Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Янков, Диалоговая интерпретация классического исчисления предикатов,
Изв. РАН. Сер. матем., 1997, том 61, выпуск 1, 215–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im112>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:24:04

УДК 517.11

В. А. Янков

Диалоговая интерпретация классического исчисления предикатов

Строится интуиционистская диалоговая интерпретация классического исчисления предикатов и для нее доказывается теорема полноты (интуиционистский аналог теоремы Гёделя).

Библиография: 3 наименования.

§ 1. Цель работы

Методы диалоговой интерпретации фундаментальных теорий, развитые в [1], в случае арифметики опираются на брауэровскую “бар-индукцию”, и поэтому могут считаться законными интуиционистскими методами. В различных доказательствах гёделевой теоремы о полноте исчисления предикатов строится арифметическая модель невыводимой формулы. Естественно поэтому ожидать, что возможна некая интуиционистская форма теоремы полноты. Данная работа и предлагает интуиционистский вариант теоремы Гёделя. Попутно получается доказательство для известной теоремы Генцена об устранимости сечения, т.е. обе теоремы доказываются вместе, как в классических теориях, основанных на выделении бесконечной ветви в дереве поиска опровергающей интерпретации (см. [2]).

§ 2. Язык

Удобно строить исчисление предикатов с помощью связок $\neg$, $\wedge$, $\vee$ кванторов $\wedge$, $\vee$, причем связка $\neg$ применяется только к атомарным формулам, а $\neg F$ считается обозначением формулы, получаемой “пронесением” $\neg$ внутрь до атомов. Точное определение: $\neg F$ есть $\neg F$, если F атомарна; $\neg\neg F$ есть F , если F атомарна; $\neg(F \wedge G)$ есть $(\neg F \vee \neg G)$; $\neg(F \vee G)$ есть $(\neg F \wedge \neg G)$; $\neg(\bigwedge x F)$ есть $\bigvee x(\neg F)$; $\neg(\bigvee x F)$ есть $\bigwedge x(\neg F)$.

Имеется счетный набор предметных переменных (малые латинские буквы) и для каждого $n > 0$ счетный набор предикатных n -местных символов (большие латинские буквы). Определения подформулы и секвенции (конечный или пустой кортеж формул) стандартны. Формулы вида F и $\neg F$, где F атомарна, называем *простыми* (соответственно говорим о простых подформулах данной формулы). Пару формул упомянутого вида будем называть также *противоположными* (друг другу) простыми формулами.

§ 3. Тактики оппонентов

Цель оппонента – построить опровержение предлагаемой на обсуждение формулы, т.е. подобрать такую арифметическую интерпретацию, на которой формула опровергается. Обе его задачи, т.е. подбор интерпретации и опровержение на ней формулы, решаются независимо.

Для построения интерпретации достаточно отождествить предметные переменные с их натуральными номерами (предполагается, что задана такая стандартная нумерация: x_i – переменная с номером i) и дать интерпретацию каждому предикатному символу, т.е. определить, истинной или ложной будет каждая атомарная формула. Для определенности мы фиксируем стандартную нумерацию всех атомарных формул, т.е. формул вида $A(a_1, \dots, a_n)$, где $n > 0$, A – n -местная предикатная переменная, а $a_1, \dots, a_n$ – не обязательно различные предметные переменные.

Интерпретация оппонента (ИО) – это функция натуральных чисел, которая по каждому номеру N выдает атомарную формулу с номером N или ее отрицание.

Индукцией по длине формул определяется тактика опровержения оппонента (ТОО):

- 0) для простой формулы – любое натуральное число;
- 1) для формулы вида $F \wedge G$ – выбор одной из формул, F или G , и ТОО для нее;
- 2) для формулы вида $F \vee G$ – пара, состоящая из ТОО для F и ТОО для G ;
- 3) для формулы вида $\bigwedge x F(x)$ – выбор переменной a и ТОО для $F(a)$;
- 4) для формулы вида $\bigvee x F(x)$ – функция, сопоставляющая каждой переменной a ТОО для $F(a)$.

Тактику оппонента (ТО) для формулы F образует пара $\langle g, f \rangle$, состоящая из g (ИО) и f (ТОО для F). Возможности выбора у оппонента произвольны.

§ 4. Тактики пропонента

Тактика пропонента ТП для формулы F – это функция, аргументами которой являются ТО для F . Значениями этой функции являются натуральные числа. В отличие от тактик оппонента ТП должны быть эффективно вычислимыми.

