Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Субботин, Экстремальная в L_p интерполяция в среднем при пересекающихся интервалах усреднения, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 1, 177–198

DOI: <https://doi.org/10.4213/im110>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 13:19:36

УДК 517.5

Ю. Н. Субботин

Экстремальная в L_p интерполяция в среднем при пересекающихся интервалах усреднения

Найдена наименьшая константа $A = A(n, p, h)$ ($1 < h < 2$, $1 < p < \infty$) такая, что для любой последовательности $y_k, k \in \mathbb{Z}$, с ограниченными в l_p единицей n -ми разностями существует функция $f(x)$ с локально абсолютно непрерывной $(n-1)$ -й производной и n -й производной в $L_p(\mathbb{R})$, не превосходящей A , и, кроме того, удовлетворяющая условиям интерполяции в среднем $\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} f(k+t) \times dt = y_k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ранее решение этой задачи было известно лишь при непересекающихся интервалах усреднения ($0 \geq h \geq 1$).

Библиография: 6 наименований.

Пусть $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел и бесконечная в обе стороны последовательность $Y = \{y_k, k \in \mathbb{Z}\}$ удовлетворяет условию

$$\|\Delta^n y_k\|_{l_p} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Delta^n y_k|^p \right)^{1/p} \leq 1, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (1)$$

где $\Delta^n y_k = \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} C_n^s y_{k+s}$. Пусть $0 \leq h < \infty$. Обозначим через $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(Y, n, h)$ множество функций $y(t)$ с локально абсолютно непрерывной $(n-1)$ -й производной, удовлетворяющих условиям

$$\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} y(k+t) dt = y_k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Требуется найти такое наименьшее число $A = A(n, p, h)$, что для любой последовательности Y , удовлетворяющей условию (1), существует функция $y(t)$ из множества $\mathfrak{M}$, удовлетворяющая условию

$$\|y^{(n)}\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |y^{(n)}(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq A,$$

т.е. требуется определить величину

$$A = \sup \inf \|y^{(n)}(t)\|_p, \quad (3)$$

где $\inf$ берется по всем функциям из $\mathfrak{M}$, а $\sup$ по всем последовательностям Y , удовлетворяющим условию (1).

При $0 \leq h \leq 1$, $1 \leq p \leq \infty$ сформулированная задача была решена в работах автора [1], [2]. А. Шарма и И. Цимбаларио [3] обобщили случай $h = 0$ на линейные дифференциальные операторы порядка n с постоянными коэффициентами, характеристические многочлены которых имеют лишь вещественные корни. В дальнейшем В. Т. Шевалдин [4], [5] обобщил упомянутый результат автора на произвольные линейные дифференциальные операторы порядка n с постоянными коэффициентами. При $1 < h < 2$ и $p = \infty$ следующая ниже теорема доказана в [6].

Работа выполнена при содействии РФФИ (грант № 93-011-00196).

ТЕОРЕМА 1. При $1 < h < 2$, $1 < p < \infty$ и любом натуральном n справедливо равенство

$$A(n, p, h) = (n-1)! 2^{-1/q} \|S_n(t, h)\|_{L_q[0, 1/2]}^{-1}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

где

$$S_n(t, h) = \begin{cases} \frac{(n-1)!}{h\pi} \left(\frac{2}{\pi}\right)^n [\varphi_n(t + \frac{h}{2}) + (-1)^n \varphi_n(\frac{h}{2} - t)], & 0 \leq t \leq 1 - \frac{h}{2}, \\ \frac{(n-1)!}{2\pi} \left(\frac{2}{\pi}\right)^n [(-1)^n \varphi_n(\frac{h}{2} - t) - \varphi_n(t + \frac{h}{2} - 1)], & 1 - \frac{h}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

и $\varphi_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)^{-n-1} \sin[(2m+1)\pi t - \frac{n\pi}{2}]$ — функция Фовара.

§ 1. Оценка снизу

Положим

$$a_s(t) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k (k+1+v-s-t)_+^{n-1} dv, \quad (1.1)$$

$$S_n(t) = S_n(t, h) = \sum_{s=0}^{n+1} (-1)^s a_s(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (1.2)$$

$$S_n(t+l) = (-1)^l S_n(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$b_1(l-1+t) = \sum_{s=0}^l (-1)^{l+s} a_s(t), \quad (1.3)$$

$$b_2(N+l-1+t) = \sum_{s=l}^{n+1} (-1)^{l+s} a_s(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Воспользуемся следующим равенством (см. [2, с. 137]):

$$(n-1)! \Delta^n y_m = \sum_{s=0}^{n+1} \int_0^1 y^{(n)}(m-1+s+t) a_s(t) dt. \quad (1.4)$$

Положим в нем

$$\Delta^n y_m = \Delta^n y_m^* = \begin{cases} 0, & m < 0, \\ (-1)^m N^{-1/p}, & 0 \leq m \leq N-1, \\ 0, & m \geq N, \end{cases}$$

после чего умножим (1.4) на $(-1)^m$ и просуммируем по m от 0 до $N-1$; в итоге получим

$$(n-1)! = N^{-1/q} \sum_{m=0}^{N-1} (-1)^m \sum_{s=0}^{n+1} \int_0^1 a_s(t) y^{(n)}(m-1+s+t) dt. \quad (1.5)$$

Введем новые индексы суммирования: $s = s$ и $l = m + s$. Тогда, учитывая (1.3) и тот факт, что функции $b_1(\cdot)$ и $b_2(\cdot)$ при $0 \leq t \leq 1$ допускают оценки, не зависящие от N , и применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} N^{1/q}(n-1)! &= \int_n^{N-1} S_n(t)y^{(n)}(t) dt + \int_{-1}^n b_1(t)y^{(n)}(t) dt + \int_{N-1}^{N+n} b_2(t)y^{(n)}(t) dt \\ &\leq \|y^{(n)}\|_p \{(N-n-1)^{1/q} \|S_n\|_{L_q[0,1]} + O(1)\}. \end{aligned}$$

При $p > 1$ с помощью предельного перехода при $N \rightarrow \infty$ устанавливаем справедливость неравенства

$$\|y^{(n)}\|_p \geq (n-1)! \|S_n(t, h)\|_{L_q[0,1]}^{-1}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Таким образом, при $p > 1$ имеем

$$A(n, p, h) \geq (n-1)! \|S_n(t, h)\|_{L_q[0,1]}^{-1}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (1.6)$$

Аналогичная оценка справедлива и при $p = 1$, следует лишь положить $\Delta^n y_m^* = \delta_{m,0}$ ($\delta_{m,0}$ – символ Кронекера) и провести суммирование по m от $-N+1$ до $N-1$.

§ 2. Вспомогательные утверждения и свойства функции $S_n(t)$

Следуя [2], положим

$$\begin{aligned} P_n(t, x) &= (1-x)^{n+1} \sum_{l=0}^{\infty} (l+t)^n x^l \\ &= \sum_{l=0}^n x^l \sum_{k=0}^l (-1)^k C_{n+1}^k (l+t-k)^n, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Пусть k натуральное, $-k \leq t \leq -k+1$ и

$$\tilde{P}_n(t, x) = (1-x)^{n+1} \sum_{l=0}^{\infty} (l+t)_+^n x^l = \sum_{l=0}^{n+k} \sum_{s=0}^{n+1} (-1)^s C_{n+1}^s (l-s+t)_+^n x^l, \quad (2.2)$$

где $x_+ = \max(0, x)$.

При $-k \leq t \leq -k+1$, где k целое неотрицательное, справедливо равенство

$$\begin{aligned} \tilde{P}_n(t, x) &= (1-x)^{n+1} \sum_{l=k}^{\infty} (l+t)^n x^l = x^k (1-x)^{n+1} \sum_{l=0}^{\infty} (l+k+t)^n x^l \\ &= x^k P_n(k+t, x), \quad -k \leq t \leq -k+1. \end{aligned} \quad (2.3)$$

ЛЕММА 1. *Справедливы следующие свойства:*

- 1) $\frac{\partial P_n(t, x)}{\partial t} = n(1-x)P_{n-1}(t, x)$;
- 2) при $0 < t < 1$ многочлен $P_n(t, x)$ имеет n различных отрицательных нулей;

- 3) с ростом t ($0 \leq t \leq 1$) нули многочленов $P_n(t, x)$ строго убывают;
 4) многочлен $P_n(1, x)$ имеет степень $n - 1$ и

$$P_n(0, x) = xP_n(1, x); \quad (2.4)$$

- 5) многочлен $P_n(1, x)$ имеет $n - 1$ различных отрицательных нулей;
 6) нули многочленов $P_n(t, x)$ и $P_n(z, x)$ при $t \neq z$ ($0 \leq t < z \leq 1$) перемешаются.

