Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Алимов, Сохранение аппроксимативных свойств
подмножеств чебышевских множеств и солнц в $\ell^\infty(n)$,
Изв. РАН. Сер. матем., 2006, том 70, выпуск 5, 3–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/im1115>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 12:50:24

УДК 517.982.256

А. Р. Алимов

Сохранение аппроксимативных свойств подмножеств чебышевских множеств и солнц в $\ell^\infty(n)$

Описаны подмножества $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, для которых пересечение Π с чебышевским множеством (солнцем, строгим солнцем) M в $\ell^\infty(n)$ сохраняет аппроксимативные свойства M в $\ell^\infty(n)$.

Библиография: 23 наименования.

§ 1. Введение

Подмножество $M \neq \emptyset$ линейного нормированного пространства $(X, \|\cdot\|)$ называется *чебышевским множеством*, если для каждой точки $x \in X$ множество $P_M x = \{y \in M \mid \|x - y\| = \rho(x, M)\}$ ее ближайших точек из M состоит из одной точки. Здесь $\rho(x, M) = \inf_{z \in M} \|x - z\|$ – расстояние от x до M . Множество $M \subset X$ называется *солнцем*, если для каждой точки $x \in X \setminus M$ существует точка $y \in P_M x$ такая, что

$$y \in P_M[(1 - \lambda)y + \lambda x] \quad \forall \lambda \geq 0; \quad (1)$$

M называется *строгим солнцем*, если $P_M x \neq \emptyset$ для каждой точки $x \in X \setminus M$ и утверждение (1) выполнено для каждой точки $y \in P_M x$. В конечномерном пространстве каждое чебышевское множество является солнцем [1, теорема 4.13]. О чебышевских множествах, солнцах и строгих солнцах см. [2]–[10].

В качестве примера чебышевского множества можно указать подпространство $\mathcal{P}_m$ многочленов степени не выше m в $C[0, 1]$, множество рациональных дробей $R_{m,n} = \{p_m/q_n \in C[0, 1] \mid p_m \in \mathcal{P}_m, q_n \in \mathcal{P}_n\}$ в $C[0, 1]$ и прямую на евклидовой плоскости. Все эти множества также являются солнцах.

Следуя работам [11]–[13], для $f_1, f_2: Q \rightarrow Y$ определим *интервал* $\llbracket f_1, f_2 \rrbracket$ функций:

$$\llbracket f_1, f_2 \rrbracket = \{f \in C(Q, Y) \mid f(t) \in [f_1(t), f_2(t)] \quad \forall t \in Q\}.$$

Здесь Q – топологический компакт, Y – некоторое множество значений.

Множество $M \subset C(Q, Y)$ называется *промежуток*, если для всех функций $f_1, f_2 \in M$ выполнено $\llbracket f_1, f_2 \rrbracket \subset M$. Интервал $\llbracket f_1, f_2 \rrbracket \subset M$ называется *интервалом II-го типа* [12], [13], если $Y = \mathbb{R}$, $f_1(t) \leq f_2(t)$, функция f_1 полунепрерывна сверху на Q , а f_2 – снизу. В работах [12], [13] было показано, что *подмножество $M \subset C(Q, R)$ является замкнутым промежутком, если и только если M является интервалом II-го типа*. Об аппроксимативных и геометрических свойствах интервалов функций см. [11]–[15].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-01-00160).

В теореме 1 охарактеризованы замкнутые множества $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, пересечение с которыми чебышевского множества (солнца, строгого солнца) M в $\ell^\infty(n)$ сохраняет (в естественной постановке) аппроксимативные свойства множества M . Оказывается, что такие множества Π в точности являются замкнутыми промежутками в $\mathbb{R}^n$. В теоремах 2–4 получены новые характеристики чебышевских множеств, солнц и строгих солнц в $\ell^\infty(n)$ в терминах аппроксимативных свойств их пересечений с замкнутыми промежутками в $\mathbb{R}^n$. К примеру, множество $M \subset \mathbb{R}^n$ является чебышевским в $\ell^\infty(n)$, если и только если для любых точек $x, y \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\llbracket x, y \rrbracket \cap M \neq \emptyset$, любая точка из $\llbracket x, y \rrbracket$ имеет единственную ближайшую в $\llbracket x, y \rrbracket \cap M$. Аналогичные утверждения получены для солнц и строгих солнц в $\ell^\infty(n)$.

§ 2. Вспомогательные результаты

В настоящем параграфе приведены формулировки некоторых характеристик солнц (теорема А), строгих солнц (теорема В) и чебышевских множеств (теорема С) в $\ell^\infty(n)$, которые нам понадобятся ниже. Отметим, что в двумерном банаховом пространстве чебышевские множества охарактеризованы П. Грубером [16], а солнца – Х. Беренсом и Л. Хетцельтом [17]. В конечномерных гладких пространствах задача описания чебышевских множеств и солнц довольно проста – в таких пространствах все чебышевские множества и солнца выпуклы. Значительно интереснее негладкий случай. Рассмотрим случай $\ell^\infty(n)$.

