся в гипергомологиях результат умножения в (2) заведомо может оказаться в гомологиях X лишь при условии паракомпактифицируемости $\theta = \varphi \cap \psi$. В §2 дается описание наиболее типичных пучков цепей. Наблюдается общая особенность таких пучков: носители всех их сечений локально компактны и сечения с носителями в некотором семействе θ – это сечения, сосредоточенные на принадлежащих θ локально компактных множествах. Показывается, что в случае паракомпактифицирующего $\theta = \varphi \cap \psi$ общее $\frown$ -умножение гомологий $H_n^\varphi(X; \mathcal{A})$ на когомологии $H_\psi^q(X; \mathcal{G})$ определяется $\frown$ -умножениями на всех замкнутых локально компактных подпространствах X и переходом к прямому пределу. Эта процедура дает возможность определить $\frown$ -умножение гомологий на когомологии и для непаракомпактифицирующих семейств, в частности для классического семейства c компактных множеств (являющегося паракомпактифицирующим лишь в пределах категории локально компактных пространств).

Конструкция $\frown$ -умножения изучалась в [6] для гомологий и когомологий одного пространства X . Между тем в сингулярной теории (см. [18, гл. 5, §6], [13, гл. VII, п. 12]) и в терминах цепей и коцепей Масси [16, §9.5] операция рассматривается и для относительного случая в форме умножения гомологий пары $(X, A_1 \cup A_2)$ на когомологии (X, A_2) со значениями в гомологиях пары (X, A_1) (естественность такой формы объясняется наличием включения $(X, A_1) \subset (X, A_1 \cup A_2)$). В конце §2 относительный случай изучается с позиций рассматриваемой в работе общей конструкции. Оказалось, что в действительности результат $\frown$ -умножения принадлежит гомологиям содержащейся в (X, A_1) пары $(X \setminus A_2, A_1 \setminus A_2)$ (заметим, что интерес представляет и случай $A_1 = A_2$).

Как и $\smile$ -умножение когомологий, $\frown$ -умножение гомологий на когомологии допускает естественную интерпретацию в терминах диагонального вложения пространства в его декартов квадрат. Такая интерпретация представлена в §3 (для сингулярной теории это делается, например, в [13, гл. VII, §11, 12]).

В §4 рассматриваются многообразия, в том числе обобщенные. Показывается, что для классов гомологий и когомологий, двойственных по Пуанкаре, определения $\smile$ -умножения и $\frown$ -умножения попросту совпадают. В терминах $\frown$ -умножения на фундаментальный класс гомологий описывается сама двойственность.

Напомним некоторые используемые в работе основные конструкции. Обсуждаемое общее $\smile$ -умножение определяется в [6] на основе умножения в резольвентах Годамана $\mathcal{C}^*(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{C}^*(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, применяемого в [14, гл. II, п. 6.6] для одного из вариантов описания $\smile$ -умножения когомологий. В рассматриваемой нами ситуации умножение Годамана определяет преобразование

$$\Lambda: \mathcal{C}^*(\mathcal{L}_*) \otimes \mathcal{C}^*(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{L}_* \otimes \mathcal{G}),$$

естественное по всем аргументам и совместимое с дифференциальными структурами на пучках. После перехода к сечениям возникают преобразования

$$\Gamma_\varphi(\mathcal{C}^*(\mathcal{L}_*)) \otimes \Gamma_\psi(\mathcal{C}^*(\mathcal{G})) \rightarrow \Gamma_{\varphi \cap \psi}(\mathcal{C}^*(\mathcal{L}_*) \otimes \mathcal{C}^*(\mathcal{G})) \rightarrow \Gamma_{\varphi \cap \psi}(\mathcal{C}^*(\mathcal{L}_* \otimes \mathcal{G})),$$

композицией которых (в силу [14, гл. I, п. 2.7]) и определяется $\smile$ -умножение. Поскольку $\mathcal{L}_* \subset \mathcal{C}^*(\mathcal{L}_*)$, имеется также преобразование

$$\Lambda_0: \mathcal{L}_* \otimes \mathcal{C}^*(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{L}_* \otimes \mathcal{G}),$$

индуцирующее умножение (2) (ср. с теоремой 2.2 из [6]).

В тех случаях, когда $\mathcal{L}_* = \mathcal{C}_*(\mathcal{A})$ – пучок каких-то цепей, определяющих гомологии X с локально постоянными коэффициентами $\mathcal{A}$, обычно

$$\mathbb{H}_*^\varphi(\mathcal{C}_*(\mathcal{A})) = H_*^\varphi(X; \mathcal{A}) = H_*(\Gamma_\varphi(\mathcal{C}_*(\mathcal{A}))),$$

и преобразование Λ_0 используется для определения умножения гомологий на ко-гомологии:

$$\smile: H_n^\varphi(X; \mathcal{A}) \otimes H_q^\psi(X; \mathcal{G}) \rightarrow H_{n-q}^{\varphi \cap \psi}(X; \mathcal{A} \otimes \mathcal{G}). \quad (3)$$

Преобразованием Λ_0 оно определяется полностью, если $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})$ – пучок сингулярных цепей или если слой пучка $\mathcal{A}$ – конечно представимый модуль, поскольку в этих случаях $\mathcal{C}_*(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{G} = \mathcal{C}_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{G})$ – пучок цепей с коэффициентами в $\mathcal{A} \otimes \mathcal{G}$ [6, § 6, 7].

В общем случае имеется преобразование $\pi: \mathcal{C}_*(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{C}_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{G})$, индуцирующее преобразование резольвент $\pi': \mathcal{C}^*(\mathcal{C}_*(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{C}_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{G}))$, и обсуждаемое $\smile$ -умножение определяется композицией $\pi' \Lambda_0$ (см. [6, § 5, 7]). В связи с тем, что до конца корректные гомологии имеются пока только для локально постоянных коэффициентов [3, гл. 5, п. 1.2], пучок $\mathcal{G}$ в рассматриваемой ситуации также предполагается локально постоянным (о трудностях, возникающих при попытках рассмотрения гомологий с более общими коэффициентами, см. [6, § 6], [4, гл. 3, § 6]).

Умножения гомологий на когомологии, конструируемые с помощью пучков цепей (и коцепей) разного типа, обычно совпадают [6, § 5, 7–9]. Исключение представляет собой комплекс $\mathcal{C}_*(\mathcal{A}) = \mathcal{S}_*(\mathcal{A})$ сингулярных цепей хотя бы потому, что сингулярные гомологии (и когомологии) отличаются, вообще говоря, от других, если X не является НЛС-пространством, т.е. не гомологически локально связано по отношению к сингулярной теории (переставая фактически быть гомологиями и когомологиями, см. [3, гл. 1, п. 2.1; гл. 2, п. 1.1]). Совпадение (с точностью до знака) удалось установить пока [6, § 10] лишь для локально компактных НЛС-пространств. Причина в том, что наличие в общем случае НЛС еще не означает наличия этого свойства для компактных или замкнутых локально компактных

подмножеств – носителей классов гомологий, аппарат же гомологической алгебры, позволяющий сопоставлять и сравнивать различные подходы, развит пока, в основном, в категории локально компактных пространств (в частности, это делается построением цепочек гомоморфизмов друг в друга, порой взаимно встречающихся, некоторых вспомогательных цепных комплексов и применением наблюдений типа предложения 5.4 из [6]).

Рассматриваемое в [6] общее $\sim$ -умножение допускает описание и посредством ряда других естественных резольвент (не только $\mathcal{C}^*$; см. [6, § 3]), нужда в которых вызывается хотя бы необходимостью в конкретных ситуациях использовать коцепи, соответствующие тем или иным определяющим гомологии цепям [6, § 6–10]. В частности, ниже, в § 3, будет использоваться резольвента $\mathcal{A}_f^*$, составленная пучками ростков локально конечнозначных коцепей Александера–Спаньера (с коэффициентами в модуле G). Коцепь $\xi = \xi(x_0, \dots, x_q)$ называется *локально конечнозначной*, если для любого набора аргументов найдутся окрестности U_i точек x_i такие, что множество значений $\xi(y_0, \dots, y_q)$ для всех $y_i \in U_i$ оказывается конечным. Пучки $\mathcal{A}_f^*(G)$ определяются предпучками $U \rightarrow A_f^*(U; G)$, где $A_f^*(U; G)$ – комплекс (локализованных) локально конечнозначных коцепей открытого множества $U \subset X$. Для любого паракомпактифицирующего семейства ψ резольвента $\mathcal{A}_f^*(G)$ оказывается ψ -тонкой (следовательно, ψ -ациклической). В случае, когда X локально компактно, а $\psi = c$, сечения $\mathcal{A}_f^*(G)$ – это конечнозначные коцепи Масси с компактными носителями. Важным их преимуществом является свойство комплекса коцепей быть свободным в случае, когда $G = \mathbb{R}$ – основное кольцо [16, § 4.4]; см. также [6, § 7].

Все пучки, рассматриваемые в работе, – это пучки модулей над некоторым (коммутативным) кольцом $\mathbb{R}$ с единицей, которое предполагается дедекиндовым и нётеровым (ср. [6, п. 1.3]). В частности, в качестве $\mathbb{R}$ может использоваться любое кольцо главных идеалов. Символ $\otimes$ означает тензорное умножение над кольцом $\mathbb{R}$.

§ 1. $\sim$ -умножение и фильтрации в гомологиях (гипергомологиях)

Известно, что с гипергомологиями всегда связаны две стандартные спектральные последовательности [12, гл. XVII]. В случае градуированного дифференциального пучка $\mathcal{L}_* \otimes \mathcal{G}$ они отвечают двум фильтрациям в биградуированном дифференциальном пучке $\mathcal{J}^*(\mathcal{L}_* \otimes \mathcal{G})$, являющемся инъективной резольвентой Картана–Эйленберга дифференциального пучка $\mathcal{L}_* \otimes \mathcal{G}$ – подпучками $\mathcal{K}_p = \bigoplus_{i,j} \mathcal{J}^i(\mathcal{L}_j \otimes \mathcal{G})$, для которых $j \leq p$ (первая спектральная последовательность в терминологии [12, гл. XVII, § 2]), и аналогичными подпучками $\mathcal{K}^q$, для которых $i \geq q$ (вторая спектральная последовательность).

