Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Царьков, Сглаживание функций в конечномерных банаховых пространствах,
Изв. РАН. Сер. матем., 1997, том 61, выпуск 1, 199–214

DOI: <https://doi.org/10.4213/im111>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 02:55:50

УДК 513.88

И. Г. Царьков

Сглаживание функций в конечномерных банаховых пространствах

В работе рассматривается задача линейного сглаживания непрерывных функций, заданных на единичном шаре в $\mathbb{R}^n$, а также ищутся оценки снизу для норм производных приближающих функций на единичных шарах в произвольных конечномерных пространствах.

Библиография: 4 наименования.

Введение

Пусть (B) – класс всех действительных банаховых пространств, $B_n \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) – единичный шар. Для $X, Y \in (B)$, выпуклого тела $M \subset X$ и $\alpha > 0$ через $\mathcal{H}^\alpha(M, Y)$ обозначим класс всех α_0 раз дифференцируемых по Фреше отображений $\varphi: M \rightarrow Y$ таких, что для любого ограниченного $N \subset M$ найдется $C = C(N) > 0$ такое, что

$$\forall x, y \in N \quad \|\varphi^{(\alpha_0)}(x) - \varphi^{(\alpha_0)}(y)\| \leq C\|x - y\|^{\beta_0},$$

где α_0 – наибольшее целое число, строго меньшее α , а $\beta_0 = \alpha - \alpha_0$.

Через $CH^\alpha(M, Y)$ ($C > 0$) обозначим класс всех отображений $\varphi \in \mathcal{H}^\alpha(M, Y)$ таких, что

$$\forall x, y \in M \quad \|\varphi^{(\alpha_0)}(x) - \varphi^{(\alpha_0)}(y)\| \leq C\|x - y\|^{\beta_0}.$$

В работе продолжают исследования, начатые в [4] (в частности, доказывалась теорема 3).

§ 1. Оценки сверху

Рассмотрим для произвольных $\varepsilon > 0$ и $0 < \alpha \leq 1$ функцию $g_{\varepsilon, \alpha}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$, положив $\forall a \in \mathbb{R}^m$

$$g_{\varepsilon, \alpha}(a) = \begin{cases} \mu^{-1}(\varepsilon^2 - \|a\|^2)^{\alpha/2}, & \|a\| \leq \varepsilon, \\ 0, & \|a\| > \varepsilon, \end{cases}$$

где $\mu = \mu_\alpha = \int_{\|a\| \leq \varepsilon} (\varepsilon^2 - \|a\|^2)^{\alpha/2} da$.

Вычислим μ , перейдя к полярной системе координат в $\mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi_1, & x_2 &= r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ & \dots, \\ x_{m-1} &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2} \cos \varphi_{m-1}, \\ x_m &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-1}, \end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 96-01-00378).

где $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$, $\varphi_i \in [0, \pi]$, $i = \overline{2, m-1}$.

Пусть

$$\begin{aligned} I &= \sin^{m-2} \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2}, \quad \tau_m = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi |I| d\varphi_1 \dots d\varphi_{m-1}, \\ \tau'_m &= \int_0^\pi \dots \int_0^\pi |\sin^{m-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2}| d\varphi_2 \dots d\varphi_{m-1} \\ &= \tau_m / \int_0^{2\pi} |\sin^{m-2} \varphi_1| d\varphi_1 = \frac{1}{2} \tau_m \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) / \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mu &= \varepsilon^{m+\alpha} \tau_m \int_0^1 r^{m-1} (1-r^2)^{\alpha/2} dr = \frac{\tau_m \varepsilon^{m+\alpha}}{2} \int_0^1 u^{m/2-1} (1-u)^{\alpha/2} du \\ &= \frac{1}{2} \tau_m \varepsilon^{m+\alpha} \frac{\Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{\alpha}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{m+\alpha}{2} + 1)}. \end{aligned}$$

Для любых $k \in \mathbb{N}$, $X, Y \in (B)$, произвольного непустого выпуклого множества $M \subset X$ и $x \in M$, $h \in X$ таких, что $(x + kh) \in M$, k -й разностью $f: M \rightarrow Y$ в x с шагом h называют выражение

$$\Delta_h^k(f, x) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} C_k^i f(x + ih).$$

Назовем *модулем непрерывности k -го порядка* функцию $\omega_k(f, u)$, определенную на $\mathbb{R}_+$ при помощи равенства

$$\omega_k(f, u) = \sup \left\{ \left\| \Delta_h^k(f, x) \right\|_Y \mid h \in X, \quad \|h\| \leq u, \quad [x, x + kh] \subset M \right\}.$$

В случае $k = 1$ вместо $\omega_1(f, u)$ будем писать $\omega(f, u)$. Для метрического компакта Q через $C(Q, Y)$ ($Y \in (B)$) обозначим множество непрерывных функций $f: Q \rightarrow Y$ с нормой

$$\|f\| = \max_{x \in Q} \|f(x)\|_Y.$$

Рассмотрим произвольное ограниченное отображение $f: \mathbb{R}^m \rightarrow Y$ такое, что

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad \|f(x)\| \leq N, \quad N > 0.$$

ЛЕММА 1. *Для свертки*

$$\varphi_{\varepsilon, \alpha}(\tau) = (f * g_{\varepsilon, \alpha})(\tau) = \int_{\mathbb{R}^m} f(\tau - a) g_{\varepsilon, \alpha}(a) da$$

верны соотношения

$$\begin{aligned} \omega(\varphi_{\varepsilon, \alpha}, t) &\leq \omega(f, t), \quad t \geq 0, \\ \|f - \varphi_{\varepsilon, \alpha}\| &\leq \omega(f, \varepsilon) \end{aligned}$$

и существует $C = C(\alpha) > 0$ такое, что

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^m \quad \|\varphi_{\varepsilon, \alpha}(a) - \varphi_{\varepsilon, \alpha}(b)\| \leq C M m^{\alpha/2} \varepsilon^{-\alpha} \|a - b\|^\alpha.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $\forall c \in \mathbb{R}^m$

$$\left\| f(c) - \int_{\mathbb{R}^m} f(c - \tau) g_{\varepsilon, \alpha}(\tau) d\tau \right\| = \left\| \int_{\mathbb{R}^m} (f(c) - f(c - \tau)) g_{\varepsilon, \alpha}(\tau) d\tau \right\| \leq \omega(f, \varepsilon).$$

Кроме того, $\forall \tau, \tau_1 \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} \|\varphi_{\varepsilon, \alpha}(\tau) - \varphi_{\varepsilon, \alpha}(\tau_1)\| &= \left\| \int_{\mathbb{R}^m} (f(\tau - a) g_{\varepsilon, \alpha}(a) - f(\tau_1 - a) g_{\varepsilon, \alpha}(a)) da \right\| \\ &\leq \omega(f, \|\tau_1 - \tau\|). \end{aligned}$$

Не теряя общности, будем считать, что вектор $a - b \in \mathbb{R}^m$ параллелен первому базисному вектору e_1 и $b = a + te_1$. Рассмотрим произвольную точку $v \in \mathbb{R}^m$ и оценим величину

$$\Delta = |t|^{-\alpha} |g_{\varepsilon, \alpha}(a - v) - g_{\varepsilon, \alpha}(b - v)|.$$

Если $\|a - v\|, \|b - v\| \leq \varepsilon$, то

$$\begin{aligned} \Delta &\leq \frac{1}{\mu} \left| \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \|a - v\|^2} - \sqrt{\varepsilon^2 - \|b - v\|^2}}{t} \right|^\alpha \\ &= \frac{1}{\mu} \left| \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\varepsilon^2 - \|a - v + te_1\|^2} \right|_{t=\xi}^\alpha \\ &= \frac{1}{\mu} \left| \frac{(a - v + \xi e_1, e_1)}{\sqrt{\varepsilon^2 - \|a - v + \xi e_1\|^2}} \right|^\alpha = \Delta_1 \end{aligned}$$

($\xi \in (0, t)$).