Свойство 1) тривиально следует из первого равенства (2.2). Свойства 2)–6) доказаны в [2]: свойство 2) доказано в лемме 2.3, свойство 3) – в лемме 2.4, свойства 4)–6) доказаны в [2, с. 132, 133] (см. там также замечание 2.2).

Далее положим

$$\begin{aligned} Q_n^*(x) &= \sum_{l=0}^{n+1} (-1)^l \sum_{k=l}^{n+1} (-1)^{n+1-k} C_{n+1}^k (k+1-l-t)^n \\ &= \sum_{l=0}^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1-l} (-1)^{n+1-k} C_{n+1}^{k+l} (k+1-t)^n. \end{aligned} \quad (2.5)$$

В работе [1] с учетом того, что $Q_n(2t - 1) = Q_n^*(t)$, доказана справедливость равенства

$$Q_n^*(t) = n! \left(\frac{2}{\pi} \right)^{n+1} \varphi_n(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (2.6)$$

где $\varphi_n(t)$ – функция Фовара:

$$\varphi_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)^{-n-1} \sin \left[(2m+1)\pi t - \frac{n\pi}{2} \right]. \quad (2.7)$$

Из (2.6), (2.7) следует справедливость равенств

$$Q_{2s}^*(0) = Q_{2s}^*(1) = 0, \quad s \geq 1, \quad (2.8)$$

$$Q_{2s+1}^*(0) + Q_{2s+1}^*(1) = 0, \quad s \geq 0. \quad (2.9)$$

Кроме того, в [2, лемма 2.1, свойство 2)] доказано, что $Q_n^*(t)$ четна (нечетна) относительно точки $t = 1/2$ при n четном (нечетном), т.е.

$$Q_n^*(1-t) = (-1)^n Q_n^*(t), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (2.10)$$

ЛЕММА 2. Функция $S_n(t) = S_n(t, h)$ является четной (нечетной) относительно $t = 1/2$ ($0 \leq t \leq 1$) при n нечетном (четном), т.е.

$$S_n(1-t) = (-1)^{n-1} S_n(t), \quad 0 \leq t \leq 1/2. \quad (2.11)$$

Доказательство см. в [6].

В дальнейшем предполагается, что $1 < h < 2$.

ЛЕММА 3. *Справедливо представление*

$$hS_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{2n} [Q_n^*(t + \frac{h}{2}) + (-1)^n Q_n^*(\frac{h}{2} - t)], & 0 \leq t \leq 1 - \frac{h}{2}, \\ \frac{1}{2n} [(-1)^n Q_n^*(\frac{h}{2} - t) - Q_n^*(t + \frac{h}{2} - 1)], & 1 - \frac{h}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ (-1)^{n-1} S_n(1-t), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (2.12)$$

Доказательство этой леммы при $0 \leq t \leq 1/2$ дано в [6, равенства (34), (35)]. При $1/2 < t \leq 1$ лемма следует из леммы 2.

Справедливо следующее свойство:

$$Q_n^{*'}(t) = \frac{d}{dt} Q_n^*(t) = 2n Q_{n-1}^*(t), \quad (2.13)$$

доказанное в [2, лемма 2.1].

ЛЕММА 4. *При $0 \leq t \leq 1$ имеет место равенство*

$$S_n'(t, h) = (2n - 2) S_{n-1}(t, h), \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (2.14)$$

Эта лемма следует из (2.12), (2.13) и леммы 2.

ЛЕММА 5. *Функция $S_{2r-1}(t, h)$ при $0 < t < 1$ не обращается в нуль и сохраняет знак. Функция $S_{2r}(t, h)$ при $0 \leq t \leq 1$ обращается в нуль только в точке $t = 1/2$ и в точке $t = 1/2$ меняет знак.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно из (2.5), (2.12) находим

$$hS_1(t, h) = \begin{cases} -t, & 0 \leq t \leq 1 - h/2, \\ -1 + h/2, & 1 - h/2 \leq t \leq h/2, \\ t - 1, & h/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (2.15)$$

Отсюда, из (2.14), леммы 2 (четность или нечетность $S_n(t)$ в зависимости от n) и из того факта, что $S_{2r-1}(0, h) = 0$ и $S_{2r}(\frac{1}{2}, h) = 0$ (см. представление (2.12)), индукцией по n доказываем справедливость леммы 5.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Положим

$$S_{2r+1}^*(t, h) = S_{2r+1}(t, h) \operatorname{sign} S_{2r+1}\left(\frac{1}{2}, h\right), \\ S_{2r}^*(t, h) = S_{2r}(t, h) \operatorname{sign} S_{2r}(0, h).$$

Тогда из доказательства леммы 5 легко следует, что при $r \geq 1$ функция $S_{2r+1}^*(t, h)$ на $[0, 1/2]$ строго возрастает, а на $[1/2, 1]$ строго убывает. Как видно из (2.15), при $r = 0$ возрастание и убывание не строгие. Но и в этом случае возрастание строгое в некоторой окрестности точки $t = 0$. Кроме того, $S_{2r+1}^*(0, h) = S_{2r+1}^*(1, h) = 0$, $r = 0, 1, 2, \dots$.

Аналогично при $r \geq 1$ функция $S_{2r}^*(t, h)$ на $[0, 1]$ строго убывает и $S_{2r}^*(\frac{1}{2}, h) = 0$. Далее,

$$S_{2r+1}^{*'}(t, h) = S_{2r+1}'(t, h) \operatorname{sign} S_{2r+1}\left(\frac{1}{2}, h\right), \\ S_{2r}^*(t, h) = S_{2r}(t, h) \operatorname{sign} S_{2r}(0, h).$$

Поэтому из (2.14)

$$S_{2r+1}^{*'}(t, h) = 4rS_{2r}^*(t, h) \frac{\text{sign } S_{2r+1}(1/2, h)}{\text{sign } S_{2r}(0, h)}.$$

Из строгого возрастания $S_{2r+1}^*(t, h)$ в некоторой окрестности $t = 0$ и неотрицательности $S_{2r}^*(t, h)$ при $t = 0$ и из предыдущего равенства заключаем, что

$$S_{2r+2}^{*'}(t, h) = 4rS_{2r}^*(t, h). \quad (2.16)$$

Аналогично из (2.14) и строгого убывания функции $S_{2r}^*(t, h)$ на $[0, 1]$ заключаем, что

$$S_{2r}^{*'}(t, h) = -(4r - 2)S_{2r-1}^*(t, h). \quad (2.17)$$

В заключение этого параграфа приведем следующий результат (см. [2, теорема C]).

ТЕОРЕМА А. Пусть полином $P_{2r+2}(z) = \sum_{l=0}^{2r+2} \gamma_l z^l$ удовлетворяет условию

$$P_{2r+2}(z) = z^{2r+2} P_{2r+2}\left(\frac{1}{z}\right), \quad (2.18)$$

т.е. является возвратным ($\gamma_l = \gamma_{2r+2-l}$, $l = 0, \dots, r+1$), и все его нули x_s отрицательны и различны.

Тогда для любой последовательности $\{C_m\} \in l_p$ существует единственное решение разностного уравнения

$$\sum_{l=0}^{2r+2} \gamma_l z_{m+l} = C_m, \quad m \in \mathbb{Z},$$

принадлежащее l_p , и для решения справедливо представление

$$z_m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^{r+1} \frac{x_s^{r+|k|}}{P'_{2r+2}(x_s)} C_{m-r-1+k}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (2.19)$$

где $x_s \in (-1, 0)$, $s = 1, 2, \dots, r+1$, и

$$\sup_{\|C_m\|_{l_p} \leq 1} \|z_m\|_{l_p} = |P_{2r+2}(-1)|^{-1}. \quad (2.20)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из возвратности и простоты всех нулей следует, что $P_{2r+2}(-1) \neq 0$.