Ниже важную роль будет играть понятие монотонно линейно связного множества (см., например, [8]): подмножество $M \subset \ell^\infty(n)$ называется *монотонно линейно связным*, если любые две точки $x, y \in M$ могут быть соединены непрерывной кривой $k(\cdot) \subset M$ – “монотонной дугой”, координатные функции $k^{(i)}(t)$, $i = 1, \dots, n$, монотонны по t при каждом i . Отметим [17], что замкнутое монотонно линейно связное множество в $\ell^\infty(n)$ является P -ациклическим¹.

Следующий результат, установленный Х. Беренсом и Л. Хетцельтом [4] и развитый А. Л. Брауном в [5] (мы его формулируем в наших терминах), сыграл очень важную роль в изучении геометрического строения чебышевских множеств и солнц в пространствах с равномерной нормой. Благодаря ему Беренсу и Хетцельту удалось впервые предъявить негладкое конечномерное пространство размерности больше двух, в котором все солнца P -ациклически (см. [4]–[8], [18], [19]).

ТЕОРЕМА А (геометрическая характеристика солнц в $\ell^\infty(n)$). *Множество $M \subset \ell^\infty(n)$, $M \neq \emptyset$, является солнцем в $\ell^\infty(n)$ тогда и только тогда, когда M замкнуто и монотонно линейно связно.*

Для подмножества $M \subset \ell^\infty(n)$ определим²

$$\text{eqc}(M) := \{i \in \{1, \dots, n\} \mid x^{(i)} = y^{(i)} \ \forall x, y \in M\},$$

$$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}), \quad y = (y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) \in \ell^\infty(n).$$

¹Множество M *ациклично*, если оно непусто, компактно и его группы гомологий H_q , $q \geq 1$, и приведенная группа $\tilde{H}_0$ тривиальны. Напомним, что стягиваемое (в частности, выпуклое) компактное подмножество линейного нормированного пространства ациклично; ациклическое множество связно; гомеоморфный образ ациклического множества ацикличесок.

²eqc – аббревиатура выражения “equal coordinates” – равные координаты.

Для $x, y \in \ell^\infty(n)$ и $M \subset \ell^\infty(n)$ определим:

- 1) $x \not\equiv_M y$, если $x^{(i)} \neq y^{(i)}$ для всех $i \notin \text{eqc}(M)$;
- 2) $x \equiv y$, если $x^{(i)} \neq y^{(i)}$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Следуя работе [7], под *основным кокрестом* в $\ell^\infty(n)$ мы понимаем подмножество $\text{csg}(x) = \{y \in \ell^\infty(n) \mid \text{card } \text{eqc}(y, x) \geq 1\}$, вектор $x \in \ell^\infty(n)$ фиксирован, а под *кокрестом по отношению к подмножеству* $J \subset \{1, \dots, n\}$, мы будем подразумевать множество

$$\text{csg}_J(x) = \{y \in \ell^\infty(n) \mid y^{(i)} = \text{const}(i), i \in J, \text{card}(\text{eqc}(x, y) \cap J) \geq 1\}.$$

Окончательно, *кокрест* – это любое множество $A \subset \ell^\infty(n)$ такое, что $A \subset \text{csg}_{\text{eqc}(A)}(x)$ для некоторого $x \in \ell^\infty(n)$.

Напомним, что множество $M \subset \ell^\infty(n)$ называется *строго монотонно линейно связным* [7], если:

- 1) M монотонно линейно связно;
- 2) при $x, y \in M$ и $x \not\equiv_M y$ найдется монотонная кривая $k(t) \subset M$, $0 \leq t \leq 1$, соединяющая x и y , у которой координатные функции $k^{(i)}(t)$ монотонны по t для всех $i = 1, \dots, n$ и строго монотонны для всех $i \notin \text{eqc}(M)$ (такую кривую будем называть *строго монотонной кривой* относительно множества M).

Следующая теорема [7] описывает строгие солнца в $\ell^\infty(n)$. Здесь отметим, что Б. Брозовский и Р. Вегман [20], Д. Амир и Ф. Дойч [21], Ч. Данхем [22] и Д. Браесс [3] охарактеризовали замкнутые множества $M \subset C(Q)$, Q – метризуемый компакт, для которых выполнено (1) при любых $x \in X \setminus M$ и $y \in P_M x$ (при этом не предполагается, что $P_M x \neq \emptyset$ для всех $x \in X$).

ТЕОРЕМА В (геометрическая характеристика строгих солнц в $\ell^\infty(n)$). Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$, замкнуто. Тогда M является строгим солнцем в $\ell^\infty(n)$, если и только если M строго монотонно линейно связно и не является кокрестом.

Следующий результат [6], характеризующий чебышевские множества в пространстве $\ell^\infty(n)$, является, несомненно, наиболее ожидаемым результатом геометрической теории приближений в $\ell^\infty(n)$, особенно после открытия Беренсом и Хетцельтом характеристики строгих солнц в $\ell^\infty(n)$ (теорема А).

Напомним необходимые определения.