Пусть $\Phi_p \mathbb{H}_m^\theta$ и $\Phi^q \mathbb{H}_m^\theta$ – образы в гипергомологиях $\mathbb{H}_m^\theta(\mathcal{L}_* \otimes \mathcal{G}) = H_m(\Gamma_\theta(\mathcal{J}^*(\mathcal{L}_* \otimes \mathcal{G})))$ дифференциального пучка $\mathcal{L}_* \otimes \mathcal{G}$ для функтора Γ_θ сечений с носителями в семействе θ гомологий соответственно подкомплексов $\Gamma_\theta(\mathcal{K}_p)$ и $\Gamma_\theta(\mathcal{K}^q)$ комплекса $\Gamma_\theta(\mathcal{J}^*(\mathcal{L}_* \otimes \mathcal{G}))$. Все комплексы рассматриваются в стандартной полной градуировке $\bigoplus_{j-i=n} \Gamma_\theta(\mathcal{J}^i(\mathcal{L}_j \otimes \mathcal{G}))$ относительно полного дифференциала $d = d' + (-1)^j d''$, где d' , d'' – дифференциалы, индуцированные соответственно граничным оператором ∂ пучка $\mathcal{L}_*$ и дифференциалом в $\mathcal{J}^*$ (см., например, [14, гл. I, п. 4.5] или [12, гл. XVII, § 1]). В модулях $\mathbb{H}_m^\theta(\mathcal{L}_* \otimes \mathcal{G})$ возникают две

фильтрации:

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_m^\theta(\mathcal{L}_* \otimes \mathcal{G}) &\supset \Phi_{p+1}\mathbb{H}_m^\theta \supset \Phi_p\mathbb{H}_m^\theta \supset \cdots \supset \Phi_m\mathbb{H}_m^\theta \supset \Phi_{m-1}\mathbb{H}_m^\theta = 0, \\ \mathbb{H}_m^\theta(\mathcal{L}_* \otimes \mathcal{G}) &= \Phi^0\mathbb{H}_m^\theta \supset \Phi^1\mathbb{H}_m^\theta \supset \cdots \supset \Phi^q\mathbb{H}_m^\theta \supset \cdots.\end{aligned}$$

1.1. ТЕОРЕМА. Для φ -ациклического градуированного дифференциального пучка $\mathcal{L}_*$

$$\mathbb{H}_n^\varphi(\mathcal{L}_*) \curvearrowright H_\psi^q(X; \mathcal{G}) \subset \Phi^q \mathbb{H}_{n-q}^{\varphi \cap \psi} \cap \Phi_n \mathbb{H}_{n-q}^{\varphi \cap \psi} \subset \mathbb{H}_{n-q}^{\varphi \cap \psi}(\mathcal{L}_* \otimes \mathcal{G}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу φ -ациклическости $\mathcal{L}_*$ имеем $\mathbb{H}_m^\varphi(\mathcal{L}_*) = H_m(\Gamma_\varphi(\mathcal{L}_*))$ (см., например, [15, п. 2.4, замечание 3]).

Пусть $z_n \in \Gamma_\varphi(\mathcal{L}_n)$ – цикл, определяющий некоторый элемент модуля $\mathbb{H}_n^\varphi(\mathcal{L}_*)$, и $z^q \in \Gamma_\psi(\mathcal{C}^*(\mathcal{G}))$ – коцикл, определяющий некоторый элемент модуля когомологий. Очевидно, что $z_n \otimes z^q$ – цикл двойного комплекса $\Gamma_\varphi(\mathcal{L}_*) \otimes \Gamma_\psi(\mathcal{C}^*(\mathcal{G}))$ (рассматриваемого в полной градуировке), принадлежащий подкомплексу типа $\Gamma(\mathcal{K}_n)$ выше первой фильтрации и подкомплексу типа $\Gamma(\mathcal{K}^q)$ второй. Как отмечено выше (в силу [6, теорема 2.2]), $\curvearrowright$ -умножение в данном случае определяется преобразованием Λ_0 , сохраняющим, очевидно, фильтрации. Следовательно, образ $z_n \otimes z^q$ в $\Gamma_{\varphi \cap \psi}(\mathcal{C}^*(\mathcal{L}_* \otimes \mathcal{G}))$ принадлежит аналогичным подкомплексам. Наконец, в соответствии с доказательством леммы 1.1 из [6] имеется аналогичное преобразование биградуированных дифференциальных пучков $\mathcal{C}^*(\mathcal{L}_* \otimes \mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{J}^*(\mathcal{L}_* \otimes \mathcal{G})$, совместимое с фильтрациями и индуцирующее изоморфизм $\mathbb{H}_m^{\varphi \cap \psi}(\mathcal{L}_* \otimes \mathcal{G}) = H_m(\Gamma_{\varphi \cap \psi}(\mathcal{C}^*(\mathcal{L}_* \otimes \mathcal{G})))$. Теорема доказана.

Пусть теперь $\mathcal{L}_* \otimes \mathcal{G} = \mathcal{C}_*(\tilde{\mathcal{A}})$ – дифференциальный пучок цепей с локально постоянными коэффициентами $\tilde{\mathcal{A}}$. Это может быть пучок сингулярных цепей, цепей типа Чеха или цепей Масси [6, § 6, 7]. Для паракомпактного пространства X и паракомпактифицирующего семейства носителей θ в каждом из указанных случаев $\mathbb{H}_*^\theta(\mathcal{C}_*(\tilde{\mathcal{A}})) = H_*^\theta(X; \tilde{\mathcal{A}})$ – гомологии пространства X (см. [6, лемма 1.1 и предложение 6.1]; учитываем мягкость пучков цепей типа Чеха и цепей Масси [6, § 7]). Поскольку вложение комплексов $\Gamma_\theta(\mathcal{C}_*(\tilde{\mathcal{A}})) \subset \Gamma_\theta(\mathcal{J}^*(\mathcal{C}_*(\tilde{\mathcal{A}})))$ индуцирует изоморфизм гомологий, первая из указанных выше фильтраций в $H_*^\theta(X; \tilde{\mathcal{A}})$ сводится к изоморфизмам $\Phi_p \mathbb{H}_m^\theta = H_m^\theta(X; \tilde{\mathcal{A}})$ при $p \geq m$. Поскольку для локально компактного пространства X пучки цепей типа Чеха и цепей Масси вялые [6, § 7], аналогичные выводы в этом случае справедливы и для непаракомпактифицирующих семейств θ .

Таким образом, в случае дифференциального пучка цепей интерес представляет только вторая фильтрация, оказывающаяся фильтрацией обычных групп (модулей) гомологий $H_m^\theta(X; \tilde{\mathcal{A}})$. Для гомологий (с коэффициентами в $\mathbb{R}$) конечных симплициальных комплексов чисто комбинаторно эта фильтрация была определена Е. Зиманом [19] и изучалась затем для любых симплициальных комплексов конечной размерности в [17]. С общих позиций фильтрация рассматривалась в [5]. В случае локально компактного пространства X и паракомпактифицирующего семейства θ подгруппа $\Phi^q \mathbb{H}_m^\theta \subset H_m^\theta(X; \tilde{\mathcal{A}})$ содержится в образах $H_m^\theta(X \setminus A; \tilde{\mathcal{A}}) \rightarrow H_m^\theta(X; \tilde{\mathcal{A}})$ для произвольных подмножеств $A \subset X$, размерность которых не превосходит $q - 1$, и совпадает с пересечением таких образов (даже только для замкнутых A), если $X = K$ – любой локально конечный клеточный комплекс, а θ –

семейство либо всех компактных, либо всех замкнутых множеств. В последнем случае $\Phi^q H_m^\theta$ для обоих указанных θ совпадает также с образом в $H_m^\theta(K; \tilde{\mathcal{A}})$ гомологий $H_m^\theta(K \setminus K^{q-1}; \tilde{\mathcal{A}})$ дополнения к $(q-1)$ -мерному остову комплекса K .

В следующей теореме $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{G}$.

1.2. ТЕОРЕМА. *Для паракомпактного пространства X и паракомпактифицирующих семейств φ и $\varphi \cap \psi$ имеет место*

$$H_n^\varphi(X; \mathcal{A}) \cap H_n^\psi(X; \mathcal{G}) \subset \Phi^q \mathbb{H}_{n-q}^{\varphi \cap \psi} \subset H_{n-q}^{\varphi \cap \psi}(X; \mathcal{A} \otimes \mathcal{G}).$$

Соотношения справедливы для любых φ и ψ , когда X локально компактно.

Здесь $\mathcal{G}$ (как и $\mathcal{A}$) – локально постоянный пучок. В частном случае, когда $\mathcal{A} = \mathcal{G} = \mathbb{R}$ – основное кольцо, а X – конечный симплициальный комплекс, результат был получен Е. Зиманом [19, теорема 3] и распространен затем (для обычных гомологий и когомологий) на конечномерные локально конечные симплициальные комплексы в [17]. Результат использовался для изучения самой фильтрации. В работе [5] этот результат был получен автором в случае, когда X – локально компактное пространство, семейство $\varphi \cap \psi$ паракомпактифицирующее, а слои $\mathcal{A}$ и $\mathcal{G}$ – плоские модули (модули без кручения).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2 отличается от предыдущего наличием в конструкции $\sim$ -умножения гомологий на когомологии дополнительного преобразования π' (см. введение). Аргументы, приведенные в доказательстве теоремы 1.1, остаются в силе.

§ 2. Компактная порожденность умножения гомологий на когомологии. Относительный случай

Покажем, что $\sim$ -умножение гомологий на когомологии на произвольном паракомпактном пространстве X целиком определяется этой операцией на замкнутых локально компактных подпространствах X . Этот подход может рассматриваться, очевидно, и как независимый способ определения операции на общих (т.е. не локально компактных) пространствах. Будучи применим к любым семействам носителей, этот способ является основным при определении $\sim$ -умножения для семейств, не являющихся паракомпактифицирующими (в частности, в случае классических гомологий с компактными носителями). Для достижения намеченной цели используем аппарат теории пучков.

Дифференциальный пучок сингулярных цепей $\mathcal{S}_*(\mathcal{A})$ определяется предпучком $U \rightarrow S_*(X, X \setminus U; \mathcal{A})$, где S_* – локально конечные сингулярные цепи ($\mathcal{A}$ – локально постоянные коэффициенты). Тот же пучок определяется конечными сингулярными цепями $S_*^c(X, X \setminus U; \mathcal{A})$. При этом $S_*^c(X, X \setminus U; \mathcal{A})$, $S_*(X, X \setminus U; \mathcal{A})$ оказываются подкомплексами комплекса сечений $\mathcal{S}_*(\mathcal{A})$ на U и $S_*^\varphi(X; \mathcal{A}) = \Gamma_\varphi(\mathcal{S}_*(\mathcal{A}))$ при $U = X$. Имеем $\mathcal{S}_*(\mathcal{A}) = \mathcal{S}_*(R) \otimes \mathcal{A}$, поэтому

$$\mathcal{S}_*(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{G} = \mathcal{S}_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{G}).$$

Кроме того, дифференциальный пучок $\mathcal{S}_*(\mathcal{A})$ гомотопически тонок, поэтому для паракомпактифицирующих φ имеем

$$\mathbb{H}_*^\varphi(\mathcal{S}_*(\mathcal{A})) = H_*^\varphi(X; \mathcal{A}) = H_*(\Gamma_\varphi(\mathcal{S}_*(\mathcal{A})))$$

(см. [6, § 6]).