Нам потребуется также следующее рекуррентное соотношение, доказанное в [2]:

$$P_{n+1}(u, x) = x(1-x)P'_n(u, x) + [u + (n+1-u)x]P_n(u, x). \quad (2.21)$$

Обозначим коэффициент при x^n многочлена $P_n(u, x)$ через a_n ; тогда из рекуррентного соотношения (2.21) имеем

$$a_{n+1} = (1-u)a_n = (1-u)^{n+1}a_0 = (1-u)^{n+1}. \quad (2.22)$$

§ 3. Решение разностных уравнений и оценка сверху

При оценке сверху требуемую функцию будем искать в специальном виде. А именно, положим

$$y^{(2r+1)}(m-1+t) = z_m |S_{2r+1}(t)|^{q-1}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (3.1)$$

Тогда для определения констант z_m , учитывая (1.4), (1.1), получим систему разностных уравнений

$$(2r)! \Delta^{2r+1} y_m = \sum_{s=0}^{2r+2} \gamma_s z_{m+s}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (3.2)$$

где

$$\gamma_s = - \int_0^1 |S_{2r+1}(t)|^{q-1} \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sum_{k=0}^{2r+1} (-1)^k C_{2r+1}^k (k+1+v-s-t)_+^{2r} dv dt. \quad (3.3)$$

В дальнейшем положим $\varphi(t) = |S_{2r+1}(t)|^{q-1}$ ($1 < q < \infty$).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В силу леммы 2 функция $\varphi(t)$ четна относительно точки $t = 1/2$. Кроме того, в силу той же леммы и равенства (2.12)

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0. \quad (3.4)$$

Установим вначале возвратность характеристического многочлена $P_{2r+2}(x) = \sum_{s=0}^{2r+2} \gamma_s x^s$ разностного уравнения (3.2). Заменяя k на $2r+1-k$, v на $-v$, t на $1-t$, получим

$$\begin{aligned} \gamma_{2r+2-s} &= - \int_0^1 \varphi(t) \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=0}^{2r+1} (-1)^k C_{2r+1}^k (k+1+v-t-2r-2+s)_+^{2r} dv dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \varphi(t) \sum_{k=0}^{2r+1} (-1)^k C_{2r+1}^k (-k+v-t+s)_+^{2r} dv dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{h} \varphi(1-t) \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=0}^{2r+1} (-1)^k C_{2r+1}^k (-k-1+v+t+s)_+^{2r} dv dt. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $\varphi(1-t) = \varphi(t)$, $(x)_+^{2r} + (-x)_+^{2r} = x^{2r}$ и что разность порядка $2r+1$ от полинома меньшей степени равна нулю, получаем $\gamma_{2r+2-s} = \gamma_s$ ($s = 0, 1, \dots, r$).

Положив $\psi(t) = \varphi(1/2+t)$ ($-1/2 \leq t \leq 1/2$), с учетом (2.2) преобразуем характеристический многочлен разностного уравнения (3.2). Имеем

$$\begin{aligned} hP_{2r+2}(x) &= \int_{-1/2}^{1/2} \psi(t) \int_{-h/2}^{h/2} P_{2r}\left(t-v+\frac{1}{2}, x\right) dv dt \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \psi(t) \int_{t-h/2-1/2}^{t+h/2-1/2} P_{2r}(u, x) du dt. \end{aligned}$$

Изменив порядок интегрирования, воспользовавшись равенством (2.3) и в ряде интегралов заменив $1 + u$ на u или $2 + u$ на u , получим

$$\begin{aligned}
hP_{2r+2}(x) &= \int_{-h/2-1}^{-h/2} \tilde{P}_{2r}(u, x) \int_{-1/2}^{h/2+1/2+u} \psi(t) dt du \\
&\quad + \int_{-h/2}^{h/2-1} \tilde{P}_{2r}(u, x) \int_{-1/2}^{1/2} \psi(t) dt du \\
&\quad + \int_{h/2-1}^1 \tilde{P}_{2r}(u, x) \int_{-h/2+1/2+u}^{1/2} \psi(t) dt du \\
&= x^2 \int_{-h/2-1}^{-1} P_{2r}(2+u, x) \int_{-1/2}^{h/2+1/2+u} \psi(t) dt du \\
&\quad + x \int_{-1}^{-h/2} P_{2r}(1+u, x) \int_{-1/2}^{h/2+1/2+u} \psi(t) dt du \\
&\quad + x \int_{-h/2}^{h/2-1} P_{2r}(1+u, x) \int_{-1/2}^{1/2} \psi(t) dt du \\
&\quad + x \int_{h/2-1}^0 P_{2r}(1+u, x) \int_{-h/2+1/2+u}^{1/2} \psi(t) dt du \\
&\quad + \int_0^{h/2} P_{2r}(u, x) \int_{-h/2+1/2+u}^{1/2} \psi(t) dt du \\
&= x^2 \int_{1-h/2}^1 P_{2r}(u, x) \int_{-1/2}^{h/2+u-3/2} \psi(t) dt du \\
&\quad + x \int_0^{1-h/2} P_{2r}(u, x) \int_{-1/2}^{h/2+u-3/2} \psi(t) dt du \\
&\quad + x \int_{1-h/2}^{h/2} P_{2r}(u, x) \int_{-1/2}^{1/2} \psi(t) dt du \\
&\quad + x \int_{h/2}^1 P_{2r}(u, x) \int_{-h/2-1/2+u}^{1/2} \psi(t) dt du \\
&\quad + \int_0^{h/2} P_{2r}(u, x) \int_{-h/2+1/2+u}^{1/2} \psi(t) dt du.
\end{aligned}$$

Воспользовавшись свойствами 1), 4) леммы 1, проинтегрировав по частям интегралы в правой части последнего равенства и учтя равенство (2.4), получим

$$\begin{aligned}
(2r+1)(1-x)hP_{2r+2}(x) &= x^2 P_{2r+1}(1, x) \int_{-1/2}^{(h-1)/2} \psi(t) dt - x^2 \int_{1-h/2}^1 P_{2r+1}(u, x) \psi\left(\frac{h}{2} + u - \frac{3}{2}\right) du \\
&\quad + x P_{2r+1}\left(1 - \frac{h}{2}, x\right) \int_{-1/2}^{1/2} \psi(t) dt - x P_{2r+1}(0, x) \int_{-1/2}^{(h-1)/2} \psi(t) dt \\
&\quad - x \int_0^{1-h/2} P_{2r+2}(u, x) \psi\left(\frac{h}{2} + u - \frac{1}{2}\right) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + x P_{2r+1}\left(\frac{h}{2}, x\right) \int_{-1/2}^{1/2} \psi(t) dt - x P_{2r+1}\left(1 - \frac{h}{2}, x\right) \int_{-1/2}^{1/2} \psi(t) dt \\
& + x P_{2r+1}(1, x) \int_{-(h-1)/2}^{1/2} \psi(t) dt - x P_{2r+1}\left(\frac{h}{2}, x\right) \int_{-1/2}^{1/2} \psi(t) dt \\
& + x \int_{h/2}^1 P_{2r+1}(u, x) \psi\left(u - \frac{h}{2} - \frac{1}{2}\right) du - P_{2r+1}(0, x) \int_{-(h-1)/2}^{1/2} \psi(t) dt \\
& + \int_0^{h/2} P_{2r+1}(u, x) \psi\left(\frac{1}{2} - \frac{h}{2} + u\right) du \\
& = -x^2 \int_{1-h/2}^1 P_{2r+1}(u, x) \psi\left(\frac{h}{2} + u - \frac{3}{2}\right) du \\
& - x \int_0^{1-h/2} P_{2r+1}(u, x) \psi\left(\frac{h}{2} + u - \frac{1}{2}\right) du \\
& + x \int_{h/2}^1 P_{2r+1}(u, x) \psi\left(u - \frac{h}{2} - \frac{1}{2}\right) du \\
& + \int_0^{h/2} P_{2r+1}(u, x) \psi\left(\frac{1}{2} - \frac{h}{2} + u\right) du \\
& = \int_0^{1-h/2} P_{2r+1}(u, x) \psi\left(\frac{1}{2} - \frac{h}{2} + u\right) du \\
& + \int_{1-h/2}^{h/2} P_{2r+1}(u, x) \left[\psi\left(\frac{1}{2} - \frac{h}{2} + u\right) - x^2 \psi\left(\frac{h}{2} + u - \frac{3}{2}\right) \right] du \\
& - x \int_0^{1-h/2} P_{2r+1}(u, x) \psi\left(\frac{h}{2} + u - \frac{1}{2}\right) du \\
& + x \int_{h/2}^1 P_{2r+1}(u, x) \psi\left(u - \frac{h}{2} - \frac{1}{2}\right) du \\
& - x^2 \int_{h/2}^1 P_{2r+1}(u, x) \psi\left(\frac{h}{2} + u - \frac{3}{2}\right) du. \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Положим $u_1 = 1 - h/2$, $u_2 = h/2$ ($1 < h < 2$) и

$$\theta(u, x) = \psi\left(\frac{1}{2} - \frac{h}{2} + u\right) - x^2 \psi\left(\frac{h}{2} + u - \frac{3}{2}\right), \quad u_1 \leq u \leq u_2.$$

Пусть x_i, y_i ($i = 1, 2, \dots, 2r+1$) – соответственно нули многочленов $P_{2r+1}(u_1, x)$, $P_{2r+1}(u_2, x)$. В силу свойства 6) леммы 1

$$0 > x_1 > y_1 > x_2 > y_2 > \dots > x_i > y_i > \dots > x_{2r+1} > y_{2r+1} > -\infty.$$

ЛЕММА 6. *Нелинейная система уравнений*

$$\begin{aligned}
P_{2r+1}(u, x) &= 0, \\
\theta(u, x) &= 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

в области $u_1 \leq u \leq u_2$, $y_i \leq x \leq x_i$ имеет единственное решение $(\bar{u}_i, \bar{x}_i) = \bar{x}_i(\bar{u}_i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нули $x_i(u)$ многочлена $P_{2r+1}(u, x)$ как функции от u в силу свойства 3) леммы 1 с ростом u ($u_1 \leq u \leq u_2$) строго убывают от x_i до y_i ($i = 1, 2, \dots, 2r+1$).