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$. Посредством $\text{sAff}_k(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество всех аффинных подпространств из $\mathbb{R}^n$ размерности k , каждое из которых параллельно некоторой k -мерной грани единичного шара B пространства $\ell^\infty(n)$. Иными словами, $\text{sAff}_k(\mathbb{R}^n)$ состоит из аффинных подпространств вида $\text{lin}\{e_{i_1}, \dots, e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\} + x$, $x \in \mathbb{R}^n$; здесь $e_1, \dots, e_n$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Элементы из $\text{sAff}_k(\mathbb{R}^n)$ мы будем называть *аффинными координатными подпространствами* (при этом для краткости иногда не используя слово “аффинное”). Если $m < k \leq n$ и $P \in \text{sAff}_k(\mathbb{R}^n)$, то $Q \in \text{sAff}_m(P)$ означает, что $Q \in \text{sAff}_m(\mathbb{R}^n)$ и $Q \subset P$. Отметим, что любое координатное подпространство в $\mathbb{R}^n$ является промежутком.

Далее, пусть $M \subset \mathbb{R}^n$, $2 \leq k \leq n$, $P \in \text{sAff}_k(\mathbb{R}^n)$, $Q \in \text{sAff}_{k-1}(P)$. Говорим, что Q – *локально опорная гиперплоскость* к множеству M в подпространстве P ($Q \in \text{locTan}_P(M)$), если найдутся точка $x \in P \cap M$ и ее окрестность $\mathcal{O}(x)$ в P такие, что Q является опорной гиперплоскостью к $M \cap \mathcal{O}(x)$ в P . Утверждение, что Q – *опорная гиперплоскость* к множеству $M \cap P$ в подпространстве P будем

понимать обычным образом и записывать в виде $Q \in \text{Tap}_P(M)$. Важность координатных подпространств для теории приближений показывают теоремы **C** и **D** (установленные в работе [6]).

ТЕОРЕМА C (геометрическая характеристика чебышевских множеств в пространстве $\ell^\infty(n)$). *Множество $M \neq \emptyset$ является чебышевским в $\ell^\infty(n)$ тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия:*

- а) множество M замкнуто;
- б) множество $M \cap P$ связано для любых $k = 1, \dots, n$ и $P \in \text{cAff}_k(\mathbb{R}^n)$;
- в) для любых $k = 2, \dots, n$, $P \in \text{cAff}_k(\mathbb{R}^n)$ и $Q \in \text{cAff}_{k-1}(P)$ из условия $Q \in \text{locTap}_P(M)$ вытекает, что $Q \in \text{Tap}_P(M)$ и пересечение $Q \cap M$ одноточечно.

Утверждение **б)** следующей теоремы установлено в [4], а утверждения **а)**, **в)** – в [6]. Этот результат является прямым предшественником теорем 1–4.

ТЕОРЕМА D. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq k \leq n-1$ и $H \in \text{cAff}_k(\mathbb{R}^n)$ – координатное аффинное подпространство, норма на H индуцирована нормой $\|\cdot\|_\infty$ в $\mathbb{R}^n$. Пусть $M \cap H \neq \emptyset$. Тогда:

- а) если M – чебышевское множество в $\ell^\infty(n)$, то $M \cap H$ – чебышевское множество в H ;
- б) если M – солнце в $\ell^\infty(n)$, то $M \cap H$ – солнце в H ;
- в) если M – строгое солнце в $\ell^\infty(n)$, то возможны два варианта (оба – реализуемые): или $M \cap H$ – строгое солнце в H , или $M \cap H$ – солнце, но не строгое солнце в H , в последнем случае найдется такой опорный конус $K = \hat{K}(\xi, \zeta) \subset \mathbb{R}^n$ линейной размерности³ не меньше k , что $H \subset \text{bd } K$ и $\text{int } K \cap M = \emptyset$, при этом $M \not\subset H$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если подпространство $G \subset \mathbb{R}^n$ не является координатным, то можно построить такое чебышевское множество в $\ell^\infty(n)$, что пересечение $M \cap G$ не стягиваемо в G и, следовательно, не может быть чебышевским множеством ни при какой норме или несимметричной норме на G .

Для ограниченного множества $\emptyset \neq M \subset \ell^\infty(n)$ положим (см. [5]): $m(M)$ – оболочка Банаха–Мазура множества M , т. е. пересечение всех замкнутых шаров $B(x, r)$ в $\ell^\infty(n)$, содержащих M . Для краткости далее обозначаем $m(\{x, y\}) = m(x, y)$.

Несложно установить (см., например, [5], [8]), что для любых $x, y \in C(Q)$

$$m(x, y) = \llbracket x, y \rrbracket = \{z \in C(Q) \mid z(q) \in [x(q), y(q)], q \in Q\}; \quad (2)$$

здесь Q – метризуемый компакт.

§ 3. Основные результаты

В настоящем параграфе мы формулируем и доказываем основные результаты статьи. В теореме 1 охарактеризованы замкнутые множества $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, пересечение с которыми чебышевского множества (солнца, строгого солнца) M

³Напомним, что под линейной размерностью выпуклого множества $C \subset \mathbb{R}^n$ понимается размерность максимального аффинного подпространства, содержащегося в C . Опорный конус $\hat{K}(x, y)$ определяется как $\{z \in \ell^\infty(n) \mid [z, y] \cap \bar{B}(x, \|x - y\|) \neq \emptyset\}$ (см. [1, гл. 3]); $\bar{B}(x, r)$ – открытый шар с центром x и радиусом r ; $\text{bd } K$ – граница конуса K . Понятно, что для опорного конуса $\hat{K}(x, y)$ в $\ell^\infty(n)$ такое максимальное подпространство всегда можно выбрать координатным.