Пусть lc – семейство всех замкнутых локально компактных подпространств пространства X . Имеем очевидное равенство для цепных комплексов

$$S_*(X; \mathcal{A}) = \bigcup_{B \in \text{lc}} S_*(B; \mathcal{A}).$$

Поскольку носители любых цепей локально компактны, такое же равенство имеется для цепей с носителями в произвольном семействе φ . Следствием являются соотношения

$$H_n^\varphi(X; \mathcal{A}) = \varinjlim_{B \in \text{lc}} \{H_n^{\varphi|B}(B; \mathcal{A})\}.$$

Пусть $\mathcal{S}_*(\mathcal{A})^B$ – прямой образ при вложении $B \subset X$ пучка сингулярных цепей $\mathcal{S}_*(\mathcal{A} | B)$, построенного для $B \in \text{lc}$. Нетрудно проверить [6, § 6], что

$$\mathcal{S}_*(\mathcal{A})^B \subset \mathcal{S}_*(\mathcal{A}) = \bigcup_{B \in \text{lc}} \mathcal{S}_*(\mathcal{A})^B.$$

Любой эндоморфизм дифференциального пучка $\mathcal{S}_*(\mathcal{A} | B)$ продолжается до эндоморфизма $\mathcal{S}_*(\mathcal{A})^B$ на X , поэтому пучки $\mathcal{S}_*(\mathcal{A})^B$ (как и $\mathcal{S}_*(\mathcal{A})$) гомотопически тонкие. Следовательно (поскольку $\varphi|B = \psi|B$ для некоторого паракомпактифицирующего семейства ψ), в силу предложения 6.1 из [6] для любого семейства носителей φ , ограничение которого на B оказывается паракомпактифицирующим,

$$H_*^{\varphi|B}(B; \mathcal{A}) = H_*(\Gamma_\varphi(\mathcal{S}_*(\mathcal{A})^B)) = \mathbb{H}_*^\varphi(\mathcal{S}_*(\mathcal{A})^B).$$

Аналогичную структуру имеют дифференциальные пучки цепей типа Чеха и цепей Масси. Достаточно полное описание пучков цепей Масси дано в [6, начало § 7] (и сжатое, с некоторыми пробелами из-за этого – в [4, гл. 2, § 1]). Описание пучков цепей типа Чеха дано в [6, § 7], краткая схема построения и описания их свойств – в [4, гл. 2, п. 2.5], описание для локально компактных пространств – в [3, гл. 5, п. 4.2] и в некоторых более ранних работах автора. Поскольку свойства этих пучков в сильной степени определяются свойством коцепей локально компактного пространства с коэффициентами в $\mathbb{R}$, имеющих компактные носители, быть свободными, пучки таких цепей $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})$ строятся сначала на локально компактных пространствах, где они оказываются вялыми. Их сечения совпадают с соответствующими комплексами цепей $C_*(B; \mathcal{A})$, причем носители сечений совпадают с носителями цепей. В частности, обычные гомологии определяются подкомплексом $C_*^c(B; \mathcal{A})$ сечений с компактными носителями.

Для $B_1, B_2 \in \text{lc}$, $B_1 \subset B_2$, имеем $C_*(B_1; \mathcal{A}) \subset C_*(B_2; \mathcal{A})$, и комплекс цепей X определяется как

$$C_*(X; \mathcal{A}) = \bigcup_{B \in \text{lc}} C_*(B; \mathcal{A}).$$

Имеем

$$H_n(X; \mathcal{A}) = H_n(C_*(X; \mathcal{A})) = \varinjlim_{B \in \text{lc}} \{H_n(B; \mathcal{A})\}$$

– гомологии “второго рода” и

$$H_n^c(X; \mathcal{A}) = H_n(C_*^c(X; \mathcal{A})) = \varinjlim_{B \in c} \{H_n(B; \mathcal{A})\} = \varinjlim_{B \in lc} \{H_n^c(B; \mathcal{A})\}$$

– обычные гомологии (с компактными носителями).

Для $B \in lc$ пусть $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})^B$ – прямой образ пучка цепей $\mathcal{C}_*(\mathcal{A} \mid B)$ при вложении $B \subset X$. Поскольку $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})^B \subset \mathcal{C}_*(\mathcal{A})^F$ при $B \subset F$, на X возникает пучок $\mathcal{C}_*(\mathcal{A}) = \bigcup_{B \in lc} \mathcal{C}_*(\mathcal{A})^B$, оказывающийся мягким как прямой предел вялых пучков. Будем называть $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})$ *дифференциальным пучком цепей* (типа Чеха или цепей Масси) пространства X . Это оправдывается следующими предложениями.

2.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Сечения $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})$ совпадают с цепями пространства X (в частности, $\Gamma_c(\mathcal{C}_*(\mathcal{A})) = C_*^c(X; \mathcal{A})$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу [6, предложение 7.7] $\mathcal{C}_*(\mathcal{A}) = \bigcup_{C \in c} \mathcal{C}_*(\mathcal{A})^C$. Пусть s – сечение $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})$, $s(x) \neq 0$ в некоторой точке $x \in X$. Тогда $s(x) \in \mathcal{C}_*(\mathcal{A})^C$ для некоторого компактного $C \subset X$. Так как $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})^C$ открыт в $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})$, то $s(U) \subset \mathcal{C}_*(\mathcal{A})^C$ для некоторой окрестности U точки x . Следовательно, носитель $|s|$ локально компактен. Так как X паракомпактно, найдется локально конечное открытое покрытие $\alpha = \{U_\lambda\}$, для которого множества $|s| \cap U_\lambda$ имеют компактные замыкания. Поскольку пучки $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})$ мягкие, существует разложение $s = \sum_\lambda s_\lambda$ сечения s , подчиненное α [14, гл. II, теорема 3.6.1]. Компактное множество $s_\lambda(|s_\lambda|)$ попадает в $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})^C$ для некоторого компактного $C \subset X$.

Пусть F_λ – компактное множество в C такое, что $|s_\lambda| \subset \text{Int } F_\lambda$ (внутренность в топологии C), а система множеств $\{F_\lambda\}$ локально конечна в X . Поскольку вложение $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})^{F_\lambda} \subset \mathcal{C}_*(\mathcal{A})^C$ – локальный изоморфизм на $\text{Int } F_\lambda$, то s_λ – сечение $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})^{F_\lambda}$. Но тогда s – сечение $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})^B$, где $B = \bigcup_\lambda F_\lambda \in lc$, т.е. s – цепь из $C_*(B; \mathcal{A})$. Предложение доказано.

2.2. СЛЕДСТВИЕ. *Сечения $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})$ с носителями в некотором семействе φ – это цепи X с носителями в принадлежащих φ множествах из (непаракомпактифицирующего) семейства lc .*

В частности, носители любых сечений пучков $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})$, как и пучков сингулярных цепей, локально компактны.

2.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пучок $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})$ порождается предпучком цепей $U \rightarrow C_*(X, X \setminus U; \mathcal{A})$.*

Здесь

$$C_*(X, X \setminus U; \mathcal{A}) = \varinjlim_{B \in lc} \{C_*(B, B \setminus U; \mathcal{A})\}.$$

Этот предел существует, так как $C_*(B, B \setminus U; \mathcal{A}) = C_*(B; \mathcal{A})/C_*(B \setminus U; \mathcal{A})$. Поскольку предпучок $U \rightarrow C_*(B, B \setminus U; \mathcal{A})$ индуцирует на X пучок $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})^B$, утверждение есть следствие одного из определений индуктивного предела пучков (см. [14, гл. II, п. 1.11]).

Поскольку для всех типов рассмотренных пучков цепей $H_*^\varphi(X; \mathcal{A}) = H_*(\Gamma_\varphi(\mathcal{C}_*(\mathcal{A})))$, $\wedge$ -умножение на когомологии определяется преобразованием Λ_0 для $\mathcal{L}_* = \mathcal{C}_*(\mathcal{A})$ и дополнительно (для цепей типа Чеха или цепей Масси в случае не конечно представимых слоев в $\mathcal{A}$) преобразованием π' (см. введение). Поскольку для общих пространств $H_*^\theta(X; \mathcal{A}) = \mathbb{H}_*^\theta(\mathcal{C}_*(\mathcal{A}))$, если семейство θ паракомпактифицирующее (см. [6, теорема 6.1] для $\mathcal{C}_*(\tilde{\mathcal{A}}) = \mathcal{L}_*(\tilde{\mathcal{A}})$, мягкость $\mathcal{C}_*(\tilde{\mathcal{A}})$)

в остальных случаях), по крайней мере при условии паракомпактифицируемости $\theta = \varphi \cap \psi$ возникает умножение (3)

$$\frown: H_n^\varphi(X; \mathcal{A}) \otimes H_\psi^q(X; \mathcal{G}) \rightarrow H_{n-q}^{\varphi \cap \psi}(X; \mathcal{A} \otimes \mathcal{G}).$$

Пусть $\alpha \in H_n^\varphi(X; \mathcal{A})$ и $h \in H_\psi^q(X; \mathcal{G})$, $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})$ – пучок цепей одного из рассматриваемых типов. В силу предложения 2.1 и определения комплекса $C_*(X; \mathcal{A})$ сечение s пучка $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})$, определяющее класс α , является сечением некоторого подпучка $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})^B \subset \mathcal{C}_*(\mathcal{A})$, $B \in \text{lc}$.

Пусть α_B – реализуемый циклом s элемент $H_n^{\varphi|B}(B; \mathcal{A})$, и пусть $h_B \in H_{\varphi \cap B}^q(B; \mathcal{G})$ – ограничение h на B .

2.4. ТЕОРЕМА. В случае паракомпактифицирующего семейства $\varphi \cap \psi$ элемент $\alpha \frown h \in H_{n-q}^{\varphi \cap \psi}(X; \mathcal{A} \otimes \mathcal{G})$ совпадает с образом $\alpha_B \frown_B h_B \in H_{n-q}^{(\varphi \cap \psi)|B}(B; \mathcal{A} \otimes \mathcal{G})$ при вложении $B \subset X$ ($\frown_B$ – умножение в подпространстве B).

Подпространство $B \in \text{lc}$ определено, конечно, неоднозначно. Для любых двух таких подпространств найдется содержащее их третье $F \in \text{lc}$. Ясно, что сформулированное в теореме утверждение остается в силе при замене X на F . Это дает возможность определить общее $\frown$ -умножение и для непаракомпактифицирующих $\varphi \cap \psi$ (в случае пучков сингулярных цепей – при условии паракомпактифицируемости для всех $B \in \text{lc}$ семейств $\varphi|B \cap (\psi \cap B) = (\varphi \cap \psi)|B$).

В общих ситуациях оправдано

2.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для $\alpha \in H_n^\varphi(X; \mathcal{A})$ и $h \in H_\psi^q(X; \mathcal{G})$ пусть $\alpha \frown h \in H_{n-q}^{\varphi \cap \psi}(X; \mathcal{A} \otimes \mathcal{G})$ есть образ $\alpha_B \frown_B h_B \in H_{n-q}^{(\varphi \cap \psi)|B}(B; \mathcal{A} \otimes \mathcal{G})$ при вложении $B \subset X$.