Если оппонент пытается опровергнуть обсуждаемую формулу F и с этой целью перечисляет те ее подформулы, которые он считает опровержимыми, то задача пропонента – опровергнуть каждую ТО, а в конечном счете указать такую простую подформулу F , которая входит в перечисление оппонента и при этом является истинной. При данных ТП φ и ТО h число $\varphi(h)$ и является указанием на такую подформулу. Это указание расшифровывается по следующим правилам:

- 0) если F – простая формула, то любое число указывает на нее;
- 1) если F есть $G \wedge H$, то пусть $\langle g, f \rangle$ – ТО для F , а φ – ТП для F ; f есть выбор одной из формул F , G и f' – ТОО для нее; мы считаем, что $\varphi(\langle g, f \rangle)$ указывает на ту подформулу формулы, выбранной оппонентом, на которую указывает оно же, как значение ТП для нее в применении к ТО $\langle g, f' \rangle$;
- 2) если F есть $G \wedge H$, то пусть $\langle g, f \rangle$ – ТО для нее; f есть пара $\langle f_1, f_2 \rangle$ ТОО для формул G и H соответственно. Пусть $\varphi(\langle g, f \rangle) = i$; тогда:

а) если $i = 2k$, то i указывает на ту подформулу формулы G , на которую указывает k при ТО $\langle g, f_1 \rangle$ для нее;

б) если $i = 2k + 1$, то i указывает на ту подформулу формулы H , на которую указывает k при ТО $\langle g, f_2 \rangle$ для нее;

3) пусть F имеет вид $\bigwedge x A(x)$, пусть φ – ТП для нее и $\langle g, f \rangle$ – ТО для нее же; f указывает некоторое число i и дает ТОО f' для $A(x_i)$; $\varphi(\langle g, f \rangle)$ указывает на ту подформулу $A(x_i)$, на которую указывает оно же при рассмотрении формулы $A(x_i)$ с ТО $\langle g, f' \rangle$ для нее;

4) пусть F имеет вид $\bigvee x A(x)$, пусть φ – ТП для нее и $\langle g, f \rangle$ – ТО для нее же; f является функцией натурального числа, причем $f(i)$ является ТОО для формулы $A(x_i)$. Пусть $\varphi(\langle g, f \rangle) = 2^i \cdot 3^k$. Тогда $\varphi(\langle g, f \rangle)$ указывает на ту подформулу формулы $A(x_i)$, на которую указывает k , когда обсуждается формула $A(x_i)$ и в качестве ТО для нее выступает $\langle g, f(x_i) \rangle$.

Из определения ясно, что указываемая подформула всегда является простой.

ТП φ для формулы F называется ее *защитой*, если для каждой ТО h для F простая подформула F , на которую указывает $\varphi(h)$, является истинной. Формула, для которой существует защита, называется *защитимой*.

§ 5. Секвенции и защиты для них

ТО для секвенции вида $S = F_1, \dots, F_n$ определяется как кортеж $H = \langle (g, f_1), \dots, (g, f_n) \rangle$, где f_i является ТОО для F_i для каждого i , а g – ИО. ТП для такой секвенции – это вычислимая функция, аргументы которой – всевозможные ТО для этой секвенции, а значения – пары натуральных чисел s, t таких, что s может принимать значения от 1 до n , а t произвольно.

Если Φ – ТП для S , а H – ТО для нее же и $\Phi(H) = \langle s, t \rangle$, то $\langle s, t \rangle$ указывает на ту простую подформулу формулы F_s , на которую указывает t , когда обсуждаемой формулой является F_s , а ТО для нее есть $\langle g, f_s \rangle$.

Если при этом Φ такова, что при произвольном H указывается истинная простая подформула, то секвенция S называется *защитимой*, а Φ – *защитой* для нее.

§ 6. Классическое исчисление секвенций

Исчисление секвенций имеет стандартный вид:

0) $F, \neg F$ – схема аксиомы (F атомарно);

0') разрешается добавлять формулы в выводимую секвенцию, удалять одну из двух одинаковых формул, переставлять формулы внутри секвенции. – структурные правила

Ниже символы S_1, S_2 будут обозначать последовательности формул, которые могут быть и пустыми:

1)	$\frac{S_1, F, S_2; S_1, G, S_2}{S_1, F \wedge G, S_2}$	– введение конъюнкции;
2)	$\frac{S_1, F, S_2}{S_1, F \vee G, S_2}, \quad \frac{S_1, G, S_2}{S_1, F \vee G, S_2}$	– введение дизъюнкции;

$$3) \quad \frac{S_1, F(x), S_2}{S_1, \bigwedge y F(y), S_2} \quad - \text{введение квантора общности}$$