в $\ell^\infty(n)$ сохраняет (в естественной постановке) аппроксимативные свойства множества M .

Определим⁴

$$T(M) = \{x \in X \mid \text{card } P_M x = 1\};$$

иначе говоря, $T(M)$ состоит из точек, имеющих единственную ближайшую в M . В этих терминах множество M – чебышевское, если $T(M) = X$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\emptyset \neq \Pi \subset \mathbb{R}^n$. Имеют место следующие утверждения:

- а) Π является замкнутым промежутком в $\ell^\infty(n)$, если и только если $\Pi \cap M$ является солнцем в $\ell^\infty(n)$ для всякого солнца M в $\ell^\infty(n)$, $M \cap \Pi \neq \emptyset$;
- б) Π является замкнутым промежутком в $\ell^\infty(n)$ и $\text{int } \Pi \neq \emptyset$, если и только если $\Pi \cap M$ является строгим солнцем в $\ell^\infty(n)$ для любого строгого солнца M в $\ell^\infty(n)$ такого, что $M \cap \text{int } \Pi \neq \emptyset$;
- в) пусть Π – замкнутый промежуток в $\ell^\infty(n)$, тогда $\Pi \subset T(M \cap \Pi)$ для любого чебышевского множества M в $\ell^\infty(n)$; обратно, если $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ связно и замкнуто и включение $\Pi \subset T(M \cap \Pi)$ выполнено для любого чебышевского множества M в $\ell^\infty(n)$ такого, что $M \cap \Pi \neq \emptyset$, то Π – замкнутый промежуток.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В утверждении б) теоремы 1 условие $M \cap \text{int } \Pi \neq \emptyset$ естественно и его нельзя убрать, поскольку в [7] построен пример строгого солнца в $\ell^\infty(3)$ и координатной гиперплоскости Π в $\ell^\infty(3)$ такой, что $M \cap \Pi$ не является строгим солнцем в $\ell^\infty(3)$ (и в H). Также нельзя избавиться от требования связности и в утверждении в).

ТЕОРЕМА 2 (характеризация солнц в $\ell^\infty(n)$). Следующие утверждения эквивалентны:

- а) M – солнце в $\ell^\infty(n)$;
- б) $M \cap \Pi$ – солнце в $\ell^\infty(n)$ для любого замкнутого промежутка Π в $\ell^\infty(n)$ такого, что $\Pi \cap M \neq \emptyset$;
- в) $M \cap m(x, y)$ – солнце в $\ell^\infty(n)$ для любых $x, y \in \ell^\infty(n)$, $m(x, y) \cap M \neq \emptyset$;
- г) $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто, связно, и пересечение M с любой координатной аффинной гиперплоскостью H в $\mathbb{R}^n$ является солнцем в H или пусто.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Требование связности в утверждении г) теоремы 2 убрать нельзя, в этом можно убедиться на примере множества $M = \{(0, 0)\} \cup \{(1, 1)\}$, состоящего из двух точек, на плоскости $\ell^\infty(2)$.

ТЕОРЕМА 3 (характеризация строгих солнц в $\ell^\infty(n)$). Следующие утверждения эквивалентны:

- а) M – строгое солнце в $\ell^\infty(n)$;
- б) $M \cap \Pi$ – строгое солнце в $\ell^\infty(n)$ для любого замкнутого промежутка Π в $\ell^\infty(n)$, $M \cap \text{int } \Pi \neq \emptyset$;
- в) $M \cap m(x, y)$ – строгое солнце в $\ell^\infty(n)$ для любых $x, y \in \ell^\infty(n)$, $M \cap \text{int } m(x, y) \neq \emptyset$.

ТЕОРЕМА 4 (характеризация чебышевских множеств в $\ell^\infty(n)$). Для непустого подмножества $M \subset \mathbb{R}^n$ следующие утверждения эквивалентны:

⁴Здесь буква “T” происходит из использовавшейся ранее записи фамилии Chebyshev как Tschebysheff.

- а) M – чебышевское множество в $\ell^\infty(n)$;
- б) $\Pi \subset T(\Pi \cap M)$ для любого замкнутого промежутка Π в $\ell^\infty(n)$, $\Pi \cap M \neq \emptyset$;
- в) $m(x, y) \subset T(m(x, y) \cap M)$ для любых $x, y \in \ell^\infty(n)$, $m(x, y) \cap M \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. а) Пусть Π – замкнутый промежуток, M – солнце в $\ell^\infty(n)$, $M \cap \Pi \neq \emptyset$. Если $M \cap \Pi$ состоит из одной точки, то искомое утверждение тривиально. Рассмотрим $u, v \in M \cap \Pi$. Тогда, по определению, $m(u, v) \subset \Pi$. По теореме А множество M монотонно линейно связно; пусть $k(\cdot) \subset M$ – монотонная кривая, соединяющая u и v . В силу (2) имеем $k(\cdot) \subset m(u, v) \subset \Pi$. Итак, любые две точки u, v из $M \cap \Pi$ могут быть соединены монотонной кривой, лежащей в $M \cap \Pi$. Замкнутость $M \cap \Pi$ очевидна. По теореме А множество $M \cap \Pi$ – солнце в $\ell^\infty(n)$.