Классическим примером применения этого определения является случай $\varphi = c$, т.е. когда $H_*^c(X; \mathcal{A})$ – обычные гомологии с компактными носителями. Определение применимо и когда $\varphi \subset c$ (например, при рассмотрении гомологий подпространств $Y \subset X$, когда $H_*^c(Y; \mathcal{A}) = H_*^\varphi(X; \mathcal{A})$, где φ – все компактные множества, содержащиеся в Y). Для семейств компактных носителей в определении 2.5 вместо всех $B \in \text{lc}$ можно рассматривать, очевидно, только компактные множества $B \in c$.

С помощью предельного перехода по компактным $C \subset X$ умножение гомологий $H_*^c(X; \mathcal{A})$ на когомологии $H^*(X; G)$ определяется в [16, §9.5]. Эквивалентность этого умножения рассматриваемому в настоящей работе установлена в [6, §9].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть σ – представляющее h сечение пучка $\mathcal{C}^*(\mathcal{G})$. Тогда $\beta = \alpha \frown h$ представляется, с одной стороны, сечением $\pi' \Lambda_0(s \otimes \sigma)$ (см. введение) пучка $\mathcal{C}^*(\mathcal{C}_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{G}))$, а с другой (пользуемся естественностью умножения (1) и определяющих умножение операций по отношению к включению $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})^B \subset \mathcal{C}_*(\mathcal{A})$) – сечением пучка $\mathcal{C}^*(\mathcal{C}_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{G})^B)$, получающимся из $s \otimes \sigma$ посредством композиции отображений

$$\mathcal{C}_*(\mathcal{A})^B \otimes \mathcal{C}^*(\mathcal{G}) \xrightarrow{\Lambda_0} \mathcal{C}^*(\mathcal{C}_*(\mathcal{A})^B \otimes \mathcal{G}) = \mathcal{C}^*(\mathcal{C}_*(\mathcal{A})^B \otimes \mathcal{G}_B) \xrightarrow{\pi'} \mathcal{C}^*(\mathcal{C}_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{G})^B).$$

Здесь $\mathcal{G}_B = \mathcal{G}/\mathcal{G}_{X \setminus B}$, где $\mathcal{G}_{X \setminus B}$ – пучок, совпадающий с $\mathcal{G}$ на $X \setminus B$ и нулевой на B . Равенство в середине следует из точности функтора $\mathcal{C}^*$, точности справа функтора $\otimes$ и равенства нулю пучка $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})^B \otimes \mathcal{G}_{X \setminus B}$. Наличие преобразования

π' в цепочке объясняется наличием π' на B и тем, что для любого пучка $\mathcal{F}$, сосредоточенного на B , в силу [14, гл. II, лемма 4.9.1] $\mathcal{C}^*(\mathcal{F})|_B = \mathcal{C}^*(\mathcal{F} \mid B)$ (вне B слои пучков нулевые). Таким образом, поскольку $\mathcal{C}_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{G})^B \subset \mathcal{C}_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{G})$, элемент β представляется некоторым $\beta_B \in H_{n-q}^{(\varphi \cap \psi)|^B}(B; \mathcal{A} \otimes \mathcal{G})$ при вложении $B \subset X$.

Остается показать, что $\beta_B = \alpha_B \frown_B h_B$. Из того, что $\mathcal{C}^*(\mathcal{G})_{X \setminus B} \subset \mathcal{C}^*(\mathcal{G}_{X \setminus B})$, вытекает наличие преобразований

$$\mathcal{C}^*(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{G})_B \rightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{G}_B).$$

Образ σ_B сечения σ при этой композиции определяет, очевидно, класс h_B . Отображение Λ_0 в рассмотренной выше цепочке преобразований совпадает (в силу естественности определяющих умножение (1) операций типа Λ по второму аргументу) с композицией

$$\mathcal{C}_*(\mathcal{A})^B \otimes \mathcal{C}^*(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{C}_*(\mathcal{A})^B \otimes \mathcal{C}^*(\mathcal{G}_B) \xrightarrow{\Lambda_0} \mathcal{C}^*(\mathcal{C}_*(\mathcal{A})^B \otimes \mathcal{G}_B). \quad (4)$$

После применения к ней преобразования π' получим из $s \otimes \sigma$ на B сечение, определяющее $\alpha_B \frown_B h_B$. Теорема доказана.

Применим теперь использованные выше конструкции для построения относительных вариантов $\frown$ -умножения. Пусть сначала $\varphi = c$, а ψ – все замкнутые множества.

2.6. ТЕОРЕМА. *Для любых замкнутых множеств A_1, A_2 хаусдорфова паракомпактного пространства X определено естественное по всем аргументам $\frown$ -умножение*

$$\frown: H_n^c(X, A_1 \cup A_2; \mathcal{A}) \otimes H^q(X, A_2; \mathcal{G}) \rightarrow H_{n-q}^c(X \setminus A_2, A_1 \setminus A_2; \mathcal{A} \otimes \mathcal{G}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha \in H_n^c(X, A_1 \cup A_2; \mathcal{A})$ и $h \in H^q(X, A_2; \mathcal{G})$. Найдется компактное множество $B \subset X$ такое, что α представляется элементом $\alpha_B \in H_n(B, B_1 \cup B_2; \mathcal{A})$, где $B_i = B \cap A_i$, $i = 1, 2$. Рассматриваем пучки цепей типа Чеха или цепей Масси $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})$. Как и выше, $\mathcal{C}_*(\mathcal{A} \mid B)$ – вялый пучок на B , совпадающий с ограничением на B подпучка $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})^B \subset \mathcal{C}_*(\mathcal{A})$. Гомологии $B_1 \cup B_2 \subset B$ определяются сечениями этого пучка с носителями в $B_1 \cup B_2$, поэтому в силу вялости гомологии пары $(B, B_1 \cup B_2)$ определяются комплексом сечений на $B \setminus (B_1 \cup B_2)$, или, эквивалентно, комплексом сечений на $X \setminus (B_1 \cup B_2)$ пучка $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})^B$.

Пусть s_B – сечение, определяющее α_B . В силу вялости резольвенты $\mathcal{C}^*(\mathcal{G})$ когомологии A_2 определяются ее сечениями на A_2 , следовательно, когомологии (X, A_2) – сечениями $\mathcal{C}^*(\mathcal{G})$ с носителями в $X \setminus A_2$ (см., например, [3, гл. 3, п. 4.3]). Пусть σ – такое сечение, определяющее h .

На множестве $X \setminus (B_1 \cup B_2)$ определено сечение $s_B \otimes \sigma$ пучка $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})^B \otimes \mathcal{C}^*(\mathcal{G})$, обращающееся в нуль в некоторой окрестности B_2 . Продолжая его нулем, получим сечение ξ_B на $X \setminus B_1$ с носителем в $(X \setminus B_1) \setminus B_2$. Аналогичный вид имеет сечение $\Lambda_0(\xi_B)$ пучка

$$\mathcal{C}^*(\mathcal{C}_*(\mathcal{A})^B \otimes \mathcal{G}) = \mathcal{C}^*(\mathcal{C}_*(\mathcal{A})^B \otimes \mathcal{G}_B).$$

Воспользуемся тем, что Λ_0 совпадает с композицией преобразований (4). Пусть σ_B – образ σ в пучке $\mathcal{C}^*(\mathcal{G}_B)$. Для сконцентрированных на B пучков $\mathcal{C}^*(\mathcal{G}_B) \mid B = \mathcal{C}^*(\mathcal{G} \mid B)$ [14, гл. II, лемма 4.9.1], а носитель σ_B лежит в $B \setminus B_2$, поэтому σ_B определяет ограничение $h_B \in H^q(B, B_2; \mathcal{G})$ элемента h на (B, B_2) . Таким образом,

сечение $\Lambda_0(\xi_B)$ так же, как элементами α и h , определяется на B элементами α_B и h_B посредством операции

$$\Lambda_0: \mathcal{C}_*(\mathcal{A} \mid B) \otimes \mathcal{C}^*(\mathcal{G} \mid B) \rightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{C}_*(\mathcal{A} \mid B) \otimes \mathcal{G} \mid B).$$

Далее применим преобразование π' , определенное на B , но распространяемое на все X (ср. с доказательством предыдущей теоремы). Получим сечение $\eta_B = \pi' \Lambda_0(\xi_B)$ пучка $\mathcal{C}^*(\mathcal{C}_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{G})^B)$, определенное на $X \setminus B_1$ и обращающееся в нуль на B_2 . Последний пучок – это вялая резольвента Картана–Эйленберга дифференциального пучка $\mathcal{C}_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{G})^B$, а после ограничения на B (в силу уже не раз использованных аргументов) – резольвента Годемана, следовательно, и Картана–Эйленберга вялого дифференциального пучка цепей $\mathcal{C}_*(\mathcal{A} \mid B \otimes \mathcal{G} \mid B)$. Для любого семейства носителей φ в B гомологии комплекса $\Gamma_\varphi(\mathcal{C}^*(\mathcal{C}_*(\mathcal{A} \mid B \otimes \mathcal{G} \mid B)))$ (т.е. $\mathbb{H}_*^\varphi(\mathcal{C}_*(\mathcal{A} \mid B \otimes \mathcal{G} \mid B))$) совпадают в силу вялости пучков цепей с гомологиями $H_*^\varphi(B; \mathcal{A} \otimes \mathcal{G})$ (см. начало введения). В частности, гомологии B_1 определяются применением функтора Γ_φ , в котором φ – все замкнутые подмножества B_1 ; поэтому по уже обсуждавшимся причинам сечения на $B \setminus B_1$ (и, в частности, η_B) определяют гомологии пары (B, B_1) . Но сечение η_B , кроме прочего, обращается на B_2 в нуль. Продолжая его нулем на все B_2 , а затем как-то на B (используем вялость $\mathcal{C}^*$), получим сечение-цепь подпространства $B \setminus B_2$, образом которой при факторизации по цепям $B_1 \setminus B_2$ (сечениям с носителями в $B_1 \setminus B_2$) оказывается η_B . Таким образом, η_B – цикл пары $(B \setminus B_2, B_1 \setminus B_2)$, определяющий некоторый элемент $\beta_B \in H_{n-q}^c(B \setminus B_2, B_1 \setminus B_2; \mathcal{A} \otimes \mathcal{G})$. В соответствии с определением B_1, B_2 имеем включение

$$(B \setminus B_2, B_1 \setminus B_2) \subset (X \setminus A_2, A_1 \setminus A_2).$$

Пусть $\beta \in H_{n-q}^c(X \setminus A_2, A_1 \setminus A_2; \mathcal{A} \otimes \mathcal{G})$ – образ β_B . По определению $\beta = \alpha \wedge h$.