Пусть $a - v = a_1 + a_2$, где $a_1 \perp a_2$ и $a_1 = we_1$ ($w \in \mathbb{R}$). Тогда

$$\Delta_1 = \frac{1}{\mu} \left(\frac{|w + \xi|}{\sqrt{\varepsilon^2 - \|a_2\|^2 - (w + \xi)^2}} \right)^\alpha,$$

и если $|w + \xi| \leq w$, то

$$\Delta_1 \leq \frac{1}{\mu} \left(\frac{|w|}{\sqrt{\varepsilon^2 - \|a_2\|^2 - w^2}} \right)^\alpha,$$

а если $|w + \xi| \geq |w|$, то

$$\Delta_1 \leq \frac{1}{\mu} \left(\frac{|w + t|}{\sqrt{\varepsilon^2 - \|a_2\|^2 - (w + t)^2}} \right)^\alpha.$$

Отсюда

$$\Delta \leq \frac{1}{\mu} \left(\left| \frac{(a - v, e_1)}{\sqrt{\varepsilon^2 - \|a - v\|^2}} \right|^\alpha + \left| \frac{(b - v, e_1)}{\sqrt{\varepsilon^2 - \|b - v\|^2}} \right|^\alpha \right).$$

Для произвольного фиксированного $t \neq 0$ оценим величину

$$\int_{M_t} |t|^{-\alpha} g_{\varepsilon, \alpha}(a - u) du,$$

где $M_t = \{u \in \mathbb{R}^m \mid \|a - u + te_1\| \geq \varepsilon\}$ ($\forall v \in M_t \quad g_{\varepsilon, \alpha}(a - v + te_1) = 0$). Рассмотрим функцию

$$q(\eta) = \int_{M_t} g_{\varepsilon, 1}(a - u + \eta e_1) du, \quad \eta \in (0, t).$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \eta} q(\eta) = \int_{A_\eta} \mu_1^{-1} \frac{(a - u + \eta e_1, e_1)}{\sqrt{\varepsilon^2 - \|a - u + \eta e_1\|^2}} du,$$

где $A_\eta = \{u \in M_t \mid \|a - u + \eta e_1\| \leq \varepsilon\}$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial \eta} q(\eta) \right| &\leq \frac{1}{\mu_1} \int_{\|p\| \leq \varepsilon} \frac{|(p, e_1)|}{\sqrt{\varepsilon^2 - \|p\|^2}} dp = \frac{\varepsilon^m}{\mu_1} \int_{\|s\| \leq 1} \frac{|(s, e_1)|}{\sqrt{1 - \|s\|^2}} ds \\ &= \frac{\varepsilon^m}{\mu_1} \tau'_m \int_0^{2\pi} r |\cos \varphi_1| |\sin^{m-2} \varphi_1| d\varphi_1 \int_0^1 r^{m-1} (1 - r^2)^{-1/2} dr \\ &= \frac{\varepsilon^m}{\mu_1} \tau'_m \frac{\Gamma(1) \Gamma(\frac{m-1}{2})}{\Gamma(\frac{m+1}{2})} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2} + 1)} \leq \frac{\varepsilon^m}{\mu_1} \tau_m \frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2} + 1)} \\ &= 2\varepsilon^{-1} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(\frac{m}{2} + 1)} \leq C_1 \varepsilon^{-1} \sqrt{m}, \end{aligned}$$

где $C_1 > 0$ – абсолютная константа. Поэтому

$$q(0) = |q(0) - q(t)| \leq |t| C_1 \varepsilon^{-1} \sqrt{m},$$

т.е.

$$0 \leq |t|^{-1} \int_{M_t} g_{\varepsilon, 1}(a - u) du \leq C_1 \varepsilon^{-1} \sqrt{m},$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned} \int_{M_t} |t|^{-\alpha} g_{\varepsilon, \alpha}(a - u) du &= 2\tau_m^{-1} \varepsilon^{-(m+\alpha)} \frac{\Gamma(\frac{m+\alpha}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{\alpha}{2} + 1)} \\ &\times \int_{A_0} (|t|^{-1} \sqrt{\varepsilon^2 - \|a - u\|^2})^\alpha du \leq 2\tau_m^{-1} \varepsilon^{-(m+\alpha)} \frac{\Gamma(\frac{m+\alpha}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{\alpha}{2} + 1)} \\ &\times \left(\int_{A_0} |t|^{-1} \sqrt{\varepsilon^2 - \|a - u\|^2} du \right)^\alpha \left(\int_{A_0} du \right)^{1-\alpha} \\ &\leq 2\tau_m^{-1} \varepsilon^{-(m+\alpha)} \frac{\Gamma(\frac{m+\alpha}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{\alpha}{2} + 1)} \\ &\times \left(\int_{M_t} |t|^{-1} \sqrt{\varepsilon^2 - \|a - u\|^2} du \right)^\alpha \left(\int_{\|u\| \leq \varepsilon} du \right)^{1-\alpha} \\ &\leq 2\tau_m^{-1} \varepsilon^{-(m+\alpha)} \frac{\Gamma(\frac{m+\alpha}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{\alpha}{2} + 1)} (\mu_1 C_1 \varepsilon^{-1} \sqrt{m})^\alpha (\varepsilon^m \tau_m m^{-1})^{1-\alpha} \\ &= 2\tau_m^{-\alpha} \varepsilon^{-\alpha(m+1)} m^{\alpha-1} \frac{\Gamma(\frac{m+\alpha}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{\alpha}{2} + 1)} \left(\frac{1}{2} \right)^\alpha \tau_m^\alpha \varepsilon^{\alpha(m+1)} \\ &\times \left(\frac{\Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{m+1}{2} + 1)} \right)^\alpha C_1^\alpha \varepsilon^{-\alpha} m^{\alpha/2} \leq C_2 \varepsilon^{-\alpha} m^{\alpha/2}, \end{aligned}$$

где $C_2 > 0$ зависит только от α .