(здесь переменная x не должна входить свободно в формулы из S_1, S_2 ; y либо совпадает с x , либо не входит свободно в $F(x)$; $F(y)$ получается подстановкой y вместо x в $F(x)$);

$$4) \quad \frac{S_1, F(a), S_2}{S_1, \bigvee x F(x), S_2} \quad - \text{введение квантора существования}$$

($F(a)$ получается из $F(x)$ подстановкой a вместо x ; при этом a не должно попасть в сферу действия кванторов по a);

$$5) \quad \frac{S_1, F, S_2 \quad S_1 \neg F, S_2}{S_1, S_2} \quad - \text{сечение.}$$

§ 7. Защищаемость выводимых секвенций

Наша первая цель – корректность интерпретации.

ТЕОРЕМА 1. *Каждая выводимая секвенция защищена.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ИО g будет предполагаться фиксированной.

Мы строим ТП, выигрывающую против любой ТО, имеющей g в качестве своей ИО. Эффективность построения гарантирует нам существование защиты для любой выводимой секвенции (имеется в виду эффективная зависимость результата от g).

После фиксирования g все формулы и секвенции превращаются в формулы языка арифметики. В частности, арифметическими оказываются и простые формулы, и их истинностное значение распознается проponentом после прослеживания ИО до нужного места. Можно поэтому сослаться на “арифметическую” теорему из работы [1], обосновывающую защищаемость секвенций, выводимых в формальной арифметике.

В [1] используется схема бар-рекурсии Спектора [3]. Поскольку в аксиоматике секвенциального предикатного исчисления нет индукции, то правдоподобно, что теорема 1 может быть обоснована без обращения к бар-рекурсии с использованием более слабых принципов.

§ 8. Ветви и Z-защищаемость

Чтобы привязать наш аппарат к синтаксису вывода, введем понятие “ветви”, связанное с поиском вывода секвенции, не использующего правила сечения.

В дальнейшем удобно применять секвенции, в которых отмечена в конкретном вхождении одна из составляющих секвенцию формул (в этом случае мы будем говорить об отмеченной секвенции). *Ветвью*, исходящей из отмеченной секвенции S , мы будем называть такую последовательность отмеченных секвенций $S_1, \dots, S_n$, что:

- а) S_1 совпадает с S ;

b) если S_i есть Γ, F, Δ с отмеченным вхождением F , то следующие правила определяют состав S_{i+1} (правила отметки сформулированы ниже, в п. c)):

b0) если F проста, то S_{i+1} совпадает с S_i ;

b1) если F есть $G \wedge H$, то S_{i+1} может иметь вид Γ, G, Δ или Γ, H, Δ ;

b2) если F есть $G \vee H$, то S_{i+1} имеет вид Γ, G, H, Δ ;

b3) если F есть $\bigwedge xG(x)$, то S_{i+1} есть $\Gamma, G(a), \Delta$, где a – переменная наименьшего номера, не входящая в S_i свободно;

b4) если F есть $\bigvee xG(x)$, то S_{i+1} есть $\Gamma, G(x_{j+1})$, где j – число применений настоящего правила к формулам $\bigvee xG(x)$, находящимся в предыдущих секвенциях ветви и принадлежащим той же связке (см. §9);

c) в секвенции S_{i+1} отмечается первая формула из Δ , если Δ непусто, или первая формула, входящая в Γ , если Δ пусто, а Γ непусто; если оба эти правила неприменимы, то в случаях b1), b3), b4) отмечается единственная формула, а в случае b2) – первая формула секвенции.

В этом определении Γ, Δ – кортежи формул, может быть, пустые.

Ввиду наличия правила b2) ветвь строится неоднозначно. Наша задача – сопоставить каждой ветви, исходящей из секвенции, ТОО для этой секвенции. Для этого нужны вспомогательные синтаксические понятия.

Непосредственной наследницей вхождения формулы F в Γ или Δ (в секвенции S_i) называется соответствующее ее вхождение в секвенцию S_{i+1} . Если F – отмеченная формула секвенции S_i , то:

0), 4) если F простая или начинается с квантора существования, то ее непосредственной наследницей в S_{i+1} является она же (а именно выделенное явно в определении ее вхождение в S_{i+1});

1)–3) в остальных случаях непосредственная наследница не определяется.

Ясно, что непосредственное наследование имеет место между тождественными формулами.