Далее покажем, что квадрат отрицательного корня $\bar{x}(u)$ уравнения $\theta(u, x) = 0$ с ростом u ($u_1 \leq u \leq u_2$) убывает от ∞ до 0. Отсюда следует, что с ростом u ($u_1 \leq u \leq u_2$) $\bar{x}(u)$ возрастает от $-\infty$ до 0. Из предыдущего следует существование единственной точки $(\bar{u}_i, \bar{x}_i)$, для которой $x_i(\bar{u}_i) = \bar{x}_i(\bar{u}_i)$. Тем самым будет доказана единственность решения системы (3.6) в области $u_1 \leq u \leq u_2$, $y_i \leq x \leq x_i$. Необходимые свойства квадрата отрицательного корня устанавливаются в следующей лемме.

ЛЕММА 7. *Функция*

$$F(u) = \bar{x}^2(u) = \psi\left(\frac{1}{2} - \frac{h}{2} + u\right) / \psi\left(\frac{h}{2} + u - \frac{1}{2}\right)$$

с ростом u ($u_1 \leq u \leq u_2$) убывает от ∞ до 0.

Положим $u = v + \frac{h}{2} - \frac{1}{2}$ и $f(v) = F(v + \frac{h}{2} - \frac{1}{2}) = \psi(v)/\psi(v+h-2)$ ($\frac{3}{2} - h \leq v \leq \frac{1}{2}$). Пусть вначале $1 < h < \frac{3}{2}$; тогда $0 \leq \frac{3}{2} - h \leq v \leq \frac{h}{2}$ и $-\frac{1}{2} \leq v + h - 2 \leq 0$, и в силу леммы 5, замечания 1 и определения $\psi(v)$ и $\varphi(v)$ получаем, что функция

$$\begin{aligned} f(v) &= \left| S_{2r+1}\left(\frac{1}{2} + v\right) \right|^{q-1} / \left| S_{2r+1}\left(v + h - \frac{3}{2}\right) \right|^{q-1} \\ &= \left(S_{2r+1}^*\left(\frac{1}{2} + v\right) \right)^{q-1} / \left(S_{2r+1}^*\left(v + h - \frac{3}{2}\right) \right)^{q-1} \end{aligned} \quad (3.7)$$

убывает, так как в этом случае $1/2 + v > 0$ и с ростом v функция $S_{2r+1}^*(1/2 + v)$ убывает (строго убывает при $r \geq 1$), а в случае $v + h - 3/2 \leq 0$ с ростом v функция $S_{2r+1}^*(v + h - 3/2)$ возрастает.

При $3/2 < h < 2$ выделим три случая:

- а) $3/2 - h \leq v \leq 0$;
- б) $0 \leq v \leq 2 - h$;
- в) $2 - h \leq v \leq 1/2$.

В случае б) вновь при $0 \leq v \leq 2 - h$ функция $\psi(v)$ убывает, а $\psi(v + h - 2)$ возрастает, поэтому $f(v)$ убывает.

В случаях а) и в) точки v и $v + h - 2$ находятся по одну сторону от нуля. Воспользовавшись представлением (3.7) и равенством (2.16), имеем

$$\begin{aligned} f'(v) &= (q-1) \left[S_{2r+1}^*\left(v + \frac{h}{2} - \frac{3}{2}\right) \right]^{2-2q} \left[S_{2r+1}^*\left(\frac{1}{2} + v\right) S_{2r+1}^*\left(v + h - \frac{3}{2}\right) \right]^{q-2} \\ &\quad \times \left[S_{2r+1}'^*\left(\frac{1}{2} + v\right) S_{2r+1}^*\left(v + h - \frac{3}{2}\right) - S_{2r+1}^*\left(\frac{1}{2} + v\right) S_{2r+1}'^*\left(v + h - \frac{3}{2}\right) \right] \\ &= k(v) \left[S_{2r+1}^*\left(v + h - \frac{3}{2}\right) S_{2r}^*\left(\frac{1}{2} + v\right) \right. \\ &\quad \left. - S_{2r+1}^*\left(\frac{1}{2} + v\right) S_{2r}^*\left(v + h - \frac{3}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $k(v) \geq 0$.

В случае а), учитывая, что $0 \leq v + h - 3/2 \leq 1/2 + v \leq 1/2$, и замечание 1, имеем

$$S_{2r}^* \left(v + h - \frac{3}{2} \right) > S_{2r}^* \left(v + \frac{1}{2} \right), \quad S_{2r+1}^* \left(\frac{1}{2} + v \right) > S_{2r+1}^* \left(v + h - \frac{3}{2} \right) > 0.$$

Заменяя в правой части равенства (3.8) $S_{2r+1}^*(v + h - 3/2)$ на $S_{2r+1}^*(v + 1/2)$, а $S_{2r}^*(v + h - 3/2)$ на $S_{2r}^*(v + 1/2)$, получим $f'(v) \leq 0$, $3/2 - h \leq v \leq 0$, т.е. функция $f(v)$ убывает.

В случае в) $1/2 \leq v + h - 3/2 \leq 1/2 + v \leq 1$, и в силу замечания 1

$$\begin{aligned} S_{2r+1}^* \left(v + h - \frac{3}{2} \right) &> S_{2r+1}^* \left(\frac{1}{2} + v \right) \geq 0, \\ 0 &\geq S_{2r}^* \left(v + h - \frac{3}{2} \right) > S_{2r}^* \left(\frac{1}{2} + v \right). \end{aligned}$$

Отсюда аналогично предыдущему получаем $f'(v) \leq 0$. Из неравенства $F'(u) = f'(v) \leq 0$ следует справедливость леммы 7, а следовательно, и леммы 6.

Из (2.22) и из предпоследнего равенства (3.5) следует, что коэффициент при старшей степени левой части (3.5) равен

$$-(1-u)^{2r-1} \int_{1-h/2}^1 \psi \left(\frac{h}{2} + u - \frac{3}{2} \right) du.$$

Поэтому существует такое число $-\infty < \bar{x}_{2r+2} < \bar{x}_{2r+1}$, что

$$(2r+1)(1-x)P_{2r+2}(x) > 0, \quad x \geq \bar{x}_{2r+2}. \quad (3.9)$$

Кроме того, из (2.21) следует, что

$$P_{n+1}(u, 0) = uP_n(u, 0) = u^{n+1}. \quad (3.10)$$

Из последнего равенства и предпоследнего из неравенств (3.5) следует, что

$$(2r+1)P_{2r+2}(0) > 0. \quad (3.11)$$

Положим $z_0 = 0$, $z_{2r+2} = \bar{x}_{2r+2}$ и $z_i = \bar{x}_i(\bar{u}_i)$ ($i = 1, \dots, 2r+1$), где $\bar{x}_i(\bar{u}_i)$ определены в лемме 6.

ЛЕММА 8. *Справедливы следующие равенства:*

$$\text{sign } P_{2r+2}(z_i) = (-1)^i, \quad 0 \leq i \leq 2r+2,$$

где $0 = z_0 > z_1 > z_2 > \dots > z_{2r+2} > -\infty$, т.е. полином $P_{2r+2}(x)$ имеет $2r+2$ различных отрицательных нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся представлением (3.5). Так как множитель $(1-x)$ на $(-\infty, 0)$ в нуль не обращается, то лемму достаточно доказать для функции

$$\theta(x) = (2r+1)(1-x)hP_{2r+2}(x).$$

Пусть, как и раньше, x_i, y_i ($i = 1, \dots, 2r+1$) – соответственно нули многочленов $P_{2r+1}(1-h/2, x)$ и $P_{2r+1}(h/2, x)$, занумерованные по убыванию. Через t_i ($i = 1, \dots, 2r+1$), v_i ($i = 1, \dots, 2r$) обозначим соответственно нули многочленов $P_{2r+1}(0, x)$, $P_{2r+1}(1, x)$. В соответствии с леммой 6 $\bar{x}_i$ – нуль многочлена $P_{2r+1}(\bar{u}_i, x)$ из интервала (y_i, x_i) и $1-h/2 < \bar{u}_i < h/2$ ($i = 1, \dots, 2r+1$).