Тогда

$$\begin{aligned}
|t|^{-\alpha} \|\varphi_{\varepsilon, \alpha}(a) - \varphi_{\varepsilon, \alpha}(b)\| &= |t|^{-\alpha} \left\| \int_{\mathbb{R}^m} (f(a-q) - f(b-q)) g_{\varepsilon, \alpha}(q) dq \right\| \\
&= |t|^{-\alpha} \left\| \int_{\mathbb{R}^m} f(u) (g_{\varepsilon, \alpha}(a-u) - g_{\varepsilon, \alpha}(b-u)) du \right\| \\
&\leq N \int_{\mathbb{R}^m} |t|^{-\alpha} |g_{\varepsilon, \alpha}(a-u) - g_{\varepsilon, \alpha}(b-u)| du \\
&\leq \frac{2N}{\mu_\alpha} \left(\int_{\|p\| \leq \varepsilon} \left| \frac{(p, e_1)}{\sqrt{\varepsilon^2 - \|p\|^2}} \right|^\alpha dp + \int_{\|q\| \leq \varepsilon} \left| \frac{(q, e_1)}{\sqrt{\varepsilon - \|q\|^2}} \right|^\alpha dq \right) \\
&\quad + NC_2 \varepsilon^{-\alpha} m^{\alpha/2} = \frac{4N}{\mu_\alpha} \varepsilon^m \int_{\|q\| \leq 1} \left| \frac{(q, e_1)}{\sqrt{1 - \|q\|^2}} \right|^\alpha dq + NC_2 \varepsilon^{-\alpha} m^{\alpha/2} \\
&= NC_2 \varepsilon^{-\alpha} m^{\alpha/2} + \frac{4N \varepsilon^m}{\mu_\alpha} \tau'_m \int_0^{2\pi} r^\alpha |\cos \varphi_1|^\alpha |\sin^{m-2} \varphi_1| d\varphi_1 \\
&\quad \times \int_0^1 r^{m-1} (1-r^2)^{-\alpha/2} dr = \frac{16N \varepsilon^m}{\mu_\alpha} \tau'_m \int_0^{\pi/2} \cos^\alpha \varphi_1 \sin^{m-2} \varphi_1 d\varphi_1 \\
&\quad \times \int_0^1 r^{m-1+\alpha} (1-r^2)^{-\alpha/2} dr + C_2 N \varepsilon^{-\alpha} m^{\alpha/2} \\
&= \frac{4N \varepsilon^m}{\mu_\alpha} \tau'_m \frac{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2}) \Gamma(\frac{m-1}{2})}{\Gamma(\frac{m+\alpha}{2})} \frac{\Gamma(\frac{m+\alpha}{2}) \Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)} + C_2 N \varepsilon^{-\alpha} m^{\alpha/2} \\
&= \frac{4N \varepsilon^m \tau_m \Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}{\mu_\alpha \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{m}{2}+1)} + C_2 N \varepsilon^{-\alpha} m^{\alpha/2} \\
&= \frac{8N \Gamma(1-\frac{\alpha}{2}) \varepsilon^{-\alpha} \Gamma(\frac{m+\alpha}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\alpha}{2}+1) \Gamma(\frac{m}{2}+1)} + C_2 N \varepsilon^{-\alpha} m^{\alpha/2} \\
&\leq C_3 N \varepsilon^{-\alpha} m^{\alpha/2},
\end{aligned}$$

где $C_3 > 0$ зависит только от α . Отсюда следует утверждение леммы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$. Тогда существуют $C = C(\alpha, \varepsilon) > 0$, $C_1 = C_1(\alpha) > 0$ такие, что для любых $Y \in (B)$, $m \in \mathbb{N}$ и единичного шара $B_m \subset \mathbb{R}^m$ существует линейный непрерывный оператор $A: C(B_m, Y) \rightarrow \mathcal{H}^\alpha(B_m, Y)$ такой, что

$$\begin{aligned}
\forall \varphi \in C(B_m, Y) \quad A\varphi &\in C\omega(\varphi, \varepsilon) m^{\alpha/2} H^\alpha(B_m, Y), \\
\|\varphi - A\varphi\| &\leq C_1 \omega(\varphi, \varepsilon).
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(x) = \varphi(x) - \varphi(0)$ ($x \in B_m$). В [1, лемма 1] было показано, что существует линейный непрерывный оператор $A_1: C(B_m, Y) \rightarrow C(\mathbb{R}^m, Y)$ такой, что $\forall \psi \in C(B_m, Y) \quad A_1 \psi|_{B_m} = \psi$ и $\omega(A_1 \psi, t) \leq \omega(\psi, t)$, $\omega(A_1 \psi, t) \leq \omega(\psi, 2)$ ($t > 0$). Тогда $\|A_1 f\| \leq \omega(f, 2)$.

Пусть

$$A\varphi = \varphi(0) + A_1 f * \underbrace{g_{\varepsilon, 1} * \cdots * g_{\varepsilon, 1}}_{\alpha_0} * g_{\varepsilon, \beta_0}, \quad \tilde{\varphi} = A\varphi|_{B_m}.$$

Тогда, применяя лемму 1 $\alpha_0 + 1$ раз, получим $\forall t_1, t_2 \in B_m$

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varphi}^{(\alpha_0)}(t_1) - \tilde{\varphi}^{(\alpha_0)}(t_2)\| &\leq \|A_1 f\| \varepsilon^{-\alpha} m^{\alpha/2} \|t_1 - t_2\|^{\beta_0} \\ &\leq \tilde{C} \omega(\varphi, 2) \varepsilon^{-\alpha} m^{\alpha/2} \|t_1 - t_2\|^{\beta_0} \\ &\leq C(\alpha, \varepsilon) \omega(\varphi, \varepsilon) m^{\alpha/2} \|t_1 - t_2\|^{\beta_0}, \end{aligned}$$

т.е. $\tilde{\varphi} \in C(\alpha, \varepsilon) \omega(\varphi, \varepsilon) m^{\alpha/2} H^\alpha(B_m)$. Кроме того, $\|\varphi - \tilde{\varphi}\| \leq C_1(\alpha) \omega(f, \varepsilon)$. Теорема доказана.

§ 2. Оценки снизу

Оценки снизу в линейном методе будут получены путем оценки приближения некоторой вектор-функции в пространствах Орлича (теорема 2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\eta, g \in C^\infty(0, \infty)$ – такие функции, что g монотонно убывающая,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g'(t)}\right)' &\geq -1 \quad \left(t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)\right), \quad (\ln(-g'(t)))' \leq -\frac{2}{t}, \\ \lim_{\tau \rightarrow 0+} g(\tau) &= +\infty, \quad \eta(t) = \int_0^t e^{-g(\tau)} d\tau \quad (t \in (0, \infty)). \end{aligned}$$

Тогда для любого $\lambda \in (0, 1]$ функция $q(t) = \eta\left(\frac{\eta^{-1}(t)}{\lambda}\right)$ выпукла вверх, а η и $\sqrt{\eta}$ выпуклы вниз на $(0, 1/2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a, t \in (0, +\infty)$. Поскольку $g'(u) \leq 0$, $\frac{g''(u)}{g'(u)} \leq -\frac{2}{u}$, $\frac{g''(u)}{(g'(u))^2} \leq 1$, $u \in (0, \infty)$, то

$$\begin{aligned} g''\left(\frac{a}{t}\right) &\geq 0, \quad (e^{-g(t)})'' \geq 0, \\ q'(t) &= \eta'\left(\frac{\eta^{-1}(t)}{\lambda}\right) \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\eta'(\eta^{-1}(t))}, \quad \int_0^t e^{-g(\tau)} d\tau \geq \frac{(e^{-g(t)})^2}{2(e^{-g(t)})}, \\ q''(t) &= \frac{\frac{1}{\lambda}(\eta''(\frac{\eta^{-1}(t)}{\lambda})\frac{1}{\lambda} - \frac{\eta''(\eta^{-1}(t))}{\eta'(\eta^{-1}(t))}\eta'(\frac{\eta^{-1}(t)}{\lambda}))}{(\eta'(\eta^{-1}(t)))^2}, \\ (\sqrt{\eta(t)})'' &= \frac{(\eta'(t))^2}{4(\eta(t))^{3/2}} \left(2e^{g(t)}(-g'(t)) \int_0^t e^{-g(\tau)} d\tau - 1\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Поскольку $\ln \eta'\left(\frac{a}{u}\right) = -g\left(\frac{a}{u}\right)$ выпукла вверх, то $(\ln \eta'\left(\frac{a}{u}\right))'_u \downarrow$ и, следовательно,

$$\frac{\eta''(\eta^{-1}(t)/\lambda)}{\lambda^2 \eta'(\eta^{-1}(t)/\lambda)} \leq \frac{\eta''(\eta^{-1}(t))}{\eta'(\eta^{-1}(t))}.$$

Поэтому $q'' \leq 0$, т.е. q выпукла вверх. Кроме того,

$$\eta''(t) = -e^{-g(t)} g'(t), \quad t \in (0, \infty),$$

т.е. η выпукла вниз. Лемма доказана.