Стандартно проверяется уже на первом этапе (в тензорном произведении комплексов, ср. [14, гл. I, п. 2.7]) независимость конструкции от выбора представляющих α_B и h сечений (цикла и коцикла) s_B и σ . Независимость конструкции от выбора представляющего α элемента α_B в гомологиях множества B – частный случай независимости от выбора самого B . Для элементов α_B и $\alpha_{B'}$ найдется содержащее B и B' компактное множество F такое, в гомологиях которого образы α_B и $\alpha_{B'}$ совпадают с $\alpha_F \in H_n(F, F_1 \cup F_2; \mathcal{A})$ ($F_i = F \cap A_i$). Так как $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})^B \subset \mathcal{C}_*(\mathcal{A})^F$ (аналогично для B'), то можно считать, что α_F представлен двумя сечениями, s_B и s_F , пучка $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})^F$, от выбора которых (см. выше) конструкция не зависит. Теорема доказана.

Аналогичный результат справедлив для гомологий “второго рода” (определяемых “бесконечными” цепями, т.е. с любыми носителями, автоматически совпадающими с семейством lc).

2.7. ТЕОРЕМА. *Для замкнутых множеств A_1, A_2 паракомпактного хаусдорфова пространства X определено естественное умножение*

$$\frown: H_n(X, A_1 \cup A_2; \mathcal{A}) \otimes H^q(X, A_2; \mathcal{G}) \rightarrow H_{n-q}(X \setminus A_2, A_1 \setminus A_2; \mathcal{A} \otimes \mathcal{G}).$$

Доказательство не отличается от предыдущего, если вместо компактных $B \subset X$ рассматривать локально компактные множества $B \in \text{lc}$.

В случае, когда пространство X локально компактно, не лишены интереса еще два варианта умножения, возникающие при замене обычных когомологий на когомологии второго рода H_c^* . Результат таких умножений будет принадлежать, очевидно, группе $H_{n-q}^c(X \setminus A_2, A_1 \setminus A_2; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, поскольку носитель сечения σ , а следовательно, и замыкание носителя η_B компактны. Для абсолютного случая (когда $A_1 = A_2 = \emptyset$) и постоянных коэффициентов все четыре варианта умножения на локально компактном пространстве рассмотрены в [16, § 10.4].

В эти четыре варианта, на первый взгляд, не вписывается вариант, рассматриваемый в [16, § 7.9]. Для открытых подмножеств R, S локально компактного пространства X он имеет следующую форму.

2.8. ТЕОРЕМА. *Имеется естественное умножение*

$$\frown: H_n(R \cap S; A) \otimes H_c^q(R; G) \rightarrow H_{n-q}(S; A \otimes G).$$

Пусть $A_1 = X \setminus S$, $A_2 = X \setminus R$. Известно, что $H_c^q(R; G) = H_c^q(X, A_2; G)$ (см., например, [6, § 7]). Известно также, что $H_n(R \cap S; A) = H_n(X, A_1 \cup A_2; A)$ (см., например, [6, следствие 7.4]). Таким образом, в соответствии с изложенными выше наблюдениями результат умножения должен принадлежать $H_{n-q}^c(R, R \cap A_1; A \otimes G)$. Остается воспользоваться гомоморфизмом, индуцированным для H_* включением $(R, R \cap A_1) \subset (X, A_1)$, естественным преобразованием теорий $H_*^c \rightarrow H_*$ и вырезанием для H_* .

§ 3. Связь с декартовым произведением

Пусть φ и ψ – семейства носителей в пространствах X и Y и $\theta = \varphi \times \psi$ – их произведение в декартовом произведении $X \times Y$. Известно, что (для любых пучков коэффициентов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно на X и Y) существуют гомоморфизмы когомологий

$$H_\varphi^p(X; \mathcal{A}) \otimes H_\psi^q(Y; \mathcal{B}) \rightarrow H_{\varphi \times \psi}^{p+q}(X \times Y; \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})$$

(см. [14, гл. II, п. 6.1]). Здесь $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$ – полное тензорное произведение пучков (см. [14, гл. II, п. 2.10]). В случае, когда $Y = X$, ограничение $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$ на диагональ $\Delta(X) \subset X \times X$ совпадает с $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ [11, гл. I, § 5], а пересечение с диагональю семейства $\varphi \times \psi$ – с семейством $\varphi \cap \psi$, поэтому определено отображение

$$H_{\varphi \times \psi}^{p+q}(X \times X; \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}) \rightarrow H_{\varphi \cap \psi}^{p+q}(X; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}).$$

Известно (см. [14, гл. II, п. 6.6]), что $\smile$ -умножение

$$H_\varphi^p(X; \mathcal{A}) \otimes H_\psi^q(X; \mathcal{B}) \rightarrow H_{\varphi \cap \psi}^{p+q}(X; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$$

есть композиция рассмотренных выше двух отображений.

Аналогичная интерпретация имеется и для $\frown$ -умножения в сингулярной теории. С помощью теоремы Эйленберга–Зильбера о гомотопической эквивалентности сингулярных цепных комплексов $S_*^c(X; \mathbb{R}) \otimes S_*^c(Y; \mathbb{R})$ и $S_*^c(X \times Y; \mathbb{R})$ определяется естественное “косое” умножение [13, гл. VII, § 11]

$$\backslash: {}_s H_n^c(X \times Y; A) \otimes {}_s H^q(X; G) \rightarrow {}_s H_{n-q}^c(Y; A \otimes G)$$

для обычных сингулярных гомологий и когомологий. При $Y = X$ композиция этого преобразования с индуцированным диагональным вложением $\Delta: X \rightarrow X \times X$ отображением сингулярных гомологий

$$\Delta_*: {}_sH_n^c(X; A) \rightarrow {}_sH_n^c(X \times X; A)$$

совпадает с классическим умножением [13, гл. VII, § 12]

$$\frown: {}_sH_n^c(X; A) \otimes {}_sH_q^c(X; G) \rightarrow {}_sH_{n-q}^c(X; A \otimes G).$$

Цель настоящего параграфа – дать описание аналогичной конструкции в терминах гомологий Стинрода–Ситникова и пучковых когомологий. Пусть сперва X и Y – локально компактные (паракомпактные хаусдорфовы) пространства. По теореме 5 из [9, гл. I, § 9, п. 10] пространство $X \times Y$ паракомпактно. Пусть Φ – некоторое семейство носителей в $X \times Y$ и ψ – такое паракомпактифицирующее семейство в X , что пересечение $\Phi \cap (\psi \times c)$ состоит из компактных множеств. Через $\pi(\Phi, \psi)$ будем обозначать проекцию в Y семейства $\Phi \cap (\psi \times cl)$ (cl – все замкнутые множества в Y). Выделим два основных частных случая:

- 1) при $\Phi = c$ всегда $\pi(c, \psi) = c$;
- 2) при $\Phi = cl$ и $\psi = c$ имеем $\pi(cl, c) = cl$.

3.1. ТЕОРЕМА. *Для локально компактных пространств имеется преобразование*

$$\backslash: H_n^\Phi(X \times Y; A) \otimes H_\psi^q(X; G) \rightarrow H_{n-q}^{\pi(\Phi, \psi)}(Y; A \otimes G).$$

Для любых паракомпактных хаусдорфовых пространств X и Y возникает преобразование

$$\backslash: H_n^c(X \times Y; A) \otimes H^q(X; G) \rightarrow H_{n-q}^c(Y; A \otimes G).$$

В случае, когда $Y = X$ – локально компактное пространство, рассмотрим в X еще одно семейство φ . Будем предполагать, что $\Delta(\varphi) \subset \Phi$. При этом условии легко проверить наличие включения $\alpha: \varphi \cap \psi \subset \pi(\Phi, \psi)$.

В частном случае, когда $\varphi = c$ и $\Phi = c$, для любого ψ , содержащего c , имеем $\varphi \cap \psi = c = \pi(c, \psi)$. В другом типичном случае, когда $\varphi = cl$, пусть Φ – семейство всех замкнутых множеств, содержащихся в некоторой окрестности $\Delta(X)$ в $X \times X$ с собственными проекциями на оба множителя ее замыкания. В этом случае $\varphi \cap \psi = cl = \pi(\Phi, cl)$ при $\psi = cl$ и $\varphi \cap \psi = c = \pi(\Phi, c)$, если $\psi = c$.

3.2. ТЕОРЕМА. *Для локально компактного пространства X имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \frown: H_n^\varphi(X; A) \otimes H_\psi^q(X; G) & \longrightarrow & H_{n-q}^{\varphi \cap \psi}(X; A \otimes G) \\ \downarrow \Delta_* & \parallel & \downarrow \alpha_* \\ \backslash: H_n^\Phi(X \times X; A) \otimes H_\psi^q(X; G) & \longrightarrow & H_{n-q}^{\pi(\Phi, \psi)}(X; A \otimes G). \end{array}$$

В частности, при $c \subset \psi$ умножение

$$\frown: H_n^c(X; A) \otimes H_\psi^q(X; G) \rightarrow H_{n-q}^c(X; A \otimes G)$$

есть результат применения операции $\backslash$ к отображению $\Delta_*: H_n^c(X; A) \rightarrow H_n^c(X \times X; A)$. Аналогично, для $\psi = c$ или $\psi = cl$ (и определенного выше в окрестности $\Delta(X)$ семейства Φ) умножение

$$\frown: H_n(X; A) \otimes H_\psi^q(X; G) \rightarrow H_{n-q}^\psi(X; A \otimes G)$$

есть результат применения операции $\backslash$ к отображению $\Delta_*: H_n(X; A) \rightarrow H_n^\Phi(X \times X; A)$.

3.3. ТЕОРЕМА. Для паракомпактного пространства X умножение

$$\frown: H_n^c(X; A) \otimes H^q(X; G) \rightarrow H_{n-q}^c(X; A \otimes G)$$

есть композиция с операцией $\setminus$ отображения $\Delta_* \otimes e$, где $\Delta_*: H_n^c(X; A) \rightarrow H_n^c(X \times X; A)$ индуцировано диагональным вложением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Пусть $\mathcal{C}_1^*(G)$ – резольвента вида $\mathcal{A}_f^*(G)$ (см. введение) на X , $\mathcal{C}_2^*(\mathbb{R})$ – аналогичная резольвента на Y . Поскольку пучки $\mathcal{C}_2^*(\mathbb{R})$ без кручения, из соотношения (3) из [11, гл. I, § 5] следует, что при каждом p дифференциальный пучок $\mathcal{C}_1^p(G) \hat{\otimes} \mathcal{C}_2^*(\mathbb{R})$ – резольвента пучка $\mathcal{C}_1^p(G) \hat{\otimes} \mathbb{R}$ и при каждом q дифференциальный пучок $\mathcal{C}_1^*(G) \hat{\otimes} \mathcal{C}_2^q(\mathbb{R})$ – резольвента пучка $G \hat{\otimes} \mathcal{C}_2^q(\mathbb{R})$. Простой диаграммный поиск показывает, что рассматриваемый в полной градуировке и с полным дифференциалом биградуированный пучок $\mathcal{C}_1^*(G) \hat{\otimes} \mathcal{C}_2^*(\mathbb{R})$ – резольвента постоянного пучка G на $X \times Y$ (ср. с [14, гл. II, § 6.1]; см. также упр. 42 из [11, гл. II]). В силу [11, гл. II, предложение 18.5] это s -мягкая, следовательно (на локально компактном пространстве), и мягкая резольвента. Опираясь на конструкции из [6, § 8], в частности, используя дуальный к ней дифференциальный пучок, с помощью этой резольвенты можно получить гомологии пространства $X \times Y$ и его подмножеств (тем более, что, как это можно показать с помощью методов из [16, § 4.4], сечения с компактными носителями этих пучков над замкнутыми множествами в $X \times Y$, как и сечения пучков вида $\mathcal{A}_f^*(\mathbb{R})$, при $G = \mathbb{R}$ представляют собой свободные комплексы).