В силу леммы 1 справедливы неравенства

$$\begin{aligned} 0 = t_1 > \bar{x}_1 > v_1 = t_2 > \bar{x}_2 > v_2 = t_3 > \bar{x}_3 > v_3 = t_4 > \dots \\ \dots > v_{2r} = t_{2r+1} > \bar{x}_{2r+1} > -\infty. \end{aligned}$$

Возьмем произвольное i ($1 \leq i \leq 2r+1$), $u < \bar{u}_i$ и обозначим через $x_i(u)$ нули многочлена $P_{2r+1}(u, x)$. Тогда в силу свойства 6) леммы 1 имеет место неравенство

$$x_i(u) < \bar{x}_i < x_{i+1}(u). \quad (3.12)$$

Аналогично при $u > \bar{u}_i$

$$x_{i-1}(u) < \bar{x}_i < x_i(u). \quad (3.13)$$

Так как $P_{2r+1}(u, x)$ имеет лишь простые нули и $P_{2r+1}(u, 0) > 0$ ($0 < u \leq 1$), то из (3.12), (3.13) соответственно следует

$$\text{sign } P_{2r+1}(u, \bar{x}_i) = (-1)^i, \quad 0 < u < \bar{u}_i, \quad (3.14)$$

$$\text{sign } P_{2r+1}(u, \bar{x}_i) = (-1)^{i-1}, \quad \bar{u}_i < u < 1 \quad (3.15)$$

($i = 1, 2, \dots, 2r+1$). Неравенство (3.15) при $i = 1$ следует из того, что $\bar{x}_1 < x_1(u)$.

Далее, при доказательстве леммы 6 было установлено, что при $1 - \frac{h}{2} \leq u \leq \frac{h}{2}$ функция $\psi(\frac{1}{2} - \frac{h}{2} + u)/\psi(\frac{h}{2} + u - \frac{3}{2})$ является убывающей. Поэтому из леммы 6 следует, что

$$\psi\left(\frac{1}{2} - \frac{h}{2} + u\right) - \bar{x}_i^2 \psi\left(\frac{h}{2} + u - \frac{3}{2}\right) \geq 0, \quad 1 - \frac{h}{2} \leq u \leq \bar{u}_i, \quad (3.16)$$

$$\psi\left(\frac{1}{2} - \frac{h}{2} + u\right) - \bar{x}_i^2 \psi\left(\frac{h}{2} + u - \frac{3}{2}\right) \leq 0, \quad \bar{u}_i \leq u \leq \frac{h}{2}. \quad (3.17)$$

Учитывая заключительную часть равенства (3.5), равенства (3.14), (3.15), неравенства (3.16), (3.17) и тот факт, что $\bar{x}_i < 0$, $\psi(u) > 0$, $-1/2 < u < 1/2$, получаем

$$\text{sign } \theta(\bar{x}_i) = (-1)^i, \quad i = 1, 2, \dots, 2r+1. \quad (3.18)$$

Это вместе с неравенствами (3.9), (3.11) и неравенством $\bar{x}_{2r+2} < \bar{x}_{2r+1}$, которое следует из (3.9) и (3.18) при $i = 2r+1$, позволяет установить, что полином $P_{2r+2}(x)$ на $(-\infty, 0)$ имеет $2r+2$ перемен знака и, следовательно, $2r+2$ различных отрицательных нулей.

Лемма 8 доказана, и тем самым окончательно установлено, что характеристический многочлен разностного уравнения (3.2) удовлетворяет всем условиям теоремы А.

Из (3.2), (3.3), (1.1), (1.2) и леммы 5 следует, что

$$|P_{2r+2}(-1)| = \left| \int_0^1 |S_{2r+1}(t, h)|^{q-1} S_{2r+1}(t, h) dt \right| = \int_0^1 |S_{2r+1}(t, h)|^q dt.$$

Отсюда и из теоремы А, аналогично (3.23) из [2], получаем

$$\begin{aligned} \|y^{(2r+1)}\|_p &\leq (2r)! \|\Delta^{2r+1} y_m\|_{l_p} \|S_{2r+1}(t)\|_{L_q[0,1]}^{-1} \\ &\leq (2r)! \|S_{2r+1}(t)\|_{L_q[0,1]}^{-1}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Из (1.6) и (3.19) следует утверждение теоремы 1 при $n = 2r + 1$, $r = 0, 1, 2, \dots$.
При $n = 2r$ (r натуральное) решение задачи будем искать в виде

$$y^{(2r)}(m+t) = \begin{cases} z_m |S_{2r}(1+t)|^{q-1}, & -1/2 \leq t \leq 0, \\ z_m |S_{2r}(t)|^{q-1}, & 0 \leq t \leq 1/2, \end{cases} \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (3.20)$$

При $n = 2r$ представление (1.4) запишем в виде

$$\begin{aligned} (2r-1)! \Delta^{2r} y_m &= \int_0^{2r+2} y^{(2r)}(m+t) \\ &\times \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k (k+1+v-t)_+^{2r-1} dv dt = \sum_{l=0}^{2r+1} \gamma_l z_{m+l}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где

$$\gamma_l = \int_{-1/2}^{1/2} \psi(t) \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k (k+1-l+v-t)_+^{2r-1} dv dt, \quad (3.22)$$

$$\psi(t) = \begin{cases} |S_{2r}(1+t)|^{q-1}, & -1/2 \leq t \leq 0, \\ |S_{2r}(t)|^{q-1}, & 0 \leq t \leq 1/2, \end{cases} \quad (3.23)$$

и добавленные в (3.21) интегралы от $-1/2$ до 0 при $l = 0$ и от $1/2$ до 1 при $l = 2r+2$ равны нулю, так как в этом случае

$$\sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k (k+1+v-l-t)_+^{2r-1} = 0.$$

Докажем, что характеристический многочлен разностного уравнения (3.21) удовлетворяет всем условиям теоремы А. Во-первых, отметим, что в силу лемм 2 и 5 функция $\psi(t) > 0$ при $-1/2 < t < 1/2$ и является четной:

$$\psi(t) = \psi(-t), \quad -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}, \quad \psi\left(-\frac{1}{2}\right) = \psi\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \quad (3.24)$$

Докажем, что многочлен $P_{2r+2}(x)$ является возвратным. Заменив k на $2r - k$, получим

$$\gamma_{2r+2-l} = \int_{-1/2}^{1/2} \psi(t) \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k (k+1-l-v+t)_+^{2r-1} dv dt.$$

Учитывая, что $(l-k-1+v-t)_+^{2r-1} + (l-k-1+v-t)_-^{2r-1} = (l-k-1+v-t)^{2r-1}$, $x_- = \min(0, x)$ и что разность порядка $2r$ от полинома меньшей степени равна нулю, а также равенство $(l-k-1+v-t)_-^{2r-1} = -(k+1-l-v+t)_+^{2r-1}$, преобразуем γ_{2r+2-l} к виду

$$\gamma_{2r+2-l} = \int_{-1/2}^{1/2} \psi(t) \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} (-1)^k C_{2r}^k (k+1-l-v+t)_+^{2r-1} dv dt.$$

Заменяя в последнем равенстве t на $-t$, v на $-v$ и учитывая четность функции $\psi(t)$, окончательно получим $\gamma_{2r+2-l} = \gamma_l$ ($l = 0, 1, \dots, r$).