Пусть $\chi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – четная периодическая функция с периодом $T = (4^{k+1} \times (2k+1)\sqrt{n})^{-1} \varepsilon$ (k нечетно, $k > 2\alpha$, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0, 1]$) такая, что $\forall t \in [0, \frac{1}{2}T]$ $\chi(t) = t$ и $\forall t \in [\frac{1}{2}T, T]$ $\chi(t) = T - t$. Нетрудно видеть, что χ 1-липшицева.

Пусть $\{e_i\}$ – канонический базис в $\mathbb{R}^n$. Пусть η – функция, построенная в предположении, и $\tilde{\eta} = \sqrt{\eta}$, $\bar{\eta} = \sqrt{n}\tilde{\eta}$. Положим

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \tilde{\eta}^{-1}(\chi(x_j))e_j, \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

Пусть l_η^n – пространство Орлича, т.е.

$$\|x\| = \inf \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+ \left| \sum_{i=1}^n \eta \left(\frac{|x_i|}{\lambda} \right) \leq 1 \right. \right\}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in l_\eta^n.$$

Поскольку $|\chi(t_1) - \chi(t_2)| \leq |t_1 - t_2|$, а $\tilde{\eta}^{-1}$ выпукла вверх на $[0, t_0]$, $t_0 = t_0(\eta) > 0$, то при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ и $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|x - y\| \leq t_0$,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \left\| \sum_{j=1}^n \tilde{\eta}^{-1}(|\chi(x_j) - \chi(y_j)|)e_j \right\| \leq \left\| \sum_{j=1}^n \tilde{\eta}^{-1}(\Delta_j)e_j \right\| = \lambda,$$

где λ, Δ_j ($j = \overline{1, n}$) таковы, что

$$\Delta_j = |x_j - y_j|, \quad j = \overline{1, n},$$

$$\sum_{j=1}^n \eta \left(\frac{\tilde{\eta}^{-1}(\Delta_j)}{\lambda} \right) = \sum_{j=1}^n \eta \left(\frac{\eta^{-1}(\Delta_j^2)}{\lambda} \right) = 1.$$

Поскольку при $\|x - y\| \leq 1$ верно

$$\sum_{j=1}^n \eta(\eta^{-1}(\Delta_j^2)) = \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2 \leq 1,$$

то $\lambda \leq 1$. При фиксированных значениях $\|x - y\|$ и $\lambda \leq 1$ найдем наибольшее значение A функции

$$\Phi(\{\mu_j\}) = \sum_{j=1}^n \eta \left(\frac{\eta^{-1}(\mu_j)}{\lambda} \right)$$

при условии $\sum_{j=1}^n \mu_j \leq \|x - y\|^2$. Поскольку в силу предложения Φ выпукла вверх, то A достигается в случае, когда

$$\mu_j = \Delta_j^2 = \frac{\|x - y\|^2}{n}, \quad j = \overline{1, n},$$

т.е. $\Delta_j = \|x - y\|/\sqrt{n}$. Тогда $A = n\eta(\tilde{\eta}^{-1}(\frac{\|x - y\|}{\sqrt{n}})\lambda^{-1})$. Поэтому $\omega(f, \|x - y\|) = \lambda$ (≤ 1), где $n\eta(\tilde{\eta}^{-1}(\frac{\|x - y\|}{\sqrt{n}})\lambda^{-1}) = 1$, т.е.

$$\omega(f, t) = \frac{\tilde{\eta}^{-1}(\frac{t}{\sqrt{n}})}{\tilde{\eta}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{n}})} = \frac{\bar{\eta}^{-1}(t)}{\bar{\eta}^{-1}(1)}, \quad t \in [0, a], \quad a = (4^{k+2}(2k+1))^{-1}.$$

Пусть $B_n \subset \mathbb{R}^n$ – единичный шар, $f_{1,\varepsilon} = f|_{B_n}$, $Y = l_\eta^n$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha > 0$, $P > 0$, η – функция, построенная в предложении, $n \in \mathbb{N}$, $Y = l_\eta^n$, $\bar{\eta} = \sqrt{n\eta}$, $\delta \in (0, \tau)$, $\tau = \tau(\bar{\eta}, \alpha, P) > 0$.

Тогда найдутся $f_1 \in C(B_n, Y)$ и $K > 0$, зависящие только от $\bar{\eta}$, α , P , δ , такие, что для любой $\psi \in CH^\alpha(B_n, Y)$: $\|f_1 - \psi\| \leq P\omega(f_1, \delta)$, верно

$$C \geq Kn^{\alpha/2}\omega(f_1, \delta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $k = 2[\alpha + 1] + 1$, $a = (4^{k+2}(2k+1))^{-1}$ положим

$$\tau = \max\{t \mid \bar{\eta}^{-1}(t) \leq (4^{k+4}(2k+1)(P+1))^{-1}\bar{\eta}^{-1}(a)\}.$$

Пусть

$$\varepsilon = \bar{\eta}(4^{k+4}(2k+1)(P+1)\bar{\eta}^{-1}(\delta))(\geq \delta), \quad f_1 = \bar{\eta}^{-1}(1)f_{1,\varepsilon}.$$

Тогда

$$\|f_1 - \psi\| \leq P\bar{\eta}^{-1}(\delta) \leq (4^{k+4}(2k+1))^{-1}\bar{\eta}^{-1}(\varepsilon) = (4^{k+4}(2k+1))^{-1}\omega(f_1, \varepsilon).$$

Пусть $P_n[\tilde{a}, \tilde{b}] = \prod_{i=1}^n [\tilde{a}, \tilde{b}]$ – n -мерный куб, $Q = P[-\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{k-1}{2}T, \frac{1}{\sqrt{n}}]$,

$$\psi_1(x) = 2^{-n} \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^1 \psi\left(\frac{k-1}{2}Ti_1 + (-1)^{i_1}x_1, \dots, \frac{k-1}{2}Ti_n + (-1)^{i_n}x_n\right), \quad x \in Q.$$

Нетрудно видеть, что для любых $x = (x_1, \dots, x_n) \in Q$ и $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) &= f_1\left(x_1, \dots, \frac{k-1}{2}T - x_i, \dots, x_n\right), \\ \psi_1(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) &= \psi_1\left(x_1, \dots, \frac{k-1}{2}T - x_i, \dots, x_n\right). \end{aligned}$$

Кроме того, $\forall v \geq 0 \quad \omega_k(\psi_1, v) \leq \tilde{C}Cv^\alpha$ ($\tilde{C} > 0$ зависит только от k) и $\forall x \in Q$

$$\|\psi_1(x) - f_1(x)\| \leq (4^{k+4}(2k+1))^{-1}\omega(f_1, \varepsilon).$$

Доопределим ψ_1 нулем вне Q . Положим

$$p = \frac{k+1}{2}, \quad h_\nu = \left(0, \dots, 0, \underbrace{\frac{1}{2}T}_\nu, 0, \dots, 0\right)$$

