Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Я. Белов, Локальная конечная базисуемость и локальная представимость многообразий ассоциативных колец, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 1, 3–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/im1122>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 17:41:09

УДК 512.552.4+512.554.32+512.664.2

А. Я. Белов

Локальная конечная базлируемость и локальная представимость многообразий ассоциативных колец

Доказаны локальная представимость и локальная конечная базлируемость многообразий ассоциативных колец и алгебр над произвольным ассоциативно-коммутативным нётеровым кольцом Φ .

Библиография: 151 наименование.

Ключевые слова: PI-алгебра, представимая алгебра, универсальная алгебра, полиномиальное тождество, ряды Гильберта, проблема Шпехта, некоммутативная алгебраическая геометрия, теория представлений, кольца.

§ 1. Введение

Тождеством называется многочлен, тождественно равный нулю на алгебре. Например, в алгебре Грассмана выполняется тождество $[[x, y], z] = 0$ (четный элемент лежит в центре, а коммутатор двух нечетных элементов четен), в алгебре матриц порядка 2 справедливо *тождество Холла*: $[[x, y]^2, z] = 0$.

В любой $(n - 1)$ -мерной алгебре выполняется *тождество Капелли* C_n порядка n :

$$C_n(\vec{x}; \vec{y}) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma y_0 x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} y_2 \cdots y_{n-1} x_{\sigma(n)} y_n.$$

Исследованию теории тождеств посвящено много работ (см. [1]–[26]). Тождествам отвечают геометрические теоремы, например тождеству коммутативности – теорема Паппа, а тождеству ассоциативности – теорема Дезарга (см. [27], [28]).

Пусть $P(x_1, \dots, x_n)$ – тождество в алгебре A , $\{H_i(y_1, \dots, y_{q_i})\}_{i=1}^n$ – произвольный набор полиномов, а $R(z_1, \dots, z_k)$ – любой полином. Тогда результаты подстановки $P(H_1, \dots, H_n)$, а также умножения на R (слева RP и справа PR) также выполняются в алгебре A . Эти новые полиномы называются *следствиями* тождества P . Кроме того, линейная комбинация тождеств снова является тождеством. Идеал, порожденный значениями системы полиномов, замкнутой относительно операции подстановки, называется *T-идеалом*. Каждому T -идеалу соответствует *вполне характеристический* идеал в свободной ассоциативной алгебре, т. е. идеал, замкнутый относительно всех эндоморфизмов. Категория алгебр, удовлетворяющих некоторой системе тождеств, называется *многообразием* (variety), а свободные объекты в этой категории –

Работа выполнена при финансовой поддержке Israel Science Foundation (грант № 1178/06), а также при частичной поддержке РФФИ (грант № 08-01-91300-а).

относительно свободными алгебрами. Ассоциативной PI-алгеброй называется алгебра, в которой выполняется некоторое нетривиальное тождество, а ее степенью $\deg(A)$ – минимальная степень такого тождества. Через $\text{Var}(A)$ обозначается многообразие, заданное тождествами, выполняющимися в алгебре A . Пусть $\{H_i\}_{i \in I}$ – система полиномов. Тогда $T(\{H_i\}_{i \in I})$ обозначает T -идеал, ими порожденный.

Аналогично понятию T -идеала естественно вводится понятие T -пространства, или пространства, порожденного значениями системы многочленов, замкнутой относительно подстановок. Приведем примеры T -пространств, не являющихся T -идеалами: коммутатор $[A, A]$, множество значений центральных полиномов в алгебре общих матриц.

Понятие тождества используется и в более общем неассоциативном случае, а также для алгебр произвольной сигнатуры. Многие важные классы алгебр аксиоматизируются тождествами. Например, алгебры Ли определяются как класс алгебр, в которых выполняются *тождество антикоммутативности* $xy + yx = 0^1$ и *тождество Якоби* $((xy)z) - ((xz)y) - (x(yz)) = 0$, ассоциативные алгебры определяются тождеством ассоциативности $\{x, y, z\} = (xy)z - x(yz) = 0$, йордановы алгебры – тождествами $[x, y] = 0$, $\{x^2, y, x\} = 0$, а альтернативные – условием кососимметричности ассоциатора $\{x, y, z\}$. Тождества неассоциативных алгебр исследовались рядом авторов (см. [13]–[16], [29]–[40]).

Благодаря PI-теории возникает новая точка зрения на некоммутативную алгебраическую геометрию. Рассматривается алгебра, снабженная группой автоморфизмов или полугруппой эндоморфизмов. Классические определения строятся с заменой понятия “идеал” на понятие “инвариантный идеал”. Например, понятие “первичность” означает отсутствие ненулевых инвариантных идеалов с нулевым произведением. Свойства нётеровости обеспечиваются, как правило, группой (полугруппой) преобразований, и сами алгебраические операции играют роль дополнительной структуры. При таком подходе работа в многоосновных алгебрах произвольной сигнатуры (даже операдах) становится естественной.

В классическом случае имеет место теорема Гильберта о базисе, утверждающая, что любая возрастающая цепочка идеалов в кольце коммутативных многочленов от нескольких переменных стабилизируется. В теории PI-алгебр центральную роль играют проблемы конечной базисуемости систем тождеств и представимости. Одной из основных проблем PI-теории явилась

ПРОБЛЕМА ШПЕХТА. *Всякое ли многообразие ассоциативных алгебр конечно базисуемо? Иными словами, всякая ли система тождеств в ассоциативной алгебре следует из своей конечной подсистемы?*

Эта проблема, сформулированная В. Шпехтом в 1950 г. [41], представляет интерес и для исследования произвольных многообразий алгебр, в частности лиевых, альтернативных и йордановых. Многообразие называется *шпехтовым*, если в нем выполняется условие обрыва возрастающих цепей для T -идеалов.

В. Шпехт имел в виду случай алгебр над полем характеристики нуля. А. И. Мальцев дал иную интерпретацию проблемы. Приведем его вопрос, записанный в Коуровской тетради [42].

¹В случае характеристики 2 оно заменяется тождеством $x^2 = 0$.

ПРОБЛЕМА МАЛЫЦЕВА. *Существуют ли не конечно базлируемые многообразия ассоциативных колец (проблема Шпехта)?*

Прежде всего, шпехтова проблематика рассматривается в *локальном* (т. е. вопросы обрыва возрастающих цепей T -идеалов в конечно порожденной алгебре) и *глобальном* (общем) случаях. В случае *поля характеристики нуль* все тождества равносильны своим линеаризациям – полилинейным тождествам. Случай *поля положительной характеристики* подразделяется на случай *бесконечного поля*, когда из тождества следуют все его однородные компоненты, и случай *конечного поля*, когда имеют место эффекты неоднородности. Интересен также случай колец ($\mathbb{Z}$ -алгебр) и алгебр над произвольным нётеровым ассоциативно-коммутативным кольцом.

Вопросы конечной базлируемости естественно формулировать также для T -пространств во всех данных ситуациях. Эти вопросы исследовались многими авторами (см. [13], [14], [16], [32]–[34], [39], [40], [43]–[52]). Проблемы шпехтова типа тесно связаны с проблемами бернсайдова типа. Последние исследовались, например, в работах [16], [48], [53]–[57].

Имеют место два типа замкнутости идеалов. Упомянутая выше *комбинаторная замкнутость* – это замкнутость в смысле инвариантности относительно подходящей группы (полугруппы) автоморфизмов (эндоморфизмов). Конечная базлируемость (аналог теоремы о базисе) означает, что действие этой группы (полугруппы) достаточно богато. Концепция Б. И. Плоткина *геометрической замкнутости*, возникшая при построении алгебраической геометрии в универсальных алгебраических системах, связана с замкнутостью для соответствия Галуа при морфизмах в “геометрические” объекты, обладающие свойствами конечности (см. [58]–[61]). Это не что иное, как *представимость* соответствующего идеала. Теоремы о локальной представимости T -идеалов устанавливают взаимосвязь между геометрическим и комбинаторным типами замыкания. Отметим, что доказательства локальной представимости основаны на том, что действия группы (подгруппы) автоморфизмов (эндоморфизмов) приводят к действию ассоциативно-коммутативного кольца. Аналогичная ситуация имеет место при квантовании (соответствие обычных групп и квантовых). Поэтому вопрос о *представимости* является более важным, чем вопрос о конечной базлируемости. В случае алгебр над полем в силу результатов работы [62] представимость над нётеровым коммутативным кольцом равносильна представимости над полем. Мы будем использовать этот факт без дополнительных ссылок. Исследованию проблем представимости посвящен ряд работ (см., например, [10], [62]–[68]). Из представимости легко следует конечная базлируемость. Однако интересно получить обратные импликации. В связи с этим заслуживает внимания работа [63], в которой, в частности, показана представимость нётеровых алгебр из некоторых многообразий. Результаты этой работы были обобщены С. Н. Кублановским [69], [70] (см. также [71], [72]).

Представимость можно понимать двояко. *Сильная представимость* по Керу означает, что многообразии порождается алгеброй, конечномерной над полем. Над конечным полем сильная представимость не выполняется. Простейший пример – многообразие, порожденное полупрямым произведением $M_n(\mathbb{F}[x]) \rtimes M_n(\mathbb{F})$. Под *представимостью многообразия* $\mathfrak{M}$ мы понимаем порождаемость многообразия подалгеброй алгебры, конечномерной над центром (или, что то же самое, вложимость относительно свободной алгебры из $\mathfrak{M}$ в алгебру, конечномерную над центром). Отметим, что для алгебр над кольцами

представимость, понимаемая в таком смысле, не обязательно осуществляется матрицами.

1.1. История вопроса. Проблемы шпехтова типа тесно связаны с проблемами бернсайдова типа, они активно исследовались многими авторами.

Ю. П. Размыслов [73] доказал шпехтовость многообразия алгебры матриц второго порядка над полем характеристики нуль. Он ввел понятия тождества Капелли, тождеств со следом, доказав первую и вторую фундаментальные теоремы [74] (позднее и независимо этот результат был получен К. Прочези [75]), а также нильпотентность радикала для алгебр, в которых выполняется тождество Капелли [76] (см. также [77]). В дальнейшем многообразия, связанные с матричными алгебрами, исследовались многими авторами (см. [78]–[80] и др.).

Впервые для случая нематричных многообразий в нулевой характеристике (когда строение полупростой части алгебр тривиально, а нетривиальны связи между полупростыми компонентами) положительное решение локальной проблемы Шпехта было получено В. Н. Латышевым [46], [47], а также Г. Геновым [43], [81], А. Поповым [82]. Техника доказательств была основана на использовании базиса Шпехта в нематричной алгебре. Позднее В. Дренски [83] с помощью той же техники показал рациональность рядов Гильберта относительно свободных алгебр в нематричных многообразиях. Для дальнейшего продвижения нужно было уметь работать с более сложной частью алгебр, для чего необходимо было использовать следы (формы), а также центральные многочлены. Кроме того, потребовалось установить нильпотентность радикала (соответствующий вопрос был поставлен В. Н. Латышевым в диссертации [47]).

Рядом авторов исследовались неассоциативные алгебры. В. Дренски [2] и М. Р. Вуган-Ли [84] показали нешпехтовость многообразия алгебр Ли в случае поля положительной характеристики. Позднее были построены примеры бесконечно базируемых многообразий альтернативных алгебр. Для характеристики 2 это сделал Ю. А. Медведев [85]. Для характеристики 3 соответствующие примеры были получены С. В. Пчелинцевым [86]. А. Я. Вайс и Е. И. Зельманов [87] доказали локальную шпехтовость йордановых PI-алгебр в случае поля нулевой характеристики. Аналогичный результат для альтернативных алгебр был получен А. В. Ильтяковым [88]. Им же была установлена шпехтовость многообразия, порожденного конечномерной алгеброй Ли [89], [90].

Однако локальная представимость альтернативных и йордановых PI-алгебр до сих пор не доказана. Трудность заключается в отсутствии аналога результата Ж. Левина о произведении идеалов, поэтому выполнимость всех тождеств некоторой конечномерной алгебры в этом случае пока не установлена и доказательства шпехтовости осуществляются обходными путями.

Решение проблемы Шпехта в случае поля нулевой характеристики (т. е. в том виде, как ее понимал сам В. Шпехт) было получено А. Р. Кемером в 1980-е годы [91]. Он, в частности, объединил “следовую” технику с исследованием связей между первичными компонентами. Кроме того, он показал глобальную шпехтовость многообразий ассоциативных алгебр с помощью замечательного “супертрюка”, позволяющего сводить изучение тождеств бесконечно порожденных ассоциативных алгебр к тождествам конечно порожденных *супералгебр* [92]. А. Р. Кемер доказал сильную локальную представимость многообразий в случае поля нулевой характеристики и даже глобальную представимость (установив, что любое многообразие порождается грассмановой оболочкой конечномерной супералгебры).

А. Р. Кемер [93] в 1990 г. доказал локальную конечную базлируемость и сильную локальную представимость относительно свободных алгебр над бесконечным полем. В последующем А. В. Гришин [94] (см. также [95]) разработал другой метод, позволяющий доказывать локальную конечную базлируемость для T -пространств в PI-алгебре. Этот метод (θ -техника), восходящий к теореме Левина, был основан в большей степени на прямых комбинаторных рассуждениях с многочленами и в меньшей мере на свойствах носителей. А. В. Гришин рассматривал конструкцию расширения полупервичной алгебры радикальными элементами и в нем – T -пространства и T -идеалы. Образующие x_i представлялись в виде суммы полупростых частей $\bar{x}_i$ и радикальных частей θ_i . На каждой из этих частей определялось действие операторов подстановки.

Для T -пространств в случае поля нулевой характеристики свойство локальной конечной базлируемости было установлено А. В. Гришиным, а глобальной – В. В. Щиголевым [96], подход которого сочетал идеи А. Р. Кемера и А. В. Гришина. В доказательствах также использовались алгебро-геометрические соображения, предложенные автором настоящей статьи (применение леммы Артина–Рисса).

А. В. Гришин впервые построил пример бесконечно базлируемого T -пространства над произвольным полем характеристики 2 по модулю T -идеала $T([x, [y, z]])$. Пример А. В. Гришина представляет собой набор произведений квадратов

$$\{F_n\} = \{x_1^2, x_1^2 x_2^2, \dots, x_1^2 \cdots x_n^2, \dots\}.$$

Интересно, что если $\text{char}(\mathbb{K}) = p > 2$, то аналогичное T -пространство

$$\{x_1^p, x_1^p x_2^p, \dots, x_1^p \cdots x_n^p, \dots\},$$

которое предлагалось в качестве примера бесконечно базлируемого T -пространства в случае поля произвольной характеристики, как показал В. В. Щиголев, будет конечно базлируемым даже в абсолютно свободной алгебре.

Тем не менее, используя грассмановы конструкции, В. В. Щиголев построил бесконечно базлируемое T -пространство для произвольного p . Он показал, что система полиномов

$$\{E_n\} = \{Q(x_1, y_1), Q(x_1, y_1)Q(x_2, y_2), \dots, Q(x_1, y_1) \cdots Q(x_n, y_n), \dots\},$$

где $Q(x, y) = x^{p-1}y^{p-1}[x, y]$, бесконечно базлируема по модулю $T([x, [y, z]])$ как T -пространство [97].

Неожиданно оказалось, что в локальном случае ситуации с T -идеалами и T -пространствами различны. Как показал В. В. Щиголев [97], даже в случае двух образующих, бесконечного основного поля характеристики p и тождества $[[x, y], z] = 0$ система полиномов $Q_s = x^{p^s-1}y^{p^s-1}[x, y]$ бесконечно базлируема (а все T -идеалы в локальном случае конечно базлируемы, более того, конечно порожденная алгебра с тождеством аменабелевости нётерова). Этот пример показывает, что при доказательствах конечной базлируемости (в частности, А. Р. Кемером) особо разбирается случай, когда промежуточный носитель – алгебра A_i – не содержит смешанных элементов. Именно тогда используются умножения, а не только подстановки.

По всей видимости, впервые пример бесконечно базлируемого T -идеала над произвольным полем характеристики $p > 0$ был приведен автором и публично

доложен на семинаре по теории колец. Пример заключается в следующем:

$$R_n = [[E, T], T] \prod_{i=1}^n Q(x_i, y_i) ([T, [T, F]] [[E, T], T])^{q-1} [T, [T, F]],$$

где $Q(x, y) = x^{p-1}y^{p-1}[x, y]$.

Пример основывался на конструкциях бесконечно базлируемых T -пространств, предложенных А. В. Гришиным и В. В. Щиголевым. Впоследствии и другие участники семинара построили аналогичные примеры [98], [99].

Тем не менее, локальная конечная базлируемость и даже локальная представимость имеют место в общем случае, и это один из центральных результатов настоящей работы.

ТЕОРЕМА 1.1. *Любое многообразие ассоциативных алгебр над произвольным полем локально конечно базлируемо. Относительно свободная конечно порожденная PI-алгебра над произвольным полем представима.*

Нашей целью является обобщение теоремы 1.1 на алгебры над кольцами.

ТЕОРЕМА 1.2. *Любая цепочка T -идеалов в ассоциативном конечно порожденном кольце стабилизируется.*

Этот факт верен и для алгебр над ассоциативно-коммутативным нётеровым кольцом Φ . (Если Φ не нётерово, то над Φ есть тривиальное бесконечно базлируемое многообразие, порожденное тождествами $I_n x = 0$, так что случай не нётероваго Φ не имеет смысла.)

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1.3. *Любая цепочка T -идеалов в ассоциативной конечно порожденной алгебре над произвольным нётеровым ассоциативно-коммутативным кольцом Φ стабилизируется.*

Обозначим через $K \triangleleft \Phi$ идеал коэффициентов тождеств. Основной результат настоящей работы состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 1.4. *Относительно свободная конечно порожденная алгебра над произвольным нётеровым ассоциативно-коммутативным кольцом Φ (в частности, если $\Phi = \mathbb{Z}$, имеет место случай PI-колец) представима тогда и только тогда, когда $K \ni 1$.*

А. И. Мальцев [68] сделал следующее наблюдение. Поскольку ассоциативно-коммутативная алгебра финитно аппроксимируема, то тем же свойством обладает алгебра матриц над ней, а стало быть, любая представимая алгебра. Из теоремы 1.4 и результатов, полученных в пп. 5.1.2, вытекает следующая

ТЕОРЕМА 1.5 (вопрос Л. А. Бокутя и И. В. Львова [100]). *Относительно свободная конечно порожденная алгебра над произвольным нётеровым ассоциативно-коммутативным кольцом Φ (в частности, если $\Phi = \mathbb{Z}$, имеет место случай PI-колец) финитно аппроксимируема.*

Теоремы 1.1–1.5 представляют собой ответы на известные открытые вопросы, поставленные А. И. Мальцевым [9], [100], [101]. Эти результаты были анонсированы автором в [102]–[105].

Локальная конечная базлируемость легко выводится из локальной представимости с помощью рассуждений, приведенных в работе [106]. Однако наш путь

доказательств следующий: из локальной конечной базлируемости для алгебр выводится локальная представимость для алгебр, из нее – локальная конечная базлируемость для колец, из которой, в свою очередь, – локальная представимость для колец.

Одним из главных вдохновителей исследований по проблеме Шпехта был В. Н. Латышев. Он привлек внимание к РІ-теории и этой проблематике многих специалистов, к числу которых автор относит и себя, за что выражает ему благодарность. Как отмечали в своем обзоре Л. А. Бокуть и И. П. Шестаков [107]: “В течение многих лет проблема Шпехта была одной из наиболее любимых проблем А. И. Ширшова. В течение многих лет, В. Н. Латышев работал над этой проблемой и поддерживал интерес к ней, спасая ее от “смерти”. А. И. Ширшов, В. Н. Латышев и другие математики были названы Л. Роуэном “Русской школой” в теории РІ-алгебр”.

1.2. Проблема Шпехта и некоммутативная алгебраическая геометрия. Проблемы шпехтова типа позволяют по-новому взглянуть на некоммутативную алгебраическую геометрию. Классическая алгебраическая геометрия связана с изучением множества первичных (простых) идеалов, а также радикала, являющегося их пересечением. Идея, связанная с рассмотрением первичных объектов и переходом к фактору по радикалу для случая произвольных алгебраических систем, принадлежит Н. Джекобсону. Однако при этом множество первичных объектов может стать необозримым, поведение радикала может оказаться плохим. Для РІ-алгебр С. Амищур обобщил теорему Гильберта о нулях, показав, что первичные алгебры порождают матричные многообразия (относительно свободная первичная РІ-алгебра есть алгебра общих матриц), а ниль-радикал совпадает с радикалом Джекобсона [108], [109]. На этом пути была решена проблема Куроша о локальной конечности алгебраических алгебр. В сочетании с комбинаторным подходом была доказана более сильная теорема Размыслова–Кемера–Брауна о глобальной нильпотентности радикала конечно порожденной РІ-алгебры. Эта теорема давала ответ на известный вопрос, поставленный В. Н. Латышевым в его диссертации [47].

1.2.1. Геометрическая теория представлений. В дальнейшем было необходимо развить концепцию, лежащую в основе структурной теории. Потребовалось изучать, во-первых, инварианты бесконечно порожденных объектов, во-вторых, *взаимодействие* полупростой части и радикала (т. е. рассматривать множество морфизмов, а не только первичные объекты).

Простейшим примером такого взаимодействия являются блочно-верхнетреугольные матрицы. Идеал тождеств такой алгебры есть произведение идеалов тождеств матричных алгебр [110]. Теорема Левина вместе с теоремой Размыслова–Кемера–Брауна влечет выполнимость всех тождеств некоторой конечномерной алгебры в произвольной конечно порожденной РІ-алгебре, что необходимо для решения проблемы Шпехта. В терминах полупрямых произведений вычисляются экспоненты в ряде коразмерностей [111]–[113], а также размерность Гельфанда–Кириллова [114].

Тонкое исследование пирсовского разложения потребовалось для решения проблемы Шпехта [115], [93]. Для случая алгебр над конечным полем это исследование пришлось развить. Потребовалась дополнительное алгебро-геометрическое соображение.

Рассмотрим представление φ относительно свободной k -алгебры A в конечномерную алгебру над алгебраически замкнутым полем K . Тогда замыкание по Зарискому образа $\varphi(A)$ обладает тем же запасом тождеств, что и само $\varphi(A)$. Это не что иное, как *геометрическое замыкание* в смысле Плоткина. Вместо безнадежной задачи изучения общих представлений возникают вполне решаемые вопросы, относящиеся к описанию существенной части структуры их замыканий.

Представление алгебры приводится к следующему виду. Вдоль главной диагонали идут блоки. Ограничению на такой блок соответствует эпиморфизм на алгебру общих матриц. Под блоками идут нули. При этом блокам разного размера отвечают независимые переменные, а блоки одинакового размера могут быть *независимыми* или *однотипными*. Последнее означает, что коэффициенты при соответствующих матричных единицах связаны с помощью эндоморфизма Фробениуса. Если основное поле бесконечно, то этот эндоморфизм тождествен и коэффициенты при соответствующих матричных единицах в однотипных клетках совпадают. Возникают так называемые “матрицы со склеенными клетками”. Впервые такие матрицы (без подкрутки по Фробениусу) изучались С. А. Пихтильниковым [116], [117]. Он охарактеризовал многообразие, заданное всеми k -мерными ассоциативными алгебрами при $k \leq 18$, когда $\text{Char}(\mathbb{F}) = 0$, в терминах носителей. Как и в нашем случае, исследование обычных тождеств оказалось связанным с изучением разнотипных тождеств и соответствующей структуры пирсовских компонент (см. § 3).

Радикал, осуществляющий связь между клетками, описывается с помощью оснащенного колчана. Этот колчан можно привести к каноническому виду. На этом языке можно изложить ряд свойств тождеств в рамках *схемы Кемера*. Возникает любопытная многоосновная структура, состоящая из бимодулей над первичными компонентами. Подобного рода структуры в альтернативном и лиевым случаях вводились и исследовались А. В. Ильтяковым при решении проблемы Шпехта [88]–[90]. Получение более подробного описания в неассоциативном случае представляется важной проблемой, необходимой для развития теории представлений, в частности, для получения аналогов теоремы Левина.

СХЕМА КЕМЕРА. *Существуют два взаимно дополняемых способа задания многообразий алгебр:*

- 1) *геометрический способ, через носитель, путем предъявления набора алгебр и рассмотрения минимального многообразия, их содержащего;*
- 2) *комбинаторно-функциональный способ, связанный с предъявлением базиса тождеств.*

Перевод с геометрического языка на комбинаторно-функциональный по сути есть версия некоммутативной алгебраической геометрии. Однако эти два описания довольно далеки друг от друга. Например, неизвестен базис тождеств алгебры матриц третьего порядка над полем нулевой характеристики. С другой стороны, нахождение алгебры, порождающей данное многообразие, также довольно трудно.

Схема Кемера основана на постепенном сближении этих двух описаний, изначально далеких. А. Р. Кемер построил своего рода мост и разработал язык тождеств, на котором удастся выразить некоторые геометрические параметры носителей (например, индекс нильпотентности радикала, размерность полупростой части, сумма размеров клеток полупростой части).

Если относительно свободную алгебру расширить коэффициентами характеристических многочленов ее элементов, то получится алгебра нётероваго типа. Коэффициенты характеристических многочленов выражаются через следы (формы в положительной характеристике). Поэтому в исходной алгебре строят T -идеал, устойчивый относительно умножения на следы (формы). Концепция *экстремального T -идеала* лежит (явно или неявно) в основе почти всех работ по проблемам шпехтова типа. Ищут критический идеал (conductor) $I \neq 0$ такой, что:

1) I есть нётеров модуль над некоторым ассоциативно-коммутативным кольцом R (связанным со следами и формами), причем структура модуля согласована со структурой алгебры;

2) фактору A/I соответствует меньший набор индукционных параметров (меньшая сложностная характеристика).

1.2.2. Лемма Артина–Рисса и пучки. Представимую алгебру можно рассматривать как пучок конечномерных алгебр на аффинном пространстве. На этом пути была установлена знаменитая теорема В. Шелтера. Одним из наиболее ярких результатов, полученных на основе данного подхода, является доказательство Ю. П. Размысловым теоремы об изоморфизме двух конечномерных первичных алгебр A_1 и A_2 произвольной сигнатуры над алгебраически замкнутым полем, в которых выполняются одни и те же тождества.

Основная идея, предложенная автором, заключается в применении леммы Артина–Рисса или аналогичных соображений, как это было, в частности, отмечено в [118]. Мы разберем пример, важный для дальнейшего исследования. Пусть S – T -идеал в алгебре общих матриц M_n порядка n . Если расширить M_n следами, то расширенная система $\hat{S}$ будет очевидным образом конечно базлируемой, так как вся алгебра окажется нётеровым модулем над центром. Пусть Z – кольцо, порожденное размысловскими центральными полиномами. Оно замкнуто относительно умножения на следы и является идеалом в центре алгебры, а также в кольце, порожденном следами. В силу тождества (2.1) из § 2 оно порождает один и тот же идеал в алгебре общих матриц и в алгебре матриц со следом. (В случае поля положительной характеристики нужны еще и *формы*, поэтому надо воспользоваться тождествами для форм; см. п. 2.3.) Следовательно, система $S' = ZS$ является модулем над кольцом следов и конечно базлируема. Ясно, что $S' \subset S$ и что это неравносильная система. Однако в силу леммы Артина–Рисса (см. лемму 4.1) она накрывает систему $Z^k M_n \cap S$ (число k зависит от системы S), что дает возможность осуществить спуск к алгебре $M_n/Z^k M_n$. Последняя алгебра имеет меньшую сложность. Таким образом, потерю равносильности при промежуточных заменах все же удастся проконтролировать.

Пусть $H \supset T(A)$ – идеал и $H' \supset H$ – образ H при системе расталкивающих подстановок G (см. п. 4.4). Тогда H' можно рассматривать как пучок модулей на некотором аффинном пространстве $\text{Spec}(R)$ (см. п. 4.3). Пусть $\hat{H} \supset H$, $\widehat{A[R]}$ – пучки R -модулей, порожденных H , $A[R]$ соответственно. Оказывается, что в общей точке $x \in \text{Spec}(R)$ для локальных пучков имеет место равенство $H_x \cap N_x = H'_x$, (индекс x означает локализацию пучка). В этом случае факторпучок $\hat{H} \cap N/H'$ будет сосредоточен на собственной замкнутой подсхеме. Это значит, что существует идеал $\hat{I} = \hat{I}(H)$ в кольце R такой, что $\hat{I}^k(\hat{H} \cap N/H') = 0$

при некотором $k = k(H)$. Тогда в силу леммы Артина–Рисса имеет место включение $H' \supseteq \hat{A}^k N \cap \hat{H}$. При этом алгебра $\hat{A}/I^k A$ имеет меньший сложностный тип, поэтому переход к фактору R/I^k приводит к индукционному спуску.

Конструкции замкнутых T -идеалов возникли как результат эволюции исследований, связанных с леммой Артина–Рисса. Роль внутренних умножений играют подстановки, связанные с граничными операторами.

Другим способом оформления этой идеи служит понятие *проективной минимальности* (см. определение 5.2). С этой точки зрения можно интерпретировать так называемое свойство *фениксовости* (Phoenix property), а следовательно, и вторую лемму Кемера.

1.2.3. Теория инвариантов. При построении некоммутативной алгебраической геометрии необходимо изучать не все идеалы, а те из них, которые являются “осмысленными”. Такими, прежде всего, являются *геометрически* либо *комбинаторно замкнутые* идеалы. *Комбинаторная замкнутость* есть свойство инвариантности объектов относительно действия группы (полугруппы) G . Свойство *конечной порожденности* означает порожденность конечным числом образующих, а также их образами относительно действия G . T -идеал есть идеал свободной алгебры, замкнутый относительно всех ее эндоморфизмов. Благодаря исследованиям по проблемам Шпехта типа стало ясно, что для инвариантных идеалов строится содержательная теория, аналогичная классической теории в коммутативной алгебре и алгебраической геометрии.

Свойство *нётеровости* означает стабилизацию возрастающих цепочек инвариантных идеалов. Проблема Шпехта является аналогом теоремы Гильберта о базисе. Достаточно важным является случай, когда G – группа перестановок, действующих на образующих. Этот случай изучал В. Н. Латышев [47] в связи с проблемой Шпехта для нематричных многообразий. Он рассматривал кольцо многочленов от бесконечного числа переменных и доказал справедливость условия обрыва возрастающих цепей для идеалов, инвариантных относительно всех перестановок образующих. *Ряды коразмерностей*, введенные А. Реговым, являются аналогом рядов Гильберта. Они изучались в работах [113], [119]–[121]. Отметим работу [122], результаты которой вместе с результатами, полученными К. А. Зубрилиным, влекут выполнимость всех тождеств алгебр матриц некоторого порядка в произвольной PI-алгебре над полем положительной характеристики.

Первичный в этом смысле объект – это объект, для которого не существуют ненулевые инвариантные идеалы с нулевым произведением, а *полупервичный* не содержит инвариантного идеала с нулевым квадратом. С этой точки зрения бесконечно порожденная грассманова алгебра с образующими e_i и соотношениями $e_i e_j = -e_j e_i$ является первичным объектом.

А. Р. Кемер ввел понятие T -первичного идеала. Это T -идеал, в факторе по которому нет двух ненулевых T -идеалов с нулевым произведением. Естественно определено также понятие T -первичного многообразия. Такие многообразия порождают алгебры, первичные в нашем смысле. Для T -первичных идеалов строится теория радикала, которая для ассоциативных алгебр над полем нулевой характеристики устроена как классическая.