Отбрасывая заведомо нулевые слагаемые, используя (2.2) и заменяя в первом слагаемом v на $t - u - 1$, во втором v на $t - u$, характеристический многочлен $P_{2r+2}(x)$ разностного уравнения (3.21) можно представить в виде

$$\begin{aligned} hP_{2r+2}(x) &= \sum_{l=0}^{2r+1} x^l \int_0^{1/2} \psi(t) \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k (l-k+t-v-1)_+^{2r-1} dv dt \\ &\quad + \sum_{l=1}^{2r+2} x_l \int_{-1/2}^0 \psi(t) \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k (l-k+t-v-1)_+^{2r-1} dv dt \\ &= \int_0^1 \psi(t) \int_{t-h/2-1}^{t+h/2-1} \tilde{P}_{2r-1}(u, x) du dt \\ &\quad + x \int_{-1/2}^0 \psi(t) \int_{t-h/2}^{t+h/2} \tilde{P}_{2r-1}(u, x) du dt. \end{aligned}$$

Изменяя порядок интегрирования и разбивая интегралы по u на интегралы по отрезкам, содержащимся в $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, и используя (2.3), получим

$$\begin{aligned} hP_{2r+2}(x) &= \int_{-h/2-1}^{-(h+1)/2} \tilde{P}_{2r-1}(u, x) \int_0^{u+1-h/2} \psi(t) dt du \\ &\quad + \int_{-(h+1)/2}^{-1} \tilde{P}_{2r-1}(u, x) \int_0^{1/2} \psi(t) dt du \\ &\quad + \int_{-1}^{h/2-1} \tilde{P}_{2r-1}(u, x) \int_0^{1/2} \psi(t) dt du \\ &\quad + \int_{h/2-1}^0 \tilde{P}_{2r-1}(u, x) \int_{u+1-h/2}^{1/2} \psi(t) dt du \\ &\quad + \int_0^{(h-1)/2} P_{2r-1}(u, x) \int_{u+1-h/2}^{1/2} \psi(t) dt du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + x \int_{-(h+1)/2}^{-1} \tilde{P}_{2r-1}(u, x) \int_{-1/2}^{u+h/2} \psi(t) dt du \\
& + x \int_{-1}^{-h/2} \tilde{P}_{2r-1}(u, x) \int_{-1/2}^{u+h/2} \psi(t) dt du \\
& + x \int_{-h/2}^0 \tilde{P}_{2r-1}(u, x) \int_{-1/2}^0 \psi(t) dt du \\
& + x \int_0^{(h-1)/2} P_{2r-1}(u, x) \int_{-1/2}^0 \psi(t) dt du \\
& + x \int_{(h-1)/2}^{h/2} P_{2r-1}(u, x) \int_{u-h/2}^0 \psi(t) dt du \\
& = x^2 \int_{-h/2-1}^{-(h+1)/2} P_{2r-1}(2+u, x) \int_0^{u+1+h/2} \psi(t) dt du \\
& + x^2 \int_{-(h+1)/2}^{-1} P_{2r-1}(u, x) \int_0^{1/2} \psi(t) dt du \\
& + x \int_{-1}^{h/2-1} P_{2r-1}(1+u, x) \int_0^{1/2} \psi(t) dt du \\
& + x \int_{h/2-1}^0 P_{2r-1}(u, x) \int_{u+1-h/2}^{1/2} \psi(t) dt du \\
& + \int_0^{(h-1)/2} P_{2r-1}(u, x) \int_{u+1-h/2}^{1/2} \psi(t) dt du \\
& + x^3 \int_{-(h+1)/2}^{-1} P_{2r-1}(2+u, x) \int_{-1/2}^{u+h/2} \psi(t) dt du \\
& + x^2 \int_{-1}^{-h/2} P_{2r-1}(1+u, x) \int_{-1/2}^{u+h/2} \psi(t) dt du \\
& + x^2 \int_{-h/2}^0 P_{2r-1}(1+u, x) \int_{-1/2}^0 \psi(t) dt du \\
& + x \int_0^{(h-1)/2} P_{2r-1}(u, x) \int_{-1/2}^0 \psi(t) dt du \\
& + x \int_{(h-1)/2}^{h/2} P_{2r-1}(u, x) \int_{u-h/2}^0 \psi(t) dt du \\
& = x^2 \int_{1-h/2}^{(3-h)/2} P_{2r-1}(u, x) \int_0^{u+h/2-1} \psi(t) dt du \\
& + x^2 \int_{(3-h)/2}^1 P_{2r-1}(u, x) \int_0^{1/2} \psi(t) dt du \\
& + x \int_0^{h/2} P_{2r-1}(u, x) \int_0^{1/2} \psi(t) dt du \\
& + x \int_{h/2}^1 P_{2r-1}(u, x) \int_{u-h/2}^{1/2} \psi(t) dt du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{(h-1)/2} P_{2r-1}(u, x) \int_{u+1-h/2}^{1/2} \psi(t) dt du \\
& + x^3 \int_{(3-h)/2}^1 P_{2r-1}(u, x) \int_{-1/2}^{u-2+h/2} \psi(t) dt du \\
& + x^2 \int_0^{1-h/2} P_{2r-1}(u, x) \int_{-1/2}^{u-1+h/2} \psi(t) dt du \\
& + x^2 \int_{1-h/2}^1 P_{2r-1}(u, x) \int_{-1/2}^0 \psi(t) dt du \\
& + x \int_0^{(h-1)/2} P_{2r-1}(u, x) \int_{-1/2}^0 \psi(t) dt du \\
& + x \int_{(h-1)/2}^{h/2} P_{2r-1}(u, x) \int_{u-h/2}^0 \psi(t) dt.
\end{aligned}$$

Далее, учитывая свойство 1) леммы 1, равенство (2.4), интегрируя по частям интегралы по u , уничтожая одинаковые слагаемые с противоположными знаками и учитывая второе из равенств (3.24), окончательно получим

$$\begin{aligned}
& P_{2r+2}(x)(1-x)2rh \\
& = x^2 P_{2r}\left(\frac{3-h}{2}, x\right) \int_0^{1/2} \psi(t) dt \\
& \quad - x^2 \int_{1-h/2}^{(3-h)/2} P_{2r}(u, x) \psi\left(u + \frac{h}{2} - 1\right) du \\
& \quad + x^2 \left[P_{2r}(1, x) - P_{2r}\left(\frac{3-h}{2}, x\right) \right] \int_0^{1/2} \psi(t) dt \\
& \quad + x \left[P_{2r}\left(\frac{h}{2}, x\right) - P_{2r}(0, x) \right] \int_0^{1/2} \psi(t) dt + x P_{2r}(1, x) \int_{1-h/2}^{1/2} \psi(t) dt \\
& \quad - x P_{2r}\left(\frac{h}{2}, x\right) \int_0^{1/2} \psi(t) dt + x \int_{h/2}^1 P_{2r}(u, x) \psi\left(u - \frac{h}{2}\right) du \\
& \quad - P_{2r}(0, x) \int_{1-h/2}^{1/2} \psi(t) dt + \int_0^{(h-1)/2} P_{2r}(u, x) \psi\left(u + 1 - \frac{h}{2}\right) du \\
& \quad + x^3 P_{2r}(1, x) \int_{-1/2}^{-1+h/2} \psi(t) dt - x^3 \int_{(3-h)/2}^1 P_{2r}(u, x) \psi\left(u - 2 + \frac{h}{2}\right) du \\
& \quad + x^2 P_{2r}\left(1 - \frac{h}{2}, x\right) \int_{-1/2}^0 \psi(t) dt - x^2 P_{2r}(0, x) \int_{-1/2}^{-1+h/2} \psi(t) dt \\
& \quad - x^2 \int_0^{1-h/2} P_{2r}(u, x) \psi(u - 1 + h/2) du + x^2 P_{2r}(1, x) \int_{-1/2}^0 \psi(t) dt \\
& \quad - x^2 P_{2r}\left(1 - \frac{h}{2}, x\right) \int_{-1/2}^0 \psi(t) dt + x P_{2r}\left(\frac{h-1}{2}, x\right) \int_{-1/2}^0 \psi(t) dt \\
& \quad - x^2 P_{2r}\left(1 - \frac{h}{2}, x\right) \int_{-1/2}^0 \psi(t) dt + x P_{2r}\left(\frac{h-1}{2}, x\right) \int_{-1/2}^0 \psi(t) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -xP_{2r}(0, x) \int_{-1/2}^0 \psi(t) dt - xP_{2r}\left(\frac{h-1}{2}, x\right) \int_{-1/2}^0 \psi(t) dt \\
& + x \int_{(h-1)/2}^{h/2} P_{2r}(u, x) \psi\left(u - \frac{h}{2}\right) du \\
& = -x^2 \int_{1-h/2}^{(3-h)/2} P_{2r}(u, x) \psi\left(u + \frac{h}{2} - 1\right) du + x \int_{h/2}^1 P_{2r}(u, x) \psi\left(u - \frac{h}{2}\right) du \\
& + \int_0^{(h-1)/2} P_{2r}(u, x) \psi\left(u + 1 - \frac{h}{2}\right) du \\
& - x^3 \int_{(3-h)/2}^1 P_{2r}(u, x) \psi\left(u - 2 + \frac{h}{2}\right) du \\
& - x^2 \int_0^{1-h/2} P_{2r}(u, x) \psi\left(u - 1 + \frac{h}{2}\right) du + x \int_{(h-1)/2}^{h/2} P_{2r}(u, x) \psi\left(u - \frac{h}{2}\right) du \\
& = \int_0^{(h-1)/2} P_{2r}(u, x) \left[\psi\left(u + 1 - \frac{h}{2}\right) - x^2 \psi\left(u - 1 + \frac{h}{2}\right) \right] du \\
& - x^2 \int_{(h-1)/2}^{(3-h)/2} P_{2r}(u, x) \psi\left(u - 1 + \frac{h}{2}\right) du \\
& + x \int_{(h-1)/2}^{(3-h)/2} P_{2r}(u, x) \psi\left(u - \frac{h}{2}\right) du \\
& + x \int_{(3-h)/2}^1 P_{2r}(u, x) \left[\psi\left(u - \frac{h}{2}\right) - x^2 \psi\left(u - 2 + \frac{h}{2}\right) \right] du. \tag{3.25}
\end{aligned}$$