и рассмотрим операторы t_ν , сопоставляющие каждой функции $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow l_\eta^n$ функцию

$$(t_\nu \varphi)(x) = 2^{1-k} \sum_{j=0}^{p-1} C_k^{2j} \varphi(x + 2jh_\nu).$$

Нетрудно видеть, что операторы $\{t_\nu\}$ коммутируют между собой и с оператором Δ_h^k (k -й разности с шагом h). Положим

$$\tilde{Q} = P_n\left[-\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{2k-1}{2}T, \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{k}{2}T\right], \quad t = t_1 \circ \dots \circ t_n,$$

$\psi_2 = t\psi_1$. Несложно показать, что $\forall x \in \tilde{Q}$

$$f_1(x) = tf_1(x), \quad \|f_1(x) - \psi_2(x)\| \leq (4^{k+4}(2k+1))^{-1}\omega(f_1, \varepsilon).$$

ЛЕММА 2. *Найдется $M > 0$, зависящее только от k , такое, что $\forall u > 0$, $\forall x, h \in \mathbb{R}^n$, $[x, x + kh] \subset \tilde{Q}$, $\|h\| \leq u$, выполняется неравенство*

$$\|\Delta_h^k(\psi_2, x)\| \leq Mu^\alpha$$

и

$$\begin{aligned} \forall a_1^\nu &= \left(x_1, \dots, x_{\nu-1}, -\frac{1}{2}T, x_{\nu+1}, \dots, x_n \right), \\ \forall a_2^\nu &= (x_1, \dots, x_{\nu-1}, 0, x_{\nu+1}, \dots, x_n) \in \tilde{Q} \end{aligned}$$

верно

$$\|\psi_2(a_1^\nu) - \psi_2(a_2^\nu)\| \leq MCT^\alpha, \quad \nu = \overline{1, n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой точки $x = (x_1, \dots, x_n) \in \tilde{Q}$ из того, что $\|j_\nu h_\nu\| \leq k\|h_\nu\| \leq \frac{k}{2}T$, следует, что $(x_1 + 2j_1 h_1, \dots, x_n + 2j_n h_n) \in Q$. И поскольку $2^{1-k} \sum_{j=0}^{p-1} C_k^{2j} = 1$, то

$$\begin{aligned} \|t\| &= \|t_1\| = \dots = \|t_n\| = 1, \\ \|\Delta_h^k(\psi_2, x)\| &\leq \|t \Delta_h^k \psi_1\| \leq \tilde{C}Cu^\alpha, \quad \|h\| = u. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \|\psi_2(a_1^\nu) - \psi_2(a_2^\nu)\| &= \|\psi_2(a_2^\nu - h_\nu) - \psi_2(a_2^\nu)\| \\ &\leq \left\| \sum_{j=0}^{p-1} C_k^{2j} \psi_1(a_2^\nu - h_\nu + 2jh_\nu) - \sum_{j=0}^{p-1} C_k^{2j} \psi_1(a_2^\nu + 2jh_\nu) \right\| \\ &= \left\| \sum_{j=0}^{p-1} C_k^{2j} \psi_1(a_2^\nu - h_\nu + 2jh_\nu) - \sum_{j=0}^{p-1} C_k^{2j} \psi_1(a_2^\nu + (k-1)h_\nu - 2jh_\nu) \right\| \\ &= \left\| \sum_{j=0}^{p-1} C_k^{2j} \psi_1(a_2^\nu - h_\nu + 2jh_\nu) - \sum_{j=0}^{p-1} C_k^{k-2j} \psi_1(a_2^\nu + (k-1-2j)h_\nu) \right\| \\ &= \left\| \sum_{j=0}^{p-1} C_k^{2j} \psi_1(a_2^\nu - h_\nu + 2jh_\nu) - \sum_{q=0}^{p-1} C_k^{2q+1} \psi_1(a_2^\nu + 2qh_\nu) \right\| \\ &= \left\| - \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} C_k^i \psi_1(a_2^\nu - h_\nu + ih_\nu) \right\| \leq \tilde{C}Cu^\alpha \leq 2^{-\alpha} \tilde{C}CT^\alpha. \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Пусть $z_j = (-\frac{1}{2}T, \dots, -\frac{1}{2}T, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ ($j = \overline{0, n}$). Рассмотрим n -мерный куб $Q_1 \subset \tilde{Q}$, вершинами которого, в частности, являются точки $\{z_j\}$ ($j = \overline{0, n}$). Тогда f_1 отображает куб Q_1 на n -мерный куб

$$Q_2 = \left\{ (y_1, \dots, y_n) \in l_\eta^n \mid 0 \leq y_i \leq \bar{\eta}^{-1} \left(\frac{1}{2}T\sqrt{n} \right) \bar{\eta}^{-1}(1) = r, \quad i = \overline{1, n} \right\},$$

причем

$$f_1(z_j) = (\underbrace{r, \dots, r}_j, 0, \dots, 0) \quad j = \overline{0, n},$$

и все вершины Q_1 переходят в вершины Q_2 .

Пусть $\mathcal{K}$ – группа ортогональных преобразований, переводящих Q_1 в себя. Тогда для $\forall P \in \mathcal{K}$ рассмотрим ортогональное преобразование $\tilde{P}$ куба Q_2 в себя такое, что для произвольных вершин a и b куба Q_1 таких, что $Pa = b$, верно $\tilde{P}f_1(a) = f_1(b)$. Для любых двух точек $a_j, b_j \in Q_1$, лежащих на противоположных гранях Q_1 и таких, что отрезок $[a_j, b_j]$ перпендикулярен этим граням, верно, что $a_j - b_j = (0, \dots, 0, \pm \frac{1}{2}T, 0, \dots, 0)$. Тогда в силу леммы 2

$$\|\psi_2(a_j) - \psi_2(b_j)\| \leq MCT^\alpha,$$

и поскольку для любого $P \in \mathcal{K}$ точки a_j и b_j переходят в точки, лежащие на противоположных гранях, и отрезок $[Pa_j, Pb_j]$ перпендикулярен этим граням, то

$$\|\psi_2(Pa_j) - \psi_2(Pb_j)\| \leq MCT^\alpha, \quad j = \overline{1, n}.$$

Пусть μ – мера Хаара на группе $\mathcal{K}$. Положим

$$\forall x \in Q_1 \quad \psi_3(x) = \mu(\mathcal{K})^{-1} \int_{\mathcal{K}} \tilde{P}^{-1} \psi_2(Px) d\mu(P).$$

Нетрудно видеть, что

$$\|\psi_3(a_j) - \psi_3(b_j)\| \leq MCT^\alpha, \quad j = \overline{1, m},$$

и

$$\forall P \in \mathcal{K}, \quad \forall x \in Q_1 \quad \psi_3(x) = \tilde{P}^{-1} \psi_3(Px).$$