Хорошим примером применения данного подхода служит использование грассмановых алгебр (в том числе и при построении различного рода контрпримеров), а также “супертрюка”. Благодаря работе над проблемой Шпехта по

этому пути была построена модель грассмановой алгебры в случае поля характеристики 2 и стала осознаться концепция “знака минус” в этой характеристике. Указанная алгебра имеет образующие x_i и определяющие соотношения $[x_i, x_j] = \varepsilon_i \varepsilon_j x_i x_j$, причем ε_i лежит в центре и $\varepsilon_i^2 = 0$ для всех i . (В классической грассмановой алгебре имеют место соотношения $[x_i, x_j] = 2x_i x_j$; в нашем случае коэффициент 2 заменен на произведение двух нильпотентов.)

При изучении полилинейных тождеств важную роль играют мономы, линейные относительно каждой входящей в них образующей. Пусть $X = \{x_i\}$ – бесконечное множество переменных. Семейство X *абсолютно коммутующее*, если при любых $x_i, x_j \in X$ и при любом $C \in A$ выполняется соотношение $x_i C x_j = x_j C x_i$. Если при любых $x_i, x_j \in X$ и $C \in A$ выполняется соотношение $x_i C x_j = -x_j C x_i$, то семейство X называется *абсолютно антикоммутирующим*. Элементы, входящие в абсолютно коммутующее семейство, можно “склеить”, семейство X ведет себя как одна образующая. Абсолютно антикоммутирующие семейства создают “супермир”. Этот подход, проясняющий супертеорию, возникает из “супертрюка” Кемера, позволяющего сводить изучение тождеств в бесконечно порожденных алгебрах к изучению супертождеств в конечно порожденных супералгебрах. Абсолютно коммутующему семейству отвечает четная переменная, а абсолютно антикоммутирующему – нечетная.

Роль грассмановой алгебры впервые осознал В. Н. Латышев. Первоначальные работы В. Н. Латышева по тождествам алгебры Грассмана [123], [124] (им, в частности, показана локальная шпехтовость многообразия ассоциативных алгебр с тождеством $[[x, y], z], t] = 0$) были своего рода предвестником последующих исследований, да и сами T -пространственные примеры базируются на грассмановой конструкции. Отметим, что РИ-теория позволяет по-новому посмотреть на некоммутативную алгебраическую геометрию. При этом грассманова алгебра служит одним из самых важных примеров новых объектов, являющихся аналогами первичных алгебр.

И. П. Шестаков говорил, что только после работ А. Р. Кемера он стал с уважением относиться к “супертеории”. В дальнейшем И. П. Шестаков обнаружил, что грассмановы оболочки супералгебр позволяют строить разного рода контрпримеры. В неассоциативной теории часто рассматривались многочлены, в которых все переменные можно было разбить на несколько групп, попарно антикоммутирующих. (Таким свойством часто обладают экстремальные многочлены в разрешимых альтернативных алгебрах, составленные из длинных ассоциаторов.) В этом случае проверку того, что соответствующая серия многочленов не обращается в нуль, можно проводить на модели, являющейся грассмановой оболочкой конечномерной супералгебры [125]. Таким образом объясняется пример Г. В. Дорофеева разрешимой индекса 2, но не нильпотентной альтернативной алгебры. В дальнейшем С. В. Пчелинцев [86] и его ученик А. В. Бадеев [126], [127] применили грассманову технику к построению нешпехтовых многообразий альтернативных алгебр, а также коммутативных луп Муфанга. Грассманова техника позволила строить контрпримеры и в ассоциативном случае. Интересно, что впервые стал систематически изучать тождества, связанные с грассмановой алгеброй, В. Н. Латышев [123], [124].

Исследование T -идеалов приводит к изучению идеалов *разносортных тождеств* в кольце многочленов от разносортных переменных. При этом подстановки должны быть согласованы с типами переменных. Это имеет место,

во-первых, в ситуации, когда переменные соотносятся с граничными операторами (вход/выход/переход) или с радикальными специализациями (см. [116]), и, во-вторых, в суперслучае. Таким образом, изучение цепочек T -идеалов приводит к исследованию однородных структур с иными группами преобразований. Свойство шпехтовости класса алгебр означает богатство группы преобразований.

1.2.4. Открытые вопросы. Неоднократно многими авторами (А. Брауном, Ю. П. Размысловым и др.) ставился вопрос о конечной базлируемости тождеств (от бесконечного числа переменных) алгебры матриц над полем положительной характеристики. (Особенно отмечался случай алгебры матриц второго порядка.) Следующий вопрос образует несколько более общую гипотезу.

ВОПРОС 1.1. *Верно ли, что любое многообразие, порожденное конечно порожденной алгеброй, конечно базлируемо?*

(Для алгебр Ли над полем положительной характеристики аналогичный вопрос имеет отрицательный ответ [2], [84].)

В частности: *верно ли, что многообразие, порожденное алгеброй матриц, конечно базлируемо?* Ответ неизвестен даже для матриц второго порядка.

В связи с проблемой Шпехта возникли и другие вопросы.

ВОПРОС 1.2. *Верно ли, что любая система полилинейных тождеств конечно базлируема?*

ВОПРОС 1.3. *Верно ли, что групповая алгебра финитарной бесконечной симметрической группы слабо нётерова?*

В случае поля нулевой характеристики положительный ответ на вопрос 1.3 был получен А. Залесским [128].

Следующая проблема представляется основной в PI-теории.

ПРОБЛЕМА 1.1. *Описать все T -первичные многообразия на полилинейном уровне.*

В случае нулевой характеристики описание было получено А. Р. Кемером (это многообразия, порожденные грассмановой оболочкой супералгебр). В положительной характеристике групповая алгебра симметрической группы содержит много различных первичных идеалов и спектр оказывается богаче (T -первичные многообразия принципиально иного типа были построены Ю. П. Размысловым). Описание T -первичных идеалов или “точек спектра” в этой версии некоммутативной алгебраической геометрии представляется одной из центральных проблем PI-теории. В настоящее время T -первичные многообразия активно исследуются А. Р. Кемером и его школой.

Следующая проблема тесно связана с предыдущей.

ПРОБЛЕМА 1.2. *Описать все первичные идеалы в групповой алгебре финитарной бесконечной симметрической группы.*

Надежду на получение такого описания автор связывает с деятельностью школы А. Р. Кемера.

Для случая алгебр над полем достаточно большой характеристики максимальные двусторонние идеалы были найдены А. А. Барановым и А. С. Клещевым.

Чрезвычайно важной представляется следующая проблема, связанная с получением аналога теоремы Размыслова–Кемера–Брауна для T -идеалов.

ПРОБЛЕМА 1.3. *Доказать нильпотентность ограниченного индекса пересечения всех T -первичных идеалов.*

В случае нулевой характеристики это было доказано А. Р. Кемером [115], [92].

Автор благодарит за поддержку В. Н. Латышева и А. В. Михалева – руководителей семинара МГУ по теории колец, на котором была доложена настоящая работа, а также А. В. Гришина, К. А. Зубрилина, В. Т. Маркова, В. В. Щиголева и всех участников семинара за полезные обсуждения. Автор благодарен С. В. Пчелинцеву, который привлек его к данной тематике, и признателен А. Р. Кемеру, Л. М. Самойлову, Л. А. Бокутю, с которыми он постоянно беседовал в течение многих лет, а также А. Мекею за полезные обсуждения и поддержку.

§ 2. Основные определения и конструкции

В настоящем параграфе определяются основные понятия и вводятся обозначения, нужные для дальнейшего исследования.

Через A обычно обозначается алгебра, через $a_1, \dots, a_s$ – ее образующие. Все кольца и алгебры, если не оговорено обратное, считаются конечно порожденными (к. п.). Запись $f|_A = 0$ означает, что полином f является тождеством алгебры A , а запись $f|_A \neq 0$ – что не является. Алгебра A *отделяет f от T -идеала Γ* , если $\Gamma \subseteq T(A)$, но $f|_A \neq 0$. Идеал, порожденный множеством M , обозначается $\text{id}(M)$. Иногда набор переменных $x_1, \dots, x_n$ мы будем рассматривать как *мультипеременную* и обозначать $\vec{x}$, используя записи типа $P(\vec{x}, y)$, $\mathbb{K}[\vec{x}]$, $\mathbb{K}\langle\vec{x}\rangle$ и т.д. Даже в тех случаях, когда рассматриваемые кольца не содержат единицу, мы будем использовать обозначения типа $y(1+z)$. Это означает, что имеется в виду элемент $y + yz$, который определен корректно. Через E_{ij} обозначена матричная единица: этот оператор переводит i -й базисный вектор в j -й, а остальные переводит в нуль. Тождество f называется *собственным*, если его коэффициенты образуют единичный идеал в основном кольце. Известно, что в этом случае f имеет следствие, все коэффициенты которого равны ± 1 . *Несобственным* называется тождество, не являющееся собственным. *Базисным рангом* многообразия $\mathfrak{M}$ называется такое минимальное s , что $\mathfrak{M}$ порождается своими s -порожденными алгебрами. Базисные ранги многообразия всех ассоциативных алгебр и многообразия, порожденного алгеброй общих матриц, равны двум, базисный ранг алгебры Грассмана или многообразия, заданного тождеством $[x, [y, z]] = 0$, равен бесконечности. А. Р. Кемер установил, что базисный ранг многообразия ассоциативных PI-алгебр равен бесконечности тогда и только тогда, когда оно содержит бесконечно порожденную алгебру Грассмана [129].

Функция роста $V_A(n)$ алгебры A определяется как размерность пространства, натянутого на слова длиной не выше n ; производящая функция $\sum_n V_A(n)t^n$ называется *рядом Гильберта* алгебры A . Функция роста зависит от выбора системы образующих. Однако если ввести отношение эквивалентности на множестве функций:

$$f \equiv g \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N}: \forall n (f(cn) \geq g(n), g(cn) \geq f(n)),$$

то класс эквивалентности $V_A(n)$ уже есть инвариант алгебры. *Размерностью Гельфанда–Кириллова* алгебры A называют предел

$$\text{GKdim}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln V_A(n)}{\ln n},$$

если он существует, GKdim есть инвариант алгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. а) *Полупрямым произведением (первого рода) алгебр A и B* , обозначаемым $A \rtimes B$, называется факторалгебра алгебры $A + A * B + B$ по идеалу, порожденному элементами вида $b * a$, $b \in B$, $a \in A$.

б) *Полупрямым произведением второго рода алгебр A и B* называется факторалгебра алгебры $(A \oplus B) *_F \mathbb{F}[c]$ по идеалу, порожденному элементами вида $c * a$, $b * c$, $c * c$, $b \in B$, $a \in A$.

Иногда полупрямое произведение (первого рода) называют *нульпроизведением*. Полупрямое произведение получается из прямой суммы с помощью следующей конструкции. Пусть $C = A \oplus B$. Распишем C элементом t , удовлетворяющим соотношениям $\forall a \in A$ ($ta = 0$), $\forall b \in B$ ($bt = 0$), $t^2 = 0$. Тогда $A \rtimes B$ будет изоморфно подалгебре, порожденной элементами вида $a(1 + t)$, $(1 + t)b$. Если A и B – алгебры матриц, то любой набор обратимых линейных преобразований на пространствах, соответствующих парам индексов i и q и порожденных элементами вида $E_{ijt}E_{pq}$, индуцирует автоморфизм $A \rtimes B$. Легко видеть, что полупрямое произведение раскладывается в сумму своих подалгебр, нумерующихся парами индексов (j, p) и соответствующих пространствам, порожденным элементами вида $E_{ijt}E_{pq}$. Каждая такая алгебра изоморфна алгебре “блочно-верхнетреугольных” матриц вида $\begin{pmatrix} \mathbb{M}_n & * \\ 0 & \mathbb{M}_k \end{pmatrix}$. Поэтому алгебра $A \rtimes B$ есть подпрямое произведение своих подалгебр, изоморфных алгебре “блочно-верхнетреугольных” матриц, и порождает то же многообразие, что и любая такая алгебра. Аналогично, полупрямое произведение нескольких матричных алгебр размера n_i изоморфно сумме своих подалгебр, которые мы обозначаем $U(\mathbb{F}, d_1, \dots, d_m)$. Каждая такая подалгебра задается матрицами вида

$$\begin{pmatrix} \mathbb{M}_{n_1} & * & \dots & * \\ 0 & \mathbb{M}_{n_2} & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbb{M}_{n_k} \end{pmatrix}.$$

Поэтому далее в настоящей работе под *полупрямым произведением* алгебр матриц будем понимать подалгебру вида $U(\mathbb{F}, d_1, \dots, d_m)$. Очевидно, что полупрямые произведения первого и второго рода порождают одно и то же многообразие.

2.1. Представления алгебр. Алгебра называется *алгеброй нётерова типа*, если она является алгеброй и одновременно нётеровым модулем над нётеровым ассоциативно-коммутативным кольцом R . Алгебра называется *представимой*, если она вкладывается в алгебру нётерова типа. При этом кольцо R называется *кольцом представления* и можно считать, что R содержит единицу. Известно, что кольцо представления любой к. п. представимой алгебры над нётеровым ассоциативно-коммутативным кольцом Φ может быть выбрано нётеровым. Все ассоциативно-коммутативные кольца, встречающиеся в настоящей работе, если не оговорено противное, считаются нётеровыми. Поскольку

любое нётерово кольцо является целым конечным расширением кольца многочленов, то любая представимая к. п. алгебра представима матрицами над кольцом многочленов. Кроме того, любая представимая алгебра вкладывается в алгебру, являющуюся свободным модулем над кольцом представления.

Отметим, что в случае алгебр над произвольным нётеровым ассоциативно-коммутативным кольцом условие вложимости в алгебру нётерова типа (или, что то же самое, в алгебру эндоморфизмов нётерова модуля) и условие представимости матрицами различаются. В этом случае под *представимостью* мы будем понимать более слабое условие – вложимость в алгебру нётерова типа.

Следующее определение используется и в случае неассоциативной алгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Назовем идеал I *представимым*, если фактор по нему есть представимая алгебра. Идеал тождеств *представим*, если он является T -идеалом представимой алгебры, или, что равносильно, относительно свободная алгебра из соответствующего многообразия представима.

Минимальное n такое, что алгебра A вкладывается в алгебру, являющуюся модулем ранга n над своим центром, называется *порядком представления*. Если идеал I представим, то его порядок представления есть порядок представления A/I .

Алгебра называется PI_n -алгеброй, если она принадлежит многообразию, порожденному представимыми алгебрами порядка n .

Следующая лемма есть аналог теоремы Гильберта о базисе.

ЛЕММА 2.1. *Представимые идеалы фиксированного порядка удовлетворяют свойствам обрыва возрастающих цепей.*

По сути, достаточная степень инвариантности идеала относительно достаточно богатой полугруппы эндоморфизмов ведет к представимости, а самыми инвариантными являются T -идеалы, отсюда следует шпехтовость в ассоциативном случае, а также в структурируемых многообразиях, группа эндоморфизмов которых достаточно богата.

ЛЕММА 2.2 (о пересечении представимых идеалов). *Пересечение конечного числа представимых идеалов представимо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{I_\alpha\}$ – представимые идеалы алгебры A . Тогда ядро естественного гомоморфизма $A \rightarrow \bigoplus_\alpha A/I_\alpha$ есть пересечение $\bigcap_\alpha I_\alpha$, а прямая сумма представимых алгебр представима.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Представимая алгебра называется *несводимой*, если она не содержит конечное множество представимых ненулевых идеалов с нулевым пересечением. Алгебра называется *несводимой порядка n* , если она не содержит конечное число представимых ненулевых идеалов порядка n с нулевым пересечением.

Отметим, что разложение алгебры на несводимые компоненты, вообще говоря, неоднозначно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. а) *Любая алгебра нётерова типа вкладывается в прямую сумму конечного числа своих несводимых факторов по идеалам, устойчивым относительно умножения на элементы кольца представления.*

б) *Для любого $t \geq n$ любая представимая алгебра порядка n вкладывается в прямую сумму своих несводимых факторов порядка t .*

Для алгебр типа $\tilde{A}$ или $\hat{A}$, которые мы используем при решении проблем шпехтова типа, разложение на несводимые компоненты имеет место (и понимается) в следующем смысле: эти алгебры градуированы конечной полугруппой и рассматриваются как многоосновные алгебры нётерова типа. Нётеров тип компоненты обеспечен действием граничных операторов и умножением на степени форм. Во всех доказательствах под *несводимостью* понимается несводимость порядка, равного рангу рассматриваемой алгебры.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Аналог предложения 2.1 для представимых алгебр в общем случае неверен.

Мы будем говорить, что в идеале I нет препятствия к представимости идеала J , если существует представление ρ всей алгебры в алгебру нётерова типа такое, что $\ker(\rho) \cap I = I \cap J$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть в идеале I нет препятствия к представимости J . Тогда если факторалгебра $A/(I + J)$ представима, то A/J также представима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ρ – представление факторалгебры A/J , ограничение которого на I имеет ядро, равное $I \cap J$. Достаточно рассмотреть прямую сумму этого представления и точного представления $A/(I + J)$. Предложение доказано.

Отметим, что из представимости пересечения $I \cap J$, суммы $I + J$, а также самого идеала I не ясно, следует ли представимость J . По всей видимости, не следует. Вероятно, при вложении A в алгебру нётерова типа идеал J может расширяться, так что могут возникнуть дополнительные элементы в пересечении J с I . Хорошо бы построить соответствующие примеры.

2.1.1. Расширения и выбор свободных элементов. Пусть A – конечномерная алгебра. Если основное поле бесконечно, то можно построить относительно свободную s -порожденную алгебру $\tilde{A}$, порождающую $\text{Var}(A)$ и вложенную в расширение A кольцом полиномов (тем самым, представимую). А именно, берем базис алгебры A , рассматриваемой как векторное пространство, умножаем каждый элемент базиса на свободную переменную и суммируем. Получаем образующую алгебры $\tilde{A}$. Для набора образующих $\tilde{A}$ берем непересекающиеся наборы переменных.

Пусть основное поле конечно и имеет порядок $q = p^k$. Тогда конструкция видоизменяется: независимые переменные, с которыми мы будем суммировать базисные элементы, будут принадлежать не кольцу коммутативных полиномов $F[\vec{x}] = F[x_1, \dots, x_s]$, а его фактору $F^q[\vec{x}]$ по T -идеалу, порожденному тождеством $x^q - x = 0$. Кольцо $F^q[\vec{x}]$ также градуировано по каждой переменной, только градуировка лежит в полугруппе $\{*\mathbb{Z}_p\}$, т. е. в факторе полугруппы $\mathbb{Z}^+$ по конгруэнции, порожденной склейкой чисел 1 и q . (Градуировка различает факты вхождения и невхождения каждой свободной переменной, а также количества вхождений по модулю $q - 1$.) Точки спектра кольца $F_q[\vec{x}]$ соответствуют всевозможным специализациям переменных в элементы поля F .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Пусть $|F| = q = p^k$. Тогда кольцо $F^q[\vec{x}]$ есть фактор кольца $F[\vec{x}] = F[x_1, \dots, x_s]$ по $T(x^q - x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Вместо переменных из $F^q[\vec{x}]$ можно рассматривать всевозможные специализации переменных в соответствующие конечные поля и брать прямую сумму таких специализаций. В частности, при построении $\tilde{A}$ можно взять всевозможные наборы N_i , $i = 1, \dots, q$, из $s \dim(A)$ значений координат s образующих. Пусть Q – количество таких наборов. Каждому из них будет отвечать гомоморфизм $\tilde{A} \rightarrow A$, а алгебра $\tilde{A}$ определяется как такое подмножество прямого произведения $\bigoplus_{i=1}^Q A$ алгебры A на себя, что проекция на i -ю компоненту отвечает i -му гомоморфизму. Однако это усложняет изложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. а) Алгебра $\tilde{A}$ относительно свободна, представима, и $\text{Var}(\tilde{A}) = \text{Var}(A)$.

б) Расширение $\tilde{A}$ кольцом R , порожденным значениями операторов следа (форм), является нётеровым R -модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) уже доказано. Утверждение б) следует из предложения 2.7, которое будет доказано ниже.

Пусть M – нётеров модуль над нётеровым кольцом S . Тогда конечная сумма $\bigoplus_i \otimes^{k_i} M$ также нётерова. Пусть A – представимая алгебра, вложенная в алгебру нётерова типа $\tilde{A}$, $T = \{t_i\}$ – конечный набор букв. Рассмотрим множество слов $\mathcal{U}_k$, в которые буквы из T входят не более чем k раз. Рассмотрим, далее, всевозможные специализации элементов алгебры A в $\mathcal{U}_k$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть A – представимая алгебра. Тогда существует такой конечный набор M элементов из A , что для любого многочлена $F(\vec{y}, \vec{\Lambda})$, имеющего степень однородности не выше k относительно переменных из конечного набора $\vec{\Lambda}$, тождественное равенство нулю $F(\vec{y}, \vec{\Lambda})$ равносильно равенству нулю $F(\vec{y}, \vec{\xi})$ для любых $\vec{\xi} \in M^k$.

Данное предложение можно переформулировать на языке расширений ограниченно свободными элементами порядка k ; n -элементный набор $M = \{m_i\} \subset A$ называется ограниченно свободным порядка k , если для любого многочлена F степени не выше k относительно переменных из $\Lambda = \{t_i\}$ его тождественное обращение в нуль равносильно обращению в нуль результатов подстановок $m_i \rightarrow t_i$.

Рассмотрим расширение $A_{\text{Var}(A)}\langle \Lambda \rangle$ и всевозможные специализации $t_i \rightarrow m_i$, $i = 1, \dots, |\Lambda|$, каждая из которых отвечает гомоморфизму этого расширения на алгебру A . Поскольку набор M конечен, возникает гомоморфизм расширения $A_{\text{Var}(A)}\langle \Lambda \rangle$ в прямую сумму $\bigoplus_k A$, k – число всех таких специализаций. Элементы A вложатся как константы, образы элементов из Λ будут свободными элементами порядка k в образе. Получилось свободное расширение порядка k с помощью набора M свободного порядка k .

2.1.2. Препятствие к алгебраичности. Пусть B – ассоциативная алгебра, $\{\beta_i\}$ – ее образующие, $\{b_i\}_{i \in I}$ – множество всех ее элементов, $\{\delta_{ij}\}_{i \in I, j=1, \dots, m}$ – набор независимых коммутативных переменных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Каноническое алгебраическое представление порядка m есть алгебра

$$\widehat{B}^{(m)} = B[\delta_{ij}] / \text{id}(\{b_i^m + \delta_{i1}b_i^{m-1} + \dots + \delta_{im}\}_{i \in I}).$$

Если индекс i будет принимать значения из множества, отвечающего словам степени не выше s от образующих алгебры B , то получившийся объект мы

будем называть *каноническим алгебраическим представлением длины s порядка t* и обозначать $\widehat{B}^{(m,s)}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Пусть $b \in B$. Расширим алгебру B свободными коммутативными константами δ_i , $i = 1, \dots, n-1$, и рассмотрим фактор по идеалу $\text{id}(b^m + \delta_1 b^{m-1} + \dots + \delta_m)$. Алгебра B естественным образом отображается в эту алгебру, а ядро этого отображения называется *препятствием к алгебраичности порядка t элемента b* . Ядро при каноническом алгебраическом представлении порядка t называется *препятствием к алгебраичности порядка t* . Аналогично определяется *препятствие к алгебраичности порядка t системы элементов $\{b_i\}$* .

Пусть система форм $\delta_i(b)$ удовлетворяет тождеству Гамильтона–Кэли. Это означает, что в алгебре выполняется тождество $a^n + \delta_1(a)a^{n-1} + \dots + \delta_n(a) \equiv 0$. Тогда естественно строится *каноническое представление Гамильтона–Кэли порядка n* , а соответствующее ядро называется *препятствием к тождеству Гамильтона–Кэли порядка n* .

Говоря неформально, если все элементы алгебры B (соответственно, слова длиной не выше s) “насилно” сделаем алгебраическими степени t , то получим каноническое алгебраическое представление степени t (соответственно, длиной s).

Аналогично определяется идеал J_k – *препятствие к представимости матрицами порядка k над нётеровым кольцом*.

Из следствия 2.1 вытекает

ЛЕММА 2.3 (о каноническом представлении [130]). а) *Каноническое алгебраическое представление является нётеровым модулем над значениями оператора следа. То же верно для представления длиной s , если s не превосходит t или $\text{PIdeg}(B)$.*

б) *Если алгебра B представима матрицами порядка t , то естественные отображения $B \rightarrow \widehat{B}^{(m)}$, $B \rightarrow \widehat{B}^{(m,s)}$ являются вложениями.*

в) *Если алгебра B представима, т. е. вкладывается в алгебру нётерова типа, то каноническое алгебраическое представление некоторого порядка является вложением.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Пусть B – конечномерная алгебра, $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ – ее базис, $\{x_{kl}\}_{k,l=1}^{s,n}$ – независимые переменные; s -*порожденной алгеброй общих элементов из B* называется алгебра, порожденная образующими $a_i = \sum_{l=1}^n x_{il} \vec{e}_l$.

Данное определение непосредственно переносится на многоосновные алгебры произвольной сигнатуры. Алгебра общих элементов относительно свободна и порождает однородное многообразие. Конструкция неоднородных аналогов алгебры общих элементов изложена в пп. 3.3.2. (При этом коэффициенты берутся из свободных коммутативных колец с тождествами вида $x^{q_i} - x \equiv 0$ и тождества $x^{q_i} - x \equiv 0$ должны выполняться в основном поле.)

Рассмотрим полупрямое произведение матричных алгебр $\mathbb{M}_{n_1} \rtimes \dots \rtimes \mathbb{M}_{n_k}$ над бесконечным центром. Соответствующая алгебра называется *алгеброй общих блочно-треугольных матриц типа $(n_1, \dots, n_k)$* .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Для полупрямых произведений, в которых участвуют матричные алгебры с конечным и бесконечным центрами, понятие *выбора общего*

элемента полезно видоизменить. Если q – мощность центра, то центр удовлетворяет тождеству $x^q - x = 0$. Коэффициенты при соответствующих матричных единицах следует брать также из свободной коммутативной алгебры с тождеством $x^q - x = 0$ (а коэффициенты при радикальных компонентах и компонентах, отвечающих матрицам с бесконечным центром, брать из обычных многочленов). Получается относительно свободная алгебра.

2.2. Линеаризации и квазилинеаризации. Опишем процедуру линеаризации. Пусть полином P имеет степень n по переменной x . Рассмотрим подстановку $\sum_{i=1}^n x_i \rightarrow x$ и возьмем сумму членов, полилинейных по всем x_i . Получившийся многочлен Q называется *полной линеаризацией* P . *Частичной линеаризацией* называется сумма членов заданной степени полиоднородности по переменным x_i . Из тождества P следует его полная линеаризация Q в силу равенства

$$\begin{aligned} Q(x_1, \dots, x_n, \vec{Y}) &= P(x_1 + \dots + x_n, \vec{Y}) - \sum_i P(x_1 + \dots + \hat{x}_i + \dots + x_n, \vec{Y}) \\ &\quad + \sum_{i < j} P(x_1 + \dots + \hat{x}_i + \dots + \hat{x}_j + \dots + x_n, \vec{Y}) - \dots \\ &\quad \dots + (-1)^n (P(x_1, \vec{Y}) + \dots + P(x_n, \vec{Y})), \end{aligned}$$

где $\vec{Y}$ – набор остальных переменных в P (отличных от x).

Так, линеаризация многочлена x^n есть многочлен $\sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$, а линеаризация по всем переменным тождества Холла есть многочлен $[[x_1, y_1] \odot [x_2, y_2] + [x_1, y_2] \odot [x_2, y_1], z]$, где $a \odot b = ab + ba$ – симметризатор элементов a и b .

Если в многочлене Q вместо переменных x_i подставить x , то получится многочлен $n!P$. Поэтому если основное поле имеет характеристику нуль, то все тождества равносильны полилинейным.

Если основное поле $\mathbb{K}$ бесконечно, то все тождества можно считать однородными по каждой переменной. В частности, вместе с каждым тождеством будут выполняться все его (частичные) линеаризации.

Удобно использовать слова, но в то же время могут появиться линейные комбинации слов. Поэтому после каждой подстановки мы сортируем члены из линейной комбинации по числу вхождения слов, при этом суммы членов каждого сорта мы выделяем. Поскольку основное поле бесконечно, то переход к таким суммам есть операция, не выводящая за пределы T -пространств. Пусть (некоммутативный) многочлен P однороден и имеет степень m_r по переменной z_r . Рассмотрим подстановку $\sum_s z_{rs} \rightarrow z_r$ и компоненту $H_{k_{rs}}$, возникающую при этой подстановке, имеющую k_{rs} вхождений переменной z_{rs} . Ясно, что $\sum_{r,s} k_{rs} = \deg(P)$. *Вербальный оператор* – это результат подстановки $v_{rs} \rightarrow z_{rs}$, где v_{rs} – слова, входящие в соответствующую компоненту. Набор чисел (k_{rs}) называется *матрицей вербального оператора*. Можно дать другое равносильное определение. Рассмотрим подстановку $\sum_s \lambda_{rs} v_{rs} \rightarrow z_r$. *Вербальный оператор* с матрицей (k_{rs}) можно определить как сумму членов при коэффициенте $\prod_{r,s} \lambda_{rs}^{k_{rs}}$.

Имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5 [94], [131], [132]. а) Если основное поле бесконечно, то вербальный оператор не выводит за пределы T -пространства.

б) Любое пространство, замкнутое относительно вербальных операторов, является T -пространством.

Вербальный оператор можно представлять следующим образом. Все вхождения переменной z_r размечаются, т. е. разбиваются на группы по k_{rs} вхождений. Затем во вхождения, помеченные одинаково, подставляются одинаковые слова и результат суммируется по всем способам разметки. Выбор разметки вместе с подстановкой заданных слов на размеченные позиции будем называть *расстановкой, связанной с матрицей* (k_{rs}). Вербальный оператор есть сумма по всем расстановкам, связанным с матрицей (k_{rs}). Отметим, что понятие “вербального оператора” использует понятие “слова” и потому зависит от выбора системы образующих алгебры.

Отметим, что если основное поле конечно, то действие вербальных операторов, вообще говоря, выводит за пределы T -идеала. Рассмотрим подстановку $x \rightarrow x + \sum_{i=1}^n t_i$. Пусть S – подмножество элементов t_i , f – многочлен, а $\Sigma_S(f)$ – сумма членов, образовавшихся после подстановки и содержащих каждое t_i из S хотя бы один раз и только их. Если $\deg_x(f) < |S|$, то сумма $\Sigma_S(f)$ полагается равной нулю.

Для случая произвольного основного кольца используем следующую лемму.

ЛЕММА 2.4 [130]. *Операторы Σ_S не выводят за пределы T -пространства (для любого основного кольца).*

В частности, переход к сумме членов, в которые входят все t_i , является T -пространственной операцией, которую мы будем называть *квазилинеаризацией*. Полная линеаризация тождества по любой переменной является частным случаем квазилинеаризации и потому всегда является следствием (а частичные линеаризации – не всегда).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8. Назовем многочлен *хорошим*, если каждая его переменная входит в каждый моном. (В англоязычной литературе принят термин *blended polynomial*.)

Пусть $f = f_1 + f_2$, переменная x входит во все мономы f_1 и не входит в f_2 . Тогда, делая подставку $x \rightarrow 0$, получаем, что f_2 есть следствие f , но тогда и $f_1 = f - f_2$ также есть следствие f . По индукции следует, что любое тождество равносильно набору своих хороших компонент. Поэтому далее рассматриваются только хорошие полиномы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. Если $f(x_1 + x_2; \vec{y}) \equiv f(x_1; \vec{y}) + f(x_2; \vec{y})$ в многообразии $\mathfrak{M}$, то многочлен f *квазилинеен* относительно переменной x . Если при этом f однороден по x , то $f(\lambda x; \vec{y}) = \lambda^q f(x; \vec{y})$, $\lambda \in \mathbb{F}$, при некотором $q = p^k$, $p = \text{Char}(\mathbb{F})$. Число q называется *степенью квазилинейности* многочлена f относительно переменной x .