ЛЕММА 9. *Справедливо равенство*

$$\text{sign } P_{2r+2}(-1) = (-1)^{r+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.25) следует, что

$$\begin{aligned}
& \text{sign } P_{2r+2}(-1) \\
& = -\text{sign} \left\{ \int_0^{(h-1)/2} P_{2r}(u, -1) \left[\psi\left(u - 1 + \frac{h}{2}\right) - \psi\left(u + 1 - \frac{h}{2}\right) \right] du \right. \\
& \quad + \int_{(h-1)/2}^{(3-h)/2} P_{2r}(u, -1) \psi\left(u - 1 + \frac{h}{2}\right) du \\
& \quad + \int_{(h-1)/2}^{(3-h)/2} P_{2r}(u, -1) \psi\left(u - \frac{h}{2}\right) du \\
& \quad \left. + \int_{(3-h)/2}^1 P_{2r}(u, -1) \left[\psi\left(u - \frac{h}{2}\right) - \psi\left(u - 2 + \frac{h}{2}\right) \right] du \right\}. \tag{3.26}
\end{aligned}$$

В силу замечания 1 и равенства (3.23) $\psi(u) > 0$, $-1/2 < u < 1/2$ а в силу замечания 1 и четности $\psi(u)$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned}\psi\left(u - 1 + \frac{h}{2}\right) - \psi\left(u + 1 - \frac{h}{2}\right) &\geq 0, & 0 \leq u \leq \frac{h-1}{2}, \\ \psi\left(u - \frac{h}{2}\right) - \psi\left(u - 2 + \frac{h}{2}\right) &\geq 0, & \frac{3-h}{2} \leq u \leq 1.\end{aligned}$$

Далее, в силу свойств 2)–5) леммы 1 и равенства (3.10)

$$\text{sign } P_{2r}(u, -1) = (-1)^r, \quad 0 < u < 1.$$

При этом при применении свойства 4), кроме того, что полином имеет степень $n-1$ и его отрицательные нули ($n-1$ различных нуль) совпадают с нулями многочлена $P_n(0, x)$ ($n = 2r$), следует учесть, что полином $P_n(1, x)$ является возвратным, а тогда $P_{2r}(1, x)$ как возвратный полином степени $2r-1$ обращается в нуль при $x = -1$. Следовательно, в силу свойства 3) r -й нуль полинома $P_{2r}(u, x)$ ($0 < u < 1$) лежит правее -1 , а $(r+1)$ -й левее -1 .

Возвратность полинома легко доказать по индукции. Действительно, из (2.1) следует, что $P_0(t, x) = P_0(1, x) \equiv 1$. Далее из рекуррентного соотношения (2.21) имеем $P_1(1, x) \equiv 1$, $P_2(1, x) = 1 + x$, т.е. начальные полиномы возвратны. Положим

$$P_{n+1}(1, x) = R_n(x) = \sum_{k=0}^n C_{k,n} x^k$$

и предположим, что этот полином является возвратным, т.е. $C_{n-k,k} = C_{k,n}$ ($0 \leq k \leq n$). Из рекуррентного соотношения (2.21) имеем

$$a_{0,n+1} = a_{0,n} = \dots = a_{0,0} = 1, \quad a_{n+1,n+1} = a_{n,n} = \dots = a_{0,0} = 1$$

и

$$a_{k,n+1} = (k+1)a_{k,n} + (n+2-k)a_{k-1,n}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Таким образом, $a_{0,n+1} = a_{n+1,n+1}$ и, учитывая предположение индукции,

$$\begin{aligned}a_{n+1-k,n+1} &= (n+2-k)a_{n+1-k,n} + (k+1)a_{n-k,n} \\ &= (k+1)a_{k,n} + (n+2-k)a_{k-1,n} = a_{k,n+1}.\end{aligned}$$

Ниже доказываются аналоги лемм 6–8.

Пусть

$$F(u) = \bar{x}^2(u) = \psi\left(u + 1 - \frac{h}{2}\right) / \psi\left(u - 1 + \frac{h}{2}\right), \quad 0 \leq u \leq \frac{h-1}{2}, \quad (3.27)$$

$$\theta(u, x) = \psi\left(u + 1 - \frac{h}{2}\right) - x^2 \psi\left(u - 1 + \frac{h}{2}\right). \quad (3.28)$$

ЛЕММА 7а. Функция $F(u)$ при $0 \leq u \leq (h-1)/2$ монотонно убывает от 1 до 0, т.е. неположительный нуль $\bar{x}(u)$ уравнения $\theta(u, x) = 0$, $0 \leq u \leq (h-1)/2$, возрастает от -1 до 0, и для любого $u_0 \in (0, \frac{h-1}{2})$

$$\theta(u, \bar{x}(u_0)) \geq 0, \quad u \in (0, u_0); \quad \theta(u, \bar{x}(u_0)) \leq 0, \quad u \in \left(u_0, \frac{h-1}{2}\right). \quad (3.29)$$

Рассмотрим два случая:

а) $h \leq 3/2$;

б) $3/2 < h < 2$.

При $h \leq 3/2$ в силу четности $\psi(u)$ и замечания 1 функция $\psi(u+1-h/2)$ убывает от $\psi(1-h/2)$ до 0, а функция $\psi(u-1+h/2)$ возрастает от $\psi(1-h/2)$ до $\psi(h-3/2)$, и, следовательно, утверждения леммы 7а в этом случае выполнены.

Пусть $3/2 < h < 2$. В этом случае при $0 \leq u \leq 1-h/2$ монотонность убывания доказывается так же, как в предыдущем случае. При $1-h/2 \leq u \leq (h-1)/2$ точки $u+1-h/2$ и $u-1+h/2$ лежат справа от нуля. Поэтому, аналогично (3.7), (3.8), имеем (см. также (3.23) и замечание 1)

$$F'(u) = k_1(u) \left[S_{2r}^*(u-1+h/2) S_{2r-1}^*\left(u+1-\frac{h}{2}\right) - S_{2r}^*\left(u+1-\frac{h}{2}\right) S_{2r-1}^*\left(u-1+\frac{h}{2}\right) \right], \quad (3.30)$$

где $k_1(u) \geq 0$.

Далее, при $1-h/2 \leq u \leq (h-1)/2$, $3/2 < h < 2$, учитывая, что $0 < u-1+h/2 < u+1-h/2 < 1/2$, $S_{2r}^*(u) > 0$, $0 \leq u < 1/2$, из замечания 1 выводим

$$S_{2r}^*\left(u-1+\frac{h}{2}\right) \geq S_{2r}^*\left(u+1-\frac{h}{2}\right) > 0, \\ 0 > S_{2r-1}^*\left(u-1+\frac{h}{2}\right) \geq S_{2r-1}^*\left(u+1-\frac{h}{2}\right).$$

Отсюда и из (3.30) следует, что $F'(u) \geq 0$, и лемма 7а полностью доказана.

При $n = 2r$ положим $u_1 = 0$, $u_2 = (h-1)/2$. Пусть x_i, y_i ($i = 1, 2, \dots, r$) – различные нули полиномов $P_{2r}(0, x)$, $P_{2r}(\frac{h-1}{2}, x)$ соответственно, лежащие на полуинтервале $(-1, 0]$. Их существование и нижеследующие неравенства следуют из леммы 1:

$$0 = x_1 > y_1 > x_2 > y_2 > \dots > x_r > y_r > x_{r+1} = -1.$$

Последнее равенство следует из (2.4), возвратности многочлена $P_{2r}(1, x)$ и того (см. доказательство леммы 8), что r -й нуль многочлена $P_{2r}(1, x)$, т.е. $(r+1)$ -й нуль многочлена $P_{2r}(0, x)$, равен -1 .

ЛЕММА 6а. *Нелинейная система уравнений*

$$\begin{aligned} P_{2r}(u, x) &= 0, \\ \theta(u, x) &= 0 \end{aligned}$$

в области $u_1 \leq u \leq u_2$, $-1 < y_i \leq x \leq x_i \leq 0$ ($i = 1, \dots, r$) имеет единственное решение $u = \bar{u}_i$, $x = \bar{x}_i = \bar{x}_i(\bar{u}_i)$.