Последовательность вхождений формулы F в секвенции S_i , где i последовательно пробегает отрезок натурального ряда, начиная с некоторого k , называется *связкой*, если первое вхождение (в S_k) не является непосредственной наследницей, а каждое следующее является непосредственной наследницей предыдущего вхождения.

Все формулы связки, очевидно, совпадают. Если формула связки проста или начинается с квантора существования, то связка бесконечна. В остальных случаях связка конечна.

§9. ТОО на ветвях

Каждой ветви Z , исходящей из секвенции S , сопоставим ТОО для этой секвенции.

ТОО на самом деле будут строиться для всех формул, входящих в секвенции, принадлежащие ветви, причем для всех формул одной связки они будут одинаковы. Эти ТОО будут (несколько неточно) обозначаться как $Z(F)$.

0) Если F – простая формула, то $Z(F)$ пуста.

1) Пусть F есть $G \wedge H$. Имеющаяся в виду связка конечна, причем самое верхнее вхождение F в соответствующую секвенцию отмечено. В следующей секвенции ветви это вхождение заменено либо на вхождение G , либо на вхождение H . В первом случае определяем $Z(F)$ как выбор G и $Z(G)$ – как ТОО для G , во втором случае – как выбор H и $Z(H)$ – как ТОО для H .

2) Пусть F есть $G \vee H$. Как и в предыдущем случае, связка конечна, причем за самым верхним вхождением F в следующей секвенции появляются формулы G и H . Для связок, к которым они принадлежат, определены ТОО $Z(G)$ и $Z(H)$. Определяем $Z(F)$ как пару $\langle Z(G), Z(H) \rangle$.

3) Пусть F есть $\bigwedge x G(x)$. Снова связка конечна. За верхним вхождением F в следующей секвенции ветви находим вхождение формулы $G(a)$ с некоторой переменной a . $Z(F)$ есть пара $\langle a, Z(G(a)) \rangle$.

4) Пусть F есть $\bigvee x G(x)$. Если проследить бесконечную связку, которой принадлежит F , то вхождения F на ней бесконечное число раз становятся отмеченными, причем при i -м по порядку отмеченном вхождении следующая секвенция ветви содержит вхождение формулы $G(x_i)$, где x_i – i -я предметная переменная в стандартной нумерации. $Z(F)$ определяется как функция, сопоставляющая переменной x_i ТОО $Z(G(x_i))$.

Если $S = F_1, \dots, F_n$, то $Z(S)$ определяется как $\langle Z(F_1), \dots, Z(F_n) \rangle$.

Секвенцию S будем называть *Z-защитимой*, если существует некоторая ТП Φ для нее, которая для произвольной ветви Z , из S исходящей, и произвольной ИО g в применении к паре $\langle g, Z(S) \rangle$ указывает на истинную простую подформулу.

Следующее утверждение тривиально.

ТЕОРЕМА 2. *Если секвенция защитима, то она Z-защитима.*

§ 10. Тупиковые ветви

Ветвь, исходящую из секвенции S ($S_i, i = 1, 2, \dots$), будем называть *тупиковой*, если, начиная с некоторого номера, S_i содержит пару противоположных атомарных формул.

Будет доказана следующая

ТЕОРЕМА 3. *Если секвенция Z-защитима, то все ветви, из нее исходящие, являются тупиковыми.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ветвь $Z = S_1, \dots, S_i$, исходящая из секвенции $S = S_1$, зафиксирована. Поскольку S Z-защитима, то существует такая ТП Φ для S , что для любой ИО g формула, указываемая $\Phi(\langle g, Z(S) \rangle)$, является истинной простой подформулой S .

ЛЕММА 1. *Формула, указываемая $\Phi(\langle g, Z(S) \rangle)$, принадлежит одной из секвенций S_i (фактически входит в одну из бесконечных связок Z).*

Справедливо более общее утверждение: если φ – какая-то ТП для некоторой формулы F , входящей в одну из секвенций S_i связки Z , и $\varphi(\langle g, Z(F) \rangle)$

указывает на простую формулу A , то A тоже принадлежит одной из секвенций S_i .

Доказывается это утверждение индукцией по длине F .

0) Для простых формул оно тривиально.

1) Если F имеет вид $G \wedge H$, причем имеется в виду конкретная связка, которой принадлежит F , то $Z(F)$ выбирает одну из формул, G или H , в зависимости от того, какая формула, G или H , включается в секвенцию, стоящую непосредственно над верхней секвенцией связки. При любом выборе $\varphi(\langle g, Z(F) \rangle)$ указывает на подформулу выбранной формулы, что вместе с предположением индукции дает нужное.