Нам понадобится следующее техническое утверждение, доказательство которого аналогично доказательству того факта, что в случае бесконечного основного поля вместе с каждым тождеством выполняются все его линеаризации.

ЛЕММА 2.5. *Пусть элементы c_i , $i = 1, \dots, s$, входят в произведение*

$$P = d_0 c_1 d_1 \cdots c_s d_s,$$

и пусть кольцо R порождено операторами, действующими на элементах c_i умножением слева, причем сразу на всех одновременно, так что для любого $r \in R$ корректно определен элемент $P_r = d_0 r c_1 \cdots r c_s d_s$. Пусть r_i – оператор замены $c_i \rightarrow r c_i$, действующий на i -ю позицию. Пусть основное поле F бесконечно. Тогда на P определено действие кольца симметрических функций относительно r_i .

2.3. Следы и формы. Относительно свободная алгебра, как правило, не является алгеброй нётерова типа. Однако если ее расширить значениями оператора следа (в случае поля положительной характеристики – значениями операторов форм), то расширенная алгебра уже будет иметь нётеров тип. Цель построения экстремального идеала состоит обычно в том, что экстремальный идеал I оказывается замкнутым относительно умножения на некоторое подкольцо кольца форм. Он совпадает с экстремальным идеалом расширенной алгебры. Схема доказательства конечной базирюемости часто такова: сначала доказывают, что для возрастающей цепочки T -идеалов Γ_i пересечения $\Gamma_i \cap I$ стабилизируются, а затем рассматривают факторы. Поэтому в данном пункте мы изучаем следы, формы и тождества со следом (с формами).

Приведем основное соображение, принадлежащее Ю.П. Размыслову. Пусть $f(\vec{x}; \vec{y})$ – многочлен, полилинейный и кососимметрический по $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, и пусть V – векторное пространство, порожденное x_i , и $A \in \text{End}(V)$. Тогда $f(A\vec{x}; \vec{y}) = f(Ax_1, \dots, Ax_n; \vec{y}) = \det(A)f(\vec{x}; \vec{y})$. Перейдем к линеаризации. Положим $A = E + ta$. Имеет место разложение по степеням t :

$$f(A\vec{x}; \vec{y}) = \left(\sum_{k=0}^n \Phi_k(a) t^k \right) f(\vec{x}; \vec{y}),$$

где $\Phi_k(a)$ – форма k -го порядка от оператора a . Она равна следу оператора $\wedge^k(a)$, действующего на векторном пространстве $\wedge^k(V)$. Этот след равен сумме главных миноров порядка k матрицы оператора a . В частности, $\Phi_1(a) = \text{Tr}(a)$, $\Phi_n(a) = \det(a)$, $\Phi_0(a) = 1$. Если $A = E + \sum_i t_i a_i$, то

$$\det(A) = \sum_{\vec{k}} t_1^{k_1} \cdots t_s^{k_s} \Phi_{k_1, \dots, k_s}(a_{i_1}, \dots, a_{i_s}),$$

где s – число координат вектора $\vec{k}$ (различное при разных параметрах суммирования $\vec{k}$), форма $\Phi_{k_1, \dots, k_s}$ – частичная линеаризация формы $\Phi_{\sum k_i}$.

Величина $\Phi_{k_1, \dots, k_s}$ равна сумме главных миноров порядка $k = \sum k_i$, у которых k_1 столбцов взяты из матрицы a_1 , k_2 столбцов – из a_2 и т.д. Сумма берется также по всем возможным наборам столбцов. В частности, если все $k_i = 1$, то $\Phi_{k_1, \dots, k_s}(a_1, \dots, a_s)$ есть смешанный объем. Он равен сумме главных миноров s -го порядка, у которых s -й столбец совпадает с s -м столбцом соответствующего минора оператора $\Phi(s)$. Суммирование ведется по всем главным минорам и по всем перестановкам $\sigma \in S_s$.

Нам потребуется несколько понятий из теории разбиений и симметрических многочленов (см. книгу [133]). Разбиением $\mathcal{P}$ числа n называется представление n в виде суммы: $n = \sum_{\alpha} n_{\alpha}$, причем $n_1 \geq \dots \geq n_s > 0$, $|\mathcal{P}| = \sum n_i = n$. С разбиением $\mathcal{P}$ можно связать симметрическую функцию $m_{\mathcal{P}} = \sum_I \lambda_i^{n_{\alpha}}$.

Ясно, что функции $m_{\mathcal{P}}$ образуют базис в пространстве симметрических функций. Известно, что любая симметрическая функция есть многочлен от элементарных функций e_k .

Если $\{\lambda_i\}$ – набор собственных чисел оператора a , то $\{\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}\}$ – набор собственных значений оператора $\bigwedge^k a$ и величина

$$\Phi_k(a) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}$$

равна k -й элементарной симметрической функции e_k от набора $\{\lambda_i\}$.

Поэтому функции e_k отвечает форма Φ_k , а многочлену от e_k – многочлен от форм Φ_k . Суммированию отвечает переход к прямой сумме пространств (на которых действует оператор a и след равен соответствующей функции), а произведению – тензорное произведение; функции e_1 и Φ_1 отвечают оператору следа, а определителю для матриц n -го порядка – форма Φ_n .

Таким образом, каждому разбиению $\mathcal{P}$ отвечает симметрическая функция от λ_i , а значит, и величина $\Psi_{\mathcal{P}}$, являющаяся многочленом от форм Ψ_k . В частности, разбиению r на одно слагаемое отвечает симметрическая функция $p_r = \sum_i \lambda_i^r$, при этом $\Psi_r(a) = \text{Tr}(a^r)$.

В случае поля нулевой характеристики любая симметрическая функция выражается как многочлен от p_r и можно ограничиться рассмотрением следов. В случае поля характеристики p это выражение не всегда возможно (например, если $p = 2$, $n = 2$, $\lambda_1 = \lambda_2$, то $p_r(\lambda) = 0$, а $e_2(\lambda) = \lambda_1^2 \neq 0$). Простейший пример алгебры с полупростой частью и тождественно равным нулю оператором следа – это алгебра верхнетреугольных матриц порядка p с одинаковыми элементами вдоль главной диагонали.

Мы изучаем тождества с формами. Некоторые из них выполняются в алгебре матриц любого порядка. Например, в случае поля характеристики $p > 0$ выполняется тождество $\text{Tr}(x^p) = \text{Tr}(x)^p$. Аналогично, для любой формы Ψ имеет место равенство $\Psi_n(x^p) = \Psi_n^p(x)$. Множество тождеств с формами, выполняющихся в алгебре матриц любого порядка, следует из тождеств от одной переменной. Оно соответствует комбинаторным тождествам от симметрических функций, отвечающих формам. Чтобы в этом убедиться, достаточно диагонализировать матрицу a (подробнее понятие *тождества с формами* и основные конструкции см. в [93]).

Такого рода тождества с формами мы считаем *тривиальными*, и их выполнение всегда постулируем. При использовании форм, естественно отвечающих выражениям от элементарных форм Ψ_n , постулируются тождества, отвечающие соотношениям между этими выражениями.

Рассмотрим случай алгебры общих матриц порядка n . Пусть $f(x_1, \dots, x_{n^2}; \vec{y})$ – многочлен Капелли, полилинейный и кососимметрический по x . Тогда $f(a\vec{x}; \vec{y}) = \det(a)^n f(\vec{x}; \vec{y})$. Алгебра матриц порядка n , рассматриваемая как левый модуль над самой собой, изоморфна прямой сумме n экземпляров одинаковых модулей V . Набор собственных значений оператора a как оператора левого умножения есть набор собственных значений оператора a в V , повторенный n раз; k -я форма

$$\widehat{\Phi}_k(a) f(x_1, \dots, x_{n^2}; \vec{y}) = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n^2\}, |I|=k} f(x_1, \dots, x_{n^2}; \vec{y})|_{x_i = a x_i, i \in I}$$

при таком действии есть частичная линеаризация n -й степени определителя.

Форма $\widehat{\Phi}_k(a)$ выражается через формы $\Psi_{\mathcal{P}}$:

$$\widehat{\Phi}_k(a) = \sum_{|\mathcal{P}|=k} \prod_{n_i \in \mathcal{P}} \binom{n}{n_i} \Psi_{\mathcal{P}}$$

(а формы $\Psi_{\mathcal{P}}$ выражаются через формы Φ_k).

В частности, $\widehat{\Phi}_1(a) = n \operatorname{Tr}(a)$, $\widehat{\Phi}_{n^2}(a) = \det(a)^n$. Поэтому

$$n \operatorname{Tr}(Z) C(x_1, \dots, x_{n^2}; y_1, \dots, y_{n^2}) = \sum_{i=1}^{n^2} C(x_1, \dots, x_{n^2}; y_1, \dots, y_{n^2})|_{x_i=Zx_i}.$$

Переменные из набора $\vec{y}$ называются *прокладками*.

Мы будем использовать только формы типа $\widehat{\Phi}_k$, и, когда это не будет приводить к недоразумению, знак $\widehat{}$ записывать не будем. Заметим, что из леммы К. А. Зубрилина (см. далее предложение 2.8) следует, что кольцо, порожденное формами Φ_k , цело над кольцом, порожденным формами $\widehat{\Phi}_k$.

Кроме того, можно рассматривать двусторонние операторы. Алгебра линейных преобразований $(n \times n)$ -матриц, рассматриваемых как n^2 -мерное векторное пространство, изоморфна тензорному произведению алгебры левых умножений и алгебры правых умножений. Оператор $L(a)$ левого умножения на a и оператор $R(b)$ правого умножения на b при всех a и b коммутируют.

Если $\{\lambda_i\}$ – набор собственных значений оператора a , а $\{\delta_j\}$ – набор собственных значений оператора b , то $\{\lambda_i \delta_j\}$ – набор собственных значений оператора $L(a)R(b)$. Отсюда можно получить выражения для “двусторонних форм”. Рассмотрим оператор $\widehat{\Phi}_k(L(a)R(b))$. Он определяется равенством

$$\widehat{\Phi}_k(L(a)R(b))f(x_1, \dots, x_{n^2}; \vec{y}) = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n^2\}, |I|=k} f(x_1, \dots, x_{n^2}; \vec{y})|_{x_i=ax_i b, i \in I}$$

и выражается через операторы типа $\Psi(a)$, $\Psi(b)$:

$$\widehat{\Phi}_k(L(a)R(b)) = \sum_{|\mathcal{P}_1|=|\mathcal{P}_2|=k} \Psi_{\mathcal{P}_1}(a) \Psi_{\mathcal{P}_2}(b) \mu(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2),$$

где коэффициент $\mu(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ есть скалярное произведение характеров, отвечающих разбиениям $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$. Коэффициент $\mu(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ равен числу способов, которыми объекты, разбитые на группы в соответствии с $\mathcal{P}_1$, разбиваются на группы в соответствии с $\mathcal{P}_2$ так, чтобы не было объектов, два раза попавших в одну группу. Так, для случаев $k=1$ и $k=n^2$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} & \operatorname{Tr}(a) \operatorname{Tr}(b) C(x_1, \dots, x_{n^2}; y_1, \dots, y_{n^2}) \\ &= \sum_{i=1}^{n^2} C(x_1, \dots, x_{n^2}; y_1, \dots, y_{n^2})|_{x_i=ax_i b}, \end{aligned}$$

$$C(ax_1 b, \dots, ax_{n^2} b; y_1, \dots, y_{n^2}) = \det(a)^n \det(b)^n C(x_1, \dots, x_{n^2}; y_1, \dots, y_{n^2}).$$

Мы рассматривали преимущественно случай форм от одной переменной. Формы от нескольких переменных и выражения от них получаются путем линеаризации выражений от форм, рассмотренных выше. Поскольку вид этих выражений нам не важен, он здесь не приводится.

ТЕОРЕМА 2.1 (Ю. П. Размыслов). а) В алгебре общих матриц размера n выполняется тождество Капелли порядка $n^2 + 1$ и не выполняется тождество Капелли порядка n^2 .

б) Имеют место равенства

$$n \operatorname{Tr}(Z) C(x_1, \dots, x_{n^2}; y_1, \dots, y_{n^2}) = \sum_{i=1}^{n^2} C(x_1, \dots, x_{n^2}; y_1, \dots, y_{n^2})|_{x_i = Z x_i}, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \det(Z) C(x_1, \dots, x_{n^2}; y_1, \dots, y_{n^2}) &= C(Z x_1, \dots, Z x_{n^2}; y_1, \dots, y_{n^2}) \\ &= C(x_1, \dots, x_{n^2}; y_1, \dots, y_{n^2})|_{x_i = Z x_i \forall i}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(Z_1) \operatorname{Tr}(Z_2) C(x_1, \dots, x_{n^2}; y_1, \dots, y_{n^2}) \\ = \sum_{i=1}^{n^2} C(x_1, \dots, x_{n^2}; y_1, \dots, y_{n^2})|_{x_i = Z_1 x_i Z_2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

в) *Полином*

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n^2} C(x_1, \dots, x_{n^2}; y_{i+1}, \dots, y_{n^2}, y_1, \dots, y_i)$$

является центральным в алгебре общих матриц.

Полином называется *центральным*, если он не является тождеством и его значения лежат в центре алгебры. Когда основное поле имеет нулевую характеристику, построенный полином Z_n не обращается тождественно в нуль в алгебре общих матриц порядка n . Однако в положительной характеристике это, вообще говоря, не так (а именно, когда p делит n). Тем не менее, как показал Ю. П. Размыслов, в алгебре общих матриц порядка n всегда существует ненулевой центральный полином, обращающийся в нуль на матрицах меньшего порядка. Этот полином устойчив относительно умножения на следы (формы) и будет также обозначаться через Z_n . Устойчивость означает, что в результате умножения на след (форму) получается элемент алгебры общих матриц, а не расширенной алгебры.

В случае, когда основное поле имеет характеристику нуль, все симметрические многочлены от переменных x_i выражаются через суммы степеней $\sum_i x_i^k$. Тогда в силу тождества Гамильтона–Кэли имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Матрица Z порядка k цела над множеством следов $\{\operatorname{Tr}(Z), \dots, \operatorname{Tr}(Z^k)\}$.

В случае поля положительной характеристики надо рассматривать не только следы (суммы главных миноров порядка 1), но и суммы главных миноров произвольного порядка. Такие суммы являются *формами*.

Из предложения 2.6 и следствия теоремы Ширшова о высоте [56], [57] (если все слова длиной не выше степени алгебры алгебраичны, то такая алгебра конечномерна) непосредственно вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Пусть A – алгебра степени m , Y – множество слов длиной не выше m относительно фиксированного набора образующих и каждый элемент из Y алгебраичен над множеством коэффициентов Z . Тогда

расширение $M_n[Z]$ алгебры M_n цело над $\mathbb{K}[Z]$ и является нётеровым модулем над $\mathbb{K}[Z]$. Если A представима и вкладывается в алгебру, конечномерную над центром C , то элементы из Y алгебраичны над C и расширение $\hat{A}[Z]$ коэффициентами минимальных многочленов для элементов из Y является нётеровым модулем над $K[Z]$.

Если A – алгебра общих матриц порядка n , то в качестве Y можно взять множество слов длиной не выше $2n$ (даже не выше n [134], [20]) от образующих, а в качестве Z – множество форм $\{\Psi_k\}_{k=1}^{n^2}$ (либо форм $\{\Phi_k\}_{k=1}^n$) от значений элементов из Y .

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Утверждение, аналогичное предложению 2.7, справедливо для любой представимой алгебры A . Расширение $\hat{A}$ представимой алгебры A значением оператора следа на элементах описанного выше типа является нётеровым модулем над коммутативным кольцом.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Если воспользоваться свойством ограниченности высоты над множеством слов длиной не выше степени сложности алгебры [134], то параметр $2n$ в определении Y можно заменить на параметр n (а в следствии 2.1 – на $\text{PIdeg}(A)$).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Если $\text{Char}(\mathbb{K}) > 0$, то в качестве множества Z следует взять множество значений форм на элементах из Y .

Сложностным типом алгебры A мы будем называть класс всех полупрямых произведений матричных алгебр $M_1 \rtimes \dots \rtimes M_k$ из $\text{Var}(A)$. Это понятие включает в себя классическую сложность $\text{PIdeg}(A)$ (максимальный размер матриц из $\text{Var}(A)$) и сложность Латышева (максимальный размер верхнетреугольных матриц из $\text{Var}(A)$). Это число разнотипных клеток в минимальном колчане представления, т. е. параметр $b(A)$, введенный А. Р. Кемером и равный максимальной размерности алгебры из сложностного типа.

Понятие сложностного типа имеет важное значение. Отметим, что доказательство А. Р. Кемера конечной базирюемости использует двойную индукцию: по сложностному типу и по индексу нильпотентности радикала.

Иногда вместо набора переменных $\{x_1, \dots, x_s\}$ мы пишем $\vec{x}$, а вместо $f(x_1, \dots, x_s)$ пишем $f(\vec{x})$; $|v|$ – длина слова v . Многочленом Капелли $C_n(\vec{x}; \vec{y})$ называется многочлен

$$C_n(\vec{x}; \vec{y}) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} y_2 \cdots x_{\sigma(n)}.$$

2.3.1. Диаграммы Кемера и теория Размыслова–Зубрилина. С каждой диаграммой Юнга D можно связать множество непересекающихся наборов переменных $\{\Lambda_i\}$, соответствующих ее столбцам. При этом число элементов в наборе $\{\Lambda_i\}$ равно длине соответствующего столбца. Через $S(D)$ обозначим T -идеал, порожденный многочленами, полилинейными и кососимметрическими по каждому Λ_i .

Определим величину $b(\mathfrak{M})$ как наибольшее натуральное b , удовлетворяющее следующему условию.

УСЛОВИЕ. Существуют диаграммы D из сколь угодно большого числа клеток, все столбцы в которых имеют длину не меньше b , и при этом не все полиномы из $S(D)$ являются тождествами многообразия $\mathfrak{M}$.

Для алгебры C положим $b(C) = b(\text{Var}(C))$. Если алгебра C нильпотентна, то $b(C) = 0$, а если C порождает многообразие всех ассоциативных алгебр, то $b(C) = \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10. Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие алгебр, D – диаграмма Юнга, все столбцы которой имеют длину не меньше $b = b(\mathfrak{M})$. Если, кроме того, $S(D)|_{\mathfrak{M}} \neq 0$, то такую диаграмму мы будем называть *любопытной*. Диаграмма D называется *интересной*, если существуют сколь угодно большие любопытные диаграммы, содержащие D . Назовем столбец любопытной диаграммы D *большим*, если его длина строго больше b , а если она равна b , то он *малый*. *Малым* называется набор переменных, отвечающих малому столбцу, а *большим* – большому. Множество больших столбцов образует *голову* $H(D)$ диаграммы D . Диаграмма называется *экстремальной*, если она интересная и, кроме того, при $H(D') \supset H(D)$ и $D' \supset D$ все многочлены из $S(D')$ являются тождествами $\mathfrak{M}$; $k(H)$ есть минимальное число малых столбцов в экстремальной диаграмме с головой H (если такой диаграммы нет, то $k(H) = \infty$). *Хорошей диаграммой с головой H* называется экстремальная диаграмма с не менее чем $k + 2$ малыми столбцами. Экстремальная диаграмма называется *диаграммой Кемера*, если все большие столбцы имеют длину $b + 1$. Тогда d обозначает их число, а k – минимальное количество малых столбцов в диаграмме Кемера. Итак, минимальная диаграмма Кемера описывается параметрами b , d и k . Тем самым для многообразия $\mathfrak{M}$ определены величины $b(\mathfrak{M})$, $d(\mathfrak{M})$ и $k(\mathfrak{M})$. Типы многообразий, или тройки (b, d, k) , сравниваются следующим образом: $(b_1, d_1, k_1) \prec (b_2, d_2, k_2)$, если выполняется одно из трех условий:

- 1) $b_1 < b_2$;
- 2) $b_1 = b_2$, $d_1 < d_2$;
- 3) $b_1 = b_2$, $d_1 = d_2$, $k_1 > k_2$.

Промежутки между переменными, соответствующими диаграмме, называются *прокладками*. Когда это не вызывает недоразумений, термин “прокладка” будет использоваться и при изучении значений соответствующих многочленов (если подстановки переменных из набора $\Lambda = \bigcup_i \Lambda_i$ фиксированы). В дальнейшем, если не оговорено обратное, под *диаграммой Кемера* понимается *хорошая диаграмма Кемера*.

Если Γ – T -идеал в многообразии $\mathfrak{M}$, то, рассматривая не все полиномы, а только принадлежащие Γ , мы определим величины $b(\mathfrak{M}, \Gamma)$, $d(\mathfrak{M}, \Gamma)$, $k(\mathfrak{M}, \Gamma)$. Если $\mathfrak{M} = \text{Var}(A)$, то вместо аргумента $\mathfrak{M}$ иногда пишем аргумент A .

Операторы форм можно определить внутренним образом. Пусть в алгебре выполнено любое тождество вида $S_{\Lambda_1} \cdots S_{\Lambda_{k+1}} f = 0$, где $|\Lambda_i| = m + 1$ при всех i , S_{Λ} – альтернирование по переменным из набора Λ .

Пусть полилинейный многочлен g кососимметричен по наборам переменных из Λ_i , где $|\Lambda_i| = n + 1$ при $i > 0$ и $|\Lambda_0| = |\Lambda'_0| = n$. Можно считать, что

$$g = S_{\Lambda_0} S_{\Lambda'_0} S_{\Lambda_1} \cdots S_{\Lambda_k} f.$$

Для каждого x определим оператор внутренней формы $\delta_k(x)$ (линейный относительно g) на $T(g)$ следующим образом:

$$\delta_k(x) = \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}, |I|=k} g|_{a_i = x a_i \forall i \in I}, \quad a_i \in \Lambda_0.$$

Полная линейаризация этого оператора есть оператор $\Psi(x_1, \dots, x_k)$, который выражается равенством

$$\Psi(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} g|_{a_{i_\alpha} = x a_{i_\alpha}}, \quad a_{i_\alpha} \in \Lambda_0.$$

В частности, определен линейный по x оператор внутреннего следа $\text{Tr}(x) = \delta_1(x)$, действующий по формуле

$$\text{Tr}(x)g = \sum_{i=1}^k g|_{a_i = x a_i}, \quad a_i \in \Lambda_0.$$

Следующее предложение является непосредственным переносом основной теоремы работы [135] на экстремальные многочлены (см. [130], [136]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. Пусть $g \in S(D)$, $g = S_{\Lambda_0} S_{\Lambda'_0} S_{\Lambda_1} \dots S_{\Lambda_d}(f)$, D – диаграмма Кемера, $|\Lambda_0| = |\Lambda'_0| = m$, $|\Lambda_i| = m + 1$, $i = 1, \dots, d$, $d = d(A)$. Тогда:

а) операторы внутренних форм, определенные выше, коммутируют, в частности $\text{Tr}(x) \text{Tr}(y) = \text{Tr}(y) \text{Tr}(x)$;

б) $\text{Tr}(ab) = \text{Tr}(ba)$;

в) если многочлен g линеен по переменной $z \notin \cup \Lambda_i$, $g_h = g|_{h \rightarrow z}$ и $h^{(k)} = h' a^k h''$, $g^{(k)} = g_{h^{(k)}}$, то имеет место равенство (тождество Гамильтона–Кэли)

$$g^{(n)} = \sum_{k=1}^n \delta_k(a) g^{(n-k)}; \quad (2.4)$$

г) если h принадлежит препятствию к тождеству Гамильтона–Кэли порядка n , то $g_h = 0$;

д) подпространство $T(g)$, кососимметрическое по наборам переменных из Λ_i , является нётеровым модулем над операторами δ_k и вкладывается в представимую алгебру;

е) если полилинейный многочлен g линеен по переменной $z \notin \cup \Lambda_i$, а также полилинеен и кососимметричен по наборам переменных из Λ_i , где $|\Lambda_i| = n + 1$ при $i > 0$, $|\Lambda_0| = n$ (отметим, что при этом набор Λ'_0 отсутствует), то имеет место аналог тождества Гамильтона–Кэли (2.4); если h принадлежит препятствию к каноническому алгебраическому представлению порядка m , то $g_h = 0$;

ж) пространство $S_D(A, \Lambda)$ многочленов, полилинейных по переменным из набора

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda'_0 \cup \bigcup_{i>0} \Lambda_i$$

и кососимметрических относительно Λ_0 , Λ'_0 и каждого Λ_i , $i > 0$, является нётеровым модулем над коммутативной алгеброй, порожденной операторами $\delta_{ik}(a)$, оно вкладывается в пространство $S_D(A', \Lambda)$, где A' – каноническое алгебраическое представление порядка n алгебры A , при этом коэффициенты многочленов представления интерпретируются как $\delta_{ij}(a)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. В работе [135] утверждения, составляющие содержание предложения 2.8, сформулированы и доказаны для случая, когда наборы Λ_i ,

$i > 0$, отсутствуют. Рассматривались алгебры, в которых выполнялась система C_{n+1} и определялись внутренние следы для многочленов, кососимметрических относительно набора из n переменных (или двух наборов из n переменных Λ_0 и Λ'_0). Поскольку наша ситуация отличается только наличием дополнительных наборов Λ_i , $i > 0$, которые в вычислениях не участвуют, все рассуждения используются без изменений. Поэтому техника работы с тождествами Капелли непосредственно переносится на многочлены Кемера (см. [137]).

2.3.2. Представимые пространства и тестовые алгебры. Переформулируем предложение 2.8 в терминах тестовых (представимых) пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.11. Пространство $S \subseteq A$ называется *представимым*, если пересечение его с препятствием к представимости некоторого порядка равно нулю. Назовем пространство $S \subset B$ *представимым в алгебре B* , если имеется морфизм алгебры B в алгебру нётерова типа, ограничение которого на S является вложением.

Для диаграммы D многообразия $\mathfrak{M} \supseteq \text{Var}(A)$ и алгебры A определим подпространство $S_{D,\mathfrak{M}}(A) \subseteq A_{\mathfrak{M}}\{\{\Lambda_i\}\}$ как пространство многочленов, полилинейных и кососимметрических по переменным из каждого набора Λ_i , соответствующего диаграмме D (свободное произведение берется в многообразии $\mathfrak{M}$). Когда ясно, какая алгебра имеется в виду, мы будем записывать просто $S_{D,\mathfrak{M}}(A)$.

Поскольку в вычислениях, устанавливающих предложение 2.8, участвуют переменные только из одного набора Λ_i , доказательство этого предложения переносится на случай нескольких наборов. Имеем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. Пусть D – хорошая диаграмма Кемера для многообразия $\mathfrak{M} \supseteq \text{Var}(A)$, $S = S_{D,\mathfrak{M}}$. Тогда если D содержит малый столбец, то пространство S представимо.

Сопоставим диаграмме D систему наборов переменных $\xi_{ij} \in \Lambda_i$, где Λ_i – набор сильно антикоммутирующих переменных, отвечающий j -му столбцу диаграммы D .

Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие алгебр, D – диаграмма Кемера. Рассмотрим алгебру $K_0(A, D) = A *_{\mathfrak{M}} \{\{\xi_{ij}\}\} / Q$, где идеал Q порожден мономами M_α , содержащими два вхождения любой из переменных ξ_{ij} , а также элементами вида $M(\xi_{ij_1}, \xi_{ij_2}) - M(\xi_{ij_2}, \xi_{ij_1})$. Тестовая алгебра $K(A, D)$ есть расширение A в многообразии $\mathfrak{M}$ заданной диаграммой D системой сильно антикоммутирующих переменных. Обычно $\mathfrak{M} = \text{Var}(A)$, и это подразумевается, когда индекс $\mathfrak{M}$ не выписан. В любом случае для корректности конструкций необходимо, чтобы выполнялось включение $\mathfrak{M} \supseteq \text{Var}(A)$. Это всегда предполагается.

Пусть J_{b+1} – идеал в $K_0(A, D)$, порожденный значениями полиномов вида $f(u_1, \dots, u_{b+1}; \vec{y})$, где u_k – мономы от образующих A , f полилинейно и кососимметрично относительно u_i . Положим $K_1(A, D) = K_0(A, D) / J_{b+1}$, $K(A, D)$ есть пространство (идеал) в $K_1(A, D)$, порожденное мономами, полилинейными по всем переменным вида ξ_{ij} . В силу экстремальности D соответствующие пространства в алгебрах $K_1(A, D)$ и $K_0(A, D)$ естественно изоморфны.

В пространстве $K(A, D)$ естественным образом определено умножение на внутренние следы (формы), и это действие задает структуру нётерова модуля на пространстве $K(A, D)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.10 (о представимых пространствах). Пусть D – экстремальная диаграмма. Тогда:

а) соответствие $A \rightarrow K_{\mathfrak{M}}(A, D)$ есть ковариантный функтор (индекс $\mathfrak{M}$ указывает на используемое многообразие), пространство $K_{\mathfrak{M}}(A, D)$ всегда представимо и, кроме того, $K_{\mathfrak{M}}(A, D)$ изоморфно пространству $K_{\mathfrak{M}}(A', D)$ для некоторого A' – фактора A по некоторому представимому идеалу, при этом T -идеал $H(D)$ алгебры $K_{1\mathfrak{M}}(A, D)$ лежит в пространстве $K_{\mathfrak{M}}(A, D)$;

б) $\text{Var}(A) = \text{Var}(K_0(A, D)) = \text{Var}(K_1(A, D))$;

в) пространства $S_1(A, D)$ и $S_0(A, D)$ в алгебрах $K_1(A, D)$ и $K_0(A, D)$ соответственно, порожденные мономами, полилинейными по всем переменным вида ξ_{ij} , естественным образом изоморфны (иногда обозначаются $S(A, D)$), и эти пространства представимы.

Вместе с представимым пространством S_{Λ} определяется тестовая представимая алгебра $A(D)$, которая получается из канонического (операторного) алгебраического представления A путем расширения переменными из набора Λ и взятия фактора по мономам, содержащим две одинаковые переменные из Λ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.7. Интересно, что понятие модуля над алгеброй из произвольного многообразия определяется по аналогии с приведенными выше конструкциями. Пусть B – алгебра из многообразия $\mathfrak{M}$ произвольной сигнатуры Ω . Рассмотрим $\text{id}(\{t_i\})$ в расширении $B_{\mathfrak{M}}\langle\{t_i\}\rangle/J$, где J – идеал, порожденный мономами, в которые входят две переменные t_i . Это есть свободный модуль над алгеброй B . Подмодуль N есть подпространство такое, что для любого монома $M = M(\cdot, b_1, \dots, b_s)$ и любого элемента $n \in N$ значение $M = M(n, b_1, \dots, b_s)$ принадлежит N . Общее понятие модуля определяется как фактор свободного модуля по подмодулю. Данное понятие, обобщающее все известные определения (модуля над ассоциативной, лиевой, йордановой алгебрами и т. д.), появилось в процессе работы над проблемами шпехтова типа.

2.4. Схема А. Р. Кемера. Схема Кемера состоит в сближении многообразия и конечномерной алгебры, все тождества которой выполняются в этом многообразии. Доказательство конечной базирюемости систем тождеств проводится следующим образом.

Сначала находится стартовая алгебра – конечномерная алгебра A_0 такая, что $T(A_0) \subseteq \Gamma$. Существование такой алгебры следует из теоремы Размыслова–Кемера–Брауна о нильпотентности радикала и из результата Ж. Левина [110].