С учетом леммы 7а доказательство леммы 6а аналогично доказательству леммы 6.

Положим $z_0 = 0$, $z_i = \bar{x}_i(\bar{u}_i)$ ($i = 1, 2, \dots, r$) и $z_{r+1} = -1$, $0 = z_0 > z_1 > \dots > z_r > z_{r+1} = -1$.

ЛЕММА 8а. *Справедливы равенства*

$$\text{sign } P_{2r+2}(z_i) = (-1)^i, \quad i = 0, 1, \dots, r+1. \quad (3.31)$$

С учетом равенства (3.25), лемм 6а, 7а, неравенства

$$\begin{aligned} P_{2r+2}(0) &= \int_0^{(h-1)/2} P_{2r}(u, 0) \psi\left(u + 1 - \frac{h}{2}\right) du \\ &= \int_0^{(h-1)/2} u^{2r} \psi\left(u + 1 - \frac{h}{2}\right) du > 0, \end{aligned}$$

следующего из (3.25) и (3.10), равенств $\text{sign } P_{2r}(u, \bar{x}_i) = (-1)^i$, $0 < u < \bar{u}_i$, $P_{2r}(u, \bar{x}_i) = (-1)^{i-1}$, $\bar{u}_i < u < 1$ ($i = 1, \dots, r$), и леммы 9 доказательство леммы 8а аналогично доказательству леммы 8; следует лишь дополнительно учесть справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 10. *При $0 \leq x^2 \leq 1$ и $(3-h)/2 \leq u \leq 1$ справедливо неравенство*

$$\psi\left(u - \frac{h}{2}\right) - x^2 \psi\left(u - 2 + \frac{h}{2}\right) \geq 0. \quad (3.32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1 < h \leq 5/3$; тогда

$$\begin{aligned} 3/2 - h &\leq u - h/2 \leq 1 - h/2, \\ -1/2 &\leq u - 2 + h/2 \leq -1 + h/2, \quad (3-h)/2 \leq u \leq 1 \end{aligned}$$

и $-1 + h/2 \leq 3/2 - h$, и требуемый результат следует из четности $\psi(u)$, равенства (3.23) и монотонного убывания $|S_{2r}(u)| = S_{2r}^*(u)$ при $0 \leq u \leq 1/2$, следующего из замечания 1.

При $5/3 < h < 2$ докажем справедливость (3.32) последовательно на отрезках

$$\frac{3}{2} - \frac{h}{2} + (k-1)(2-h) \leq u \leq \frac{3}{2} - \frac{h}{2} + k(2-h), \quad k = 0, 1, \dots, k_0,$$

где k_0 выбрано из условия

$$\frac{3}{2} - \frac{h}{2} + (k_0-1)(2-h) < -1 + \frac{h}{2} \leq \frac{3}{2} - \frac{h}{2} + k_0(2-h), \quad 1 < h < 2.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} u - 2 + \frac{h}{2} &\leq -\frac{1}{2} + k(2 - h), \\ u - \frac{h}{2} &\geq \frac{3}{2} - \frac{h}{2} + (k - 1)(2 - h) - \frac{h}{2} = -\frac{1}{2} + k(2 - h), \end{aligned}$$

и требуемое неравенство при $1 \leq k \leq k_0$ вновь следует из четности $\psi(u)$ и монотонного убывания $\psi(u)$ на $[0, 1/2]$. Если при этом окажется, что $3/2 - h/2 + k_0(2 - h) \geq 1$, то весь отрезок $[(3 - h)/2, 1]$ исчерпан.

Если $3/2 - h/2 + k_0(2 - h) < 1$, то $|u - h/2| \geq 1 - h/2$ при $3/2 - h/2 + k_0(2 - h) \leq u \leq 1$, а $|u - 2 + h/2| \leq 1 - h/2$ при тех же u , и, следовательно, вновь неравенство (3.32) для таких u следует из четности функции $\psi(u)$ и ее монотонного убывания на $[0, 1/2]$. Лемма 10 доказана.

Таким образом, из леммы 8а следует, что многочлен $P_{2r+2}(x)$ на интервале $(-\infty, -1)$ имеет $r + 1$ различных отрицательных нулей, и в силу доказанной возвратности этого многочлена он имеет столько же различных нулей на $(-\infty, -1)$. Тем самым характеристический многочлен $P_{2r+2}(x)$ разностного уравнения (3.21) удовлетворяет всем условиям теоремы А.

Далее, из (3.21), (3.22), (1.1), (1.2) и леммы 5 следует, что

$$\begin{aligned} &|P_{2r+2}(-1)| \\ &= \left| \sum_{l=0}^{2r+1} (-1)^l \int_0^{1/2} \psi(t) \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k(k+1+v-t-l)_+^{2r-1} dv dt \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^{2r+2} (-1)^l \int_{-1/2}^0 \psi(t) \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k(k+1-l+v-t)_+^{2r-1} dv dt \right| \\ &= \left| \int_0^{1/2} |S_{2r}(t)|^{q-1} S_{2r}(t) dt + \int_{1/2}^1 |S_{2r}(u)|^{q-1} \sum_{l=1}^{2r+2} (-1)^l \frac{1}{h} \right. \\ &\quad \left. \times \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k(k+2+v-l-u)_+^{2r-1} dv du \right| \\ &= \left| \int_0^{1/2} |S_{2r}(t)|^{q-1} S_{2r}(t) dt - \int_{1/2}^1 |S_{2r}(u)|^{q-1} S_{2r}(u) du \right|. \end{aligned}$$

Отсюда и из теоремы А аналогично (3.23) и (3.30) из [2] получаем

$$\|y^{(2r)}\|_p \leq (2r-1)! \|\Delta^{2r} y_m\|_{l_p} \|S_{2r}(t)\|_{L_q[0,1]}^{-1} \leq (2r-1)! \|S_{2r}(t)\|_{L_q[0,1]}^{-1}.$$

Из последнего неравенства, неравенства (1.6) и равенств (2.12), (2.6), (2.7) следует утверждение теоремы 1 и для четного n . Правда, мы пока нашли лишь n -ю производную требуемой функции, и для окончательного удовлетворения условиям (2) необходимо показать, что для любых значений $y'_0, y'_1, \dots, y'_{n-1}$ существует такой полином $\bar{P}_{n-1}(x)$, что

$$\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \bar{P}_{n-1}(k+t) dt = y'_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.33)$$

Если такой многочлен существует, то многочлен

$$R_{n-1}(x) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \bar{P}_{n-1}(x+t) dt$$

решает интерполяционную задачу

$$R_{n-1}(k) = y'_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (3.34)$$

а дифференцируя предпоследнее равенство, получаем

$$\bar{P}_{n-1}\left(x + \frac{h}{2}\right) - \bar{P}_{n-1}\left(x - \frac{h}{2}\right) \equiv hR'_{n-1}(x). \quad (3.35)$$

Пусть c_k — коэффициенты полинома $R_{n-1}(x)$, а a_k — коэффициенты полинома $\bar{P}_{n-1}(x)$; тогда из (3.35) имеем (предполагается, что сумма равна нулю, если верхний индекс суммирования меньше нижнего)

$$(s+1)a_{s+1}h + \sum_{k=s+1}^{n-2} a_{k+1}C_{k+1}^s \left(\frac{h}{2}\right)^{k+1-s} [1 - (-1)^{k+1-s}] = (s+1)hc_{s+1},$$

$$s = n-2, n-3, \dots, 0.$$

Отсюда, зная коэффициенты полинома $R_{n-1}(x)$, а он условиями (3.34) однозначно определяется, последовательно находим $a_{n-1}, \dots, a_1$. Коэффициент a_0 находим из (3.33), например, при $k = 0$. Теорема 1 полностью доказана.

Список литературы

1. Субботин Ю. Н. Функциональная интерполяция в среднем с наименьшей n -й производной // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 88. С. 30–60.
2. Субботин Ю. Н. Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 118–173.
3. Шарма А., Цимбаларио И. Некоторые линейные дифференциальные операторы и обобщенные разности // Матем. заметки. 1977. Т. 21. № 2. С. 161–173.
4. Шевалдин В. Т. Об одной задаче функциональной интерполяции // Матем. заметки. 1981. Т. 29. № 4. С. 603–622.
5. Шевалдин В. Т. Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 164.
6. Субботин Ю. Н. Экстремальная функциональная интерполяция в среднем с наименьшим значением n -й производной при больших интервалах усреднения // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 1. С. 114–132.