2) Если F имеет вид $G \vee H$, то G и H входят в секвенцию ветви, стоящую над верхней секвенцией связки, которой принадлежит F ; $Z(F)$ состоит из $Z(G)$, $Z(H)$; $\varphi(\langle g, Z(F) \rangle)$ указывает на простую подформулу G либо на простую подформулу H . В любом случае указанная подформула принадлежит ветви.

3) Если F имеет вид $\bigwedge xG(x)$, то в секвенции ветви, стоящей непосредственно над верхней секвенцией связки, в которую входит F , есть формула $G(a)$, которая и выступает как формула, выбираемая оппонентом в ТОО $Z(F)$; $\varphi(\langle g, Z(F) \rangle)$ указывает на ее подформулу, а последняя по предположению индукции принадлежит ветви Z .

4) Если F есть $\bigvee xG(x)$, то $Z(F)$ есть функция, по номеру i вычисляющая $Z(G(x_i))$. Значение $\varphi(\langle g, Z(F) \rangle)$ дает номер переменной k и указывает на простую подформулу $G(x_k)$ (с ТОО $Z(G(x_k))$). Формула $G(x_k)$ появляется в одной из секвенций ветви как результат применения 4-го правила построения ветви. Опять применимо предположение индукции.

Из леммы следует, что если Φ – ТП для начальной секвенции S , то $\Phi(\langle g, Z(S) \rangle)$ указывает на простую подформулу одной из формул S , принадлежащую одной из секвенций, а значит, и всем следующим секвенциям ветви.

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть Φ не просто ТО для $Z(S)$, а зашита. При фиксированной ветви Z $\Psi(g) = \Phi(\langle g, Z(S) \rangle)$ является эффективным функционалом над всевозможными ИО g , принимающим числовые значения. Для конкретного g функционал Ψ использует только некоторое “обеспечивающее” начало g . Мы применим теперь бар-индукцию Брауэра для доказательства следующего утверждения.

ЛЕММА 2. *Если g есть некоторое возможное начало для ИО, то либо в одной из секвенций ветви Z найдутся две противоположные друг другу простые формулы, либо в одной из этих секвенций найдется простая формула, являющаяся одной из формул g (речь идет о случае, когда некоторая ТП Φ “выигрывает” против $Z(S)$ и любых ИО: S здесь начальная секвенция ветви).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. БАЗИС. Если g – “обеспечивающее” начало ИО, то $\Psi(g)$ указывает на ветви Z некоторую истинную простую подформулу. То, что эта подформула является истинной, означает, что она входит в g .

ШАГ. Пусть g_1 и g_2 – два начала, продолжающие на один шаг начало g . Тогда одно из них (например, g_1) продолжает g на некоторую атомарную формулу F , а другое – на ее отрицание $\neg F$.

По предположению индукции доказываемое утверждение справедливо для исследуемой ветви Z и для начал g_1, g_2 . Возможны следующие варианты:

1) в Z уже указана пара противоположных друг другу простых формул (с g_1 или g_2 в качестве параметров утверждения); тогда вхождение в доказываемое утверждение g_1 или g_2 чисто формально, и доказываемое утверждение имеет место также и с g в качестве параметра;

2) первый случай не выполняется, и либо существует простая формула, входящая в Z и входящая в g_1 , но не совпадающая с F , либо же существует простая формула, входящая в Z и входящая в g_2 , но не совпадающая с $\neg F$; в обоих случаях упомянутая формула, очевидно, входит в g ;

3) если не выполняются ни первый, ни второй случай, то, очевидно, F входит и в Z , и в g_1 , а $\neg F$ входит и в Z , и в g_2 ; но тогда в Z входят F и $\neg F$ одновременно, так что лемма доказана.

Взяв в этой лемме пустое начало в качестве g , получим тупиковость ветви Z , чем и доказывается теорема.

§ 11. Устранение сечения в выводе

ТЕОРЕМА 4. *Если все ветви, исходящие из секвенции S , являются тупиковыми, то S выводима без сечений в исчислении секвенций.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В каждой ветви Z , исходящей из такой секвенции, возьмем то ее начало, в последней секвенции которого впервые появляются две противоположные друг другу простые формулы. Дерево таким образом усеченных ветвей (“начал”), исходящих из S , будет конечным по интуиционистской теореме о веерах (интуиционистский аналог классической леммы Кёнига). Секвенции, стоящие в вершинах дерева, выводимы по правилам вывода $0), 0')$. Двигаясь сверху вниз и используя другие правила вывода, но не сечение, доказываем выводимость всех секвенций, фигурирующих в дереве.