Пусть теперь $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ – такое множество $\mathbb{R}^n$, что $\Pi \cap M$ является солнцем в $\ell^\infty(n)$ для всякого солнца M в $\ell^\infty(n)$, $M \cap \Pi \neq \emptyset$. Поскольку солнце всегда замкнуто, то Π замкнуто. Если Π состоит из одной точки, то утверждение тривиально. Предположим, что найдутся точки $u, v \in \Pi$ такие, что $m(u, v) \not\subset \Pi$. Выберем $w \in m(u, v)$, $w \notin \Pi$. Определим множество $L = [u, w] \cup [w, v]$. Из (2) имеем, что $w^{(i)} \in [u^{(i)}, v^{(i)}]$, $i = 1, \dots, n$, откуда следует, что L монотонно линейно связно. По теореме А множество L – солнце; по условию $\Pi \cap L$ – солнце в $\ell^\infty(n)$. Однако солнце $L \cap \Pi$ несвязно (точка w разделяет множество L). Это противоречит теореме А. Следовательно, $m(u, v) \subset \Pi$ для всех $u, v \in \Pi$, и Π – замкнутый промежуток.

б) Пусть Π – замкнутый промежуток в $\ell^\infty(n)$. Рассмотрим строгое солнце $M \subset \ell^\infty(n)$, $M \cap \text{int } \Pi \neq \emptyset$. Установим строгую солнечность пересечения $M \cap \Pi$; для этого воспользуемся теоремой В. Для начала установим, что $\text{eqs}(M \cap \Pi) = \text{eqs}(M)$. Для этого рассмотрим точку $w \in M \cap \text{int } \Pi$. По теореме В множество M не является кокрестом, поэтому найдется точка $y \in M$, $y \not\vdash_M w$. Поскольку M строго монотонно линейно связно и $w \not\vdash_M y$, то существует строго монотонная кривая $k(t) \subset M$, $0 \leq t \leq 1$, соединяющая w и y , $k(0) = w$, $k(1) = y$. Ясно, что $k(t) \not\vdash_M w$ для всех $t > 0$. Так как $w \in \text{int } \Pi$, то кривая $k(t)$ для всех достаточно малых $t > 0$ содержится в $\text{int } \Pi$. Отсюда, с учетом сказанного выше, $\text{eqs}(M \cap \Pi) = \text{eqs}(M)$. Теперь строгая монотонная линейная связность множества $M \cap \Pi$ следует из теоремы В, поскольку M строго монотонно линейно связно и $\text{eqs}(M \cap \Pi) = \text{eqs}(M)$.

Установим, что $M \cap \Pi$ не является кокрестом. Пусть $y \in M \cap \text{int } \Pi$. По теореме В множество M , не являясь кокрестом, не содержится в $\text{sqr}_{\text{eqs}(M)}(y)$. Следовательно, найдется точка $x \in M$, $x \not\vdash_M y$. Пусть $k(\cdot) \subset M$ – строго монотонная кривая, соединяющая x и y , $k(0) = y$, $k(1) = x$. Как и выше, $k(t) \in M \cap \text{int } \Pi$ для всех достаточно малых $t > 0$. Поскольку $k(t) \not\vdash_M y$ для всех $t > 0$, то $M \cap \Pi \not\subset \text{sqr}_{\text{eqs}(M)}(z)$ для любого $z \in \mathbb{R}^n$, т.е. $M \cap \Pi$ не является кокрестом. Ясно, что $M \cap \Pi$ замкнуто. Поэтому все условия теоремы В выполнены и из нее следует, что $M \cap \Pi$ является строгим солнцем в $\ell^\infty(n)$.

Теперь установим обратное утверждение. Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ – такое множество, что пересечение $M \cap \Pi$ является строгим солнцем для каждого строгого солнца M в $\ell^\infty(n)$ такого, что $M \cap \text{int } \Pi \neq \emptyset$. Установим, что Π – замкнутый промежуток. Пусть $\theta \in \text{int } \Pi$. Рассмотрим точку $\vartheta \in \Pi$, $\vartheta \not\vdash \theta$. (Такая точка ϑ существует, поскольку $\text{int } \Pi \neq \emptyset$.) Предположим, что найдется точка $w \in \text{int } m(\theta, \vartheta)$, $w \notin \Pi$. Рассуждая, как в п. а), рассмотрим множество

$L = [\theta, w] \cup [w, \vartheta]$. Это строго монотонная кривая, соединяющая θ и ϑ . По теореме В множество L – строгое солнце; оно пересекает $\text{int } \Pi$. Но $L \cap \Pi$ не связно. Это противоречит тому факту, что солнца в $\ell^\infty(n)$ связны (см., например, [2, § 6]). Предположение, что $w \in \text{int } m(\theta, \vartheta)$, $w \notin \Pi$, неверно. Далее, ясно, что Π замкнуто. Поэтому $m(\theta, \vartheta) \subset \Pi$.