В целях лучшего выяснения связей с умножениями удобнее все же использовать на $X \times Y$ резольвенту $\mathcal{A}_f^*(G)$.

3.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Имеется естественное преобразование

$$\times: \mathcal{C}_1^*(G) \hat{\otimes} \mathcal{C}_2^*(B) \rightarrow \mathcal{A}_f^*(G \otimes B).$$

В самом деле, n -мерная составляющая первого пучка есть $\bigoplus_{p+q=n} \mathcal{C}_1^p(G) \hat{\otimes} \mathcal{C}_2^q(B)$, поэтому достаточно определить преобразование $\mathcal{C}_1^p(G) \hat{\otimes} \mathcal{C}_2^q(B) \rightarrow \mathcal{A}_f^p(G \otimes B)$. Для коцепи ξ на $U \subset X$ и коцепи η на $V \subset Y$ обозначим через $\xi \times \eta$ образ $\xi \hat{\otimes} \eta$, определив его на $U \times V \subset X \times Y$ как

$$(\xi \times \eta)(z_0, z_1, \dots, z_n) = \xi(x_0, \dots, x_p) \otimes \eta(y_p, \dots, y_n),$$

где $z_i = (x_i, y_i) \in U \times V$ (ср. с аналогичной формулой для умножения канонических вьальных резольвент из [14, гл. II, п. 6.1]). Этого достаточно, поскольку изучаемые пучки порождаются предпучками таких коцепей. Приведенная формула билинейна и совместима со стандартными отождествлениями в тензорном произведении. Проверка ее совместимости с дифференциалами сводится к простому сравнению подробно расписанных выражений

$$\begin{aligned} d(\xi \times \eta)(z_0, \dots, z_{n+1}) &= \sum_i (-1)^i (\xi \times \eta)(z_0, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_{n+1}), \\ (d\xi \times \eta)(z_0, \dots, z_{n+1}) &+ (-1)^p (\xi \times d\eta)(z_0, \dots, z_{n+1}). \end{aligned}$$

Пусть¹

$$\xi \in C_n(X \times Y; A) = \text{Hom}(A_{fc}^n(X \times Y; \mathbb{R}), A), \quad \eta \in A_{f\psi}^q(X; G).$$

¹ $A_{f\psi}^*$ – коцепи из A_f^* с носителями в ψ .

Рассмотрим отображение

$$\eta \times : A_{fc}^p(Y; \mathbb{R}) \rightarrow A_{f\psi \times c}^n(X \times Y; G),$$

при котором коцепи $\zeta \in A_{fc}^p(Y; \mathbb{R})$ отвечает $\eta \times \zeta$. По предположению о носителях цепей и коцепей множество $|\xi| \cap (|\eta| \times |\zeta|)$ компактно. Как сечение мягкого пучка $\mathcal{A}_f^n(G)$ коцепь $\eta \times \zeta$ может быть представлена в виде суммы двух сечений $s_1 + s_2$ таким образом, что s_2 обращается в нуль в окрестности $|\xi|$ [14, гл. II, теорема 3.6.1]. Следовательно,

$$s_1 \in A_{fc}^n(X \times Y; G) = A_{fc}^n(X \times Y; \mathbb{R}) \otimes G$$

(равенство в силу [16, § 4.11]). Тем самым определено значение $\langle \xi \otimes e, s_1 \rangle \in A \otimes G$, где e – тождественный изоморфизм G . При другом представлении $s'_1 + s'_2$ того же сечения $s_1 - s'_1$ равно нулю на $|\xi|$, следовательно, и в некоторой окрестности $|\xi|$, в связи с чем $\langle \xi \otimes e, s_1 - s'_1 \rangle = 0$. Таким образом, указанный элемент из $A \otimes G$ зависит лишь от ограничения $\eta \times \zeta$ на $|\xi|$, будем его обозначать как $\langle \xi \otimes e, \eta \times \zeta \rangle = \langle \xi \setminus \eta, \zeta \rangle$ (это функция аргумента ζ , определяемая выбранными ξ и η). Этим определена операция

$$\setminus : C_n^\Phi(X \times Y; A) \otimes A_{f\psi}^q(X; G) \rightarrow C_{n-q}^{\pi(\Phi, \psi)}(Y; A \otimes G).$$

Ясно, что эта операция билинейна. Имеем

$$\langle \partial(\xi \setminus \eta), \zeta \rangle = \langle \xi \setminus \eta, d\zeta \rangle = \langle \xi \otimes e, \eta \times d\zeta \rangle,$$

причем

$$d(\eta \times \zeta) = d\eta \times \zeta + (-1)^q \eta \times d\zeta, \quad \eta \times d\zeta = (-1)^q (d(\eta \times \zeta) - d\eta \times \zeta),$$

поэтому

$$\langle \partial(\xi \setminus \eta), \zeta \rangle = (-1)^q (\langle \xi \otimes e, d(\eta \times \xi) \rangle - \langle \xi \otimes e, d\eta \times \zeta \rangle) = (-1)^q (\langle \partial\xi \setminus \eta, \zeta \rangle - \langle \xi \setminus d\eta, \zeta \rangle),$$

т.е. $\partial(\xi \setminus \eta) = (-1)^q (\partial\xi \setminus \eta - \xi \setminus d\eta)$. Как известно, это означает, что цепная операция $\setminus$ определяет фигурирующее в теореме $\setminus$ -умножение.

Далее, пусть X и Y – паракомпактные хаусдорфовы пространства. Легко видеть, что компактные множества вида $C_1 \times C_2$ составляют конфинальную часть в семействе $\Phi = c$, поэтому $H_n^c(X \times Y; A)$ – прямой предел групп $H_n(C_1 \times C_2; A)$. Для элемента $h \in H_n^c(X \times Y; A)$ выберем $C_1 \times C_2$ так, что h представляется цепью Масси (циклом) ξ с носителем $|\xi| \subset C_1 \times C_2$. Для содержащего C_1 компактного множества C'_1 и элемента $h' \in H^q(X; G)$ пусть $\eta \in A^q(C'_1; G)$ – представляющий ограничение h' на C'_1 коцикл и $r(\eta)$ – его ограничение на C_1 . Для содержащего C_2 компактного множества C'_2 включению $C_1 \times C_2 \subset C'_1 \times C'_2$ отвечают ограничения r локально конечнозначных коцепей Александера–Спаньера пространств C'_1 , C'_2 и $C'_1 \times C'_2$ и дуальные (получаемые посредством Hom) включения j цепей Масси (см. [6, начало § 7]). Ясно, что $r(\eta \times \zeta) = r(\eta) \times r(\zeta)$. Этим обеспечивается соотношение $j(\xi \setminus r(\eta)) = j(\xi) \setminus \eta$ (ср. с [6, лемма 10.15]). Следовательно, $j_*(\bar{h} \setminus r_*(\bar{h}')) = j_*(\bar{h}) \setminus \bar{h}'$, где $\bar{h}$ и $\bar{h}'$ – определяемые ξ и η классы гомологий $C_1 \times C_2$ и когомологий C'_1 . Это означает, что классу h , рассматриваемому как элемент прямого предела $\varinjlim H_n(C_1 \times C_2; A)$, и классу когомологий h' отвечает элемент $h \setminus h'$ прямого предела $\varinjlim H_{n-q}(C_2; A \otimes G) = H_{n-q}^c(Y; A \otimes G)$. Легко проверяются стандартные свойства операции. Отметим, что аналогичным образом в [16, § 9.5] на общие пространства распространяется операция $\frown$ -умножения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 3.2 и 3.3. Для локального компактного X пусть $\mathcal{C}_*(A)$ – пучок цепей Масси (§2) на $X \times X$. Напомним, что $H_*^\varphi(X; A) = H_*^{\Delta(\varphi)}(\Delta(X), A) = H_*^{\Delta(\varphi)}(X \times X; A)$ (как гомологии $\Delta(X)$ с носителями в $\Delta(\varphi)$) в силу [6, лемма 7.3, следствие 7.5] и предложения 2.1 и следствия 2.2). Пусть $r: \Gamma_c(\mathcal{A}_f^*(G) \mid \Delta(X)) \rightarrow A_{fc}^*(\Delta(X); G)$ – естественное преобразование (см. в [6] материал после предложения 7.2), оно индуцирует изоморфизм когомологий. В рассматриваемой ситуации $\mathcal{C}_1^* = \mathcal{C}_2^* = \mathcal{C}^*$. С учетом того, что ограничение $\mathcal{C}^*(G) \hat{\otimes} \mathcal{C}^*(\mathbb{R})$ на $\Delta(X)$ совпадает с $\mathcal{C}^*(G) \otimes \mathcal{C}^*(\mathbb{R})$ [11, гл. 1, §5], ограничение на $\Delta(X)$ операции $\times: \mathcal{C}^*(G) \hat{\otimes} \mathcal{C}^*(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{A}_f^*(G)$ определяет при переходе к сечениям операцию умножения

$$\smile: A_f^*(X; G) \otimes A_f^*(X; \mathbb{R}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_f^*(G) \mid \Delta(X)),$$

которая в композиции с r совпадает с обычным $\smile$ -умножением локально конечнозначных коцепей Александра–Спаньера (использованным в [6, §9]). Чтобы убедиться в этом, заметим, что на уровне порождающих пучки предпучков коцепей это умножение определяется формулой $\times$ -умножения из предложения 3.4 для наборов точек $(z_0, \dots, z_{p+q})$, $z_i = (x_i, y_i)$, в окрестности $\Delta(X)$, превращающейся в формулу $\smile$ -умножения при $y_i = x_i$, т.е. для $z_i \in \Delta(X)$. В частности, $r(\eta \smile \zeta) = r(\eta) \smile r(\zeta)$.