Рассмотрим два параллельных ребра куба Q_1 : $[c_1, d_1]$ и $[c_2, d_2]$, где

$$c_1 = (0, \dots, 0), \quad d_1 = \left(0, \dots, 0, \underbrace{-\frac{1}{2}T}_j, 0, \dots, 0\right),$$

$$c_2 = z_{j-1}, \quad d_2 = z_j, \quad j = \overline{1, m}.$$

Пусть $P_1, P_2 \in \mathcal{K}$ таковы, что сужение их на куб $Q(j)$, натянутый на точки

$$\left\{ \left(0, \dots, 0, \underbrace{-\frac{1}{2}T}_i, 0, \dots, 0\right) \right\}_{i=0}^j,$$

представляет собой соответственно центральную симметрию куба $Q(j)$ относительно его центра и симметрию относительно оси куба $Q(j)$, параллельной ребрам $[c_1, d_1]$, $[c_2, d_2]$. Тогда $c_1 = P_1 d_2$, $c_1 = P_2 c_2$, $d_1 = P_1 c_2$, $d_1 = P_2 d_2$ и для $\tilde{c}_i = \psi_3(c_i)$, $\tilde{d}_i = \psi_3(d_i)$ ($i = 1, 2$) верно $\tilde{c}_1 = \tilde{P}_1 \tilde{d}_2$, $\tilde{c}_1 = \tilde{P}_2 \tilde{c}_2$, $\tilde{d}_1 = \tilde{P}_1 \tilde{c}_2$, $\tilde{d}_1 = \tilde{P}_2 \tilde{d}_2$. Следовательно, $[\tilde{c}_1, \tilde{d}_1]$ и $[\tilde{c}_2, \tilde{d}_2]$ симметричны относительно центра

куба $f_1(Q(j))$ и его оси, параллельной e_j . Отсюда следует, что $[\tilde{c}_1, \tilde{d}_1]$ и $[\tilde{c}_2, \tilde{d}_2]$ параллельны этой оси, а следовательно, $\psi_3(z_j) - \psi_3(z_{j-1})$ параллельно e_j . Поэтому $\|\psi_3(0) - \psi_3(z_n)\| \leq \lambda$, где λ таково, что $n\eta\left(\frac{MCT^\alpha}{\lambda}\right) = 1$. Следовательно,

$$\|\psi_3(0) - \psi_3(z_n)\| \leq \lambda = \frac{MCT^\alpha}{\tilde{\eta}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \leq \frac{\widetilde{MC}\varepsilon^\alpha n^{-\alpha/2}}{\bar{\eta}^{-1}(1)},$$

где $\widetilde{M} > 0$ зависит только от k .

С другой стороны, для

$$f_2(x) = \mu(\mathcal{K})^{-1} \int_{\mathcal{K}} \tilde{P}^{-1} f_1(Px) d\mu(P)$$

верно

$$f_2(0) = f_1(0) = 0, \quad f_2(z_n) = f_1(z_n) = \sum_{j=1}^n \bar{\eta}^{-1}\left(\frac{1}{2}T\sqrt{n}\right) \bar{\eta}^{-1}(1) e_j,$$

$$\|f - \psi_3\| \leq (4^{k+4}(2k+1))^{-1} \omega(f_1, \varepsilon).$$

Тогда $\|f_2(z_n) - f_2(0)\| = \lambda_1$, где λ_1 таково, что

$$\sum_{j=1}^n \eta\left(\frac{\tilde{\eta}^{-1}\left(\frac{1}{2}T\right) \bar{\eta}^{-1}(1)}{\lambda_1}\right) = 1,$$

т.е.

$$\lambda_1 = \tilde{\eta}^{-1}\left(\frac{1}{2}T\right) = \bar{\eta}^{-1}\left(\frac{1}{2}T\sqrt{n}\right)$$

$$= \omega\left(f_1, \frac{1}{2}(4^{k+1}(2k+1))^{-1}\varepsilon\right) \geq (4^{k+2}(2k+1))^{-1} \omega(f_1, \varepsilon).$$

Следовательно,

$$(4^{k+4}(2k+1))^{-1} \omega(f_1, \varepsilon) \geq \|f_2(z_n) - \psi_3(z_n)\|$$

$$\geq \|f_2(z_n) - f_2(0)\| - \|f_2(0) - \psi_3(0)\| - \|\psi_3(z_n) - \psi_3(0)\|$$

$$\geq (4^{k+2}(2k+1))^{-1} \omega(f_1, \varepsilon) - (4^{k+4}(2k+1))^{-1} \omega(f_1, \varepsilon) - \frac{\widetilde{MC}\varepsilon^\alpha n^{-\alpha/2}}{\bar{\eta}^{-1}(1)}.$$

Отсюда

$$\frac{\widetilde{MC}\varepsilon^\alpha n^{-\alpha/2}}{\bar{\eta}^{-1}(1)} \geq (4^{k+3}(2k+1))^{-1} \omega(f_1, \varepsilon),$$

$$C \geq \tilde{K} n^{\alpha/2} \bar{\eta}^{-1}(1) \frac{\omega(f_1, \varepsilon)}{\varepsilon^\alpha} \geq \tilde{K} n^{\alpha/2} \bar{\eta}^{-1}(1) \frac{\omega(f_1, \delta)}{\varepsilon^\alpha} \geq K n^{\alpha/2} \omega(f_1, \delta).$$

Теорема доказана.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для произвольной функции $\Psi(n) = o(n^{\alpha/2})$ ($n \rightarrow \infty$) найдутся такие g и η , что в условиях теоремы 2 найдется $K_1 = K_1(\alpha, \eta, P, \delta) > 0$ такое, что $C \geq K_1 \Psi(n) \omega(f_1, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдется выпуклая вниз функция $\varphi \in C^\infty[0, 1]$ такая, что $0 = \varphi(0) \leq \varphi(t) \leq \varphi(1) = 1$ ($t \in [0, 1]$), $0 < \varphi' \leq 1$ на $(0, 1/2]$ и $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall t \in [0, 1]$, $\forall n \geq n_0$ $\varphi^{-1}(\frac{1}{n}) \geq \Psi(n)n^{-\alpha/2}$.

Пусть $\theta \in C^\infty[0, 1]$ – выпуклая вниз возрастающая функция такая, что $0 \leq \theta \leq \varphi/\varphi'$, и $0 < r = \theta' \leq 1$ на $(0, 1]$. Поскольку $r \uparrow$ на $(0, 1]$, то $0 < \int_0^t r(v)dv \leq r(t) \leq 1$ на $(0, 1]$.

Положим

$$g(u) = \int_u^1 \left(t^2 \int_0^t r(v) dv \right)^{-1} dt, \quad u \in \left(0, \frac{1}{2}\right].$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\ln(-g'(u)))' &= -\frac{2u \int_0^u r(v) dv + u^2 r(u)}{u^2 \int_0^u r(v) dv} < -\frac{2}{u}, \\ \left(\frac{1}{g'(u)} \right)' &= -2u \int_0^u r(v) dv - u^2 r(u) > -1, \quad u \in \left(0, \frac{1}{2}\right]. \end{aligned}$$

Продолжим g на $(0, +\infty)$ с сохранением гладкости и так, чтобы $(\ln(-g'(u)))' \leq -2/u$ на $(0, +\infty)$. Поскольку $\forall u \in (0, 1/2]$

$$g(u) \geq \int_u^1 \left(\int_0^t r(v) dv \right)^{-1} dt \geq \int_u^1 \frac{d\varphi(t)}{\varphi(t)} = -\ln \varphi(u),$$