Теперь пусть $y \in \Pi$, $y \in \text{scr}(\theta)$. Поскольку $\theta \in \text{int } \Pi$, то существует точка $\omega \in \text{int } \Pi$ такая, что $\omega \neq \theta$, $\omega \neq y$, $\|\theta - \omega\| < \|\theta - y\|$. По доказанному выше имеем $m(\theta, \omega) \subset \Pi$. Пусть $k(t)$, $0 \leq t \leq 1$, – строго монотонная кривая, соединяющая θ и ω , $k(0) = \theta$, $k(1) = \omega$. Из определения ω следует, что $k(t) \neq y$ при всех $t > 0$. Поскольку $k(t) \in \text{int } \Pi$, $y \in \Pi$, то по доказанному выше $m(k(t), y) \subset \Pi$. Переходя к пределу при $t \rightarrow 0$, получаем, что $m(\theta, y) \subset \Pi$.

Итак, мы установили, что $m(\theta, x) \subset \Pi$ при любых $\theta \in \text{int } \Pi$, $x \in \Pi$. Иными словами, $\text{int } \Pi$ является промежутком. Отсюда, поскольку $\text{int } \Pi \neq \emptyset$ и Π , очевидно, замкнуто, имеем, что Π – замкнутый промежуток.

в) Утверждение “только если” установлено в [9, теорема 2].

Предположим, что Π – такое множество, что $\Pi \subset T(M \cap \Pi)$ для любого чебышевского множества M в $\ell^\infty(n)$, $\Pi \cap M \neq \emptyset$. Исключим вырожденный случай одноточечного Π и далее предположим, что $\text{card } \Pi \geq 2$. По теореме D пересечение произвольного чебышевского множества M в $\ell^\infty(n)$ с координатным подпространством H , если $M \cap H \neq \emptyset$, остается чебышевским множеством в H . Поэтому при необходимости, рассматривая $\ell^\infty(m)$ при $m < n$, мы можем без ограничения общности считать, что $\text{int}_{\mathbb{R}^n} \Pi \neq \emptyset$. Выберем $\theta \in \text{int } \Pi$. Как и выше, рассмотрим точку $\vartheta \in \Pi$, $\vartheta \neq \theta$. (Такая точка ϑ существует, поскольку $\text{int } \Pi \neq \emptyset$.) Предположим, что найдется $w \in \text{int } m(\theta, \vartheta)$, $w \notin \Pi$. Рассуждая, как и в случае 6), рассмотрим множество $L = [\theta, w] \cup [w, \vartheta]$. По теореме С множество L является чебышевским. Однако $L \cap \Pi$ не связно.

Далее воспользуемся следующим известным фактом: если множество Y связно, конечномерно и если $K \subset Y$ – чебышевское множество в Y (относительно некоторой действующей на Y нормы), то метрическая проекция на множество K в Y непрерывна; как следствие, K связно. Полагая $\Pi = Y$ и $K = \Pi \cap L$, имеем: Π по предположению связно, $L \cap \Pi$ – чебышевское множество в Π , $\dim \Pi < \infty$. Отсюда $L \cap \Pi$ является связным. Выше, однако, мы получили, что $L \cap \Pi$ несвязно.

Итак, предположение, что $w \in \text{int } m(\theta, \vartheta)$, $w \notin \Pi$, было неверно. Далее, ясно, что Π замкнуто. Отсюда $m(\theta, \vartheta) \subset \Pi$. Рассуждая, как и в п. 6) для точек $v \in \Pi$, $v \in \text{scr}(\theta)$, и переходя к пределу, получаем, что $m(\theta, v) \subset \Pi$ для любых точек $\theta, v \in \Pi$. Теорема доказана.

Отметим еще одно интересное свойство чебышевских множеств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть M – чебышевское множество в $\ell^\infty(n)$. Предположим, что $M \cap \Pi \neq \emptyset$, $M \cap \text{ri } \Pi = \emptyset$ для некоторого замкнутого промежутка Π в $\ell^\infty(n)$. Тогда пересечение $M \cap \Pi$ одноточечно.

Здесь $\text{ri } \Pi$ обозначает относительную внутренность множества Π .

Из предложения 1 вытекает следующее, по-видимому известное, утверждение. Определим пространство $\ell^\infty(n; \alpha)$ как пространство $\ell^\infty(n)$ с весом α ($\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$):