ТЕОРЕМА 2.2. Имеем $T(A \rtimes B) = T(A)T(B)$, где $T(A)$ – идеал тождеств алгебры A .

Из теоремы Ж. Левина следует, что если $c(A)$ – индекс нильпотентности радикала алгебры A , то A принадлежит многообразию, порожденному конечномерной алгеброй, являющейся полупрямым произведением $c(A)$ экземпляров алгебры матриц порядка n , где $n = \text{PIdeg}(A)$ – максимальный размер матриц, все тождества которых выполняются в алгебре A .

Далее рассматриваются пары (A_i, Γ_i) . При этом T -идеал алгебры A_i постепенно приближается к Γ_i и вопросы о конечной базирюемости и представимости для i -й пары сводятся к аналогичным вопросам для $(i + 1)$ -й. Конечномерная

алгебра A_i описывается набором параметров (размерностью полупростой части, индексом нильпотентности радикала), по которым осуществляется индукционный спуск. В конце концов $T(A_n)$ оказывается равным Γ_n . Такие вспомогательные алгебры A_i мы будем называть *промежуточными носителями*.

Схема Кемера идет сверху вниз, уменьшая промежуточный носитель. Это позволяет на каждом этапе пользоваться хорошими свойствами конечномерных алгебр, например структурируемостью или отщепимостью радикала. Сближение многообразия с промежуточным носителем осуществляется следующим образом. Прежде всего, в силу индуктивных соображений можно считать, что алгебры A_i не имеют ненулевых идеалов с нулевым пересечением. В этом случае, как показал А. Р. Кемер, для любого T -идеала $\Gamma \not\subseteq T(A)$ можно построить такой T -идеал Γ^0 , что:

- 1) $\Gamma^0 \subseteq \Gamma$ и $\Gamma^0 \neq T(A)$;
- 2) факторалгебра A/Γ^0 имеет меньший набор значений индукционных параметров;
- 3) относительно свободная алгебра из $\text{Var}(A/I \cap \Gamma^0)$ представима.

Индукционный переход к следующей паре основан на построении внутри относительно свободной алгебры из многообразия, заданного Γ_i , *экстремального* T -идеала $J \neq 0$ такого, что J и $\Gamma_i \cap J$ являются нётеровыми модулями над “алгеброй следов” (т. е. над нётеровым ассоциативно-коммутативным кольцом). Схему Кемера можно использовать и при доказательстве рациональности рядов Гильберта относительно свободных ассоциативных алгебр. Наше изложение схемы Кемера носит более категорный, а также “алгебро-геометрический” характер, чем в оригинальных работах.

При доказательствах конечной базирюемости используют различного рода индукционные параметры, характеризующие *сложность* алгебр. В самом общем виде понятие *сложности* обычно определяется исходя из набора “ключевых” алгебр, которые принадлежат данному многообразию. (Отметим, что в случае поля нулевой характеристики бесконечность базисного ранга равносильна тому, что многообразии содержит алгебру Грассмана.) Индукционные параметры служат инструментом перевода с языка носителя на язык тождеств и имеют комбинаторный смысл (например, индекс нильпотентности радикала несводимой алгебры $c(A)$ и размерность полупростой части $b(A)$).

Исторически первым параметром такого рода была сложность многообразия $\text{PIdeg}(\mathcal{M})$, или максимальный размер матричной алгебры из $\mathcal{M}$. Эта величина определяет набор полупростых алгебр из $\mathcal{M}$. В случае, когда основное поле $\mathbb{F}$ конечно, к таким параметрам добавляется еще одна характеристика – размер центра (конечное число или ∞). Нас прежде всего интересует *существенная сложность* – максимальный размер матриц с бесконечным центром. Отметим, что базис Ширшова определяется существенной сложностью [134].

В. Н. Латышев [138] ввел понятие *сложности нематричного многообразия* $\text{Lat}(\mathcal{M})$ как максимальный размер алгебры верхнетреугольных матриц из $\mathcal{M}$. При изучении нематричных многообразий оказалось, что нематричная сложность ведет себя во многом аналогично обычной сложности. Этот параметр А. Р. Кемер обозначал $a(\mathcal{M})$. При переходе к конечному полю возникает своя специфика. *Существенной сложностью Латышева* будем называть максимальный размер алгебры верхнетреугольных матриц над бесконечным полем из $\mathcal{M}$. Существенная сложность Латышева используется для оценки размерности Гельфанда–Кириллова.

Сложностным типом многообразия, по которому ведется индукция, служит набор алгебр из $\mathfrak{M}$, являющихся полупрямым произведением алгебр общих матриц (в нашей терминологии). Это понятие включает в себя и классическую сложность $\text{PId}(\mathfrak{M})$, и сложность Латышева. Отметим, что размерность Гельфанда–Кириллова s -порожденной относительно свободной алгебры из многообразия $\mathfrak{M}$ равна максимальной размерности Гельфанда–Кириллова s -порожденной алгебры из сложностного типа $\mathfrak{M}$. Приведем эквивалентное определение сложностного типа: это множество наборов типов клеток (“составов путей”), которые может содержать одновременно элемент алгебры. *Существенным сложностным типом* является набор полупрямых произведений алгебр общих матриц с бесконечным центром из данного многообразия.

Максимальная размерность полупростой части алгебры из сложностного типа $\mathfrak{M}$ есть параметр $b(\mathfrak{M})$, используемый Кемером (“внешнее определение”). Нас будут интересовать прежде всего полупрямые произведения матричных алгебр с бесконечным центром (*существенный состав* путей).

Кроме того, мы будем рассматривать произведения радикальных и полупростых (относящихся к матричным клеткам) элементов и интересоваться количеством граничных операторов – входов/выходов/переходов, относящихся прежде всего к *существенным* клеткам (отвечающим матрицам над бесконечным центром).

§ 3. Представления относительно свободных алгебр. Колчаны

3.1. Замыкание по Зарискому. Техника работы с замыканием по Зарискому будет использоваться двояко: во-первых, при проверке того, что многочлен, задающий экстремальный идеал, не равен тождественно нулю, во-вторых, при изучении представлений относительно свободных алгебр. Такое представление может быть устроено достаточно сложно и обладать довольно тонкими свойствами. Поэтому необходимо использовать более грубое описание, с точностью до замыкания по Зарискому. Мы считаем, что A вложена в алгебру, являющуюся свободным R -модулем для некоторого ассоциативно-коммутативного кольца R . Тем самым, A является подмножеством аффинного пространства $\mathbb{F}^s$ для некоторого поля $\mathbb{F}$. Итак, определено замыкание по Зарискому образа алгебры при правильном представлении (см. определение 3.1). Выберем в этом представлении “общие элементы” (для бесконечного поля это означает суммирование базисных элементов со взаимно трансцендентными коэффициентами, а для клеток конечного типа – суммирование с коэффициентами из $F_q[\vec{x}]$, где q – число элементов центра). Они порождают алгебру, изоморфную исходной.

Поскольку структурную теорию замкнутых алгебр над произвольным нётеровым ассоциативно-коммутативным кольцом не удастся построить, мы вынуждены сначала доказать основные результаты для алгебр над полем, а затем перейти к общему случаю.

3.2. Улучшение представлений. Алгебры A , A^{cl} и $\hat{A}$. Рассмотрим 1-порожденные алгебры. Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Замыкание по Зарискому подалгебры порождает то же многообразие, что и сама подалгебра.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многочлену (в том числе тождеству) на алгебре отвечает набор коммутативных многочленов на пространстве $\mathbb{F}^s$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть $B \subset A^{\text{cl}}$, $\text{Var}(B) \subsetneq \text{Var}(A)$. Тогда $B^{\text{cl}} \subsetneq A^{\text{cl}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Координаты общей точки аффинного алгебраического многообразия B^{cl} по сравнению с A^{cl} обладают дополнительными соотношениями.

Назовем алгебраическое многообразие M квазилинейным, если вместе с точками x и y оно содержит их сумму $x + y$, и F -квазилинейным, если оно также содержит точку λx для любого $\lambda \in F$. Следующие утверждения (предложения 3.3, 3.4, лемма 3.1) непосредственно следуют из того факта, что замкнутые аддитивные подгруппы аффинного пространства задаются системами уравнений $f_i = 0$, где каждый f_i есть p -многочлен [139]–[141] (p -многочлен f есть многочлен вида $f = \sum_{i,j} a_{ij} x_i^{p^j}$; здесь $a_{ij} \in k$, x_i – переменные). (Для F -квазилинейного случая каждый f_i есть q -многочлен, где $q = |F|$.)

Следующее предложение по сути содержится в [139], [140], но нам оно требуется в частном случае аддитивно и мультипликативно замкнутых множеств (а тогда оно вытекает из типа уравнений, задающих аддитивно замкнутое многообразие). Из этого видно, что аддитивно и мультипликативно замкнутые многообразия задаются системами уравнений вида $x_i^{q_{ij}} = x_j$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. а) Пусть $\{\gamma_i\}$ таковы, что $\prod_{i=1}^s \gamma_i^{n_i} \notin \{0, 1\}$ для любых целых $\{n_i\}$. Тогда замыкание по Зарискому множества векторов вида $(\gamma_1^n, \dots, \gamma_s^n)$ есть все пространство $\mathbb{F}^s$.

б) В общем случае указанное в а) замыкание есть многообразие, заданное системами уравнений

$$\prod_{i \in I_\alpha} \gamma_i^{n_i} = 0, \quad \prod_{i \in J_\beta} \gamma_i^{n_i} = 1$$

для некоторых целых $\{n_i\}$. Неприводимая компонента соответствующего алгебраического многообразия задается уравнениями

$$\gamma_j^{k_j} = \prod_{i \in I} \gamma_i^{n_i}, \quad \gamma_j = 0,$$

где $n_i \in \mathbb{Z}$, а I – множество индексов, причем $I \subset \{1, \dots, s\}$ и $j \notin I$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. а) Многообразие из утверждения б) предложения 3.3 является квазилинейным тогда и только тогда, когда уравнения имеют вид

$$\gamma_j^{q_j} = \gamma_i^{q_{ij}}, \quad i \in I, \quad j \notin I, \quad \gamma_j = 0,$$

где все q_j и q_{ij} – степени p , а p – характеристика основного поля.

б) Это многообразие выдерживает умножения на элементы из F тогда и только тогда, когда для всех q_j и q_{ij} выполняется тождество в кольце F : $x^{q_j} = x$ и $x^{q_{ij}} = x$ для всех $x \in F$.

Если все γ_i не связаны соотношениями вида $\gamma_i^{q'_{ij}} = \gamma_j^{q''_{ij}}$, то замыкание по Зарискому множества сумм векторов вида $(\gamma_1^n, \dots, \gamma_s^n)$ есть все пространство $\mathbb{F}^s$.

ЛЕММА 3.1 (о замыкании 1-порожденной алгебры). а) Пусть оператор A не содержит собственных чисел, удовлетворяющих соотношениям из утверждения б) предложения 3.4. Тогда замыкание $\mathbb{K}[A]^{\text{cl}}$ есть в точности множество операторов, которые диагонализуются одновременно с A .

б) Пусть оператор A диагонализуем и собственные числа не удовлетворяют соотношениям утверждения б) предложения 3.4. Тогда замыкание $\mathbb{K}[A]^{\text{cl}}$ есть множество операторов, удовлетворяющих следующему свойству: каждый собственный вектор A является собственным вектором такого оператора.

в) Если собственные числа диагонализуемого оператора удовлетворяют указанным соотношениям, то замыкание $\mathbb{K}[A]^{\text{cl}}$ есть множество операторов, собственные числа которых удовлетворяют системе

$$\gamma_j^{q_j} = \gamma_i^{q_{ij}}, \quad i \in I, \quad j \notin I,$$

а на позициях, отвечающих соотношениям $\gamma_j = 0$, стоят равные числа из F . Никаких других соотношений для собственных чисел замыкания не существует.

г) Замыкание по Зарискому алгебры $\mathbb{K}[A]^{\text{cl}}$, порожденной оператором A , содержит его полупростую A^S и его радикальную A^R части. Кроме того, оно содержит радикальные части каждого оператора, соответствующего группе жордановых клеток для данного собственного числа, а также степени этих операторов и порождается элементами такого вида, как векторное пространство.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Аналогичные утверждения справедливы для замыкания по Зарискому коммутативной алгебры.

Ясно, что $\mathbb{K}[A]^{\text{cl}}$ есть коммутативная алгебра (это утверждение – частный случай предложения 3.1).

Отметим, что полупростая часть может меняться при добавлении радикального оператора. Простейший пример – операторы E_{11} и $E_{11} + E_{12}$ в алгебре матриц. Более содержательный пример – операторы E_{11} и $E_{11} + pE_{12}$ в алгебре матриц над $\mathbb{Z}_{p^2}$. При этом никакая степень оператора $E_{11} + pE_{12}$ не совпадает со степенью E_{11} . При добавлении pE_{12} происходит “бесконечно малый поворот собственного вектора”. Подобным образом замыкание по Зарискому алгебры, порожденной матрицей вида $\begin{pmatrix} \lambda & t \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, вообще говоря, не содержит диагональных матриц, не пропорциональных единичной.

ПРИМЕР 3.1. Пусть $\text{Char}(\mathbb{K}) \neq 2$ и матрица оператора a имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$. Тогда если λ не является корнем из единицы, то замыкание по Зарискому нечетных степеней оператора a есть множество матриц вида $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix}$, а также вида $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$. Значит, замыкание алгебры $\mathbb{K}[a]^{\text{cl}}$ есть множество всех диагональных матриц.

Пусть ρ – точное представление алгебры A эндоморфизмами некоторого модуля M над коммутативным нётеровым кольцом. Мы отождествляем A с ее образом $\rho(A)$. Отметим, что конечномерная алгебра разлагается в сумму радикала и полупростой части. Из леммы 3.1 вытекает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. а) Замыкание по Зарискому A^{cl} алгебры A содержит полупростую и радикальную части всех операторов из A . Кроме того, оно

содержит радикальные части каждого оператора, соответствующего группе жордановых клеток для данного собственного числа и собственных чисел, связанных с ним соотношениями из предложения 3.4, а также степени этих операторов.

б) Алгебра A^{cl} расщепляется в прямую сумму радикала A^R и полупростой части A^S .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Пусть $\rho: B \rightarrow C$ – точное представление полупервичной алгебры B , R – кольцо представления без делителей нуля. Тогда существует конечное расширение $R' \supseteq R$ такое, что образы элементов из B в представлении $\rho': B \rightarrow R' \otimes_R C$ имеют вид блочно-диагональных матриц:

$$\begin{pmatrix} M_{i_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_{i_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & M_{i_k} \end{pmatrix}.$$

Каждой первичной компоненте B_α соответствует набор клеток $N_\alpha = \{M_{i_\alpha}\}$. Гомоморфизм ограничения h_{i_α} на каждую клетку из N_α является эпиморфизмом на B_α и порождает как R' -модуль всю матричную алгебру M_α , соответствующую этой клетке. Ограничения B_α на остальные клетки нулевые. Кроме того, множества клеток B_α при разных α не пересекаются. Если первичная компонента B_α конечна, то ее образ при каждом h_{i_α} есть в точности алгебра матриц над конечным полем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любая полупервичная ассоциативная алгебра есть прямая сумма своих первичных компонент, представление также разлагается в прямую сумму. Поэтому можно ограничиться рассмотрением случая первичной алгебры.

Рассмотрим представление центра алгебры B . Расширим основное кольцо так, чтобы оно разложилось в прямую сумму λ -пространств, соответствующих спектральному разложению представления центра. Далее можно выбрать базис, согласованный с этим разложением.

Воспользуемся замечанием 3.1 и отметим, что некоторое конечное центральное расширение первичной алгебры конечного порядка является алгеброй матриц над некоторым коммутативным кольцом. Поэтому можно подобрать такое R' , что образ B_α при каждом h_{i_α} порождает всю клетку. Если же первичная алгебра конечна, то она сама является алгеброй матриц и ее представление приводится к блочно-диагональному виду (это легко следует из теоремы Веддерберна о том, что конечное тело является полем).

Замыкание по Зарискому первичной алгебры B содержит ее центральное расширение $A[R']$, если основное кольцо R , относительно которого производится это замыкание, содержит кольцо R' , причем центр алгебры B (а тогда и кольцо R) бесконечен. Поэтому можно считать, что замыкание A^S есть прямая сумма матричных алгебр.

Теперь рассмотрим представление центра первичной компоненты и замыкание по Зарискому этого представления. Легко видеть, что оно устроено, как в лемме 3.1. Тем самым, клетки могут быть независимыми и связанными по Фробениусу.

Теперь выберем согласованные базисы в клетках. Рассмотрим оператор P из A^S общего положения, причем полупростой (чего легко добиться, возводя его в p^k -ю степень). Его спектральное разложение удовлетворяет условию леммы 3.1. Рассмотрим базис, составленный из собственных векторов оператора P , отвечающих ненулевым собственным числам. Каждый базисный вектор соответствует некоторой клетке, а числа, соответствующие разным клеткам, либо независимы, либо связаны автоморфизмами Фробениуса, причем характер связей отвечает представлению центра.

Имеем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1 (канонический вид представления. I). *Пусть A – представляемая алгебра. Тогда существует ее представление матрицами над коммутативным кольцом, обладающее следующими свойствами:*

- 1) *каждый элемент из A представляется матрицей, вдоль главной диагонали которой идут блоки, а под диагональю – нули, элементы из $R(A)$ изображаются верхнетреугольными матрицами, ограничения которых на блоки равны нулю;*
- 2) *каждому такому блоку соответствует гомоморфизм ограничения алгебры A , образ которого первичен;*
- 3) *проекция A на ее полупростую часть A^S получается, если каждому элементу из A сопоставить элемент из A^S с теми же ограничениями на блоки, компоненты которого вне блоков равны нулю;*
- 4) *блоки разбиваются на группы, отвечающие спектру центра A^S , в каждой такой группе блоков в соответствующих позициях (получающихся параллельным переносом блоков) стоят одинаковые элементы либо элементы, связанные по Фробениусу (см. п. 5));*
- 5) *соответствующие элементы этих блоков удовлетворяют соотношениям*

$$(x_{ij}^{(\alpha)})^{q^\alpha} = (x_{ij}^{(\beta)})^{q^\beta}$$

(греческие буквы нумеруют клетки), пара индексов (i, j) задает позицию в матрице, причем $x^{q^\alpha} = x$ для всех $x \in F$.

Элементы замыкания по Зарискому алгебры A удовлетворяют приведенным выше условиям.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Если представление удовлетворяет заключению теоремы 3.1, то мы говорим, что оно приведено к *правильному виду*.

Результат теоремы 3.1 имеет ключевое значение. Между объектами разных типов соотношений нет, а между однотипными существуют простые и контролируемые соотношения. Они легко описываются в терминах тождеств.

3.3. Структурная теория представлений. Мы будем рассматривать только матричные представления, описанные в теореме 3.1. Блоки будут называться *клетками*.

Нулевой клеткой называется позиция на главной диагонали, на которой стоит нуль для каждого элемента из A . Две клетки называются *похожими*, если проекции любого элемента алгебры на эти клетки совпадают, *однотипными*, если эти проекции связаны указанными выше соотношениями (тогда мы говорим о *кратностях* клеток; см. определение 3.6), и *независимыми* в противном

случае. Клетки разных размеров всегда независимы. В случае, когда основное поле бесконечно, все однотипные клетки похожи.

Радикальная часть алгебры A^{cl} тоже разлагается в сумму частей. Радикал осуществляет связи между клетками. Эти связи обеспечиваются компонентами вида E_{ij} , где индекс i отвечает одному блоку, j – другому или один из индексов никакому блоку не соответствует. Радикальные компоненты $\lambda_{ij}E_{ij}$ имеют типы, отвечающие:

- 1) входу в клетку (i не индекс внутри клетки, j – индекс внутри клетки);
- 2) выходу из клеток;
- 3) переходу из одной клетки в клетку другого типа;
- 4) переходу из одной клетки в клетку того же типа, но не похожую, в этом случае имеет место дополнительная характеристика – отношение логарифмов величин q_α и q_β ;
- 5) переходу в похожую клетку.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Компоненты типа 1)–3) называются *граничными операторами*.

3.3.1. Алгебра компонент $\hat{A}$. Система однотипных клеток отвечает пирсовской компоненте единицы, а независимые клетки – разным компонентам. Радикальные компоненты типов 1)–3) отвечают смешанным элементам пирсовского разложения (ν_i – ортогональные идемпотенты, отвечающие единицам в первичных компонентах). “Внеклеточным” индексам соответствует пирсовский элемент $\nu_0 = 1 - \sum_{i=1}^k \nu_i$. *Смешанным* (в терминологии А. Р. Кемера) называется элемент вида $\nu_i x \nu_j$, где $i \neq j$. Элементы типа 1) можно представить в виде $\nu_0 x \nu_i$, $i > 0$, а типа 2) – в виде $\nu_i x \nu_0$, $i > 0$. Элемент из A есть сумма своих компонент (которые лежат в A^{cl}).

Замыкание по Зарискому A^{cl} содержит компоненты операторов каждого типа по отдельности. Во-первых, оно содержит “первичные части” – полупростые части, отвечающие системе клеток данного типа, в частности соответствующие пирсовские компоненты единицы. Во-вторых, пирсовское разложение единицы приводит к разложению радикальных частей на компоненты типа (ν_i, ν_j) .

Подалгебру A^{cl} , порожденную компонентами элементов из A , мы обозначаем $\hat{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Пусть k -алгебра A вложена в конечномерную алгебру над алгебраически замкнутым полем K , $\{\nu_i\}$ – система пирсовских компонент подалгебры A^{cl} . В алгебре KA каждое ν_i разлагается в сумму коммутирующих ортогональных идемпотентов, отвечающих разложению полупростой части в сумму простых компонент: $\nu_i = \sum_{j=1}^{k_i} \nu_{ij}$. Система $\{\nu_{ij}\}$ называется *системой подпирсов*. Алгебра, порожденная подпирсовскими компонентами алгебры A , обозначается $\check{A}$.

Пирсовская компонента отвечает группе однотипных клеток (связанных по Фробениусу), а подпирсовская компонента – группе похожих клеток. Поэтому можно говорить о *кратности* соответствующего подпирса.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Ясно, что $\text{Var}(A) = \text{Var}(A^{\text{cl}}) = \text{Var}(\hat{A})$ и что $\text{Var}(A) \subset \text{Var}(\check{A})$. Если $\text{Var}(A)$ не порождается алгеброй, конечномерной над центром, то включение строгое (см. [142]).

Отметим, что радикальные компоненты типа (ν_i, ν_i) тоже разделяются на операторы перехода между клетками данного типа с одним и тем же отношением логарифмов кратностей (см. определение 3.6). (Оператор “подкрученной энгелевости” $z^{q_i}x - xz^{q_j}$, где z – центральный элемент для соответствующей системы клеток, уничтожает только операторы перехода между клетками при соответствующем отношении логарифмов кратностей. Применяя композицию таких операторов, можно оставить переходы только с одним отношением логарифмов кратностей.)

Имеет место более тонкое разложение в алгебре A^{cl} , основанное на обобщении только что приведенного рассуждения для разложения компонент с одностипными обкладками.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Введем на парах подпирсов (ν_{ij}, ν_{kl}) следующее отношение бимодульной эквивалентности: $(\nu_{ij}, \nu_{kl}) \simeq (\nu_{i'j'}, \nu_{k'l'})$, если $i = i'$, $k = k'$, и, кроме того, для некоторых q_1, q_2 соответствующие коэффициенты при матричных единицах для систем похожих клеток, отвечающих ν_{ij} и $\nu_{i'j'}$ и одновременно ν_{kl} и $\nu_{k'l'}$, связаны равенством $(\lambda_{mn}^{(\nu_{ij})})^{q_1} = (\lambda_{mn}^{(\nu_{i'j'})})^{q_2}$ либо $(\lambda_{mn}^{(\nu_{kl})})^{q_1} = (\lambda_{mn}^{(\nu_{k'l'})})^{q_2}$. Иными словами, обкладки связаны по Фробениусу одинаковым образом.

Пусть $x = \sum_{i,j,k,l} \nu_{ij} x \nu_{kl} = \sum_{\delta} x_{\delta}$, где δ – класс эквивалентности для пары подпирсов. Ясно, что $\nu_{ij} x \nu_{kl} \in KA$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Аналогично вводится отношение эквивалентности на упорядоченных наборах из подпирсов произвольной длины. Каждому классу эквивалентности γ , отвечающему набору $(\mu_{i_1j_1}, \dots, \mu_{i_lj_l})$, естественным образом соответствует набор $\{\delta_m\}$ классов эквивалентности,

$$\{\delta_m\} = (\mu_{i_mj_m} \mu_{i_{m+1}j_{m+1}}), \quad m = 1, \dots, l-1.$$

При этом все компоненты произведения $\prod_i x_i^{\delta_i}$, отвечающие каждому классу эквивалентности γ , согласованному со всеми δ_i , принадлежат A^{cl} , если все $x_i \in A^{\text{cl}}$. Отметим, что в силу наличия промежуточных компонент конечного типа набору $\{\delta_m\}$ может отвечать несколько различных классов γ .

Следующее предложение нам не потребуется далее, тем не менее, мы его приводим для полноты изложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. Если $x \in A^{\text{cl}}$, то $x_{\delta} \in A^{\text{cl}}$ для всех δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай, когда $x = \nu_i x \nu_j$. Рассмотрим модуль M над центрами Z_1, Z_2 соответствующих двух первичных компонент алгебры A^{cl} , порожденный всеми $x_{kl} = \nu_{ik} x \nu_{jl}$. Операция умножения $\cdot$ определяется на базисных элементах M :

$$\lambda_k x_{kl} \kappa_l \cdot \lambda'_k x_{kl} \kappa'_l = \begin{cases} \lambda_k \lambda'_k x_{kl} \kappa_l \kappa'_l & \text{при } k = k', \quad l = l', \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

(Это обычное покомпонатное умножение.)

Пусть $N' = (\cdot, Z_1, Z_2)$ -подалгебра модуля M , порожденная x . Легко видеть, что $N' \in A^{\text{cl}}$ и $N = N^{\text{cl}}$. Остается воспользоваться замечанием 3.1.

3.3.2. *Выбор общих элементов. Градуировки.* Теперь нашей целью является выбор “общих элементов” алгебры A^{cl} . В случае бесконечного поля достаточно просуммировать базисные векторы векторного пространства, образующего алгебру A с алгебраически независимыми коэффициентами (например, так строится алгебра общих матриц). Сама алгебра общих матриц есть подалгебра $\mathbb{M}_n(K) \otimes K[\{x_{ij}^\alpha\}]$, $i, j = 1, \dots, n$, $\alpha = 1, \dots, k$. В случае алгебр над конечным полем конструкция усложняется (в частности, используется алгебра общих элементов конечного поля $F^q[\bar{x}]$; см. определение 2.4).

Ситуации, связанные с возникновением независимых (“взаимно трансцендентных”) коэффициентов, удобнее исследовать в терминах градуировок, поскольку сокращаться могут члены только из одной компоненты (см. пп. 3.4.1). Матричные клетки имеют следующие характеристики: размер и количество элементов центра (конечное число или ∞); ν_0 , как обычно, есть $1 - \sum_{i>0} \nu_i$ или “внутрирадикальная” пирсовская компонента единицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Пусть $\{M_j\}_{j \in J}$ – неприводимые алгебраические многообразия над алгебраически замкнутым полем K произвольной характеристики, $k_j \in \mathbb{N}$. Выбор системы точек общего положения $\{a_{ji}\}_{i=1, j \in J}^{n_j}$ для $\{M_j\}_{j \in J}$ есть выбор точки общего положения в прямом произведении $\bigoplus_{i=1, j \in J}^{n_j}$. (Нас интересует только случай, когда все $n_j = n$.)

Пусть A – замкнутая по Зарискому k -подалгебра алгебры матриц над алгебраически замкнутым полем K (т. е. аффинное подмногообразие аффинного пространства K^{μ^2}), $A_1, \dots, A_s$ – ее неприводимые компоненты, $n \in \mathbb{N}$, $q = |k|$. Тогда $\{a_i\}_{i=1}^n$ – система общих элементов алгебры A , если:

- 1) $a_i = \sum_{j=1}^s x_{ij} a_{ji}$;
- 2) $\{a_{ji}\}_{j,i=1}^{s,n}$ – система точек общего положения для $\{A_j\}_{j=1}^s$;
- 3) $\{x_{ji}\}_{j,i=1}^{s,n}$ – набор независимых переменных из $F^q[\bar{x}]$.

Алгебра общих элементов для A есть подалгебра

$$A \otimes K[\{z^\alpha\}_{\alpha \in I}] \otimes F_q[\{x_{ji}\}_{j,i=1}^{s,n}].$$

Она относительно свободна и порождает то же многообразие, что и A , если только n не меньше базисного ранга $\text{Var}(A)$.

Данная конструкция естественным образом обобщается для представимых алгебр произвольной сигнатуры над конечным полем.

Относительно свободная алгебра не является градуированной, однако она имеет представление в виде общей алгебры A такое, что соответствующая разноразмерная алгебра $\check{A}$, порожденная подпирсовскими компонентами образующих A (см. определение 3.3) оказывается естественным образом градуированной.

Опишем соответствующую градуировку, но вначале изложим явную конструкцию “более общей” алгебры A^G , получающейся из алгебры A путем выбора общих элементов из пространства, порожденного компонентами ее образующих. При этом имеет место естественный эпиморфизм $A^G \rightarrow A$ и $\text{Var}(A^G) = \text{Var}(A)$. (Если A не относительно свободна, то и A^G не обязательно относительно свободна.) Описание градуировки и ее свойств удобно осуществить вместе с изложением этой конструкции. Свойства аналогичной градуировки на только что построенной алгебре $\check{A}$ вытекают из свойства универсальности (предложение 3.8).

3.3.3. *Конструкция алгебры A^G .* Сначала выбираются общие элементы в компонентах $A^{\text{cl}} \subseteq \check{A}^{\text{cl}}$, а затем они суммируются с “независимыми” коэффициентами (отвечающими общим элементам центра соответствующих алгебр). Процедура выбора общих элементов для алгебры A следующая.

0. Рассмотрим образующие алгебры A и их компоненты в $\check{A}$.

1. Выберем свободные переменные из кольца $F[\vec{x}]$ или $F^{q_i}[\vec{x}]$. Элементы из соответствующей компоненты алгебры A^{cl} будут суммироваться с коэффициентами, равными данным свободным переменным. При этом свободные переменные, относящиеся к разным образующим и/или к компонентам разного типа, различны. Опишем выбор типа переменной для каждой из компонент. Пусть $q = p^k$ – порядок поля $\mathbb{F}$.

(i) Клетке с бесконечным центром сопоставим переменные из поля $\mathbb{F}[\vec{x}]$.

(ii) Клетке с центром из $q_i = q^{l_i}$ элементов сопоставим переменные из поля $\mathbb{F}^{q_i}[\vec{x}]$.

(iii) Компоненте типа $\nu_0 x \nu_0$ сопоставим переменные из поля $\mathbb{F}^q[\vec{x}]$.

(iv) Если хотя бы одна из клеток с номером i или j имеет бесконечный тип (т. е. бесконечный центр), то компоненте типа $\nu_i x \nu_j$ сопоставим переменные из поля $\mathbb{F}[\vec{x}]$.

(v) Пусть клеткам с номерами i и j сопоставлены числа q_i и q_j соответственно, q_{ij} – число элементов в минимальном поле, содержащем подполя из q_i и q_j элементов. Тогда компоненте типа $\nu_i x \nu_j$ сопоставим переменные из поля $F^{q_{ij}}[\vec{x}]$.