§ 12. Итоги

Добавим к теоремам 1–4 следующее очевидное утверждение.

ТЕОРЕМА 5. *Секвенция, выводимая без применения сечения, выводима.*

Теоремы 1–5 в совокупности дают равнообъемность следующих понятий: “выводимая секвенция”, “защитимая секвенция”, “ Z -защитимая секвенция”, “секвенция, выводимая без сечения”. Это и есть основной результат работы.

§ 13. Выводимость из посылок

Предложенные доказательства несложно модифицируются для случая, когда нас интересует выводимость из посылок.

Поскольку вариант конечного числа посылок тривиален, мы будем считать, что у нас имеется некоторая бесконечная последовательность $\Sigma = F_1, \dots, F_i, \dots$ формул исчисления предикатов. Она может порождаться пропонентом, но может задаваться неким “оракулом”. Множество значений этой последовательности не обязано быть бесконечным. Нас будут интересовать секвенции, выводимые из посылок Σ .

Введем нужные определения. S^i будет обозначать секвенцию $S, \neg F_1, \dots, \neg F_i$. Кроме того, будет рассматриваться бесконечная секвенция $S^\infty = S, \neg F_1, \dots, \neg F_i, \dots$. ТОО f для S^∞ является функцией натурального аргумента k , причем $f(k)$ дает ТОО для k -й по порядку формулы S^∞ . ТО для S^∞ , как обычно, состоит из пары: ТОО для S^∞ и ИО. ТП для S^∞ есть вычислимая функция от ТО для S^∞ , которая выдает пару, первый член которой есть номер формулы, входящей в S^∞ (разумеется, включая все формулы S), а второй указывает на простую подформулу выбранной формулы с соответствующим ТО для нее. Понятия защиты и защитимости определяются обычным образом.

ТЕОРЕМА 1'. *Если одна из секвенций S^i выводима, то S^∞ защитима.*

Для формулировки двух следующих теорем модифицируется понятие ветви.

Σ -ветвь, исходящая из секвенции S , строится как обычная ветвь, но когда метка i -й раз (считая снизу) доходит до конца очередной секвенции (непосредственно перед тем как перепрыгнуть в начало), в конце секвенции добавляется формула $\neg F_i$.

По Σ -ветви Z ТОО $Z(F)$ строится, как и в основном случае (здесь, строго говоря, F не формула, а связка из F). В частности, определены все $Z(\neg F_i)$.

ТЕОРЕМА 2'. *Если секвенция S^∞ защитима, то она и Z -защитима (последнее понятие определяется так же, как в основном случае).*

ТЕОРЕМА 3'. *Если секвенция S^∞ Z -защитима, то все Σ -ветви, исходящие из S , являются тупиковыми.*

ТЕОРЕМА 4'. *Если каждая из Σ -ветвей, исходящая из секвенции S , является тупиковой, то некоторая секвенция S^i выводима без сечения.*

Набросок доказательства. Так же, как в основном случае, получаем конечное дерево секвенций. Берем наибольшее i , для которого применение дополнительного правила построения Σ -ветви встречается в дереве. Доказывается выводимость без сечения именно S^i . Под каждым применением в дереве дополнительного правила с формулой $\neg F_k$ в секвенции, стоящие ниже, добавляется эта формула, если она в них уже не присутствует. Полученная модификация дерева может быть перестроена в доказательство без сечения S^i , как в основном случае.

ТЕОРЕМА 5'. Если одна из секвенций S^i выводима без сечения, то она выводима.

Таким образом, опять понятия “выводимость одной из S^i ”, “защитимость S^∞ ”, “ Z -защитимость S^∞ ”, “выводимость одной из S^i без сечения” оказываются равнообъемными.

Список литературы

1. Янков В. А. Диалоговая теория доказательства // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 3. С. 140–178.
2. Расёва Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. М.: Наука, 1972. С. 343–345.
3. Spector C. Provably recursive functionals of analysis: a consistency proof of analysis by an extension of principles formulated in current intuitionistic mathematics // Proceedings of the Symposia in Pure Mathematics / Ed. J. C. E. Dekker. Amer. Math. Soc., 1962. V. 5. P. 1–27.

РГГУ, факультет лингвистики
125267 Москва, Миусская пл., 6

Поступило в редакцию
14.VII.1994