то

$$\eta(u) \leq \int_0^u e^{-g(t)} dt \leq e^{-g(u)} \leq \varphi(u).$$

Так как $\bar{\eta}^{-1}(1) = \eta^{-1}(1/n)$, то

$$n^{\alpha/2} \bar{\eta}^{-1}(1) \geq n^{\alpha/2} \varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \geq \Psi(n), \quad n \geq n_0,$$

что и доказывает утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\alpha > 0$, $P > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует такое $\delta = \delta(\alpha, P) > 0$, что для любых $X \in (B)$ и линейного непрерывного оператора $A: C(B_n, X) \rightarrow \mathcal{H}^\alpha(B_n, X)$ таких, что

$$\forall \varphi \in C(B_n, X) \quad \|\varphi - A\varphi\| \leq P\omega(\varphi, \delta),$$

найдутся $f \in C(B_n, X)$ и $K = K(\alpha, P) > 0$ такие, что

$$Af \notin Kn^{\alpha/2}\omega(f, 1)H^\alpha(B_n, X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что для любых $\alpha > 0$, $P > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\Psi(n) = o(n^{\alpha/2})$ ($n \rightarrow \infty$) существует $\delta = \delta(\alpha, P, \Psi) > 0$ такое, что для любых $X \in (B)$ и линейного непрерывного оператора $A: C(B_n X) \rightarrow \mathcal{H}^\alpha(B_n, X)$ таких, что $\forall \varphi \in C(B_n, X) \quad \|\varphi - A\varphi\| \leq P\omega(\varphi, \delta)$, найдутся $f \in C(B_n, X)$ и $K = K(\alpha, P, \Psi) > 0$ такие, что

$$Af \notin K\Psi(n)\omega(f, 1)H^\alpha(B_n, X).$$

Действительно, если бы утверждение теоремы 3 не выполнялось, то существовали бы последовательности положительных чисел $\{\delta_n\}$, $\{K_n\}$ и линейных непрерывных операторов $\{A_n\}: C(B_n, X) \rightarrow \mathcal{H}^\alpha(B_n, X)$ такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n = 0$, и $\forall \varphi \in C(B_n, X)$

$$\|\varphi - A_n\varphi\| \leq P\omega(\varphi, \delta_n), \quad A_n\varphi \in K_n n^{\alpha/2} \omega(\varphi, 1)H^\alpha(B_n, X),$$

а это противоречило бы вышесказанному.

Пусть τ такое, как определено в теореме 2, $\delta = \tau/2$. Рассмотрим сначала случай $X = \mathbb{R}$. Пусть Y и $f_1: B_n \rightarrow Y$ такие же, как в теореме 2, Y^* – пространство, сопряженное с Y , а $y_i^* \in Y^*$ ($i = \overline{1, n}$) – функционал, сопоставляющий $y \in Y$ ее i -ю координату относительно естественного базиса $\{e_i\}$. Рассмотрим

$$g = \sum_{i=1}^n A(y_i^*(f_1))e_i \in \mathcal{H}^\alpha(B_n, Y).$$

Тогда для $S^* = \{y^* \in Y^* \mid \|y^*\| = 1\}$ верно

$$\begin{aligned} \|f_1 - g\| &= \sup_{y^* \in S^*} |y^*(f_1 - g)| = \sup_{\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^* \in S^*} \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^*(f_1 - g) \right| \\ &= \sup_{\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^* \in S^*} \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^*(f_1) - \sum_{i=1}^n A(\alpha_i y_i^*(f_1)) \right| \\ &= \sup_{y^* \in S^*} |y^* f_1 - A(y^* f_1)| \leq \sup_{y^* \in S^*} \omega(y^* f_1, \delta) \leq \omega(f_1, \delta). \end{aligned}$$

В силу утверждения найдется $K = K(\alpha, P, \Psi) > 0$ такое, что $g \notin \frac{1}{2}K\Psi(n) \times \omega(f_1, 1)H^\alpha(B_n, Y)$. Поэтому найдется $y^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^* \in S^*$ такой, что

$$y^*(g) \notin \frac{1}{4}K\Psi(n)\omega(f_1, 1)H^\alpha(B_n, \mathbb{R}).$$

Следовательно, для $f_0 = y^*(f_1)$ верно

$$\begin{aligned} A(f_0) &= A(y^* f_1) = A\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^*(f_1)\right) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^*\right)(g) \\ &= y^*(g) \notin \frac{1}{4}K\Psi(n)\omega(f_1, 1)H^\alpha(B_n, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Тем самым случай $X = \mathbb{R}$ доказан.

Случай произвольного X следует из случая $X = \mathbb{R}$. Действительно, зафиксируем произвольные $y \in X$, $y^* \in X^*$: $\|y\| = \|y^*\| = y^*(y) = 1$, и построим оператор $B: C(B_n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}^\alpha(B_n, \mathbb{R})$, положив $\forall \varphi \in C(B_n, \mathbb{R})$ $B\varphi = y^*A(y\varphi)$. Тогда

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in C(B_n, \mathbb{R}) \quad \|\varphi - B\varphi\| &= \|y^*(y\varphi - A(y\varphi))\| \leq \|y\varphi - A(y\varphi)\| \\ &\leq P\omega(y\varphi, \delta) \leq P\omega(\varphi, \delta). \end{aligned}$$

В силу доказанного выше существует $f_0 \in C(B_n, \mathbb{R})$ такое, что $Bf_0 \notin \frac{1}{4}K\Psi(n) \times \omega(f_0, 1)H^\alpha(B_n, \mathbb{R})$. Поэтому

$$A(yf_0) \notin \frac{1}{4}K\Psi(n)\omega(yf_0, 1)H^\alpha(B_n, X).$$

Теорема доказана.

Пусть $\bar{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \chi(x_j)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\bar{f}_{1,\varepsilon} = \bar{f}|_{B_n}$. Тогда $\bar{f}$, $\bar{f}_{1,\varepsilon}$ 1-липшицевы, $a = a(P) = (4^{k+4}(2k+1)(P+1))^{-2}$ ($P > 0$).

ЛЕММА 3. Пусть $\alpha > 2$, $n \in \mathbb{N}$, $P > 0$. Тогда существует $f_1 \in C(B_n, \mathbb{R})$ такая, что для любых $\delta \in (0, a)$ и $\psi \in C^{\omega(\frac{f_1, \delta}{\delta^\alpha})}H^\alpha(B_n, \mathbb{R})$ таких, что $\|f_1 - \psi\| \leq P\omega(f_1, \delta)$, найдется $K > 0$, зависящее только от α , такое, что $C \geq Kn^{(\alpha-2)/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\varepsilon = \delta / (4^{k+4}(2k+1)(P+1))$, $f_1 = \bar{f}_{1,\varepsilon}$ верно

$$\|f_1 - \psi\| \leq (4^{k+4}(2k+1))^{-1}\omega(f_1, \varepsilon).$$

Пусть

$$\begin{aligned} P_n[a, b] &= \prod_{i=1}^n [a, b], \quad Q = P_n \left[-\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{k-1}{2}T, \frac{1}{\sqrt{n}} \right], \quad x \in Q, \\ \psi_1(x) &= 2^{-n} \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^1 \psi \left(\frac{k-1}{2}Ti_1 + (-1)^{i_1}x_1, \dots, \frac{k-1}{2}Ti_n + (-1)^{i_n}x_n \right). \end{aligned}$$