(vi) Пусть клетка с номером i имеет центр размера q_i . Тогда компоненте типа $\nu_0 x \nu_i$, а также компоненте типа $\nu_i x \nu_0$ сопоставим переменные из поля $F^{q_i}[\vec{x}]$.

Тип свободных коэффициентов определяется тем, из какого кольца $F^r[\vec{x}]$ они взяты, и тем, над каким расширением основного поля возникает структура векторного пространства; r есть минимальное целое такое, что в соответствующем поле выполняется тождество $x^r - x = 0$.

Теперь выберем общие элементы. Мы будем пользоваться свободными параметрами, совпадающими в группах похожих клеток, отвечающих пирсовским компонентам, и независимыми на разных компонентах, разных клетках и разных радикальных типах, и суммировать матричные единицы с соответствующим коэффициентом.

Рассмотрим полупростую часть алгебры A и группу однотипных клеток. Возьмем матричную единицу E_{ij} и соответствующие операторы в клетках, которые ей отвечают. Напомним, что базисные векторы в клетках согласованы так же, как в теореме 3.1. Теперь умножаем каждое такое E_{ij} на степень свободной переменной, причем переменные согласованы (по Фробениусу), чтобы выполнялись соотношения из теоремы 3.1. Систему степеней будем выбирать минимально возможной. Тип переменной описан выше. Приведем эквивалентную более инвариантную конструкцию: выбираем центральные элементы для системы однотипных клеток общего положения, свои для каждой матричной единицы, домножаем их на соответствующие переменные и суммируем. Получаем оператор $\hat{E}_{ij}^\lambda$. Его инвариантное описание таково: берем оператор E_{ij} в первичной компоненте и умножаем его на центральный элемент общего положения.

Рассмотрим радикал. Для элемента x типа (μ, ν) получаем набор компонент, отвечающих разложению $\hat{E}_{ij}^\lambda x \hat{E}_{kl}^\delta$, где операторы $\hat{E}_{ij}$, $\hat{E}_{kl}$, а также переменные λ , δ относятся к соответствующим типам клеток. Получили, таким образом, системы матричных единиц типа il при операторе межклеточного перехода с общими коэффициентами.

Отметим, что соответствующие коэффициенты при компонентах одного типа, но разной похожести связаны соотношениями вида $x^{q\alpha} = y^{q\beta}$. Для этого взяты соответствующие степени переменных, а именно в клетке с номером α берется степень $q^{(\alpha)} = q^{s/\alpha}$, $s = \text{НОК}(\alpha_i)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Величины $q^{(\alpha)}$ называются *кратностями клеток*, а также *кратностями соответствующих подпирсов*. Кратность всегда есть степень p .

Кроме того, выделяются компоненты, отвечающие переходам между клетками данного типа с одним и тем же отношением логарифмов кратностей. Степень переменной при суммировании равна минимальной кратности.

Рассмотрим произведения радикальных (уже не разложимых в произведение) и первичных элементов из A^{cl} . Каждая часть имеет свой “пирсовский тип”. Каждому типу соответствует своя степень однородности (градуировка описана ниже). Подправляя представление с помощью суммирования с независимыми коэффициентами, мы выделим и каждую градуированную компоненту.

Теперь для каждого способа, позволяющего осуществить умножение смешанных компонент, мы берем соответствующие свободные смешанные компоненты в алгебре A^{cl} и перемножаем их. Далее с помощью операторов типа $\hat{E}_{ij}^\lambda$ выделяем компоненты, отвечающие входной и выходной единицам. Все компоненты всякий раз берутся заново, со своими переменными, сорт которых был описан ранее.

Таким образом, межклеточные переходы умножаются на произведения переменных в степенях, соответствующих типам клеток и их кратностям. Каждый следующий множитель берется с коэффициентами, не зависящими от предыдущего множителя. После такого выбора свободных компонент и их суммирования с независимыми коэффициентами для разных образующих и разного рода компонент мы получаем алгебру A^G .

3.3.4. Градуировки. Пусть $\mathbb{Z}_+$ – полугруппа целых неотрицательных чисел, $\mathbb{N}$ – полугруппа натуральных чисел. Через $\mathbb{N}_q$ обозначается аддитивная полугруппа, являющаяся фактором полугруппы $\mathbb{Z}_+$ по отношению $\simeq$:

$$x \simeq y \Leftrightarrow x, y > 0 \ \& \ (x - y) \cdot q.$$

Для любого q имеется эпиморфизм $\pi: \mathbb{N}_q \rightarrow \mathbb{N}_1$, $q < \infty$; $\mathbb{N}_\infty = \mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}_1 = \{0, 1\}$: $0 + 0 = 0$, $1 + 0 = 0 + 1 = 1 + 1 = 1$. Полугруппа $\mathbb{N}_1$ есть упорядоченная полугруппа $0 < 1$, полугруппа $\mathbb{N}_\infty$ упорядочена естественным образом. В этом смысле можно говорить о *максимальной градуированной компоненте*. Теперь рассмотрим естественную градуировку на копроизведении в категории коммутативных колец $F[\vec{x}]$ и всех $F_{q_i}[\vec{x}]$, $F_{q_{ij}}[\vec{x}]$. Эта градуировка осуществляется полугруппой

$$P = \mathbb{Z}_+^k \bigoplus_i \mathbb{N}_{q_i} \bigoplus_{i,j} \mathbb{N}_{q_{ij}}.$$

Гомоморфизм π индуцирует эпиморфизм полугруппы P в упорядоченную полугруппу $\mathbf{i}$, тем самым, отношение предпорядка на P . Иными словами, фиксируется наличие или отсутствие соответствующей компоненты, а при ее наличии – кратность по соответствующему модулю. Эта градуировка естественно индуцирует градуировку на алгебре компонент $\check{A}^G$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. *Алгебра $\check{A}^G$ однородна по всем компонентам всех образующих A в указанной выше градуировке. По компонентам, связанным с типом $\nu_i x \nu_j$, если i и/или j относятся к клетке бесконечного типа, эта градуировка однородна в обычном смысле. В противном случае имеет значение присутствие или отсутствие соответствующей компоненты у данной образующей, а также число ее вхождений по модулю $q_{ij} - 1$. Аналогичное утверждение верно для $\check{B}$, где B – общая алгебра, построенная в начале пп. 3.3.2.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Вместо построения “более свободной” алгебры, чем A , можно было бы явно указать процедуру выбора общих элементов, позволяющую построить относительно свободную алгебру. Пусть a_i , $i = 1, \dots, s$, – набор образующих алгебры A . Каждому классу эквивалентности пары подпирсов δ отвечает соответствующая компонента a_i^δ . Рассмотрим набор из k подпирсов $(\mu_{i_1 j_1}, \dots, \mu_{i_l j_l})$, $l \leq c(A)$, и класс эквивалентности γ , отвечающий этому набору. Классу γ отвечает набор классов эквивалентности (см. определение 3.4 и замечание 3.3) $\delta_m: (\mu_{i_m j_m} \mu_{i_{m+1} j_{m+1}})$, $m = 1, \dots, l - 1$. Далее для каждого параметра β (номера общей образующей), всех γ , l и всех векторов $(j_1, \dots, j_{l-1})$, $1 \leq j_\alpha \leq s$, и наборов компонент образующих $\vec{a}_\gamma = \{a_{k_i}^{\delta_i}\}$, согласованных с γ , выберем наборы $\tau_{\beta, i}^{\gamma, \vec{a}_\gamma}$ общих в совокупности (относительно всех перечисленных параметров) элементов из первичных компонент, отвечающих каждому μ_i . Рассмотрим произведения

$$u_{\vec{a}_\gamma \beta} = \prod_{i, j} \nu_{ij} \tau_{\beta, i}^{\gamma, \vec{a}_\gamma} a_{k_i} \nu_{i+1, j+1} \tau_{\beta, i+1}^{\gamma, \vec{a}_\gamma}.$$

Тогда алгебра, порожденная элементами $U_\beta = \sum_{\gamma, \vec{a}} u_{\vec{a}_\gamma \beta}$, и будет искомой относительно свободной общей алгеброй.

С точки зрения полилинейных тождеств имеют значения только размеры клеток, а не их типы (размер центра), а однотипные клетки разной кратности ведут себя как независимые. Для обычной однородности ($\mathbb{Z}_+$ -градуированности) по данной компоненте достаточно хотя бы одной обкладки бесконечного типа, и этим мы будем активно пользоваться в дальнейшем.

3.3.5. Индукционные параметры и градуировки. Более подробное обсуждение индукционных параметров см. в п. 3.4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.7. *Существенным смешанным элементом (или просто существенным элементом) называется смешанный элемент, хотя бы одна из обкладок которого соответствует клеткам бесконечного типа, существенным несмешанным элементом называется несмешанный радикальный элемент, одна, а значит, и обе обкладки которого соответствуют клеткам бесконечного типа. Существенная компонента называется составной, если ей отвечает произведение существенных (смешанных) элементов, и простой в противном случае. Количество существенных элементов в этом произведении называется порядком компоненты. Если количество существенных типов клеток, участвующих*

в формировании этой компоненты, максимально, то эта компонента имеет *полный состав*. Если при этом ей отвечает произведение максимально возможного числа существенных элементов, то она имеет *максимальный состав*. Элемент называется *чистым*, если он принадлежит одной компоненте.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.8. Компонента называется *существенной*, если она отвечает идеалу и соответствует смешанному элементу, хотя бы одна из обкладок которого относится к клеткам бесконечного типа. *Существенной частью* градуировки называется соответствующая степень вхождения существенных компонент (не важно, от какой образующей), а степень в градуировке называется *существенной*, если в соответствующий моном входят существенные компоненты. Идеал называется *однородным по существу*, если он однороден в существенной градуировке, и T -идеал алгебры A *однороден по существу*, если все его значения есть элементы, однородные по существу.

Если помнить только вхождения соответствующих радикальных компонент, отождествляя образующие с точки зрения градуировки, то получится *существенная часть* градуировки. Градуировка удобна возможностью осуществлять согласованную факторизацию алгебр $\hat{A}^G$ и $\hat{A}^G$ по множеству компонент, соответствующему конгруэнции в градуировке.

Введем *частичный порядок на градуированных компонентах* следующим образом: сначала сравниваются степени переменных из $F[\vec{x}]$, а затем проверяется, какие переменные кручения из $F_r[\vec{x}]$ присутствуют, а какие отсутствуют. Множества присутствующих переменных кручения сравниваются по включению. Индукция ведется по максимальной ненулевой градуированной компоненте из $\hat{A}$, возникающей в виде слагаемого для некоторого элемента общей алгебры A .

3.4. Колчаны и представления ассоциативных алгебр. Мы будем использовать похожую конструкцию. Рассмотрим ориентированный граф (или *колчан*) Γ , вершины которого символизируют клетки, а также векторы (элементы главной диагонали), не вошедшие в клетки. Их мы будем называть *клетками нулевого размера*. Две клетки соединены, если имеется оператор с ненулевой компонентой E_{ij} , где i – индекс, соответствующий первой клетке, j – второй. Поскольку радикальные элементы соответствуют верхнетреугольным матрицам, Γ не содержит циклов. Колчан Γ можно определить как факторколчан по сильно связным компонентам в колчане, образованном базисными векторами e_i .

Две стрелки колчана называются *параллельными*, если не существует пути, проходящего через эти стрелки, и *сильно параллельными*, если нет двух путей с общими началом и концом, содержащих эти стрелки. Клетки, не соединенные стрелкой, мы называем *несравнимыми* и *совсем несравнимыми*, если нет двух путей с общим началом и общим концом, проходящих через эти две клетки.

По сути мы рассматриваем *оснащенные колчаны*, поскольку отмечаем *размер* и *тип* (размер центра) клетки, а также *тип связей* между ними (*склейка* и *склейка по Фробениусу*).

3.4.1. Пути, градуировки и индукционные параметры. Занумеруем базисные векторы, соответствующие матричному представлению, сверху вниз. Будем называть *позицией* внеклеточный базисный вектор или символ клетки. На

множестве позиций можно ввести отношение псевдопорядка. Одну позицию будем считать *больше* другой, если соответствующие строки стоят выше, а также имеется элемент алгебры A с ненулевым коэффициентом при E_{ij} – матричной единице, отвечающей переходу между этими позициями. Это только псевдопорядок, поскольку в силу *интерференции* или “гашения путей” (т.е. суммарный вклад нескольких путей может оказаться нулевым) из $a \succ b$ и $b \succ c$ еще не следует, что $a \succ c$. Транзитивное замыкание дает отношение порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.9. Два пути C_1 и C_2 считаются *однотипными*, если:

- 1) они проходят через те же ненулевые существенные типы клеток в том же порядке;
- 2) этот порядок включает в себя и порядок прохождения смешанных радикальных компонент;
- 3) количества существенных несмешанных радикальных компонент совпадают (см. определение 3.7).

Два однотипных пути называются *сильно похожими*, если совпадающие порядки учитывают прохождения несмешанных радикальных компонент с обкладками, отличными от ν_0 . Два сильно похожих пути называются *почти одинаковыми*, если совпадают последовательности прохождения всех радикальных компонент.

Типом пути мы будем называть последовательность типов клеток и радикальных элементов, отвечающих его прохождению, а *составом пути* мы назовем набор количеств элементов каждого типа из этой последовательности (с учетом кратностей). Назовем тип элемента *существенным*, если хотя бы одна из обкладок отвечает клеткам бесконечного типа. *Существенным составом* называется набор количеств проходимых существенных элементов. (Можно было бы также учесть в этом понятии факт наличия (но не количество) клеток каждого конечного типа и операторов входа, выхода и перехода.) Выбирая элементы общего положения в алгебре A^{cl} и составляя из них алгебру A , можно считать, что матричные единицы E_{ij} , отвечающие прохождению этих путей, имеют независимые коэффициенты. Через $\hat{A}$ обозначена алгебра, порожденная компонентами каждого типа элементов из A . Ясно, что $\text{Var}(A^{\text{cl}}) \supset \text{Var}(\hat{A}) \supset \text{Var}(A) = \text{Var}(A^{\text{cl}})$, так что все эти многообразия совпадают.

Типам путей естественным образом отвечают градуированные компоненты в алгебре $\hat{A}$.

3.4.2. Индукционный параметр. Роль индукционного параметра будет играть максимальный тип ненулевого пути или максимальная соответствующая этому типу градуированная компонента. Для сравнения типов путей мы будем пользоваться набором характеристик, описанных ниже. (Выбраны эти характеристики для того, чтобы облегчить переход на язык тождеств.) Сначала сравниваются первые характеристики, при совпадении – вторые и т.д. Приведем список характеристик:

- 1) количество существенных типов самых больших клеток, имеющих в наличии;
- 2) количество анфилад самого большого типа, т.е. количество операторов входа, выхода и перехода (см. определение 3.10);
- 3) количество типов переходов между однотипными непохожими клетками (разделяются клетки с разными кратностями, переходы характеризуются пересечениями кратностей);

- 4) количество переходов между однотипными непохожими клетками (разделяются клетки с разными кратностями);
- 5) характеристики 1)–4) для клеток, следующих по величине (в порядке убывания), затем – следующих и т. д.;
- 6) количество клеток внутри самого большого типа;
- 7) количество клеток внутри типа, следующего по величине, и т. д.;
- 8) количество проходимых радикальных элементов.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. При упорядочивании градуировок имеет приоритет существование анфилад (см. определение 3.10) данного типа (“булева градуировка”), а далее учитывается их количество. В результате применения “расталкивающих” подстановок (см. пп. 4.4.1) возникают неоднородные T -идеалы (количество проходимых клеток данного типа в разных слагаемых может быть связано автоморфизмом Фробениуса), однако они однородны в “булевом” смысле.

Каждому типу элемента соответствуют свои свободные переменные. Существенному элементу отвечают трансцендентные константы. Каждому пути отвечают градуированные компоненты алгебры $\tilde{A}$. И наоборот, каждой градуированной компоненте отвечает набор путей, из которых она появляется. Компоненты, соответствующие одному типу, отличаются, во-первых, тем, от каких образующих A какие радикальные компоненты взяты, и, во-вторых, степенями компонент, отвечающих проходимым клеткам, с учетом кратностей. Однако количества существенных радикальных компонент каждого типа совпадают. С порядком на типах путей естественно связывается порядок на однородных компонентах в алгебре свободных параметров, так что пути большего типа соответствует не меньшая градуировка: сравниваются количества вхождений свободных переменных, относящихся к соответствующим радикальным компонентам, количества которых и определяют наборы проходимых клеток. Далее мы будем рассматривать именно этот порядок. Отметим, что пути разного существенного состава не могут интерферировать, в частности не могут друг друга “тасить” (т. е. вместе давать нулевой вклад). Кроме того, произведение $c(A)$ элементов не содержит компонент с нулевой градуировкой, относящейся к полупростой части. Все компоненты типа (ν_0, ν_0) этого произведения отвечают операторам E_{ij} таким, что между i и j есть клеточный индекс, а колчан, отвечающий алгебре, порожденной такими произведениями, не имеет путей, содержащих две внеклеточные вершины, идущие подряд.

На градуированных компонентах введем следующие отношения эквивалентности. Во-первых, перестанем учитывать, от какой образующей какая компонента происходит. Получим *слабую эквивалентность*. Во-вторых, будем кроме того, учитывать только компоненты, в которые входят произведения, относящиеся к бесконечным клеткам. Получим просто *эквивалентность*, а *сильную эквивалентность* получим, если компонентам образующих, отвечающих произведению нескольких смешанных элементов, приписать соответствующую градуировку. *Существенная часть* градуировки отвечает существенным радикальным компонентам (при сильной эквивалентности); она же отвечает составу пути.

3.5. Канонический вид колчанов. Данный пункт посвящен приведению колчанов к каноническому виду, а также взаимосвязи между языком градуировок и языком колчанов.

3.5.1. *Язык колчанов и язык градуировок.* Доказательство приведенной ниже теоремы 3.2 основано на соответствии между языком колчанов и языком градуировок при геометрическом разложении. Утверждения, приводимые ниже, не зависят от теоремы 3.2. Они нам потребуются в дальнейшем. Из предложения 3.8 непосредственно следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.9. *При факторизации $\bar{A}$ по компонентам, отвечающим путям данного или большего существенного состава, возникает представляемая алгебра. При этом имеются естественные соответствия между клетками и межклеточными связями в новой и старой алгебрах. Соответствующий колчан Γ' не содержит путей такого существенного состава.*

Интерферировать могут только пути с одинаковыми началами и концами, отвечающие тем же степеням градуированных компонент относительно смешанных элементов (в частности, количества существенных смешанных компонент каждого сорта должны совпадать, а количества “несущественных” смешанных компонент должны быть согласованы с учетом кратностей). Интерференция в случае, когда состав путей совпадает, но порядок прохождения смешанных компонент разный, переводится на язык тождеств, иначе приходится разбираться с несмешанными элементами, что сложнее (этот случай отвечает, в частности, грассмановой алгебре). Кроме того, несколько интерферирующих путей могут давать пропорциональный вклад и даже “гасить” друг друга. Геометрическое разложение позволяет разобраться с несмешанными элементами, а теорема 3.2 – проконтролировать интерференцию.

Из предложения 3.9 с помощью факторизации $\bar{A}$ по соответствующим однородным компонентам и рассмотрения исправленного представления для A вытекает редукционная

ЛЕММА 3.2. *Если все пути данного или большего состава “сильно гасятся” (т. е. дают нулевой вклад в совокупности), то A имеет точное представление, колчан которого не имеет таких путей и состоит из конечного объединения связных компонент, каждая из которых меньше исходного колчана Γ .*

Существенный сложностный тип алгебры определяется количеством различных существенных типов клеток на пути полного состава (см. п. 2.4).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.10. Рассмотрим стрелку $\vec{v}$ колчана Γ , отвечающую обкладке типа (ν_i, ν_j) , причем $i \neq j$. Рассмотрим максимальный отрезок, состоящий из вершин только типа (ν_i, ν_i) , соединенных с концом этой стрелки. Назовем данное множество *анфиладой*. Возьмем объединение отрезков, содержащихся в этом множестве, ограничения на которые порождают то же многообразие, что и одна клетка. В силу предложения 3.11 это объединение есть максимальный отрезок, обладающий данным свойством. Такой отрезок будет называться *хвостом анфилады*. Хвост анфилады изоморфен расширению алгебры матриц центральными нильпотентами. *Выходом* из анфилады называется оператор, соединяющий хвост анфилады с компонентами другого класса. Естественным образом определяются и *специализации, связанные с анфиладой*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.11. Назовем *отрезком* колчан Γ , имеющий ровно одну начальную S и одну конечную E вершины такие, что любая промежуточная вершина лежит на пути, соединяющем S и E . Для произвольного Γ отрезок $[v_1, v_2]$

обозначает множество вершин колчана Γ , лежащих на каком-нибудь пути, ведущем из вершины v_1 в v_2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.12. Пусть оператор E_{ij} имеет подпирсовский тип (μ, ν) , E_{kl} – тип (μ', ν') . Пара членов λE_{ij} и $\lambda' E_{kl}$ называется *согласованной*, если $\lambda_{ij} = \delta_{ijkl} \lambda_{kl}^{q_{ijkl}}$, при этом:

- 1) относительные кратности μ и μ' , ν и ν' совпадают, обозначим их через s ;
- 2) коэффициент пропорциональности δ_{ijkl} между операторами и показатель s_{ijkl} не зависят от выбора элемента алгебры;
- 3) если μ либо ν имеет бесконечный тип, то $s_{ijkl} = s$;
- 4) если μ (а значит, и μ') отвечает клетке с размером центра q_1 , кратность ν (а значит, и ν') – клетке с размером центра q_2 и q_3 – размер композита соответствующих полей, то $s_{ijkl} = s + tq_3$ (пирсу ν_0 отвечает основное поле F); если при этом $s + tq_3 < 0$, то *условие согласованности* означает, что $\lambda_{kl} = \delta_{ijkl} \lambda_{ij}^{q_{ijkl}}$, и соотношение $\sum_{i,j,k,l} \delta_{ijkl} \lambda_{ij}^{q_{ijkl}}$ называется *правильным*, если любые два его члена согласованы.

Из действия полупростой части на компонентах и рассмотренных выше свойств подпирсовского разложения (см. пп. 3.3.1) вытекает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.10. Все соотношения между компонентами, отвечающими колчану, правильны.

ТЕОРЕМА 3.2 (канонический вид представления. II). а) *Предположим, что основное поле F бесконечно. Пусть Γ – колчан, связанный с представлением многообразия $\mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{M}$ представимо с помощью колчана Γ' , являющегося несвязным объединением колчанов Γ_i таких, что:*

- 1) *каждое Γ_i является отрезком;*
- 2) *компоненты $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(a)$, $a \in A^{\text{cl}}$, при матричных единицах, отвечающих операторам стрелок E_{ij} , могут быть связаны только соотношениями вида $\lambda_{ij} = \delta_{ijkl} \lambda_{kl}$, причем коэффициент пропорциональности δ_{ijkl} между операторами не зависит от выбора элемента алгебры;*
- 3) *связаны соотношениями могут быть только компоненты одинакового пирсовского типа;*
- 4) *исходящие из одной вершины стрелки не могут быть пропорциональны;*
- 5) *входящие в одну вершину стрелки не могут быть пропорциональны.*
- б) *Предположим, что $|F| = q$. Пусть Γ – колчан, связанный с представлением многообразия $\mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{M}$ представимо с помощью колчана Γ' , являющегося несвязным объединением колчанов Γ_i таких, что:*

- 1) *каждое Γ_i является отрезком;*
- 2) *компоненты $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(a)$, $a \in A^{\text{cl}}$, при матричных единицах, отвечающих операторам стрелок E_{ij} , могут быть связаны только соотношениями вида $\lambda_{ij} = \delta_{ijkl} \lambda_{kl}^{q_{ijkl}}$, причем коэффициент пропорциональности δ_{ijkl} между операторами и показатель s_{ijkl} не зависят от выбора элемента алгебры;*
- 3) *все соотношения правильны (т.е. $s_{ijkl} = s + tq_3$; см. определение 3.12);*
- 4) *исходящие из одной вершины стрелки не могут быть пропорциональны без подкрутки по Фробениусу;*
- 5) *входящие в одну вершину стрелки не могут быть пропорциональны без подкрутки по Фробениусу.*

Условие 3) утверждения б) теоремы 3.2 вытекает из условия 2) и предложения 3.10. Условия 1) утверждений а) и б) обеспечиваются следующей конструкцией.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.11. (i) *Ограничение Γ на любой отрезок дает гомоморфизм ограничения u , стало быть, представление соответствующей факторалгебры.*

(ii) *Алгебра A^{cl} вкладывается в прямую сумму факторалгебр, отвечающих отрезкам вида $[v_i, v_j]$ для всевозможных пар вершин (v_i, v_j) .*

(iii) *Если Γ содержит независимые вершины (т. е. не включающиеся в два пути с общим началом и концом), то A^{cl} вкладывается в прямую сумму факторалгебр с меньшими колчанами. (В частности, это имеет место, когда Γ содержит две начальные или две финальные вершины.)*

Условие 2) теоремы 3.2 мы обеспечим вначале для случая бесконечного основного поля, т. е. для утверждения а). Для доказательства теоремы 3.2 нам потребуется развить некоторую технику.

3.5.2. Геометрическое разложение алгебры A^{cl} . Пусть A^{cl} – представимая алгебра, замкнутая по Зарискому. Тогда A^{cl} разлагается в сумму первичных компонент $\bigoplus_i A_i^{\text{cl}}$ и радикала R^{cl} . Радикал, в свою очередь, разлагается в сумму пирсовских компонент, и далее – по классам эквивалентности (см. предложение 3.7). *Геометрическое разложение* есть дальнейшее разложение каждой такой компоненты.

Рассмотрим случай бесконечного основного поля. Подписры являются пирсами. Рассмотрим пирсовскую компоненту радикала $R_{\mu\nu}^{\text{cl}} = \mu R^{\text{cl}} \nu$. Ей отвечает набор стрелок в колчане Γ . Каждая такая стрелка отвечает оператору вида E_{ij} , а коэффициент при этой стрелке представляет собой линейный функционал $\lambda_{ij}: R_{\mu\nu}^{\text{cl}} \rightarrow F$. Поскольку любой элемент из $R_{\mu\nu}^{\text{cl}}$ определяется соответствующим множеством стрелок, т. е. своими E_{ij} -координатами, то λ_{ij} образуют полную систему функционалов. Через $\lambda_1^{\mu\nu}, \dots, \lambda_k^{\mu\nu}$ обозначим их базис, соответствующий набор стрелок назовем *базисным*.

Рассмотрим s -порожденную общую алгебру B , отвечающую алгебре A^{cl} . Пусть $\theta_{\mu\nu,i}^l$ – коэффициенты при базисных наборах стрелок. Коэффициенты при иных стрелках линейно через них выражаются.

В алгебре компонент встречаются мономы от переменных типа θ ограниченной степени (не большей, чем длина максимального пути в Γ). Типов таких мономов конечное число. Пусть V – векторное пространство колчана Γ , v_i – система базисных пространств колчана, M – конечномерное векторное пространство, порожденное такими мономами m_i , $V' = V \otimes M$. Колчану Γ естественным образом отвечает колчан Γ' на пространстве V' . Базисные пространства этого колчана суть пространства вида $v_i \otimes m_i$. Стрелке старого колчана, ведущей из i -й вершины в j -ю с функционалом $\lambda_{ij} = \sum_l \alpha_l \theta_l$ отвечает набор стрелок вида $v_i \otimes m_i \rightarrow v_j \otimes m_j \theta_j(b_k)$ с коэффициентом α_i (где $b_1, \dots, b_s$ – образующие относительно свободной алгебры B). Искомый колчан получается, если рассмотреть все вершины, отвечающие путям, идущим из вершины $v_0 \otimes 1$.

Ясно, что любые две стрелки колчана Γ' либо пропорциональны, либо независимы, т. е. Γ' удовлетворяет свойству 2) утверждения а) теоремы 3.2.

Рассмотрим случай конечного основного поля. В этом случае вместо линейных соотношений для компонент имеют место соотношения, являющиеся правильными q -многочленами.

ЛЕММА 3.3. *Аддитивно замкнутое алгебраическое подмногообразие (F -подмногообразие) аффинного пространства есть прямая сумма связной компоненты нуля и конечномерного пространства над $\mathbb{Z}_p$ (соответственно над F).*

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Компоненты λ_{ij} радикала $R_{\mu\nu}$ разлагаются в сумму: $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}^f + \lambda_{ij}^s$, в соответствии с компонентами конечной части λ_{ij}^f и связной компонентой единицы λ_{ij}^s .*

Напомним следующий факт из алгебраической геометрии.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.12. *Пусть $M \ni 0$ – аффинное неприводимое алгебраическое многообразие, I – идеал кольца R , состоящего из функций, обращающихся в нуль в точке 0. Тогда R вкладывается в $\varprojlim R_n = R/I^n$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.13. *Пусть $M \ni 0$ – аффинное неприводимое квазилинейное алгебраическое многообразие, I – идеал кольца R , состоящего из функций, обращающихся в нуль в точке 0, $R_n = R/I^n$. Тогда кольцо R_n для многообразия M изоморфно кольцу R'_n для некоторого другого аффинного неприводимого квазилинейного алгебраического многообразия M' , заданного в некоторой линейной системе координат системой уравнений вида*

$$x_i = f_i^p(x_1, \dots, x_{k_0}), \quad i > k_0,$$

где f_i – p -многочлены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многообразие M задается системой уравнений, являющихся p -многочленами f_i . Назовем формальный степенной ряд p -рядом, если каждая его частная сумма есть p -многочлен.

Покажем, что можно выбрать базисный набор элементов x_i таких, что остальные переменные выражаются через них в виде p -рядов. Рассматривая линейные части f_i и делая соответствующую линейную замену координат, можно прийти к случаю, когда линейные части f_i при $i \leq k_0$ отсутствуют и система имеет вид $x_i = f_i^p(x_1, \dots, x_n)$, $i > k_0$, где f_i – p -многочлены. В этом случае x_i при $i > k_0$ выражаются через $x_1, \dots, x_{k_0}$ как p -ряды. Рассмотрим минимальный поднабор $x_{j_1}, \dots, x_{j_{k'_0}}$, через который остальные переменные выражаются как p -ряды. Перенумеровав переменные, можно считать, что это $x_1, \dots, x_{k'_0}$, ситуация сводится к случаю $k_0 = k'_0$. Остается проверить, что между $x_1, \dots, x_{k_0}$ нет соотношений. В этом случае для любого n по модулю I^n выполняются требуемые равенства

$$x_i = g_{i,n}^p(x_1, \dots, x_{k_0}), \quad i > k_0,$$

для некоторых p -многочленов $g_{i,n}$.

Заметим, что проекция алгебраической группы – аффинного квазилинейного многообразия M – на линейное подпространство также является алгебраической группой и аффинным квазилинейным многообразием, заданным системой p -многочленов, поэтому наличие соотношений для x_i , $i \leq k_0$, означает наличие соотношений в виде p -многочленов от x_i , $i \leq k_0$, с нетривиальными линейными частями. Тогда либо линейная часть одного p -многочлена выражается через другие линейные части и понижается величина k_0 , либо возникает система типа

$$x'_i = g_{i,n}^p(x_1, \dots, x_{k_0}), \quad i > k_1 \geq 0.$$

В этом случае x'_i также выражается как p -ряд через остальные x'_j .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Предложение 3.13 выводится также из леммы Нётер о нормализации и того факта, что квазилинейное неприводимое многообразие есть сумма одномерных квазилинейных неприводимых многообразий.