Заметим, что сечения $\mathcal{C}_*(A)$ с носителями в $\Delta(X)$ совпадают с $\text{Hom}(\Gamma_c(\mathcal{A}_f^*(\mathbb{R}) \mid \Delta(X)), A)$ (см. начало доказательства леммы 7.3 из [6] и следствие 2.2). Пусть j – дуальное r (получаемое из r посредством Hom) отображение цепей $C_*(\Delta(X), A)$ в сечении $\mathcal{C}_*(A)$ с носителями в $\Delta(X)$ (индуцирующее, как отмечено выше, изоморфизм гомологий с любыми носителями). Для тождественного изоморфизма r коцепей $A_{f\psi}^q(X; G)$ и преобразования j цепей с носителями в φ возникает диаграмма, аналогичная диаграмме из [6] перед леммой 10.15. По тем же аргументам, что и в [6, §10], заключаем, что, исходя из комплексов $\Gamma_{\Delta(\varphi)}(\mathcal{C}_*(A))$, можно определять не только гомологии $X = \Delta(X)$, но и $\smile$ -умножение Масси, используя конструкции [6, §9] и указанное выше $\smile$ -умножение коцепей (с носителями в ψ и c) со значением в комплексе $\Gamma_c(\mathcal{A}_f^*(G) \mid \Delta(X))$.

При таком подходе $\smile$ -умножение в теореме 3.2 после замены $H_n^\varphi(X; A) = H_n^{\Delta(\varphi)}(X \times X; A)$ и с учетом равенства $\varphi \cap \psi = \pi(\Delta(\varphi), \psi)$ превратится в $\setminus$ -умножение, а для этой операции коммутативность изучаемой диаграммы есть следствие ее естественности по отношению к включениям цепных комплексов при изменении носителей $\Delta(\varphi) \subset \Phi$. Отображение Δ_* совпадает с прямым пределом по компактным $C \subset X$ гомоморфизмов $H_n(\Delta(C); A) \rightarrow H_n(C \times C; A)$, и поскольку аналогичное описание в терминах предельных переходов допускают умножения $\smile$ и $\setminus$ (см. доказательство теоремы 3.1), теорема 3.3 есть следствие предыдущей (и перестановочности функторов $\varinjlim$ и $\otimes$ [14, гл. I, п. 1.6]).

§4. Случай многообразий

Пусть $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})$ – вялые пучки цепей (Масси или типа Чеха, см. §2) на локально компактном пространстве B с локально постоянными коэффициентами $\mathcal{A}$, $\mathcal{H}_*(\mathcal{A})$ – производные пучки дифференциального пучка $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})$. Слоями производных пучков являются локальные модули гомологий $H_n(B, B \setminus x; \mathcal{A}) = H_n^c(B, B \setminus x; \mathcal{A})$. Пусть $n = \text{hdim}_A B$ – гомологическая размерность B (A – слой $\mathcal{A}$). Предполагаем, что $n < \infty$.

При $m > n$ пучки $\mathcal{Z}_m = \text{Ker } \partial$ вялые: сечение над открытым множеством $U \subset B$ является m -мерным циклом пары $(B, B \setminus U)$, или, эквивалентно, пространства U [6, следствие 7.4, предложение 7.6], и потому накрывается сечением пучка $\mathcal{C}_{m+1}(\mathcal{A})$, продолжающимся на все пространство. По той же причине $\mathcal{Z}_m = \mathcal{B}_m = \mathcal{C}_{m+1}(\mathcal{A})/\mathcal{B}_{m+1}(\mathcal{A})$ и n – максимальное число, для которого $\mathcal{H}_n(\mathcal{A}) = \mathcal{Z}_n/\mathcal{B}_n \neq 0$ [2, следствие 2]. При этом нетрудно убедиться в том, что модули сечений над открытыми $U \subset B$ совпадают с гомологиями $H_n(B, B \setminus U; \mathcal{A})$ (см. [7, лемма 9]). Существенность условия $n < \infty$ видна на примере компактного B , гомеоморфного счетному произведению окружностей (в этом случае все $\mathcal{H}_p(\mathcal{A})$ нулевые).

Пусть $\tilde{\mathcal{C}}_*(\mathcal{A})$ – вялый дифференциальный пучок, получающийся из $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})$ отбрасыванием всех $\mathcal{C}_m(\mathcal{A})$ при $m > n$ и факторизацией $\mathcal{C}_n(\mathcal{A})$ по вялому пучку $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{C}_n(\mathcal{A})$ (см. [14, гл. II, §3.1]). Поскольку $\tilde{\mathcal{C}}_*(\mathcal{A})$ получается из $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})$ факторизацией по вялому дифференциальному пучку $0 \leftarrow \mathcal{B}_n \leftarrow \mathcal{C}_{n+1}(\mathcal{A}) \leftarrow \dots$ с вялыми $\mathcal{Z}_{n+p} = \mathcal{B}_{n+p}$, а вялые пучки φ -ацикличны для любых семейств носителей φ [11, гл. 2, теорема 5.4], все связанные с B гомологии определяются сечениями дифференциального пучка $\tilde{\mathcal{C}}_*(\mathcal{A})$ (см. [2, §1] или [3, гл. 8, п. 5.1]). Условимся полученный таким образом “укороченный” вялый дифференциальный пучок по-прежнему обозначать через $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})$.

Предположим, далее, что $\mathcal{H}_p(\mathcal{A}) = 0$ и при $p < n$. Такое B будем называть $(A - n)$ -пространством (ср. с [11, гл. 5, §9], где такие пространства рассматриваются при некоторых дополнительных ограничениях). Пучок $\mathcal{H}_n(\mathcal{A})$ для такого B будем называть *ориентирующим*. Примерами служат многообразия, в том числе с краем, но не только: $(A - n)$ -пространством является объединение n -мерной сферы с ее экваториальной плоскостью. Для $(A - n)$ -пространства B дифференциальный пучок $\mathcal{C}_*(\mathcal{A})$, индексированный в обратном порядке, есть вялая резольвента ориентирующего пучка $\mathcal{H}_n(\mathcal{A})$. Немедленным следствием оказывается двойственность Пуанкаре $\Delta: H_\psi^q(B; \mathcal{H}_n(\mathcal{A})) = H_{n-q}^\psi(B; \mathcal{A})$ (для любого семейства носителей). В типичных ситуациях гомологическая последовательность пары (B, M) (с коэффициентами в $\mathcal{A}$) совпадает с когомологической последовательностью пары $(B, B \setminus M)$ (с коэффициентами в $\mathcal{H}_n(\mathcal{A})$). Легко получаются и все другие соотношения двойственности (для троек, триад, дополнительных множеств в сфере и т.п., см. [2] и [3, гл. 8, §5]).

Далее будем предполагать B гомологически локально связным над $\mathbb{R}$, или, эквивалентно, обладающим свойством $\text{clsc}_\mathbb{R}^\infty$ (см. в [6] текст после замечания 10.6). В этом случае теория $H_*^\varphi(B; \mathbb{R})$ совпадает с теорией Бореля–Мура [6, теорема 8.2, следствие 8.3]. Поскольку для $\text{hlc}_\mathbb{R}^\infty$ -пространств имеют место формулы универсальных коэффициентов от гомологий Бореля–Мура $H_*^c(B; \mathbb{R})$ к когомологиям $H^*(B; G)$ (см. [8, теорема 6.5] или [11, гл. 5, п. 12.7]), условие $\text{hdim}_\mathbb{R} B < \infty$ влечет конечность когомологической размерности $\dim_G B$. В силу аналогичных формул универсальных коэффициентов в обратном направлении (см. [1, теорема 3] или [16, следствие 4.18]) условие $\dim_\mathbb{R} B < \infty$ влечет $\text{hdim}_\mathbb{R} B < \infty$ (для любых $\mathbb{R}$ -модулей A). В частности, требования $\dim_\mathbb{R} B < \infty$ и $\text{hdim}_\mathbb{R} B < \infty$ эквивалентны (для кольца $\mathbb{Z}$ целых чисел $\dim_\mathbb{Z} B - 1 \leq \text{hdim}_\mathbb{Z} B \leq \dim_\mathbb{Z} B$ и без условия гомологической локальной связности; см. [7, §3]).

Пусть B – гомологически локально связное $(\mathbb{R} - n)$ -пространство. Как и в [11, гл. 5, §9], будем предполагать, что пучок $\mathcal{H}_n(\mathbb{R})$ не имеет кручения. В этом случае

для любого паракомпактифицирующего семейства φ и любых локально постоянных коэффициентов $\mathcal{A}$ гомологии $H_*^\varphi(B; \mathcal{A})$ могут определяться исходя из сечений дифференциального пучка $\mathcal{C}_*(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{A}$ (являющегося φ -мягким [11, гл. 2, следствие 9.13]). Для исходных пучков цепей Масси это следует из [6, теорема 10.7]. Поскольку пучки $\mathcal{C}_*(\mathbb{R})$ без кручения, для пучков $\mathcal{H}_p(\mathcal{A})$ имеют место точные последовательности (6) из [11, гл. 5, § 3]

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_p(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H}_p(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Tor}(\mathcal{H}_{p-1}(\mathbb{R}), \mathcal{A}) \rightarrow 0.$$

В частности, $\mathcal{H}_p(\mathcal{A}) = 0$ при $p > n + 1$ и $\mathcal{H}_{n+1}(\mathcal{A}) = 0$ в соответствии с предположением об отсутствии кручения в $\mathcal{H}_n(\mathbb{R})$. Таким образом, без ущерба для гомологий с носителями в паракомпактифицирующих семействах пучки $\mathcal{C}_p(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{A}$ при $p > n$, как и выше, могут быть отброшены, а пучок $\mathcal{C}_n(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{A}$ профакторизован по образу $\mathcal{C}_{n+1}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{A}$. Тем самым для рассматриваемого $(\mathbb{R} - n)$ -пространства $\mathcal{H}_n(\mathcal{A}) = \mathcal{H}_n(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{A}$ и $\mathcal{H}_p(\mathcal{A}) = 0$ при $p \neq n$.

4.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *При указанных предположениях $(\mathbb{R} - n)$ -пространство B является $(A - n)$ -пространством над любым $\mathbb{R}$ -модулем A и $\text{hdim}_A B = \dim_A B = n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, поскольку $\text{hdim}_A B \geq 0$, а $\mathcal{H}_p(\mathcal{A}) = 0$ при $p \neq n$, то $\mathcal{H}_n(\mathcal{A}) \neq 0$ (поскольку $\text{hdim}_A B$ совпадает с таким n). Если бы для какого-то открытого множества $U \subset B$ группа $H_c^{n+1}(U; \mathbb{R}) = A'$ была отлична от нуля, то из формул универсальных коэффициентов следовало бы (поскольку $\text{Hom}(A', A') \neq 0$), что и $H_{n+1}(U; A') = H_{n+1}(B, B \setminus U; A') \neq 0$. Поскольку всегда $\text{hdim}_{\mathbb{R}} B \leq \dim_{\mathbb{R}} B$ (формулы универсальных коэффициентов), то $\dim_{\mathbb{R}} B = n$. Поскольку $H_n(U; \mathbb{R}) \neq 0$ для некоторого $U \subset B$, то отлична от нуля и группа $\text{Hom}(H_c^n(U; \mathbb{R}), \mathbb{R})$ (формулы универсальных коэффициентов), поэтому модуль $H_c^n(U; \mathbb{R})$ содержит изоморфное подмодулю $\mathbb{R}$ прямое слагаемое. Поскольку этот подмодуль проективен (см. конец введения), отличны от нуля $H_c^n(U; \mathbb{R}) \otimes A \subset H_c^n(U; A)$ (формулы универсальных коэффициентов). Следовательно, $\dim_A B = n$.