$$\ell^\infty(n; \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_{\ell^\infty(n; \alpha)} = \max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i x^{(i)}|\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть M – чебышевское множество в $\ell^\infty(n)$. Тогда M – чебышевское множество в пространстве $\ell^\infty(n; \alpha)$ с произвольным весом α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. По теореме Д пересечение M с любым координатным подпространством H , $H \cap M \neq \emptyset$, является чебышевским множеством в H . Отсюда мы всегда можем предполагать, что $\text{int}_{\mathbb{R}^n} \Pi \neq \emptyset$, $M \cap \text{int} \Pi = \emptyset$, $M \cap \Pi \neq \emptyset$. Теперь из теоремы С, в) следует, что никакая собственная грань ⁵ F выпуклого тела Π не может содержать более одной точки из M в своей относительной внутренности $\text{ri} F$. Далее, поскольку по теореме С пересечение $M \cap F$ для любой грани F и пересечение $M \cap \Pi$ связны, то пересечение $\Pi \cap M$ одноточечно. Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Импликации а) $\Leftrightarrow$ б), а) $\Rightarrow$ в) установлены в теореме 1; в) $\Rightarrow$ а) следует из теоремы А; а) $\Rightarrow$ г) следует из теорем А и Д. Докажем г) $\Rightarrow$ а). Предположим, что M не является солнцем. А. Л. Браун [5, теорема 3.6] установил, что

$$M \text{ – солнце в } \ell^\infty(n) \iff (m(x, y) \setminus \{x, y\}) \cap M \neq \emptyset \quad \forall x, y \in M. \quad (3)$$

Поскольку по предположению M не солнце, то из (3) имеем:

$$\text{найдутся } x, y \in M \text{ такие, что } (m(x, y) \setminus \{x, y\}) \cap M = \emptyset. \quad (4)$$

Выберем такие x и y . Поскольку пересечение $M \cap H$ является солнцем в H для любого аффинного координатного подпространства H , $H \cap M \neq \emptyset$, а по теореме А солнца монотонно линейно связны, то из (4) следует, что $x \neq y$.

Далее, для $F \subset \mathbb{R}^n$ и $y \in \text{bd } F$ определим

$$\text{cone}(F, y) = \{\alpha f + (1 - \alpha)y \mid f \in F, \alpha \geq 0\}.$$

Обозначим через $F_1, \dots, F_n$ все $(n - 1)$ -мерные грани тела $m(x, y)$, содержащие точку x ; $E_1, \dots, E_n$ – все $(n - 1)$ -мерные грани тела $m(x, y)$, содержащие точку y . Рассматривая все координатные гиперплоскости H , проходящие через точки x и y , и принимая во внимание то, что $M \cap H$ является солнцем в H , из (4) и (2) получаем

$$F_i \cap M = \{x\}, \quad E_i \cap M = \{y\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

и, более того, из (4), поскольку по теореме А пересечение M с любым координатным подпространством $\text{aff } F_i$ (аффинной оболочкой грани F_i) монотонно линейно связно, имеем

$$\text{cone}(F_i, x) \cap M = \{x\}, \quad \text{cone}(E_i, y) \cap M = \{y\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Несложно проверить, что множество

$$U = \left(\bigcup_{i=1}^n \text{cone}(F_i, x) \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^n \text{cone}(E_i, y) \right)$$

разделяет $\mathbb{R}^n$ и что точки x и y лежат в разных компонентах $\mathbb{R}^n \setminus U$. Однако M по условию связно, а $x, y \in M$. Получили противоречие, поэтому M – солнце в $\ell^\infty(n)$. Теорема доказана.

⁵Напомним, что *гранью* выпуклого множества C называется такое его выпуклое подмножество $F \subset C$, что концы каждого отрезка в C , имеющего относительную внутреннюю точку в F , принадлежат множеству F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Импликации $\text{а)} \Rightarrow \text{б)}$, $\text{а)} \Rightarrow \text{в)}$ установлены в теореме 1. Утверждение $\text{б)} \Rightarrow \text{в)}$ очевидно. Установим импликацию $\text{в)} \Rightarrow \text{а)}$. Замкнутость M очевидна. Предположим, что M не строгое солнце. В этом случае найдется точка $x \in X \setminus M$ такая, что для некоторой точки $y \in P_M x$ не выполнено (1). Для $\lambda > 0$ обозначим

$$x_\lambda = (1 - \lambda)y + \lambda x, \quad r = \rho(x, M), \quad r_\lambda = \rho(x_\lambda, M).$$

В [1, лемма 3.1] показано, что в этом случае существует такое $\lambda_0 > 0$, что

$$\mathring{B}(x_{\lambda_0}, r_{\lambda_0}) \cap M \neq \emptyset, \quad \|x_{\lambda_0} - y\| = r_{\lambda_0}, \quad \mathring{B}(x, r) \subset \mathring{B}(x_{\lambda_0}, r_{\lambda_0}).$$

Положим $u^{(i)} = x_{\lambda_0}^{(i)} + 2r_{\lambda_0}$, $v^{(i)} = x_{\lambda_0}^{(i)} - 2r_{\lambda_0}$, $i = 1, \dots, n$, $u = (u^{(1)}, \dots, u^{(n)})$, $v = (v^{(1)}, \dots, v^{(n)})$. Тогда $B(x_{\lambda_0}, r_{\lambda_0}) \subset \text{int } m(u, v)$. По условию $M \cap m(u, v)$ — строгое солнце в $\ell^\infty(n)$. Однако это невозможно, так как $\mathring{B}(x_{\lambda_0}, r_{\lambda_0}) \cap M \neq \emptyset$, $B(x_{\lambda_0}, r_{\lambda_0}) \subset \text{int } m(u, v)$. Предположение о том, что M не является строгим солнцем, было неверно. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Импликации $\text{а)} \Rightarrow \text{б)}$, $\text{а)} \Rightarrow \text{в)}$ установлены в теореме 1. Утверждение $\text{б)} \Rightarrow \text{в)}$ очевидно. Импликация $\text{в)} \Rightarrow \text{а)}$ достаточно ясна. Пусть $x \notin M$, $d = \rho(x, M)$. Положим $u^{(i)} = x^{(i)} + 2d$, $v^{(i)} = x^{(i)} - 2d$, $u = (u^{(1)}, \dots, u^{(n)})$, $v = (v^{(1)}, \dots, v^{(n)})$. Тогда $B(x, d) \subset \text{int } m(u, v)$. Теперь проксиминальность M и единственность элемента наилучшего приближения для x в M следует из условия в) . Теорема доказана.