3.5.3. *Доказательство теоремы 3.2.* Множество наборов коэффициентов при стрелках в алгебре A^{cl} образует F -квазилинейное многообразие M . В этом случае существует набор величин θ_i , отвечающих неприводимой компоненте нуля $M_0^{\mu\nu}$ алгебраического многообразия $M^{\mu\nu} = M_0^{\mu\nu} + W$, где W – векторное пространство над F . Пусть $w_1, \dots, w_k$ – базис W , и пусть $\{z_i\}$ – соответствующая система координат. Тогда компонента радикала $R_{\mu\nu}$ разлагается в сумму компонент: $R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^0 + R_{\mu\nu}^1$, отвечающих разложению $M = M_0^{\mu\nu} + W$. При этом $\theta_i(x) = 0$ для любого i при $x \in R_{\mu\nu}^1$ и $z_i(x) = 0$ для любого i при $x \in R_{\mu\nu}^0$.

Далее, $R_{\mu\nu}^1 = \bigoplus_j (R_{\mu\nu}^1)^{(j)}$, где компонента $(R_{\mu\nu}^1)^{(j)}$ отвечает координате z_j .

В алгебре компонент радикальные специализации встречаются только в ограниченной степени, так что многообразия $M^{\mu\nu}$ можно подправить, т.е. заменить на многообразие $(M^{\mu\nu})'$, которое получается путем замен p -рядов на p -многочлены путем удаления членов достаточно высокой степени. От этого система разнородных тождеств не изменится (более того, A^{cl} естественным образом вкладывается в $(A^{\text{cl}})'$, ибо геометрическое разложение позволяет вычислять значения базисных функционалов на элементе из A^{cl} , а значит, и соответствующий элемент из $(A^{\text{cl}})'$). При этом можно указать набор независимых переменных θ_i из кольца $F[\theta]$ таких, что все θ -координаты выражаются линейной комбинацией мономов ограниченной степени относительно переменных θ_i .

Тогда $R_{\mu\nu}^0$ раскладывается в сумму компонент $(R_{\mu\nu}^0)^{(j)}$, отвечающих равенствам $\theta_i = 0$, $i \neq j$ (разумеется, $z_i = 0$ для любого i).

Разложение $R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^0 + R_{\mu\nu}^1 = \bigoplus_j (R_{\mu\nu}^0)^{(j)} \oplus_j (R_{\mu\nu}^1)^{(j)}$ мы называем *геометрическим*.

Рассмотрим общую s -порожденную алгебру B , отвечающую алгебре A^{cl} , и (μ, ν) -компоненты ее образующих b_i , $i = 1, \dots, s$. Компоненты, отвечающие пространству W , будут иметь вид $w_i x_{ij}$, где $i = 1, \dots, \dim(W)$, $j = 1, \dots, s$, x_{ij} – образующие кольца $F[F][\{x_{ij}\}]$ (см. определение 3.5), отвечающие x_i -координате элемента b_j . Пусть $\theta_{ij} = \theta_j(a_i)$. В алгебре компонент встречаются мономы от переменных типа θ ограниченной степени. Типов таких мономов конечное число. Пусть V – векторное пространство колчана Γ , v_i – система базисных пространств колчана, M – конечномерное векторное пространство, порожденное такими мономами m_i , N – пространство, порожденное мономами от x_{ij} степени не выше $|F|$ относительно каждой переменной x_{ij} , $V' = V \otimes M \otimes N$. Тогда, как и в предыдущем случае, колчану Γ естественным образом отвечает колчан Γ' на пространстве V' . Базисные пространства этого колчана суть $v_i \otimes m_i$. Ясно, что любые две стрелки колчана Γ' либо пропорциональны, либо независимы, т.е. Γ' удовлетворяет свойству 2) утверждения б) теоремы.

Чтобы обеспечить свойство 3) утверждения б), надо рассмотреть колчан Γ и удовлетворяющий свойствам 1) и 2) того же утверждения начальный вектор v_0 . Занумеруем компоненты геометрического разложения. Назовем моном $t_1 \cdots t_n$ *правильным*, если каждое t_i либо принадлежит первичной компоненте $K \otimes A^{\text{cl}}$ элемента из A (т.е. подпирсовской компоненте этого элемента), либо является

компонентой геометрического разложения образующей алгебры общих элементов B . Тип t_i есть номер соответствующего подпирса либо пара, состоящая из номера соответствующей образующей B и номера компоненты геометрического разложения. Типом правильного монома назовем упорядоченный набор типов множителей. Для каждого типа T рассмотрим множество векторов вида $v_0 t$, $t \in T$. Получившийся набор естественным образом образует структуру колчана Γ' , удовлетворяющего свойству 3) утверждения б), ибо паре пропорциональных стрелок, исходящих из одной вершины, будет отвечать одна новая концевая вершина (линейная комбинация старых).

Заметим, что при этом если свойство 3) утверждения б) ранее не выполнялось, то размерность пространства представления нового колчана уменьшилась. Таким образом, чтобы обеспечить свойство 4) утверждения б), достаточно применить предыдущее рассуждение к двойственному колчану и воспользоваться следующим наблюдением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.14. Пусть A^{cl} – алгебра, отвечающая колчану Γ , Γ^* – двойственный колчан, получающийся обращением стрелок с сохранением соотношений для коэффициентов при стрелках, а также структуры склейки клеток. Тогда алгебра, отвечающая Γ^* , антиизоморфна A^{cl} .

Таким образом, теорема 3.2 доказана.

Если Γ состоит из одного пути и удовлетворяет условию теоремы 3.2, то из предложения 3.9 следует, что все коэффициенты пропорциональности δ_i можно сделать равными единице (если переходов через i -ю позицию вверх нет, то остается только умножение переходов вниз).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.15. Все матричные элементы, отвечающие переходу через i -ю позицию вниз, можно умножить на параметр λ , а отвечающие переходу вверх – на λ^{-1} . При этом новые алгебры A и A^{cl} будут изоморфны старым и многообразие $\text{Var}(A^{\text{cl}})$ не изменится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Новое представление получается из исходного сопряжением с помощью диагональной матрицы, на i -м месте главной диагонали которой стоит λ , а на остальных местах – единицы. Соответствующая замена базиса состоит в умножении базисных векторов с номером, большим i , на λ . Предложение доказано.

Таким образом, Γ не будет зависеть от параметров, так что в соответствующем многообразии не будет параметрических семейств тождеств. Если, однако, Γ не приведен к каноническому виду и состоит из одного пути, параметрические семейства тождеств возможны. Поэтому теорема 3.2 придает смысл утверждению, что параметрические семейства тождеств возникают в силу интерференции путей.

3.6. Язык тождеств. Конструкции. Опишем некоторые свойства колчанов в терминах тождеств.

3.6.1. Граничные алгебры. Критические нетождества. Граничные алгебры описывают взаимодействие соседних клеток.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.13. а) Пусть $\mathbb{D}$ – одномерная алгебра с нулевым умножением. Алгеброй входа B_n^l для $(n \times n)$ -матриц называется полупрямое произведение $\mathbb{D} \rtimes M_n$. Алгебра выхода B_n^r есть $M_n \rtimes \mathbb{D}$.

б) Алгеброй перехода $\mathbb{B}_{k_1, k_2}$ называется полупрямое произведение $\mathbb{M}_{k_1} \rtimes \mathbb{M}_{k_2}$.

в) Алгеброй перехода $\mathbb{P}_{q_1, q_2}^n$ называется расширение $\mathbb{M}_n$ радикальным оператором T с индексом нильпотентности радикала 2 и соотношениями $xT = Tx^{q_1/q_2}$. Алгебра перехода $\mathbb{P}_{q_1, q_2}^n$ соответствует переходу между однотипными клетками разной кратности.

г) Граничной алгеброй называется алгебра одного из типов а)–в). Соответствующие смешанные радикальные компоненты называются *граничными операторами*.

Алгебру входа в клетку можно изображать матрицами размера $n + 1$ с нулевым последним столбцом, а алгебру выхода – матрицами размера $n + 1$ с нулевой первой строкой. Алгебра перехода $\mathbb{B}_{k_1, k_2}$ изображается матрицами размера $k_1 + k_2$. По главной диагонали стоят блоки размеров k_1 и k_2 , слева и снизу – нули, сверху и справа – что угодно.

Напомним, что Z_k в случае поля нулевой характеристики обозначает размысловский центральный полином для матриц размера k , а в случае поля положительной характеристики для каждого размера матриц фиксируется центральный полином, устойчивый относительно умножений на формы. Он также будет обозначаться Z_k . Граничным алгебрам соответствуют элементарные полиномы, “вынуждающие” радикал. Из них строятся более сложные полиномы, соответствующие путям.

Пусть $P_{k_1, k_2} = CZ_{k_1} \cdot (t \circ \text{ad}(Z_{k_1}) \circ \text{ad}(Z_{k_1})) \cdot Z_{k_2}D$, $P_k^l = [t, Z_k]S$, $P_k^r = S[t, Z_k]$. Переменную t будем называть *центральной переменной*, а выражения $(t \circ \text{ad}(Z_{k_1}) \circ \text{ad}(Z_{k_1}))$, $[t, Z_k]$, $[t, Z_k]$ – *ядрами* многочленов P_{k_1, k_2} , P_k^l , P_k^r соответственно.

ЛЕММА 3.4. а) Пусть $t = \sum_i \alpha_i E_{0i}$ – оператор входа в клетку размера k . Тогда в алгебре $\mathbb{B}_k^l$ выполняется равенство $[t, Z_k] = tZ_k$.

б) Пусть $t = \sum_i \alpha_i E_{i0}$ – оператор выхода из клетки размера k . Тогда в алгебре $\mathbb{B}_k^r$ выполняется равенство $[t, Z_k] = -Z_k t$.

в) Если $\max(k_1, k_2) \geq \max(k'_1, k'_2)$, $k_1 + k_2 \geq k'_1 + k'_2$ и $(k_1, k_2) \neq (k'_1, k'_2)$, то P_{k_1, k_2} обращается в нуль на алгебре $\mathbb{B}_{k'_1, k'_2}^l$.

Если $k > \max(k_1, k_2)$, то в силу теоремы 2.2 имеем $\mathbb{M}_k \supset \text{Var}(\mathbb{B}_{k_1, k_2})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. Утверждения а) и б) леммы 3.4 означают, что коммутаторное действие на граничных операторах совпадает с обычными умножениями. В случае единичной сложности такое действие использовалось В. Н. Латышевым при доказательстве конечной базирюемости и позднее В. Дренским при доказательстве рациональности рядов Гильберта для нематричных многообразий [143].

Из леммы 3.4 непосредственно вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.16. а) Множество значений полинома Капелли C_k порядка n^2 совпадает с пространством всех матриц $\mathbb{M}_n$. То же верно для произведения полиномов Капелли порядка n^2 в любом количестве.

б) Для любого r множество значений полинома $\text{ad}(Z_k)^r \circ x$ в алгебре $\mathbb{B}_k^l$ совпадает с пространством, порожденным операторами вида E_{i0} , где $i > 0$, а в алгебре $\mathbb{B}_k^r$ – с пространством $\text{Span}_{i>0}(E_{0i})$. То же верно для $C_{k_2}^s \text{ad}(Z_k)^r \circ x$ (соответственно, для $\text{ad}(Z_k)^r \circ x C_{k_2}^s$).

в) Множество значений полинома P_{k_1, k_2} в алгебре $\mathbb{B}_{k_1, k_2}$ есть

$$\text{Span}_{i \leq k_1 < j \leq k_1 + k_2} (E_{ij}).$$

(Несколько проще убедиться в выполнении предложения 3.16 для полиномов P_k^l, P_k^r помогают левый и правый множители C и D .)

Напомним, что под *произведением* полиномов здесь понимается их произведение с подстановкой непересекающегося множества переменных.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.8. Рассмотрим алгебры $\widehat{\mathbb{B}}_k^l, \widehat{\mathbb{B}}_k^r, \widehat{\mathbb{B}}_{k'_1, k'_2}$ общих элементов, соответствующие граничным алгебрам. Соответствующие многочлены типа Q порождают пространства $\mathcal{Q}$, замкнутые относительно операторов (частичных) форм, относящихся к клеткам. Пусть R – кольцо таких форм. Тогда каждую такую алгебру общих элементов можно рассматривать как пучок конечномерных алгебр на $\text{Spec}(R)$, причем в точках максимального спектра, в которых размысловские центральные многочлены не равны нулю и $\mathcal{Q}$ покрывает весь радикал.

Из замечания 3.8 следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.17. Множество значений Q_{k_1, k_2} при некотором t покрывает $\mathbb{M}_{k_1-1}^m \mathbb{M}_{k_1} \mathbb{M}_{k_2}^m$.

Следующая лемма позволяет обращаться в нуль специализации, относящиеся к компонентам конечного типа.

ЛЕММА 3.5. Тожество $Z_k^q - Z_k$ выполняется в алгебре $\mathbb{M}_k(\mathbb{F}_q)$ и не выполняется в алгебре $\mathbb{M}_k(\mathbb{F}_{q'})$ при $q' > q$; здесь $\mathbb{F}_q$ – поле Галуа из q элементов.

Кроме того, нам нужно, чтобы многочлены обращались в нуль и на алгебрах типа $P^n(q_1, q_2)$. Поэтому необходимо сделать композицию “подкрученных коммутаторов” $Z^{q_2}R - RZ^{q_1}$ по всем возможным парам (q_1, q_2) , взятым в нужной степени. Утверждение предложения 3.16 полностью сохраняется. Построим соответствующие полиномы. Они зависят от алгебры A , которая будет рассматриваться далее. Величины, с ней связанные, в настоящем пункте следует рассматривать как параметры.

Введем обозначение: $\text{ad}^{(q_1, q_2)}(z) \circ t = z^{q_1}t - tz^{q_2}$ (“подкрученный оператор коммутирования”). В частности, $\text{ad}^{(1, 1)}(z) \circ t = \text{ad}(z) \circ t$.

Зафиксируем представимую алгебру A . Определим для нее оператор “подкрученной энгелевости” Engel_n как произведение операторов типа ad :

$$\text{Engel}_n(\vec{Z}) = \prod_{q_\alpha = p^k \in \mathcal{Q}} (\text{ad}^{(q_i, q_j)}(Z_{ij, n}))^{p^s},$$

где s – наименьшее целое такое, что $p^s > c$; $Z_{ij, n}$ – центральные многочлены для клетки размера n ; $Z_{ij, n}^{p^s}$ – степень значения центрального многочлена $Z_{ij, n}$, а не произведение значений на разных наборах переменных; $\mathcal{Q}$ – множество пар (q_i, q_j) , отвечающих соотношениям кратностей клеток.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.9. Оператор “подкрученной энгелевости” строится так, чтобы он обращался в нуль на анфиладах размера n и вынуждал тем самым межклеточные переходы. Мы пользуемся термином “энгелевость”, поскольку для энгелевой относительно свободной алгебры нет смешанных элементов, а все

клетки имеют размер не выше 1×1 . Верно и обратное. Если при этом c – индекс нильпотентности радикала, то в алгебре выполняется тождество лиевой нильпотентности $[\dots [[x_1, x_2], x_3] \dots x_{c-1}] = 0$. (В конечно порожденном случае лиева нильпотентность следует из энгелевости.) Многочлены типа энгелевости “выбивают” внутриклеточный радикал.

Пусть c обозначает $c(A)$, C_m – полином Капелли порядка m , C_m^c означает в данном случае не степень значения, а произведение многочленов Капелли от непересекающихся множеств переменных, $h = y^{s_1} - y^{s_2}$ – “вырезающий” полином, обращающийся в нуль вне существенных клеток (таким образом подбираются s_i), $D_1 = D_{11} \cdots D_{1c}$, $D_2 = D_{21} \cdots D_{2c}$. Выпишем искомые многочлены. Для алгебры перехода имеем

$$Q_{k_1, k_2}^\mu = D_1 h_1 C_{k_1^2}^c (t \circ (\text{Engel}_{k_1}(\vec{Z}_1) \circ \text{Engel}_{k_2}(\vec{Z}_2))) C_{k_2^2}^c h_2 D_2. \quad (3.1)$$

Для алгебры выхода имеет место соотношение

$$Q_k^{r, \mu} = D_1 h_1 C_{k_1^2}^c (t \circ (\text{Engel}_k(\vec{Z}))). \quad (3.2)$$

Для алгебры входа имеем

$$Q_k^{l, \mu} = (t \circ (\text{Engel}_k(\vec{Z}))) C_{k_2^2}^c h_2 D_2. \quad (3.3)$$

Индекс μ характеризует параметры, связанные с алгеброй A , которые участвовали в конструировании многочленов $c(A)$ (показатели s_i в многочленах h_1 и h_2 и т.д.). В тех случаях, когда это не будет вызывать недоразумений, индекс μ не используется. Кроме того, можно выписать соответствующий многочлен для алгебры перехода между клетками кратностей q' и q'' :

$$P_{k; q', q''}^\mu = D_1 h_1 C_{k_2^2}^c (t \circ \text{Engel}_k^{(q', q'')}(\vec{Z}_1)) C_{k_2^2}^c h_2 D_2, \quad (3.4)$$

где оператор $\text{Engel}_k^{(q', q'')}$ строится по оператору Engel , только в соответствующем произведении удаляются множители $\text{ad}^{(q_i, q_j)}(Z_{ij, n}^{p^s})$ с тем же соотношением кратностей, которое задает пара (q_1, q_2) . Это значит, что в произведении удаляются операторы, для которых $\log_p q_i - \log_p q_j = \log_p q' - \log_p q''$. Однако эту алгебру мы использовать не будем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.14. Участки многочленов, заключенные во внешних скобках в равенствах (3.1)–(3.4), называются *ядрами* соответствующих многочленов. Левая часть соответствующего многочлена до ядра называется *левым концом*, а правая часть после ядра – *правым концом*. Естественно определяется понятие *клетки, соответствующей данному концу* многочлена типа Q . Множители Капелли вида $C_{k_2^2}^c$ называются *местами приема (частичных внутренних) форм* (соответствующих клеткам того или иного типа). Величины k_i , фигурирующие в определении соответствующих многочленов, называются *размерами клеток предназначения* для соответствующего многочлена.

Многочлены $P_{k; q', q''}^\mu$ и Q_{k_1, k_2}^μ имеют оба конца, многочлен $Q_k^{l, \mu}$ имеет правый конец, многочлен $Q_k^{r, \mu}$ – только левый.

Операторы типа Engel вынуждают межклеточные переходы, множители типа $C_{k_2^2}$ позволяют умножать на формы, h_i вырезают попадания в клетки

конечного типа. Когда существенная клетка граничит с несущественной, берется многочлен, отвечающий входу или выходу. Впрочем, и для этого случая можно написать многочлен перехода (он устроен так же, только без одного из h_i), но нам это не нужно.

Для полиномов $Q_k^{r,\mu}$, $Q_k^{l,\mu}$, Q_{k_1,k_2}^μ , $P_{k;q',q''}^\mu$ справедливы утверждения, аналогичные утверждениям б) и в) предложения 3.16, из которого непосредственно следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.18. а) Для любого μ множества значений полиномов $Q_k^{r,\mu}$, $Q_k^{l,\mu}$, Q_{k_1,k_2}^μ , $P_{k;q',q''}^\mu$ в алгебрах $\mathbb{B}_k^r$, $\mathbb{B}_k^l$, $\mathbb{B}_{k_1,k_2}$, $\mathbb{P}_{k;q_1,q_2}^n$ соответственно совпадают с пространством, порожденным радикалом. При этом радикальная специализация осуществляется внутри ядра соответствующего полинома. Множество значений этих полиномов в алгебре A^{cl} содержит операторы, отвечающие соответствующим типам переходов, концам и началам анфилад, т. е. все соответствующие смешанные компоненты.

б) Если $\max(k_1, k_2) \geq \max(k'_1, k'_2)$ и при этом $k_1 > k'_1$ либо $k_2 > k'_2$, то многочлен Q_{k_1,k_2}^μ обращается в нуль на алгебре $\mathbb{B}_{k'_1,k'_2}$. Если $k > k'$, то многочлены $Q_k^{r,\mu}$, $Q_k^{l,\mu}$, $P_{k;q',q''}^\mu$ обращаются в нуль на алгебрах $\mathbb{B}_k^r$, $\mathbb{B}_k^l$, $\mathbb{P}_{k;q_1,q_2}^n$ соответственно (для любого μ).

в) Пусть набор параметров μ характеризует алгебру A . Тогда:

1) каждое ненулевое значение полинома $Q_k^{r,\mu}$ лежит в идеале, порожденном специализациями, относящимися к граничному оператору, связанному с существенной клеткой размера не меньше k , либо в идеале, порожденном компонентами, относящимися к существенным клеткам размера больше k ;

2) каждое ненулевое значение полиномов $Q_k^{l,\mu}$ лежит в идеале, порожденном специализациями, относящимися к выходу или переходу из существенной клетки размера не меньше k , либо в идеале, порожденном компонентами, относящимися к существенным клеткам размера больше k ;

3) каждое ненулевое значение полинома $P_{k;q',q''}^\mu$ лежит в идеале, порожденном специализациями описанного выше типа, а также компонентами, относящимися к переходу между однотипными клетками размера k с соотношением кратностей таким же, как и между q' и q'' ;

4) каждое ненулевое значение полинома Q_{k_1,k_2}^μ лежит в идеале, порожденном специализациями, относящимися к переходу между существенными клетками размеров k'_1 и k'_2 , причем $k'_1 \geq k_1$, $k'_2 \geq k_2$, либо в идеале, порожденном компонентами, относящимися к существенным клеткам размера больше $\max(k_1, k_2)$.

3.6.2. Случай, когда Γ состоит из одного пути. Поскольку мы изучаем экстремальные идеалы, а колчан Γ является отрезком $[v_1, v_2]$, нас будет интересовать расположение компонент произведений вдоль пути. Поэтому случай, который надо рассмотреть, – это случай, когда Γ состоит из одной “ветки”. Такой колчан мы называем *веточным*.

Если похожих клеток нет, то построение экстремального идеала осуществляется так же, как и для многообразий мономиальных алгебр. Интерференция может происходить по путям одинакового состава. Когда нет интерференции, алгебра вкладывается в прямую сумму своих факторалгебр, отвечающих путям в колчане Γ .

Рассмотрим путь C в колчане Γ . C -анфиладой называется идущая вдоль C последовательность похожих клеток, между которыми нет клеток другого типа или радикальных элементов с другой пирсовской обкладкой. Хвостом C -анфилады называется конец этой последовательности такой, что если элементы алгебры A^{cl} ограничить на эти клетки, то получится алгебра, порождающая то же многообразие, что и одна клетка анфилады. Алгебра, отвечающая хвосту анфилады, изоморфна расширению алгебры клетки центральными нильпотентами. Каждому пути соответствует набор анфилад.

Новые эффекты возникают, когда существуют похожие клетки, поскольку следы, относящиеся к похожим клеткам, можно перебрасывать от одной клетки к другой. Выпишем соответствующие равенства (аналогичную конструкцию см. в [114]). Пусть

$$f = \prod_{i=1}^s x^{r_{i-1}-\delta_{i-1}-\varepsilon_i} \cdot [Z_{n_i^2}, y_i]^{\varepsilon_i} C_{n_i^2}^r [Z_{n_i^2}, y_i]^{\delta_i} \cdot x^{r_s-\delta_s}, \quad (3.5)$$

где s равно числу анфилад в пути C , r – индексу нильпотентности радикала, а величины δ_i и ε_i , соответствующие i -й клетке, принимают значение 0 или 1 и определяются по правилу:

1) $\varepsilon_i = 0$, если длина перемычки, входящей в i -ю клетку, равна 1 и при этом либо слева стоит клетка не меньшего размера, либо входящая перемычка отсутствует;

2) $\delta_i = 0$, если длина перемычки, выходящей из i -й клетки, равна 1 и при этом либо слева стоит клетка большего размера, либо выходящая перемычка отсутствует;

3) в остальных случаях величины δ_i и ε_i равны 1.

(Отсутствие входящей перемычки возможно, когда v_1 соответствует начальной клетке, а отсутствие выходящей – когда v_2 соответствует последней. Под произведением многочленов понимается такое произведение, когда в них подставлены непересекающиеся множества переменных.)

Иными словами, если идет переход от большей клетки к меньшей или обратно, то оставляется множитель $(\text{ad}(Z_{n_i^2})^q \circ y_i)$, отвечающий клетке большего размера, а если размеры равны – то отвечающий левой клетке. Внеклеточные вершины считаются клетками нулевого размера.

Легко убедиться в том, что:

1) f не является тождеством алгебры A^{cl} , а значит, и A ;

2) при подстановке в многочлен f матричных единиц из $\hat{A}$ с ненулевым результатом в каждое $C_{n_i^2}$ должны подставляться элементы, отвечающие i -й анфиладе.

Рассмотрим вначале случай бесконечного основного поля. Пусть клетки с номерами i и j похожи. Тогда

$$\text{AD}_{ij}(a)f = \text{Tr}_i(a)f - \text{Tr}_j(a)f = 0,$$

выражение $\text{Tr}_i(a)f$ означает замену одного из множителей $C_{n_i^2}$ в выражении для f на сумму $\sum_k \frac{1}{n_i} C_{n_i^2}(\vec{x}; \vec{y})|_{x_k=x_k a}$. В случае поля положительной характеристики надо рассматривать операторы $\text{AD}_{ij}(a_1; a_2)f = \text{Tr}_i(a_1; a_2)f - \text{Tr}_j(a_1; a_2)$, где $\text{Tr}_i(a_1; a_2)f$ означает замену одного из множителей $C_{n_i^2}$ в выражении для f на сумму $\sum_k C_{n_i^2}(\vec{x}; \vec{y})|_{x_k=a_1 x_k a_2}$. (Если A – алгебра матриц

порядка n , то в силу равенства (2.1) имеем $\text{Tr}(a_1; a_2)f = \text{Tr}(a_1)\text{Tr}(a_2)f$. Клетка одна, и индекс i не указывается.)

Все эти операторы определяются как операторы на “записях” – алгебраических выражениях. (Вместо обозначения $\text{AD}_{ij}(z)f$ нетрудно привести явную формулу для полинома, однако мы этого не делаем ввиду ее громоздкости.)

Наличие нескольких анфилад таких, что все клетки в этих анфиладах похожи, приводит к дополнительным эффектам при применении операторов AD_{ij} . Они “вынуждают” появление радикальных компонент внутри анфилад. Пусть, например, имеется анфилада из двух клеток, связанных радикальным оператором T , и еще одна анфилада из одной клетки, похожей на них. Тогда применение соответствующего AD_{ij} к полиному f приводит к вставке радикальной части следа. Если имеется пара анфилад из двух пар клеток в каждой, то применение $\text{AD}_{ij}(x)$ дает разность результатов подстановок радикальных частей следа x относительно первой и второй анфилад. Радикальные части следов относительно разных анфилад могут быть по-разному связаны между собой, что приводит к появлению тождеств, зависящих от параметров. В частности, радикальные части похожих анфилад могут быть похожими, а могут быть и “независимыми”.

Отметим, что при каждом применении оператора AD_{ij} появляется дополнительно радикальная компонента и возникают тождества $\text{AD}_{ij}^q f = 0$, где q – количество подряд идущих похожих клеток. При последующем применении оператора на записях AD всякий раз добавляются новые переменные $z_1^{(k)}$ и $z_2^{(k)}$ (отметим, что при умножении многочленов изначально подставляются разные переменные). Когда $n_i = n_j = 1$, вместо переноса следов осуществляется перенос переменных и возникают условия типа энгелевости для операторов коммутирования типа ad . Эта ситуация подробно исследована в диссертации В. Н. Латышева [47], который впервые для нематричного случая ввел такие операторы.

Аналогично определяются оператор $\text{H}_i(\Phi)(f)$, отвечающий системе замен, обеспечивающих подстановку в i -й сомножитель формы Φ , и оператор

$$\text{AD}_{ij}(\Phi)(f) = \text{H}_i(\Phi)(f) - \text{H}_j(\Phi)(f).$$

Все сказанное в настоящем параграфе об операторах, связанных со следами, справедливо и для операторов, связанных с формами.

Для веточного колчана радикальные части вынуждаются явно, после чего получается искомый экстремальный идеал со структурой модуля над полупростыми частями следов.

Теперь рассмотрим случай, когда основное поле конечно. Нам понадобятся некоторые другие операторы, действующие на записях. Пусть Z_{k_i} – центральный полином, отвечающий i -й клетке размера k_i . Оператор $\text{H}_i(Z_{k_i})$ вставляет дополнительный множитель Z_{k_i} вместо i -й клетки, а оператор $\mathbf{P}(q)_i$ – множитель $Z_{k_i}^q - Z_{k_i}$, где q – степень характеристики основного кольца. В данном случае подразумевается обычная степень, а не произведение с подстановкой различных переменных. Однако переменные операторов вставки считаются непересекающимися с остальными. Если размер центра в алгебре матриц, соответствующей i -й клетке, конечен, равен q' и $q' - 1$ делит $q - 1$, то результат действия оператора $\mathbf{P}(q)_i$ будет нулевым. Мы будем брать q таким, чтобы последнее условие выполнялось для всех клеток конечного типа (тем самым

обеспечивается бесконечность типов для ненулевых образов данных операторов).

Кроме того, имеется также эффект *кратности клеток*. Его надо учесть при конструировании многочленов. Напомним, что $\text{ad}^{(q_1, q_2)}(z)$ обозначает “подкрученный оператор коммутирования”: $\text{ad}^{(q_1, q_2)}(z) \circ t = z^{q_1} t - t z^{q_2}$. В частности, $\text{ad}^{(1, 1)}(z) \circ t = \text{ad}(z) \circ t$. Соответственно, “подкрученные” операторы имеют вид $\text{Engel}_{ij}^{(q_1, q_2)}(z)f = \text{Tr}_i(z)^{q_1} f - \text{Tr}_j(z)^{q_2} f$.

Аналогично, оператор Φ_i (действующий на запись многочлена f) означает вставку формы Φ в i -й множитель. В случае единичного размера клетки это является подстановкой дополнительной переменной, в общем случае – системой подстановок, примененной к соответствующему множителю Капелли C_i . Аналогично определяются операторы $\text{AD}^{(q_1, q_2)}(\Phi)$ и $\text{Engel}_{ij}^{(q_1, q_2)}(\Phi)$. Оператор $\mathbf{P}_{q, k}(\Phi)$ есть аналог оператора $\mathbf{P}(q)_i$.

Похожесть клеток с номерами i и j означает равенство нулю произведения $\prod_{q_\alpha, q_\beta} (\text{Engel}_{ij}^{(q_1, q_2)})^c \circ f$, где пары (q_α, q_β) пробегают множество пар возможных кратностей клеток в алгебре (и это множество включает пару $(1, 1)$), $c = c(A)$ – индекс нильпотентности радикала.

§ 4. Локальная конечная базлируемость и локальная представимость многообразий алгебр

При изучении представлений относительно свободной алгебры возникают компоненты, связанные с разными типами клеток, а также граничными операторами и другими частями радикала. До сих пор мы описывали многообразия через носитель и использовали язык колчанов представления. Нам понадобится также двойственный функциональный язык – язык разносортных тождеств, на котором описывается поведение компонент каждого сорта при подстановках. Наверное, впервые такого рода образования рассматривал С. А. Пихтильков при исследовании многообразий, порожденных всеми алгебрами фиксированной размерности [116]. В дальнейшем соответствующий формализм (не учитывавший разносортность радикала) был развит в работах А. В. Гришина [95], [94].

Далее будет показано, что для любого многочлена $f|_A \neq 0$, лежащего в идеале, отвечающем пути максимального состава, можно применить такую систему подстановок G (явно указанную), что результат окажется в A не равным тождественно нулю и будет устойчив при умножении на элементы некоторого нётерова кольца R . (Для неоднородных многочленов строится несколько более сложная конструкция S -модулей.) Это кольцо будет зависеть только от расположения существенных анфилад (см. определение 3.10) вдоль некоторого пути C максимального состава.