Тогда для любых точек $x = (x_1, \dots, x_n) \in Q$ и $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} \psi_1(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) &= \psi_1 \left(x_1, \dots, \frac{k-1}{2}T - x_i, \dots, x_n \right), \\ f_1(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) &= f_1 \left(x_1, \dots, \frac{k-1}{2}T - x_i, \dots, x_n \right). \end{aligned}$$

Кроме того, $\omega_k(\psi_1, v) \leq \tilde{C}Cv^\alpha \quad \forall v \geq 0$, $\tilde{C} = \tilde{C}(k) > 0$ и $\forall x \in Q$

$$|\psi_1(x) - f_1(x)| \leq (4^{k+4}(2k+1))^{-1}\omega(f_1, \varepsilon).$$

Доопределим ψ_1 нулем вне Q . Положим

$$p = \frac{k+1}{2}, \quad h_\nu = \left(0, \dots, 0, \underbrace{\frac{1}{2}T}_\nu, 0, \dots, 0 \right)$$

и рассмотрим операторы t_ν , сопоставляющие каждой функции $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ функцию

$$(t_\nu \varphi)(x) = 2^{1-k} \sum_{j=0}^{p-1} C_k^{2j} \varphi(x + 2jh_\nu).$$

Нетрудно видеть, что операторы $\{t_\nu\}$ коммутируют между собой и с оператором Δ_h^k (k -й разности с шагом h). Положим

$$\tilde{Q} = P_n \left[-\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{2k-1}{2}T, \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{k}{2}T \right], \quad t = t_1 \circ \dots \circ t_n, \quad \psi_2 = t\psi_1.$$

Несложно показать, что $\forall x \in \tilde{Q}$

$$|f_1(x) - \psi_2(x)| \leq (4^{k+4}(2k+1))^{-1} \omega(f_1, \varepsilon).$$

Так же, как и в лемме 2, можно показать, что найдется $M > 0$, зависящее только от α и такое, что $\forall v > 0, \forall x, h \in \mathbb{R}^n, [x, x + kh] \subset \tilde{Q}, \|h\| \leq v$,

$$|\Delta_h^k(\psi_2, x)| \leq MCv^\alpha$$

и $\forall a_1^\nu = (x_1, \dots, x_{\nu-1}, -\frac{1}{2}T, x_{\nu+1}, \dots, x_n), a_2^\nu = (x_1, \dots, x_{\nu-1}, 0, x_{\nu+1}, \dots, x_n) \in \tilde{Q}$

$$|\psi_2(a_1^\nu) - \psi_2(a_2^\nu)| \leq MCT^\alpha, \quad \nu = \overline{1, n}.$$

Пусть

$$z_j = \left(\underbrace{-\frac{1}{2}T, \dots, -\frac{1}{2}T}_j, 0, \dots, 0 \right) \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{0, n}.$$

Тогда

$$|\psi_2(z_0) - \psi_2(z_n)| \leq nMCT^\alpha = \widetilde{MC}n^{(2-\alpha)/2}\varepsilon^\alpha,$$

где $\widetilde{M} > 0$ зависит только от α .

С другой стороны, $f_1(0) = 0, f_1(z_n) = \frac{1}{2}\sqrt{n}T$ и

$$\begin{aligned} |f_1(z_n) - f_1(0)| &= \frac{1}{2}\sqrt{n}T \geq (4^{k+2}(2k+1))^{-1} \omega(f_1, \varepsilon), \\ (4^{k+4}(2k+1))^{-1} \omega(f_1, \varepsilon) &\geq |f_1(z_n) - \psi_2(z_n)| \\ &\geq |f_1(z_n) - f_1(0)| - |f_1(0) - \psi_2(0)| - |\psi_2(z_n) - \psi_2(0)| \\ &\geq (4^{k+2}(2k+1))^{-1} \omega(f_1, \varepsilon) - (4^{k+4}(2k+1))^{-1} \omega(f_1, \varepsilon) \\ &\quad - \widetilde{MC}n^{\frac{2-\alpha}{2}}\varepsilon^\alpha. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\widetilde{MC}n^{\frac{2-\alpha}{2}} \geq 2(4^{k+3}(2k+1))^{-1} \frac{\omega(f_1, \varepsilon)}{\varepsilon^\alpha} \geq C_2 \frac{\omega(f_1, \delta)}{\delta^\alpha},$$

т.е. $C \geq C_2 n^{\frac{\alpha-2}{2}}$, где $C_2 > 0$ зависит только от α . Отсюда следует утверждение леммы.

Следующее утверждение доказано в [2].

ЛЕММА 4. Существует $A > 0$ такое, что для любых $n \in \mathbb{N}$, $X \in (B)$, $\dim X = n$ ($\|\cdot\|$ – норма в X), существуют подпространство $Y \subset X$, $\dim Y = [\ln n] + 1$, и евклидова норма $\|\cdot\|_2$ такие, что $\forall x \in Y$

$$A^{-1}\|x\| \leq \|x\|_2 \leq A\|x\|.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\alpha > 2$, $P > 0$. Тогда существует $M > 0$ такое, что для любых $n \in \mathbb{N}$, $X \in (B)$, $\dim X = n$, $\delta \in (0, a)$ найдется липшицева функция $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ ($B \subset X$ – единичный шар) такая, что для любой $\varphi \in C \frac{\omega(f, \delta)}{\delta^\alpha} H^\alpha(B, \mathbb{R})$: $\|f - \varphi\| \leq P\omega(f, \delta)$ верно $C \geq M(\ln n)^{\frac{\alpha-2}{2}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4 найдутся $Y \subset X$, $\dim Y = [\ln n] + 1 = m$, и евклидова норма $\|\cdot\|_2$ такие, что $\forall x \in Y$

$$A^{-1}\|x\| \leq \|x\|_2 \leq A\|x\|$$

($A > 0$ – абсолютная константа).

Пусть $B(r) = \{x \in Y \mid \|x\|_2 \leq r\}$ ($r > 0$). Найдется $r_0 = r_0(A) > 0$ такое, что $B(r_0) \subset B \cap Y$. Пусть $f_0(x) = f_1(\frac{x}{r_0})$, $x \in B(r_0)$, где f_1 – функция из леммы 3. В [3] было доказано, что с любого непустого подмножества $M \subset X \in (B)$ произвольную ограниченную функцию $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$ можно продолжить с сохранением ее модуля непрерывности на все X . Поэтому найдется липшицева функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $f|_{B(r_0)} \equiv f_0$. В силу леммы 3 для любой $\psi \in C \frac{\omega(f, \delta)}{\delta^\alpha} H^\alpha(B, \mathbb{R})$ такой, что

$$\|f_0 - \psi\|_{B(r_0)} \leq \|f - \psi\| \leq P\omega(f, \delta), \quad \delta \in (0, a),$$

верно, что $C \geq M m^{\frac{\alpha-2}{2}} = M(\ln n)^{\frac{\alpha-2}{2}}$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Царьков И. Г. Поперечники и неравенство типа Джексона для абстрактных функций // Тр. МИРАН. 1992. Т. 198. С. 219–231.
2. Figiel T., Lindenstrauss J., Milman V. D. The dimension of almost spherical section of convex bodies // Acta Math. 1977. V. 139. № 1–2. P. 53–94.
3. Czipser J., Geher L. Extension of functions satisfying a Lipschitz condition // Acta Math. Acad. Sc. Hung. 1955. V. 6. № 1–2. P. 213–222.
4. Царьков И. Г. Линейные методы в некоторых задачах сглаживания // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 6. С. 64–87.

Поступило в редакцию
28.03.1996