Автор благодарен Е. М. Скорикову за привлечение внимания к рассматриваемым задачам.

Список литературы

1. Власов Л. П., “Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах”, *УМН*, **28:6** (1973), 3–66.
2. Карлов М. И., Царьков И. Г., “Выпуклость и связность чебышевских множеств и солнц”, *Фундам. и приклад. математика*, **3:4** (1997), 967–978.
3. Braess D., “Geometrical characterizations for nonlinear uniform approximation”, *J. Approx. Theory*, **11:3** (1974), 260–274.
4. Berens H., Hetzelt L., “Die Metrische Struktur der Sonnen in $\ell_\infty(n)$ ”, *Aequationes Math.*, **27:1** (1984), 274–287.
5. Brown A. L., “Suns in normed linear spaces which are finite dimensional”, *Math. Ann.*, **279:1** (1987), 87–101.
6. Алимов А. Р., “Геометрическое строение чебышевских множеств в $\ell^\infty(n)$ ”, *Функцион. анализ и его прилож.*, **39:1** (2005), 1–10.
7. Алимов А. Р., “Геометрическая характеристика строгих солнц в $\ell^\infty(n)$ ”, *Матем. заметки*, **70:1** (2001), 3–11.
8. Алимов А. Р., “Связность солнц в пространстве c_0 ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69:4** (2005), 3–18.
9. Alimov A. R., “Characterisations of Chebyshev sets in c_0 ”, *J. Approx. Theory*, **129:2** (2004), 217–229.
10. Алимов А. Р., “Геометрическое строение чебышевских множеств в пространствах $\ell^\infty(n)$, c_0 и c ”, *УМН*, **60:3** (2005), 171–172.
11. Franchetti C., Cheney E. W., “The embedding of proximinal sets”, *J. Approx. Theory*, **48:2** (1986), 213–225.

12. Васильева А. А., “Замкнутые промежутки в $C(T)$ и $L_\varphi(T)$ и их аппроксимативные свойства”, *Матем. заметки*, **73**:1 (2003), 135–138.
13. Васильева А. А., “Замкнутые промежутки в векторнозначных функциональных пространствах и их аппроксимативные свойства”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:4 (2004), 75–116.
14. Гаркави А. Л., Замятин В. Н., “Условный чебышевский центр ограниченного множества непрерывных функций”, *Матем. заметки*, **18**:1 (1975), 67–76.
15. Хавинсон С. Я., “Аппроксимативные свойства некоторых множеств в пространствах непрерывных функций”, *Anal. Math.*, **29**:2 (2003), 87–105.
16. Gruber P. M., “Planar Chebyshev sets”, *Mathematical structures, computational mathematics, mathematical modelling*, v. 2, Pap. dedic. L. Iliev 70th Anniv., Bulgar. Acad. Sci., Sofia, 1984, 184–191.
17. Berens H., Hetzelt L., “Suns and contractive retracts in the plane”, *Теория приближений функций* (Тр. Междунар. конф., Киев, 31 мая – 5 июня, 1983), ред. Н. П. Корнечук и др., Наука, М., 1983.
18. Brown A. L., “On the connectedness properties of suns in finite dimensional spaces”, *Proc. Centre Math. Appl. Austral. Nat. Univ.*, **20**, Austral. Nat. Univ., Canberra, 1988, 1–15.
19. A. L. Brown, “Suns in polyhedral spaces”, *Seminar of Mathem. Analysis, Proceedings* (Univ. Malaga and Seville (Spain), Sept. 2002 – Feb. 2003), eds. D. G. Álvarez, G. Lopez Acedo, R. V. Caro, Universidad de Sevilla, Sevilla, 2003, 139–146.
20. Brosowski B., Wegmann R., “Charakterisierung bester Approximationen in normierten Vektorräumen”, *J. Approx. Theory*, **3**:4 (1970), 369–397.
21. Amir D., Deutsch F., “Suns, moons and quasi-polyhedra”, *J. Approx. Theory*, **6**:2 (1972), 176–201.
22. Dunham Ch. B., “Characterizability and uniqueness in real Chebyshev approximation”, *J. Approx. Theory*, **2**:4 (1969), 374–383.
23. Boltyanski V., Martini H., Soltan P. S., *Excursions into combinatorial geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

А. Р. АЛИМОВ (A. R. ALIMOV)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
E-mail: alimov@shade.msu.ru

Поступило в редакцию
 25.05.2006