4.1. Алгебро-геометрические соображения. С алгебрами A^{cl} , $\hat{A}$ и $\tilde{A}$ можно связать пучки конечномерных алгебр на нётеровой аффинной схеме, являющейся спектром кольца структурных констант (следов и форм). (Удобнее использовать некоторое кольцо R ; см. п. 4.3.) Ограничение пучка на точку из максимального спектра дает алгебру, конечномерную над полем. Можно показать, что T -идеал, полученный из некоторого многочлена f , не равен нулю вне алгебраического многообразия, отвечающего размеру клеток не больше

некоторой фиксированной величины и обращению в нуль некоторых полиномов. Пусть N – пучок R -модулей, соответствующий полиномам, обращающимся в нуль при факторизации по путям максимального состава, I – соответствующий идеал в кольце многочленов. Алгебро-геометрическая основа наших рассуждений изложена в пп. 1.2.3.

Пусть M – нётеров модуль над нётеровым кольцом R , C – подкольцо кольца R . Вообще говоря, M не является нётеровым C -модулем, в том числе и когда C – идеал.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Модуль M называется *проективно нётеровым над C* , если для любого C -подмодуля $N \subset M$ можно указать $k \in \mathbb{N}$ и конечный набор элементов $\{n_1, \dots, n_s\}$ такие, что C -подмодуль, порожденный $n_1, \dots, n_s$, содержится в $N \cap C^k M$. Число k называется *показателем подмодуля N и системы элементов $\{n_1, \dots, n_s\}$* .

Из предложения 2.7 вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Алгебра общих матриц (а также алгебра общих матриц со следом) проективно нётерова над своим размысловским центром.*

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Размысловский центр в алгебре общих матриц конечно порожден как модуль над пространством следов (форм), но не как алгебра.

Изучим свойство проективной нётеровости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Пусть M' и M'' проективно нётеровы над C , и пусть имеет место точная последовательность $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$. Тогда модуль M проективно нётеров над C .*

Приведем лемму Артина–Рисса (см. [144, с. 244]).

ЛЕММА 4.1 (Артин–Рисс). *Пусть M – нётеров модуль над нётеровым кольцом R , I – идеал в R . Тогда M проективно нётеров над I .*

Число k , фигурирующее в доказательстве леммы Артина–Рисса, называется *показателем Артина–Рисса*.

Приведем критерий проективной нётеровости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Нётерово кольцо R проективно нётерово над своим подкольцом C тогда и только тогда, когда каждая первичная компонента R_i кольца R является нётеровым модулем над целым замыканием C'_i соответствующей компоненты C_i в R_i , при этом каждое C_i содержит некоторый идеал целого замыкания C' кольца C .*

СЛЕДСТВИЕ 4.1 (о тензорном произведении). *Пусть R_1 -модуль M_1 проективно нётеров над C_1 , а R_2 -модуль M_2 проективно нётеров над C_2 . Тогда $M_1 \otimes M_2$ проективно нётеров над $C_1 \otimes C_2$ как $(R_1 \otimes R_2)$ -модуль.*

Эффекты, связанные с кратностями клеток, изложенные на геометрическом языке графов, можно описать на функциональном языке тождеств, а также на языке структурных констант. Обозначим через $\overline{\Phi}_i(\vec{z})$ элемент кольца коэффициентов, отвечающий значению формы $\Phi(\vec{z})$ на алгебре общих матриц, соответствующей i -й анфиладе. В частности, $\overline{\text{Tr}}(z)$ означает коэффициент, соответствующий полупростой части оператора следа. Редукции коэффициентов отвечают изменениям клеток, новые связи между ними и соответствующие тождества.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Рассмотрим набор клеток таких, что ограничение представления на каждую из них дает морфизм в алгебру матриц соответствующего порядка. Пусть x_i – ограничение элемента $x \in A$ на клетку с номером i , $Z_i(\vec{x})$, $\vec{x} \in A$, – центральный полином в алгебре матриц размера, равного размеру рассматриваемой клетки. Действие полугруппы подстановок на множестве переменных естественно отвечает ее действию на кольце свободных коэффициентов при матричных единицах, т.е. $\mathbb{F} = \bigotimes_i F^{q_i}[\vec{x}]$. Пусть идеал H в кольце многочленов $\bigotimes_i F^{q_i}[\vec{x}]$ инвариантен относительно этого действия, H' – соответствующий идеал в алгебре, порожденной клетками. Тогда идеал H содержит пересечение идеалов, порожденных множествами полиномов вида:

- 1) $\forall \vec{x} \ (Z_i(\vec{x}))^k$ (уменьшение размера клетки с “точностью до инфинитезимальности”);
- 2) $\forall \vec{x} \ (Z_i(\vec{x}) - Z_j(\vec{x}))^k$ (склейка клеток с “точностью до инфинитезимальности”);
- 3) $\forall \vec{x} \ (Z_i(\vec{x})^{q_i} - Z_i(\vec{x}))^k$, где $q_i = p^s$, причем $x^q = x$ при всех $x \in F$ (подкрепленная на эндоморфизм Фробениуса склейка клеток с “точностью до инфинитезимальности”);
- 4) $\forall \vec{x} \ (Z_i(\vec{x})^{q_1} - Z_j(\vec{x})^{q_2})^k$, где $q_i = p^{s_i}$, причем $x^{s_i} = x$ при всех $x \in F$ (переход к конечному типу клетки с “точностью до инфинитезимальности”).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H \triangleleft \mathbb{F}$ не содержит ни одного из идеалов указанного вида. Тогда в кольце $\mathbb{F}/H$ можно выбрать точку, не принадлежащую объединению многообразий, отвечающих идеалам типов 1)–4). Это значит, что можно выбрать по одному полиному f_i из каждого идеала, описанного в условии предложения, и локализовать пучок по всем таким f_i .

Получившаяся геометрическая точка $\mathfrak{X}$ аффинной схемы $\text{Spec}(\mathbb{F})$ обладает тем свойством, что ограничение пучка компонент алгебр на нее не удовлетворяет ни одному из условий, отвечающих соотношениям вида 1)–4), и в силу изложенного в § 3 замыкание по Зарискому получившейся алгебры совпадает с исходной алгеброй, порожденной клетками. Но тогда общая точка аффинной схемы $\text{Spec}(\mathbb{F}/H)$ в то же время является общей точкой $\text{Spec}(\mathbb{F})$, что невозможно. Предложение доказано.

Приводимые ниже рассуждения формально не требуются в доказательствах, однако полезны для понимания алгебро-геометрической сути доказательств представимости и конечной базирюемости.

Если Γ – T -идеал, многочлены из которого принимают значения, имеющие полный состав, то $P(\Gamma)$ – T -идеал, описанный в лемме 4.10. В общей точке максимального спектра коммутативного кольца представления (т.е. вне некоторой замкнутой подсхемы $\mathcal{H}$) множество значений полинома g , удовлетворяющего условиям леммы 4.9 или леммы 4.10, покрывается значениями полиномов, вид которых указан в заключениях соответствующих лемм. Отметим, что для осуществления нужных вырезаний при обработке многочлена f и чтобы остались ненулевыми члены при специализациях, вырезать которые не нужно, достаточно, чтобы центры матричных алгебр, отвечающих клеткам бесконечного типа, имели порядок, больший, чем $\deg(f)$, а также сохранялось свойство клеток иметь разные типы и, кроме того, не обращались в нуль размысловские полиномы, отвечающие клеткам.

Рассмотрим общую точку x максимального спектра кольца, порожденного формами $\bar{\Phi}_i(\bar{z})$. Это означает, что при специализации алгебр $A_x = \hat{A}_x$ получается алгебра, для которой не меняются типы клеток и склеек. Имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. а) Пусть H – T -идеал алгебры A . Тогда H^1 – нётеров S -модуль.

б) Пусть все клетки в алгебре B суть матричные алгебры над полем, алгебра $\tilde{B}$ – минимальная классическая конечномерная алгебра, расширяющая B , причем пара $(B, \tilde{B})$ принадлежит многообразию пар $(A, \hat{A})$. Тогда если независимым клеткам в A отвечают независимые клетки в B , а существенным клеткам в A – клетки с достаточно большим центром, то для любого T -идеала Γ , все значения которого имеют максимальный существенный состав (в A), имеет место равенство $P(\Gamma_B) = \Gamma_B$.

в) Пусть T -идеал H состоит из элементов максимального состава, $\hat{H}$ – идеал, соответствующий идеалу H в алгебре $\hat{A}[S]$. Тогда $H^1 \subset \hat{H}$ и в общей точке x максимального спектра имеет место совпадение $P(H)_x = \hat{H}_x$.

Отметим, что $\hat{H}$ в силу эффектов неоднородности может не быть T -идеалом алгебры $\hat{A}[S]$ даже в том случае, когда он совпадает с H как множество. (Общая точка – это точка вне замкнутой подсхемы $\mathcal{H}$.)

Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ – элементы из $H' = H \cap h_C \cap I_C$, порождающие $H'[S]$; $f_1, \dots, f_s$ – образующие H^1 как R -модуля; $N_B(H)$ и $N_S(H)$ – пучки R -модулей, отвечающие H' и H^1 соответственно; Q – максимальная степень f_i ; $N_B(H)$ и $N_S(H)$ – когерентные пучки на нётеровой аффинной схеме $\text{Спец}(S)$. Следующее предложение обобщает предложение 3.17.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. а) Пусть x – точка $\text{Спец}(R)$, на которой не обращаются в нуль элементы из идеалов, описанных в замечании 4.9, 1)–3) (причем показатели q ограничены степенями f_i). Тогда локальные пучки $N_B(H)_x$ и $N_S(H)_x$ совпадают.

б) Факторпучок $\mathcal{T} = N_B(H)/N_S(H)$ сосредоточен на замкнутой подсхеме $\mathcal{H}$. Пусть I_H – идеал в R , соответствующий $\mathcal{H}$. Ограничение алгебр на эту подсхему уменьшает сложностный тип (т.е. если профакторизовать представляющую алгебру по идеалу, отвечающему идеалу I_H в кольце коэффициентов, то возникнет структура с максимальным составом пути, меньшим, чем состав C).

в) В условиях утверждений а), б) при некоторых натуральных k и l имеют место равенство $I_H^k \mathcal{T} = 0$ и включение $N_B(H) \cdot I_H^l \subseteq N_S(H)$.

Условие утверждения а) предложения 4.6 означает, в частности, что центры существенных клеток при ограничении в точку x остаются достаточно большими и, кроме того, сохраняется структура разнотипности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.6. Поскольку множество многочленов φ_i конечно, соответствующие локальные пучки совпадают в точках вне замкнутой подсхемы, являющейся объединением подсхем, отвечающих φ_i . Поэтому утверждение а) вытекает из предложения 4.5. Утверждение б), а следовательно, и равенство $I_H^k \mathcal{T} = 0$ непосредственно следуют из утверждения а). Воспользовавшись этим равенством, устанавливаем включение $N_B(H) \cdot I_H^l \subseteq N_S(H)$. Теперь докажем утверждение в). Применим лемму Артина–Рисса:

пусть M – когерентный пучок модулей на нётеровой схеме $\text{Spec}(S)$, N – пучок его подмодулей, I – произвольный идеал в S . Тогда имеет место включение $I \cdot M \supseteq I^{s(I,M)} \cap M$, $s(I, M) \in \mathbb{N}$, откуда имеем $I^k \cdot M \supseteq I^{s(I,M,k)} \cap M$. Итак, при некотором натуральном s имеют место включения

$$N_S(H) \supseteq I^k \cdot N_B(H) \supseteq I^s \cap N_B(H),$$

что и требуется доказать.

Рассмотрим всевозможные пути полного состава. Рассмотрим для каждого такого пути C_i многочлен вида h_{C_i} , который обращается в нуль в факторе $\tilde{A}$ по градуированным компонентам полного состава. Пусть g_C – T -идеал, порожденный всеми такими многочленами.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Для любого T -идеала H существуют T -идеал $P(H)$ и идеал J в кольце S такие, что:

- 1) $P(H) = \widehat{P(H)} = P(H)[S]$;
- 2) алгебры $A/P(H)$ и $A/(A \cap J\tilde{A})$ представимы;
- 3) $P(\tilde{H}) = H \cap (J\tilde{A} \cap g_C[S])$;
- 4) алгебра $A/(A \cap J\tilde{A} \cap g_C)$ имеет меньший сложностный тип (максимальный состав пути в соответствующем графе);
- 5) имеют место следующие вложения:

$$\begin{array}{ccc} A & \longleftarrow & \Gamma \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{A} & \longleftarrow & \hat{\Gamma} \end{array} \quad \begin{array}{l} \swarrow \\ \Gamma_{SSM} = \tilde{\Gamma}_{SSM} \\ \swarrow \end{array}$$

Из следствия 4.2 вытекает, что препятствия к представимости H не лежат в $J\tilde{A} \cap g_C$. В силу предложения 2.2 мы можем перейти к фактору по $J\tilde{A} \cap g_C$, и доказательство представимости завершается спуском по сложностному типу.

Существует и несколько иной, изначальный, подход автора к “расталкивающим заменам”, связанный с их последовательным применением и оказавшийся эффективным при доказательстве локальной конечной базлируемости, а также локальной представимости алгебр над произвольным нётеровым ассоциативно-коммутативным кольцом (см. пп. 5.2.2, 5.2.3). Следующее предложение описывает свойство стабилизации. Оно является аналогом предложения 5.12 о существовании проективно минимального идеала.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7. а) Пусть $\Gamma = T(f_1, \dots, f_s)$ – T -идеал, все значения которого состоят из элементов максимального состава, точка x взята, как в предложении 4.6, а). Тогда $P(\Gamma_x) = \Gamma_x$.

б) Пусть m – размерность локализации алгебры $\tilde{A}$ относительно коммутативных полиномиальных коэффициентов. Тогда для произвольного T -идеала Γ существуют такие идеалы $J, J' \triangleleft S$, что выполняются включения $JP^m(\Gamma) \supseteq P^{m+1}(\Gamma)$ и $J'A[S] \cap P^m(\Gamma) \supseteq P^{m+1}(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) есть переформулировка утверждения а) предложения 4.6. Утверждение б) вытекает из очевидного включения $P(\Gamma) \supseteq \Gamma$ и того факта, что алгебре $\tilde{A}$ отвечает пучок модулей на $\text{Spec } S$, размерность которых в каждой точке ограничена числом m . Утверждение об идеале J' вытекает из леммы 4.1.

Предложение 4.7 является аналогом леммы 4.1 для некоммутативного случая. При доказательстве локальной представимости относительно свободных колец используется идейно близкое понятие “проективно минимального T -идеала”. Идеал (T -идеал) *проективно минимален*, если при локализации относительно всех ненулевых элементов из S он порождается любым своим элементом. Проективно минимальный идеал одномерен в такой локализации. Проективно минимальные идеалы используются в качестве экстремальных (см. пп. 5.2.2). Подход, связанный с построением максимального замкнутого T -идеала, содержащегося в рассматриваемом T -идеале, есть отражение идеи последовательного рассмотрения проективно минимальных идеалов и взятия прообразов. Остальные рассуждения в доказательствах локальной представимости и локальной конечной базируемости связаны с этой идеей.

Будем говорить, что алгебра *хорошо представлена*, если она вложена в алгебру нётероваго типа над ассоциативно-коммутативным полупервичным кольцом R , в которой нет кручения по переменным из R , трансцендентным над $\mathbb{Z}_p$, и действие на любом векторе R не содержит нильпотентных операторов. При этом имеется разложение пространства представления на полупростую и радикальную части.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Назовем многочлен f *удобным*, если переменные из некоторого набора $\{x_i\}_{i=1}^d$, $d < c(A^{\text{cl}})$, входят в каждый моном f в совокупной степени меньше $c(A^{\text{cl}})$, при этом имеется специализация в A^{cl} с ненулевым результатом, при которой радикальные компоненты подставляются только в *выделенные переменные* x_i (многочлен f может также зависеть и от других переменных произвольным образом). Такая специализация называется *удобной*. Если при этом рассматриваемая специализация полна, то многочлен f является *полным удобным*, и если, кроме того, смешанные радикальные специализации невыделенных переменных приводят к нулевому результату для любой полной специализации, то многочлен f является *полным совсем удобным*.

Из разложения алгебры A^{cl} в сумму радикала и полупростой части, из пирсовского разложения и разложения радикальной части в сумму удобной компоненты и ее дополнения вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8. *Множество значений многочлена f в алгебре A^{cl} совпадает с множеством значений его удобных квазилинеаризаций в алгебре A^{cl} . Множество полных значений многочлена f в алгебре A^{cl} совпадает с множеством значений его полных удобных квазилинеаризаций в алгебре A^{cl} . Если f имеет полную ненулевую специализацию, то f также имеет полную совсем удобную ненулевую специализацию.*

Пусть переменные из набора $\{x_i\}_{i=1}^d$, $d < c(A)$, входят в g , причем каждая имеет степень не выше $c(A)$. Пусть полная специализация набора $\{x_i\}_{i=1}^d$ приводит к нулевому результату. Тогда действие описанных выше подстановок на переменных из $\{x_i\}_{i=1}^d$ также приводит к нулевому результату.

4.2. Компоненты и разнотипные тождества. Алгебра $\hat{A}$ раскладывается в сумму градуированных компонент, и ее можно рассматривать как многоосновную систему. Тождествам в A отвечают тождества этой многоосновной алгебры, соответствующие всевозможным специализациям, или *разнотипные тождества*. Можно использовать эквивалентный язык, связанный с операторами вырезания компонент или сортировкой членов.

Обычным подстановкам в алгебре A отвечают преобразования компонент, при этом полупростые компоненты преобразуются, как и при обычной подстановке. Будем рассматривать специализации элементов, связанные с их представлением в виде суммы своих компонент, и действия подстановок $R_i \rightarrow t_i$ на членах, связанных с фиксированной специализацией резервных переменных t_i . При этом тип (суммарная существенная градуировка) переменных, входящих в R_i , всякий раз отвечает указанной специализации для t_i . Многочлены R_i будут сконструированы таким образом, что после применения к ним так называемых “расталкивающих” операторов останутся только члены, отвечающие нужным специализациям t_i .

С формальной точки зрения происходит следующее. Подстановкам $R_i \rightarrow t_i$ отвечает набор преобразований компонент, которые подбираются таким образом, чтобы ненужные компоненты обратились в нуль.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Можно пользоваться следующим языком. Каждой компоненте $\mathcal{K}$ отвечает оператор вырезания $\text{Obstr}_{\mathcal{K}}$, который каждому элементу $x \in \hat{A}$ сопоставляет его компоненту. Значения оператора вырезания естественным образом преобразуются при подстановках. При этом полупростые компоненты преобразуются так же, как и исходные переменные, а суммы радикальных компонент – по формулам, получающимся из формул для полупростых компонент своего рода дифференцированием.

Мы будем рассматривать тождества с операторами вырезания. Тождествам в A естественным образом соответствуют тождества с операторами вырезания в $\hat{A}$. Многочлену соответствует многочлен с операторами вырезания. Вместо каждой переменной подставляется сумма ее компонент, изображаемых в виде действия соответствующих операторов. Рассуждения о специализациях следует понимать как рассуждения о членах, в которых данная переменная стоит под оператором вырезания.

Отметим, что техника расталкивающих замен, описанная в леммах 4.9 и 4.10, есть не что иное, как имитация операторов вырезания средствами обычных полиномов и описание их действия в терминах тождеств.

4.2.1. Преобразование компонент в граничных алгебрах. Укажем, как преобразуются компоненты каждого сорта. Далее будут предъявлены конструкции замен, позволяющие “отлавливать” граничные операторы. Для этого нам надо изучить, как выражаются межклеточные переходы и граничные операторы в терминах тождеств.

Прежде всего отметим, что достаточно длинный путь (т. е. путь, длина которого не меньше s – индекса нильпотентности радикала) в колчане Γ обязательно проходит через клетку. Поэтому при рассмотрении путей максимального состава (проходящих через максимальный набор клеток) в алгебре A^c компоненты, содержащие $\bar{\theta}$, не возникают.

Нас интересуют элементарные переходы. Переведем теперь результаты, полученные в пп. 3.6.1, о соответствующих операторах на θ -язык, или язык, связанный с радикальными полупростыми специализациями. Через $(\theta')^i(v)$ обозначим $\nu_i x \nu_0$ – компоненту элемента v (“оператор выхода из i -й клетки, принадлежащей v ”); аналогично определяются компоненты $(\theta'')^i(v)$, $\theta^{ij}(v)$, $\bar{\theta}(v)$. Отметим, что алгебра $\hat{A}$ как векторное пространство разлагается в сумму таких компонент. Рассмотрим теперь алгебры входа B_k^l , выхода B_k^r и перехода B_{k_1, k_2} . Верхняя клетка имеет индекс 1, нижняя – 2.

Наша дальнейшая цель состоит в том, чтобы уметь осуществлять перевод утверждений с языка разносортных тождеств на язык обычных тождеств. Следующее предложение описывает поведение компонент единичной θ -степени у многочленов, отвечающих граничным алгебрам.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.9. *Имеют место равенства:*

- а) для алгебры B_k^l выполнено $\theta'([a, Z_k]Q) = \theta'([a, Z_k])Q$;
- б) для алгебры B_k^r выполнено $\theta''(Q[a, Z_k]) = Q\theta''([a, Z_k])$;
- в) для алгебры B_{k_1, k_2} выполнено

$$\theta^{12}(CZ_{k_1} \cdot [[x, Z_{k_1}], Z_{k_2}] \cdot Z_{k_2}D) = CZ_{k_1}\theta^{12}([[x, Z_{k_1}], Z_{k_2}])Z_{k_2}D;$$

г) если $\max(k_1, k_2) \geq \max(k'_1, k'_2)$ и $(k_1, k_2) \neq (k'_1, k'_2)$, $k_1 + k_2 \geq k'_1 + k'_2$, то θ^{ij} -компонента значения Q_{k_1, k_2} , отвечающая паре клеток размера (k'_1, k'_2) , равна нулю.

T -идеалы, порожденные полиномами $Z_{k_1} \cdot [[x, Z_{k_1}], Z_{k_2}] \cdot Z_{k_2}$, P_{k_1, k_2} , P_k в соответствующих алгебрах, являются идеалами “киллеров следов”, т. е. умножение элементов этих идеалов на следы, относящиеся к клеткам, не выводит за пределы данных идеалов и за пределы соответствующих алгебр (поскольку полиномы Z_k в алгебре $\mathbb{M}_k$ устойчивы относительно умножения на следы и формы).

4.2.2. Связь между обычными тождествами и разносортными. Для того чтобы развить технику работы с расталкивающими подстановками, понадобятся несколько вспомогательных утверждений, относящихся к представлению значений многочлена в алгебре A в виде суммы его значений от компонент соответствующих элементов (лежащих в $\hat{A}$). Для этого, в частности, надо прояснить связь между разносортными тождествами алгебры $\hat{A}$ и обычными тождествами алгебры A , которая получается процессом независимого суммирования (соответствующие конструкции изложены в п. 3.2). Идеал разносортных тождеств есть система многочленов, переменные которых имеют сорта, причем задан закон, по которому определяется сорт произведения. Разрешается вместо переменной подставлять выражение того же сорта. В данном случае сортами являются типы элементов в существенной градуировке.

Напомним, что каждая образующая алгебры A содержит все градуированные компоненты, взятые с независимыми коэффициентами. Если компонента содержит множитель, относящийся к клетке бесконечного типа, то множитель при суммировании (при построении алгебры общих элементов) – это свободная переменная, иначе это переменная из кольца $\mathbb{F}_q[\vec{x}]$, где q – наименьшее целое такое, что центры всех проходимых клеток удовлетворяют тождеству $x^q - x = 0$. Из однородности алгебры $\hat{A}$ и свойств A^{cl} получается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.10. *В точке общего положения, отвечающей максимальному идеалу кольца, порожденного параметрами суммирования, ограничения алгебр A , $\hat{A}$ и A^{cl} совпадают. Наличие свойства общего положения означает сохранение различия непохожих клеток и независимости независимых, а также простоту ограничения алгебры на любую клетку.*

Следующее предложение есть переформулировка свойства однородности идеала разносортных тождеств алгебры $\hat{A}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.11. а) Идеал разнородных тождеств однороден по компонентам, отвечающим произведениям, содержащим существенный элемент либо компоненту клетки бесконечного типа.

б) Пусть $F(t, \vec{x}) \neq 0$ – полином в A . Его значение в A есть линейная комбинация значений его квазилинеаризаций на однородных элементах из $\hat{A}$. Обратно, каждое значение F на однородных элементах из $\hat{A}$ получается как однородная компонента значения F в A .

в) Пусть при некоторой специализации в $\hat{A}$ множители, в которые одновременно входят какие-либо две разные компоненты t , вносят ненулевой вклад. Тогда они получаются путем подстановки некоторых элементов из $\hat{A}$ в (частичную) собственную квазилинеаризацию F по t . В точках спектра общего положения линейная комбинация таких членов лежит в пространстве, порожденном значениями квазилинеаризаций F (по t) в алгебре A . В частности, если F квазилинеен по t , то все члены при специализации в $\hat{A}$ содержат одни и те же компоненты t .

Утверждения б), в) предложения 4.11 позволяют при исследовании алгебры $\hat{A}$ считать, что каждая переменная имеет только один тип.

ЛЕММА 4.2 (о деформации алгебр). а) Если компоненты образующих алгебры A заменить на произвольные компоненты любых элементов из $\hat{A}$, то получившаяся алгебра A' изоморфна гомоморфному образу алгебры A . (Можно объединять разные компоненты от разных элементов в одну образующую.)

б) Пусть $\{Q_i\}$ – система полиномов от множества переменных, не содержащих образующих A . (Эти полиномы введены в пп. 3.6.1.) Тогда если компоненту (отвечающую предназначению Q_i) образующей a_i заменить на соответствующую компоненту Q_i , то алгебра A' будет изоморфна A .

Следующая лемма позволяет контролировать специализации при осуществлении расталкивающих замен.

ЛЕММА 4.3. а) Пусть $P(t, \vec{x})$ – произвольный многочлен, не являющийся тождеством алгебры A , и пусть сумма членов, содержащих компоненту t , отвечающую граничному оператору некоторого существенного типа, не равна нулю в $\hat{A}$. Пусть $Q = P_i^l, P_i^r, Q_{ij}$ – компоненты, отвечающие этому типу. Рассмотрим квазилинеаризацию P по t , отвечающую подстановке $t \rightarrow t_1 + t_2$ (возможно, совпадающую с P , но содержащую t_2), и подстановку $t_2 \rightarrow D_1 Q D_2$ такую, что множество переменных из Q не пересекается с множеством переменных не из Q , кроме того, переменные из D_1 и D_2 не пересекаются. Тогда сумма компонент, специализация перехода которых осуществляется внутрь каждого Q , причем только один раз, не равна нулю. В точке максимального спектра общего положения значения указанной подстановки в A содержат эту сумму компонент. (Дополнительные специализации, если они есть, осуществляются внутрь некоторых D . Возможны и “неправильные” компоненты с “лишними” специализациями внутрь Q_i .)

б) Если в условиях утверждения а) не равна нулю сумма членов, содержащих некоторую компоненту переменной t , причем градуировка этой компоненты не меньше, чем произведение двух существенных типов, то сумма компонент таких, что:

- 1) существенная смешанная специализация (т.е. связанная с переходом между типами) осуществляется внутри каждого Q , причем только один раз,
- 2) специализации, связанные со степенью радикала, не осуществляются внутри одной переменной,
- 3) остальные соответствующие существенные специализации осуществляются только внутри D_i (или не осуществляются вовсе),

также не равна нулю. В точке максимального спектра общего положения значения указанной подстановки в A содержат эту сумму компонент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из замечания 3.5 и предложения 3.16 о множестве значений многочленов $Q = P_i^l, P_i^r, Q_{ij}$ на соответствующей граничной алгебре, которое содержит весь радикал. Если соответствующую компоненту t заменить на компоненту Q , то новая “продеформированная” подалгебра в $\hat{A}$ будет изоморфна A (см. лемму 4.2). Утверждение б) доказывается точно так же, однако можно воспользоваться заменой $t_2 = t_3 t_4 t_5$ и вывести его из утверждения а).

Следующая лемма аналогична предыдущей. Ее формулировка приспособлена для использования в доказательстве леммы 4.10.

ЛЕММА 4.4. Пусть многочлен H' получается из H путем подстановки многочленов типа Q_i от непересекающихся множеств переменных вместо некоторых переменных. Пусть $H' \neq 0$, причем специализации в $\hat{A}$, при которых в ядрах Q_i присутствуют специализации переменных, соответствующих клеткам размера предназначения (см. определение 3.14), дают ненулевой вклад. Тогда ненулевой вклад дают специализации, для которых в ядре каждого Q_i присутствует ровно одна смешанная специализация, связанная с клетками размера предназначения. Соответственно, если такие специализации дают нулевой вклад, то нулевой вклад дают все специализации в $\hat{A}$, при которых в ядрах Q_i присутствуют специализации переменных, соответствующих клеткам размера предназначения.

Следующая лемма позволяет избегать существенных радикальных специализаций. Она означает, что если границы анфилад (см. определение 3.10) уже заняты, то оставшиеся специализации идут либо полностью внутрь, либо полностью вне анфилад.

ЛЕММА 4.5. Пусть

$$Q = Q_{k_1, k_2}^{(\vec{q})} = CZ_{k_1}^q (t \circ \text{ad}(Z_{k_1})^{q_1} \circ \text{ad}(Z_{k_1})^{q_2} \circ Z_{k_2}^{q_3}) D,$$

или

$$Q = Q_k^{l(\vec{q})} = CZ_k^{q_1} (t \circ \text{ad}(Z_k)^{q_2}) D,$$

или

$$Q = Q_k^{r(\vec{q})} = C(t \circ \text{ad}(Z_k)^{q_1}) Z_k^{q_2}$$

(в зависимости от рассматриваемой компоненты). Пусть $k = \max(k_1, k_2)$ и $q_i > c(A)$ для любого i ; Y – результат следующих специализаций:

- 1) не содержащей компонент, отвечающих типам с клеткой размера больше k ;

2) с не более чем одной компонентой, отвечающей типам с клеткой размера больше k .

Тогда:

а) есть только одна компонента, отвечающая типам с клеткой размера больше k , эта компонента специализации осуществляется внутри ядра $t \circ \text{ad}(Z_k)^{q_2}$ соответствующего Q ;

б) все специализации, осуществляющиеся внутри остальных множителей Z_k^q , несмешаны и отвечают клетке размера k , причем в каждом члене в одном из этих Z_k все специализации полупросты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полином Z_k обращается в нуль на любой клетке размера строго меньше k . Поскольку все $q_i > c(A)$, то соответствующие Q_i обращаются в нуль в факторе по смешанным элементам, содержащим обкладку, соответствующую системам клеток размера не менее k . Поэтому хотя бы одна из смешанных специализаций при клетке размера k необходима. С другой стороны, анфилада должна кончиться (начаться) существенным элементом при клетке того же размера, что по условию быть не может. Поэтому множители Z_k не содержат смешанных компонент в специализациях. Полупростота одной из специализаций Z_k в каждом члене вытекает из неравенства $q > c(A)$. Лемма доказана.

Мы не учли переходы к клеткам конечного типа, но клетки конечного типа вырезаются множителями вида $(s^{q_1} - s^{q_2})^{C(A)}$, поэтому учет этих эффектов является чисто техническим и в формулировке и доказательстве для простоты не используется.