В случае, когда $\mathbb{R} = \mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел, это означает, в частности, размерную полноценность B .

Поскольку, как отмечалось, преобразование пучков $\pi: \mathcal{C}_*(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}_*(\mathcal{A})$ в рассматриваемой ситуации индуцирует изоморфизм гомологий [6, теорема 10.7], $\sim$ -умножение гомологий на когомологии, описываемое в [6] определением 5.1 (эквивалентное в силу § 8–10 конкретным “обычным”), в силу предложения 5.4 сводится к общему $\sim$ -умножению (1) для дифференциального пучка $\mathcal{L}_* = \mathcal{C}_*(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{A}$. Поскольку занумерованные в обратном порядке эти пучки составляют φ -мягкую резольвенту ориентирующего пучка $\mathcal{H}_n(\mathcal{A})$ (у нас $\mathcal{L}_p = 0$ при $p > n$), то та же операция определяет $\sim$ -умножение когомологий (см. введение). Таким образом, имеем

4.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Для $(\mathbb{R} - n)$ -пространства B , не имеющего кручения в $\mathcal{H}_n(\mathbb{R})$ и обладающего свойством $\text{clc}_{\mathbb{R}}^\infty$, при указанном выше отождествлении $\Delta: H_\psi^p(B; \mathcal{H}_n(\mathcal{A})) = H_{n-p}^\psi(B; \mathcal{A})$ (двойственность Пуанкаре) для паракомпактифицирующих семейств φ и $\varphi \cap \psi$ операции*

$$\begin{aligned} \frown: H_m^\varphi(B; \mathcal{A}) \otimes H_\psi^q(B; \mathcal{G}) &\rightarrow H_{m-q}^{\varphi \cap \psi}(B; \mathcal{A} \otimes \mathcal{G}), \\ \smile: H_\varphi^{n-m}(B; \mathcal{H}_n(\mathcal{A})) \otimes H_\psi^q(B; \mathcal{G}) &\rightarrow H_{\varphi \cap \psi}^{n-m+q}(B; \mathcal{H}_n(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{G}) \end{aligned}$$

совпадают.

Здесь $\mathcal{H}_n(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{G} = \mathcal{H}_n(\mathcal{A} \otimes \mathcal{G})$, так как $\mathcal{H}_n(\mathcal{A}) = \mathcal{H}_n(R) \otimes \mathcal{A}$. Паракомпактифируемость φ и $\varphi \cap \psi$ обеспечивает совпадение фигурирующих в умножении (1) гипергомологий с гомологиями пространства B (см. введение). Здесь $\mathcal{A}$ и $\mathcal{G}$ – локально постоянные пучки (учитывая, что гомологии в данном случае совпадают с гомологиями Бореля–Мура, можно рассматривать и любые пучки коэффициентов, хотя, как отмечалось в [6, § 6, 8 и замечание 4], такие гомологии большого интереса не представляют).

В частном случае, когда $\mathcal{A} = \mathbb{R}$ – локально постоянный пучок со слоем $\mathbb{R}$, а $(\mathbb{R} - n)$ -пространство B метризуемо, фигурирующее в предложении 4.2 отождествление операций $\cap$ и $\smile$ (и предложение 4.3 ниже) кратко описано в [3, гл. 8, п. 5.3]. Следствием предложения 4.2 является соотношение $\Delta(h \smile h') = \Delta(h) \cap h'$. В терминах гомологий Бореля–Мура и $\smile$ -умножения Бредона изоморфизм Δ и введенное соотношение получены в [11, гл. 5, теоремы 9.2 и 10.1].

В случае, когда B есть НЛС-пространство, во всех конструкциях выше (учитывая теоремы 10.1 и 10.2 из [6]) можно использовать и пучки сингулярных цепей – гомотопически тонкий пучок $\mathcal{S}_*(\mathcal{A})$ (см. [6, предложение 6.1]) или мягкий дифференциальный пучок $\mathcal{S}'_*(\mathcal{A})$ [6, § 10]. Для них $\mathcal{S}_*(\mathcal{A}) = \mathcal{S}_*(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{A}$ и $\mathcal{S}'_*(\mathcal{A}) = \mathcal{S}'_*(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{A}$, в том числе (по определению) для любых пучков $\mathcal{A}$.

В предыдущих конструкциях коэффициенты для когомологий $\mathcal{H}_n(\mathcal{A})$ зависят от произвольно выбираемых коэффициентов для гомологий. В случае многообразий в качестве $\mathcal{H}_n(\mathcal{A})$ может быть получен практически любой пучок. Поскольку это так и для гомологических многообразий, напомним о них некоторые факты. Гомологическое n -многообразие над $\mathcal{A}$ – это $(A - n)$ -пространство, у которого ненулевые слои $\mathcal{H}_n(\mathcal{A})$ изоморфны A . Если $A = \mathbb{R}$ – кольцо главных идеалов, а B метризуемо, то B локально связно, а если вдобавок $\mathbb{R}$ счетно или является полем, то B есть $\text{cls}_{\mathbb{R}}^{\infty}$ -пространство (гомологически локально связно); см. [7, § 4]. Вообще же требование $\text{cls}_{\mathbb{R}}^{\infty}$ обычно включается в определение гомологического многообразия. Гомологическое многообразие над кольцом главных идеалов локально ориентируемо – пучок $\mathcal{H}_n(\mathbb{R})$ локально постоянен (даже без требования $\text{cls}_{\mathbb{R}}^{\infty}$, см. [10]; перевод этой статьи имеется в добавлении к русскому переводу [11]). Множество K точек, в которых слои $\mathcal{H}_n(\mathbb{R})$ равны нулю, называется *краем* B . Это замкнутое нигде не плотное множество, $\dim_{\mathbb{R}} K \leq n - 1$ для счетных $\mathbb{R}$ и $\dim_{\mathbb{Z}} K = n - 1$. Для $\mathbb{R} = \mathbb{Z}$ край K – гомологическое $(n - 1)$ -многообразие над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (см. по этому поводу [7]).

На гомологическом многообразии без края для (локально постоянного) пучка $\mathcal{H}_n(\mathbb{R})$ существует единственный с точностью до изоморфизма локально постоянный пучок $\mathcal{H}_n(\mathbb{R})^{-1}$, для которого $\mathcal{H}_n(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{H}_n(\mathbb{R})^{-1} = \mathbb{R}$ – постоянный пучок (см. [11, гл. 5, п. 9.6]). Произвольный пучок $\mathcal{G}$ на B имеет вид $\mathcal{G} = \mathcal{H}_n(\mathcal{A})$ для $\mathcal{A} = \mathcal{H}_n(\mathbb{R})^{-1} \otimes \mathcal{G}$ ($\mathcal{H}_n(\mathcal{A}) = \mathcal{H}_n(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{A} = \mathcal{H}_n(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{H}_n(\mathbb{R})^{-1} \otimes \mathcal{G} = \mathcal{G}$). Это означает, что для (гомологических) многообразий без края в описанной выше конструкции двойственности Пуанкаре не только для гомологий, но и для когомологий можно выбирать любые коэффициенты.

Пусть B – связное (гомологическое) многообразие без края. Имеем $\mathbb{R} = \mathcal{H}_n(\mathcal{A})$ для $\mathcal{A} = \mathcal{H}_n(\mathbb{R})^{-1}$. Элемент $\gamma \in H_n(B; \mathcal{H}_n(\mathbb{R})^{-1})$, двойственный по Пуанкаре $1 \in \mathbb{R} = H^0(B; \mathbb{R})$, называется *фундаментальным классом гомологий* (см. [11, гл. 5, следствие 10.2]); в случае ориентируемого B это обычный фундаментальный класс в $H_n(B; \mathbb{R})$. Из предложения 4.2 вытекает

4.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для паракомпактифицирующего семейства ψ двойственность Пуанкаре

$$\Delta: H_{\psi}^q(B; \mathcal{G}) = H_{n-q}^{\psi}(B; \mathcal{H}_n(\mathbb{R})^{-1} \otimes \mathcal{G})$$

описывается соотношением $\Delta(h) = \gamma \frown h$.

При классическом подходе (в частности, при использовании сингулярной теории см. [18, гл. 6, §3, теорема 12]) в этом равенстве появляется знак $(-1)^{q(n-q)}$ (см. [6, теорема 10.2]).

Список литературы

1. *Скляренко Е. Г.* Теория гомологий и аксиома точности // УМН. 1969. Т. 24. №5. С. 87–140.
2. *Скляренко Е. Г.* К теории обобщенных многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. №4. С. 831–843.
3. *Скляренко Е. Г.* Гомологии и когомологии общих пространств // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. 1989. Т. 50. С. 129–266.
4. *Скляренко Е. Г.* Общие теории гомологий и когомологий. Современное состояние и типичные применения // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Алгебра, топология, геометрия. 1989. Т. 27. С. 125–228.
5. *Скляренко Е. Г.* О фильтрации Зимана в гомологиях // Матем. сб. 1992. Т. 183. №12. С. 103–116.
6. *Скляренко Е. Г.* О природе гомологических умножений и двойственности // УМН. 1994. Т. 49. №1. С. 141–198.
7. *Харлап А. Э.* Локальные гомологии и когомологии, гомологическая размерность и обобщенные многообразия // Матем. сб. 1975. Т. 96. №3. С. 347–373.
8. *Borel A., Moore J. C.* Homology theory for locally compact spaces // Michigan Math. J. 1960. V. 7. P. 137–159.
9. *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.
10. *Bredon G. E.* Wilder manifolds are locally orientable // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1969. V. 63. №4. P. 1079–1081.
11. *Бредон Г. Э.* Теория пучков. М.: Наука, 1968.
12. *Карпан А., Эйленберг С.* Гомологическая алгебра. М.: ИЛ, 1960.
13. *Дольд А.* Лекции по алгебраической топологии. М.: Мир, 1976.
14. *Годеман Р.* Алгебраическая топология и теория пучков. М.: ИЛ, 1961.
15. *Гротендик А.* О некоторых вопросах гомологической алгебры. М.: ИЛ, 1961.
16. *Масси У.* Теория гомологий и когомологий. М.: Мир, 1981.
17. *McCroory C.* Zeeman's filtrations in homology // Trans. Amer. Math. Soc. 1979. V. 250. №49. P. 147–166.
18. *Спаньер Э.* Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971.
19. *Zeeman E. C.* Dihomology, III, A generalization of the Poincare duality for manifolds // Proc. London Math. Soc. 1963. V. 13. №49. P. 155–183.

Поступило в редакцию
31.05.1995