Будем рассматривать подстановки $x_i + t_i \rightarrow x_i$, $Q_i \rightarrow t_i$, где многочлены Q_i отвечают граничным алгебрам. Наша цель заключается в построении T -идеала, замкнутого относительно некоторого достаточно обширного кольца форм. Для этого мы добиваемся, чтобы Q_i были *правильными*, т.е. отвечали специализациям Q_i в алгебре перехода для соответствующего многочлена и, кроме того, покрыли все специализации, относящиеся к межклеточным переходам. Специализации, относящиеся к переходам между клетками меньшего размера, чем в исходной алгебре, обращаются в нуль. Трудности вызывают специализации, связанные с клетками большего размера. Преодоление этих трудностей основано на следующих технических приемах:

1) разбиение процедуры на этапы и заполнение всех концов клеток очередного размера для каждого этапа (обработка размеров начинается с самых больших клеток и идет по убыванию);

2) вырезание несмешанных специализаций с помощью расталкивающих операторов (например, пусть многочлен F линеен по t , а также по переменной D_{ij} , отвечающей некоторому Q_i , тогда в разности $F|_{D_{ij}Z_k \rightarrow D_{ij}} - F|_{t_i Z_k \rightarrow t_i}$ уничтожаются члены с однотипными полупростыми специализациями t_i и D_{ij} , относящимися к клеткам размера k).

4.3. Действие нётеровых колец. Данный пункт посвящен рассмотрению конструкции действия нётеровых колец на правильных членах, нужной для построения замкнутых T -идеалов.

4.3.1. Члены максимального состава. Пусть R – коммутативное нётерово кольцо, а $A[R]$ – нётеров R -модуль. Идеал $J \subset A$ назовем *R -замкнутым*, если

идеал $J[R]$ в алгебре $A[R]$ совпадает с J . Иными словами, J выдерживает умножение на элементы из R . Цель данного подпункта – показать R -замкнутость идеала, порожденного правильными полиномами (см. определение 4.4) при подходящем R .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. T -идеал I называется *замкнутым*, если он замкнут относительно умножений на элементы кольца S , введенного в следующем подпункте.

Если $I \in J_C$, где C – путь максимального состава, то условия R - и S -замкнутости оказываются равносильными.

Мы рассматриваем максимальные пути (пути максимального состава) в колчане Γ и соответствующие идеалы вида h_C . При этом рассматривается класс эквивалентности алгебр с точностью до поведения идеалов указанного вида. Колчан Γ считается равным отрезку $[v_1, v_2]$, и поскольку пути разного существенного состава не интерферируют, все максимальные пути считаются путями одного и того же существенного состава.

Пусть полином f – сумма правильных членов. *Типом* правильного члена при однородной специализации в $\hat{A}$ назовем множество типов позиций, отвечающих каждому t_i . Отметим, что все вхождения каждого t_i однотипны. Для r -го типа клеток пусть n_r – количество концов соответствующих анфилад (см. определение 3.10). Для всех путей данного существенного состава эти количества совпадают, и все позиции, отвечающие этим концам, заняты каким-либо t_α . Рассмотрим все клетки данного размера. Отметим также, что поскольку полином правильный, то все его члены имеют одинаковое количество всех t_i и другая специализация t_i связана с их расположением при анфиладах, состоящих из клеток того же размера. (Количества концов в новых соответствующих анфиладах могут различаться.)

Воспользуемся подстановкой, действующей через данное вхождение. Пусть t_i входит m_i раз в позиции при данной анфиладе. Подставим $C_{n_i} \rightarrow t_i$ и с помощью этого C_{n_i} организуем форму. Таким образом, действуя через полиномы Капелли, встроенные внутрь этого t_i , можно добиться умножения на m_i -е степени следов (форм), отвечающих данной клетке размера n_i . Если действовать сразу по всем t_i , относящимся к клеткам данного размера, то это приведет к умножению на n_r -е степени, относящиеся к r -й существенной анфиладе, и эта операция является инвариантом и не зависит от раскладки типов t_i при правильном члене. Пусть R_m – кольцо, порожденное указанными степенями для клеток размера m , а R – кольцо, порожденное всеми R_m . Тогда кольцо, порожденное всеми следами и формами, относящимися к данной клетке, является нётеровым R -модулем, а потому алгебра $A[R]$ также является нётеровым R -модулем. Мы доказали следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.12. *Идеал J , отвечающий правильному расположению $\{t_i\}$, является R -замкнутым идеалом. Тем самым идеал J представим.*

4.3.2. Члены полного состава. Рассмотрим алгебру $\hat{A}^\Phi$, которая получается присоединением к алгебре $\hat{A}$ форм, относящихся к клеткам (с учетом кратностей). А именно, с каждой системой похожих клеток связывается оператор умножения на значение формы для каждой клетки и на соответствующую пирсовскую компоненту единицы. (Оператор умножения на форму определен на

полиномах Капелли, но действует на них как умножение на многочлен и потому продолжается на всю алгебру.) Многочлены для клеток разных кратностей связаны теми же операторами Фробениуса, что и компоненты матриц ограничений элементов из A на эти клетки. Остальные компоненты этого оператора нулевые. Заметим, что $(\hat{A}^\Phi)^{\text{cl}} = \hat{A}^{\text{cl}}$.

В этом подпункте мы будем пользоваться некоторыми конструкциями из пп. 4.6.1.

Введем на алгебре $\hat{A}^\Phi$ структуру S -модуля для некоторого ассоциативно-коммутативного кольца S . Поскольку кольца, отвечающие несущественным клеткам, конечны, нас интересуют только существенные компоненты. Для каждого значения формы Φ определим операторы ϕ_i^l и ϕ_i^r , которые умножают существенную градуированную компоненту $\hat{A}^\Phi$ на значение Φ в i -й клетке с некоторой кратностью. Кратность эта для ϕ_i^l есть сумма кратностей левых существенных концов граничных операторов (существенный конец соответствует смешанному элементу, отвечающему существенной клетке) у клеток i -го типа, а для ϕ_i^r – сумма правых. Кратность оператора перехода определяется из того, какова кратность клетки, соответствующей его концу. На несущественных элементах действие тождественно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.13. *Только что определенное действие соответствует подстановкам на граничных операторах, отвечающих концам (левым для ϕ_i^l и правым для ϕ_i^r). Оно переводит в себя алгебру $\hat{A}^\Phi$, осуществляет ее эндоморфизм с сохранением структур радикальных градуировок и потому переводит крайний элемент в крайний (см. далее определение 4.6). В частности, каждое ϕ_i^l (или ϕ_i^r) осуществляет изоморфизм алгебры A с ее образом.*

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Указанное действие не согласовано с умножением в алгебре, так как $\phi_i \cdot ab = \phi_i(ab) = \phi_i(a)\phi_i(b) \neq (\phi_i \cdot a)b$. Однако равенство все же имеет место, когда на b оператор Φ_i действует тождественно. Более того, умножение на элемент, не содержащий существенных компонент, не меняет действие этих операторов. Тем самым, проблем согласования с умножением для действия на крайних элементах это не вызывает.

Кольцо $\hat{S}$ определяется как кольцо, порожденное такими операторами. Теперь рассмотрим группу G перестановок существенных типов, сохраняющую размер клеток. Это действие естественным образом индуцирует действие на операторах ϕ_i^l и ϕ_i^r для данного значения формы Φ . Искомое кольцо S связано с кольцом инвариантов $\mathcal{S}$. Поскольку группа G конечна, а само нётерово кольцо цело над кольцом инвариантов конечной группы и является его конечным расширением, имеем следующее утверждение.

ЛЕММА 4.6. *Кольцо $\hat{S}$, порожденное операторами вида ϕ_i^r , ϕ_i^l , является нётеровым кольцом и целым конечным расширением нётерова кольца $\mathcal{S}$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Необходимость перехода к алгебре инвариантов вызвана тем, что может наблюдаться симметрия относительно существенных типов, а значит, и соответствующих специализаций Q_i в лемме 4.3. Иными словами, в A могут не выделяться члены со специализациями переменных из Q_i данной степени однородности, но выделяются выражения, симметричные относительно специализаций. При этом симметричными могут быть только типы клеток одного размера.

Определим теперь вспомогательное ассоциативно-коммутативное кольцо T .

Зафиксируем по одной клетке каждого существенного типа. Каждой клетке C отвечает гомоморфизм ограничения ζ_C исходной алгебры. Каждой форме ψ в алгебре $\zeta_C(A)$ отвечает многочлен $P_{C\psi}$ от коэффициентов при матричных единицах клетки C , а значит, и исходной алгебры A . Кольцо T определим как кольцо, порожденное умножениями на полиномы вида $P_{C\psi}$.

Следующая лемма описывает действия колец $\mathcal{S}$ и $\widehat{S}$ на компонентах алгебр $\widehat{A}^\Phi$ и $\widetilde{A}^\Phi$, которые рассматриваются просто как $\mathcal{S}$ -модули (соответственно, $\widehat{S}$ -модули).

ЛЕММА 4.7. а) *Каждая существенная однородная компонента является нётеровым $\mathcal{S}$ -модулем и нётеровым $\widehat{S}$ -модулем.*

б) *Сумма существенных однородных компонент является нётеровым $\mathcal{S}$ -модулем и нётеровым $\widehat{S}$ -модулем.*

в) *Кольцо T нётерово и цело над $\mathcal{S}$, и, наоборот, кольцо $\widehat{S}$ (а также S) цело над T .*

(Напомним, что существенная компонента связана с наличием радикального граничного оператора.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.7. Утверждение а) следует из леммы 4.6, утверждение б) следует из а) в силу конечности числа существенных компонент, так как сумма нётеровых модулей есть нётеров модуль. Для доказательства утверждения в) достаточно проверить, что оператор умножения на значение формы Φ в данной клетке цел над S . Это следует из того, что операторы из T являются эндоморфизмами нётероваго $\mathcal{S}$ -модуля. Они коммутируют с $\mathcal{S}$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. Эндоморфизмы ϕ_i^r и ϕ_i^l на несущественных компонентах действуют тождественно, на них T не цело над S . Поэтому мы и рассматриваем ограничения этих операторов на существенные компоненты.

Рассмотрим образующие $\tau_1, \dots, \tau_s$ кольца T . Все они целы над S , следовательно, выполняются равенства

$$\tau_i^m = \tau_i^{m-1}\xi_{i1} + \dots + \xi_{im}.$$

Пусть $\bar{\tau}_i$ – элемент кольца многочленов, соответствующий τ_i . Кольцо S порождено буквами x_{ij} , причем выполняются соотношения

$$\bar{\tau}_i^m = \bar{\tau}_i^{m-1}x_{i1} + \dots + x_{im}.$$

Рассмотрим алгебру $A' = A[S]/J$, где идеал J порожден элементами вида $y(x_{ij} - \xi_{ij})$; здесь y – крайний элемент полного существенного состава. Очевидно следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.14. *Структуры $\mathcal{S}$ - и S -модулей, порожденные элементами полного существенного состава, совпадают. Алгебра A вкладывается в алгебру A' , которая является алгеброй нётероваго типа. Любой S -замкнутый идеал, состоящий из элементов полного существенного типа, является нётеровым S -модулем.*

Из предложения 4.14, предложения 4.25 о существовании T -идеала крайних элементов и леммы 4.10 о расталкивающих подстановках вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4.3. *Если ненулевой T -идеал Γ в алгебре $\hat{A}$ принимает значение, являющееся суммой компонент полного существенного состава, то Γ содержит ненулевой представимый T -идеал, являющийся S -замкнутым. Он же является S -замкнутым в расширенной алгебре A' .*

4.4. Построение замкнутых идеалов. Вырезающие подстановки.

Наша задача состоит в построении T -идеалов, замкнутых относительно действия некоторого ассоциативно-коммутативного кольца. Для этого надо иметь подстановки, действие которых “изолировано” и “проконтролировано”. Для этой цели мы хотим проконтролировать специализации в $\hat{A}$, относящиеся к существенным радикальным типам, и через них осуществить нужные подстановки, обеспечивающие структуру нётерова модуля. Действие через граничный оператор, отвечающий смешанному элементу, аналогично использованию умножения в случае, когда смешанных элементов нет.

Мы будем использовать технику *вырезающих подстановок*, которая осуществляет вынуждение “прохождения путей максимального состава”. Данная процедура позволяет преодолеть трудности, связанные с конечностью основного поля, и осуществить своего рода линеаризацию с использованием алгебры форм для клетки бесконечного типа.

Сначала мы обсудим технику “расталкивающих” замен на неформальном уровне. Наша цель состоит в контроле над специализациями, связанными с граничными операторами, и в построении замкнутых T -идеалов. Соответствующая техника основана на использовании следующих идей. Во-первых, если Z_k – центральный полином, отвечающий клетке размера k , то $[Z_k, x]$ вынуждает радикал либо специализацию, отвечающую клеткам большего размера. На граничных операторах $\text{ad}(Z_k)$ действует просто как умножение. Во-вторых, несущественные компоненты вырезаются с помощью множителей вида $x^{q_1} - x^{q_2}$. В-третьих, процедура “расталкивания” позволяет добиваться того, чтобы специализации резервных образований t_α оказались различными, покрыли все типы и позволили бы организовать структуру нётерова R модуля. (Кольцо R определялось в пп. 4.3.1.)

Пусть J – произвольный T -идеал, содержащийся в $T(h_C) \cap I^{c(A)-1}$ и не равный нулю тождественно в A . Если значение в A произвольного многочлена g из этого T -идеала выписать, представив переменные в виде суммы своих компонент из $\hat{A}$, то получится сумма членов, каждый из которых содержит максимально возможное число существенных радикальных компонент (и $c(A) - 1$ радикальных компонент), т. е. все компоненты, отвечающие граничным операторам анфилад пути C .

Рассмотрим позиции, отвечающие концам анфилад. Тип позиции определяет характер позиции (вход, выход, переход), а также то, с клетками какого типа она связана. Нам надо организовать дополнительные подстановки, действующие на переменных типа D , которые оставят только члены с нужным расположением t_i (а остальные члены обратят в нуль). Необходимо, чтобы t_i “заняли” все входы в анфилады и все выходы из них и больше никуда не попали. (Это означает, что вне набора $\{t_i\}$ соответствующих специализаций не существует и все специализации для каждой переменной t_i таковы.) Кроме того, при граничных операторах, относящихся к разным типам позиций, должны стоять различные t_i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. Члены с таким расположением t_i назовем *правильными*. Полином, пространство значений которого в $\hat{A}$ лежит в пространстве, порожденном правильными членами, назовем *правильным*.

Цель использования вырезающих подстановок – оставить только правильные члены. Тогда, действуя подстановками через переменные, входящие в $C_{k_i^2}$, мы создадим структуру модуля над нётеровым кольцом.

Теперь мы рассмотрим в качестве модельного примера случай, когда основное поле имеет характеристику нуль и все клетки имеют одинаковые размеры. Тогда все T -идеалы однородны и задаются полилинейными тождествами. Мы изучаем идеал, имеющий ненулевую существенную компоненту максимального состава (т. е. в этой компоненте присутствует максимально возможное число межклеточных переходов). Рассмотрим подстановки $x \rightarrow x + \sum_{\alpha} t_{\alpha}$, где элементы t_{α} имеют вид $D_{ij1}Q_{ij}D_{ij2}$. Здесь Q_{ij} – многочлены, введенные в п. 3.6 и отвечающие алгебрам межклеточных переходов. Область значений каждого Q_{ij} в соответствующей алгебре перехода покрывает весь радикал. Кроме того, в факторе алгебры A по идеалу, порожденному существенными смешанными элементами, значения Q_{ij} обращаются в нуль. Поэтому каждая специализация t_{α} покрывает смешанный элемент.

Рассмотрим члены, которые полилинейны по входящим t_{α} и содержат максимально возможное их число. Все концы клеток, а также межклеточные переходы будут заняты такими специализациями, причем в силу однородности, а также предложения 4.11 сумма таких членов даст ненулевой вклад. Далее, мы можем оставить члены, в которых элементы отвечают граничным операторам для клеток с одной и той же структурой (похожести и независимости). Для этого можно использовать расталкивающие операторы вида

$$\begin{aligned} \text{AD}^1(t_{\alpha}, t_{\beta}, Z)(f) &= f|_{D_I=D_I Z} - f|_{D_J=D_J Z}, \\ \text{AD}^2(t_{\alpha}, t_{\beta}, Z)(f) &= f|_{D_I=D_I Z} - f|_{D_J=Z D_J}, \\ \text{AD}^3(t_{\alpha}, t_{\beta}, Z)(f) &= f|_{D_I=Z D_I} - f|_{D_J=Z D_J}, \\ \text{AD}^4(t_{\alpha}, t_{\beta}, Z)(f) &= f|_{D_I=Z D_I} - f|_{D_J=D_J Z} \end{aligned} \quad (4.1)$$

(индексы α и β указывают на исходные переменные t_{α} и t_{β}) и действовать, как и при доказательстве выполнимости тождества алгебраичности. Здесь $Z = Z_k$ – центральный полином для алгебры матриц порядка k , где k – размер клетки, индекс I связан с t_{α} , индекс J – с t_{β} . Применив $c(A)$ раз каждый такой оператор, мы можем оставить члены с нужной структурой похожести клеток, отвечающих расположению t_i .

Пусть теперь клетки имеют разные размеры. Возникает дополнительная трудность: полиномы, отвечающие переходам между клетками меньшего размера, не обращаются в нуль на клетках большего размера. Поэтому многочлены Q_{ij} могут иметь и первичные специализации, связанные с такими клетками. При этом обработка специализаций, связанных с максимальным размером, происходит, как и раньше.

Пройдем этот этап и осуществим для него расталкивающие подстановки. Пусть $t_1, \dots, t_s$ – резервные образования, которые заняли все концы клеток максимального размера и больше нигде не находятся. Назовем такую систему *ведущей*.

Для остальных t_i многочлены Q_I отвечают переходам между меньшими клетками, и ситуация описывается приведенной ниже леммой 4.8.

Таким образом, необходимо осуществить “вырезание” попадания новых t внутрь уже “обработанных” анфилад, что выполняется с помощью *расталкивающих замен* – операторов $\text{AD}_{\alpha,\beta}^p$, примененных к каждому новому t_i и ведущей системе $t_1, \dots, t_s$. Отметим, что если k – максимальный размер клеток, то $Z_k^{c(A)}$ обращается в нуль в случае, когда входящие в него переменные не имеют полупростых специализаций, отвечающих клеткам размера k . Выбор оператора $R_{\alpha,\beta}^j$ осуществляется в зависимости от характера полинома Q_i , связанного с ведущей переменной t_α (вход, выход, переход).

Таким образом, строится система расталкивающих подстановок, исключаящая попадание нового образования t_β внутрь анфилад размера k . Это позволяет занять концы анфилад следующего размера и, расширив ведущую систему, перейти к следующему этапу.

Работа с новой ведущей системой производится аналогично. Затем будут обрабатываться подстановки, связанные с операторами перехода для клеток следующего размера, и т. д. Процесс идет поэтапно и завершается построением многочленов из лемм 4.9, 4.10.

В квазилинейном случае процесс расталкивания аналогичен процессу, проводимому в полилинейном случае, поскольку все специализации каждой переменной в любом слагаемом можно считать одинаковыми. При подстановке типа $f|_{D_I=D_I Z^{q_2}}$ возникают множители $(Z^{q_2})^k$. Поэтому вместо обычных подстановочных “операторов коммутирования” (4.1) необходимо брать операторы “подкрученной энгелевости”, т. е. произведение (по подходящему набору пар (q_k, q_l)) “ (q_k, q_l) -подкрученных операторов коммутирования” – операторов типа $\text{AD}_{(q_k, q_l)}^r$, $r = 1, \dots, 4$:

$$\begin{aligned} \text{AD}_{(q_k, q_l)}^1(t_\alpha, t_\beta)(f) &= f|_{D_I=D_I Z^{q_1}} - f|_{D_J=D_J Z^{q_2}}, \\ \text{AD}_{(q_k, q_l)}^2(t_\alpha, t_\beta)(f) &= f|_{D_I=D_I Z^{q_1}} - f|_{D_J=Z^{q_2} D_J}, \\ \text{AD}_{(q_k, q_l)}^3(t_\alpha, t_\beta)(f) &= f|_{D_I=Z^{q_1} D_I} - f|_{D_J=Z^{q_2} D_J}, \\ \text{AD}_{(q_k, q_l)}^4(t_\alpha, t_\beta)(f) &= f|_{D_I=Z^{q_1} D_I} - f|_{D_J=D_J Z^{q_2}}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Случай бесконечного поля проще. Вместо выбора членов, полилинейных по всем t_i , можно взять однородное слагаемое, обеспечивающее нужное количество вхождений каждого t_i . Если при этом “вырезать” слагаемые, связанные с неправильными специализациями, то все концы клеток обрабатываемого размера будут заняты и специализации образований следующего этапа будут либо “чисто внутренними” по отношению к клеткам обработанных размеров, либо “чисто внешними”.

Однако на каждом этапе надо также “вырезать” члены, для которых t_i входит в несколько клеток большего размера (см. предложения 4.15, 4.16). Кроме того, надо позаботиться о том, чтобы внутри клеток одного размера каждое t_i имело одинаковые специализации. Это достигается в силу однородности алгебры по компонентам: такие члены можно получить из собственной линеаризации исходного тождества, которую следует обрабатывать отдельно (см. пп. 4.4.1).

В случае конечного поля возникают следующие обстоятельства:

- 1) необходимо уничтожить вхождения, связанные с несущественными элементами, это достигается путем вставки полиномов вида $x^{p^{k_1}} - x^{p^{k_2}}$ (осуществляемой операторами $\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{P}(q)_i$ из пп. 3.6.2);
- 2) возникают эффекты разных кратностей клеток и разного числа вхождений t_i в разные члены, вместо линеаризаций используют квазилинеаризации;
- 3) при осуществлении вырезаний надо работать с членами, у которых одно t_i имеет несколько разнотипных специализаций, в том числе и относящихся к операторам перехода, ограничиться операторами типа AD не удастся;
- 4) главная трудность связана с принципиальной неоднородностью тождеств и, как следствие, обрабатываемых многочленов; с помощью расталкивающих операторов можно выделить члены, в которые входят специализации от всех типов клеток, и только; выделить члены с максимальным количеством специализаций невозможно, поэтому вместо кольца R используется более сложное действие кольца S ;
- 5) приходится рассматривать специализации, связанные с произведением нескольких операторов перехода.

4.4.1. *Расталкивание резервных образований. Построение правильного идеала.* Пусть J – произвольный T -идеал, являющийся подмножеством в $T(h_C) \cap I^{c(A)-1}$, и $J \neq 0$ в A . Если значение в A произвольного многочлена g из этого T -идеала выписать, представив переменные в виде суммы их компонент из $\hat{A}$, то получим сумму членов, каждый из которых содержит максимально возможное число существенных радикальных компонент (и $c(A) - 1$ радикальных компонент), т. е. все компоненты, отвечающие граничным операторам анфилад пути C .

Мы будем рассматривать подстановки $x \rightarrow x + \sum_{\alpha} t_{\alpha}$, где элементы t_{α} имеют вид многочленов Q_i , введенных в п. 3.6. Выпишем соответствующие многочлены еще раз:

$$P_{k_i, (c)}^l S_{k_i} C_{k_i^2} D_{\alpha}, \quad D_{\alpha} C_{k_i^2} S_{k_i} P_{k_i, (c)}^r, \quad D_{\alpha 1} S_{k_i} C_{k_i^2} P_{k_i, k_{i+1}}^{(c)} S_{k_{i+1}} C_{k_i^2} D_{\alpha 2},$$

где $S_{k_i} = Z_{k_i}^q - Z_{k_i}$ – оператор, обнуляющий конечные клетки (и оставляющий бесконечные), $C_{k_i^2}$ – полином Капелли порядка k_i^2 . Мы будем рассматривать суммы членов, в которые входят все t_i . (Если основное поле бесконечно, то достаточно рассмотреть члены, линейные по каждому t_i .) В силу леммы 2.4 все наши процедуры представляют собой T -пространственные операции.

Рассмотрим позиции, отвечающие концам анфилад. Нам надо организовать дополнительные подстановки, действующие на переменных типа D , которые оставят только члены с нужным расположением t_i (а остальные члены обратят в нуль). Необходимо, чтобы остались только правильные члены (см. определение 4.4). Тогда, действуя подстановками через переменные, входящие в $C_{k_i^2}$, мы создадим структуру модуля над нётеровым кольцом. Следующая лемма есть переформулировка утверждения б) предложения 3.18.

ЛЕММА 4.8. *При ненулевом результате подстановки специализация каждого t_i может попасть либо на позицию граничного оператора для анфилады с клеткой размера k_i , либо внутрь анфилады большего размера, либо на границу анфилады с клетками большего размера.*

(Когда границы анфилад с большими клетками уже заняты, наиболее сложен первый случай, а последний случай невозможен.)

Когда основное кольцо конечно, возможности для линейаризации и, соответственно, выделения однородных компонент ограничены. Однако для этой цели удается использовать кольцо форм, относящихся к клеткам. В этом и состоит одна из основных идей доказательства локальной представимости.

Введем операторы *инфинитезимального сдвига* R_k^{n,D_i} , действующие на записях через t_i :

$$R_k^{n,D_i}(f) = f - f|_{D_i=D_i(1+Z_k)^n}.$$

Если t_i не входит в f , то результат действия такого оператора нулевой. Для переменных t_i , соответствующих позициям перехода, имеем

$$t_i = D_{\alpha 1} S_{k_i} C_{k_i} P_{k_i, k_{i+1}}^{(c)} S_{k_{i+1}} C_{k_i} D_{\alpha 2}.$$

Введем обозначения: $R_k^{n,D_i,1}$ и $R_k^{n,D_i,2}$, где дополнительный индекс (1 или 2) указывает, через какое D осуществляется действие.

Необходимо так подобрать операторы подстановки и скомбинировать результаты, чтобы остались только правильные члены (а результат не обратился в нуль). Нам нужно, чтобы t_i покрыли все смешанные элементы, т. е. заняли все выходы из анфилад (переходы) и больше никуда не попали, причем каждое t_i попало в места одного сорта. Мы будем последовательно обеспечивать это путем обработки сначала групп клеток максимального размера, затем клеток следующего по величине размера и т. д.

Все рассуждения будем проводить в расширенной алгебре $\hat{A}$ и осуществлять такие системы подстановок, чтобы остались необходимые члены для любого набора специализаций исходных переменных.

Пусть концы всех анфилад из клеток большего размера заняты. Нам надо аннулировать член, у которого данное t_s входит m_j раз в позиции клеток, отвечающих типу j , т. е. входит его $(\nu_j x \nu_j)$ -компонента. Кроме того, t_s может входить в позиции клеток меньшего размера.

Последовательно уничтожая такие члены для всевозможных наборов $\{m_j\}$ и сохраняя при этом правильные члены, мы получим многочлен нужного вида.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.6. Может оказаться, что конец D , через который осуществляются подстановки, попадет на радикальную позицию (внутреннюю позицию s -й клетки). Тогда оператор вырезания не уничтожит члены, но выделит радикальный элемент в этом неправильном члене. Поэтому положим $D = D_1 \cdots D_{c(a)}$ и повторим $c(a)$ раз процедуру вырезания, используя всякий раз новые D_r . (Параметр r соответствует номеру процедуры. Для всех обрабатываемых многочленов на данном этапе этот номер один и тот же.) Тогда в неправильном члене $c(A)$ раз будет обеспечена радикальная специализация, что приведет к его обращению в нуль.

Для начала изучим, как действуют подстановки через t_i .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.15. а) Пусть буква D_i , связанная с t_i , входит n раз в клетки k -го типа похожести и не входит в другие типы. Тогда замена $D_i \rightarrow D_i Z$, где Z – центральный полином, отвечающий матрицам соответствующего размера, приводит к умножению на $K(Z(i)^n)$, где $Z(i)$ – значение этого полинома на компонентах, относящихся к i -й клетке, и, возможно, к появлению дополнительных членов с радикальной специализацией внутри Z . Эти специализации несмешаны и отвечают клеткам указанных типов.

б) В условиях утверждения а) пусть t_i входит k_i раз в клетки k -го типа и не входит в клетки, размер которых отличается от размера клеток k -го типа. Тогда замена $D_i \rightarrow D_i Z$, где Z – центральный полином, отвечающий матрицам соответствующего размера, приводит к умножению на $K(\prod_i Z(i)^{k_i})$, где $Z(i)$ – значение этого полинома на компонентах, относящихся к i -й клетке, и, возможно, к появлению дополнительных членов с радикальной специализацией внутри Z . Эти специализации несмешаны и отвечают клеткам указанных типов.

в) Пусть также соответствующая буква t_j входит в клетки k -го типа m_k раз и, кроме того, может входить только в клетки меньшего размера. Тогда применение оператора R_k^{n, D_j} приводит к умножению на величину $K(\prod_i (1 + Z(k_i))^{m_{k_i}}) - 1$ и, возможно, к появлению дополнительных членов с радикальной специализацией внутри Z . Эти специализации несмешаны и отвечают клеткам рассматриваемых типов.

(В начале п. 4.2 обсуждался язык подстановок и специализаций.)

ЗАМЕЧАНИЕ 4.7. Если Ξ – многочлен от центральных полиномов, связанных с некоторой клеткой, то $K(\Xi)$ – соответствующий элемент из кольца коэффициентов.

В силу замечаний 4.6 4.7 и предложения 4.15 можно отметить, что дополнительные члены не мешают проводить “вырезания”. Отметим также, что количества вхождений считаются с учетом кратности клеток.

Пусть z_i – значение центрального многочлена для клеток рассматриваемого размера n (см. далее доказательства лемм 4.9, 4.10) в клетке с номером i (переменные, входящие в этот многочлен, фиксированы). Пусть

$$Z_i = z_i^{k_i}, \quad k = \prod_i k_i, \quad S = \prod_i (1 - z_i^{k_i})^{m_i} - 1.$$

Пусть существует набор переменных t_i , специализация каждой из которых относится к клеткам одного типа и входит в них k_i раз. При этом все типы покрыты данными t_i по одному разу. Тогда, действуя через эти t_i , можно создать произведения мономов $z_i^{k_i}$ в силу предложения 4.15.

Для полинома R вида $Q(z_1^{k_1}, \dots, z_m^{k_m})$ положим

$$W_k^-(R) = Q = R(z_1^{1/k_1}, \dots, z_m^{1/k_m}).$$

Оператор $W_k^- = W_{k_1, \dots, k_s}$ действует на подкольце $\mathbb{F}[x_1^{k_1}, \dots, x_s^{k_s}]$ кольца $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_s]$. Положим $W_k = W_k^-$, где все $k_i = k$.

Для произвольного полинома $T \in \mathbb{F}[x]$ и подстановки $s: t \rightarrow zt$ положим $T_{(s)}(z)$ равным результату применения соответствующего многочлена от оператора s . Аналогично определяется многочлен от нескольких переменных относительно операторов замен, действующих через разные t . Отметим, что многочлен от подстановки и подстановка от многочлена (от z) совпадают, вообще говоря, только в квазилинейном случае.

Пусть

$$Q = W_k^-\left(\prod_i (1 - z_i^{k_i})^{m_i} - 1\right)$$

и s_i – оператор подстановки $t_i \rightarrow zt_i$. Определим теперь *вырезающий оператор* E , действующий на многочленах, в которые входят t и t_i :

$$E_{\vec{k}, \vec{m}}(z)(P) = W_{\vec{k}}(Q)(P) - H_{tz}(P),$$

где $H_{tz}(P) = P|_{t \rightarrow (1+z)t} - P$ – оператор инфинитезимального сдвига (замена $t \rightarrow t(1+z) = t + tz$ определена и при отсутствии единицы в алгебре A).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.16. а) *Оператор $E_{\vec{k}, \vec{m}}(z)$ уничтожает члены, для которых каждое t_j входит в j -й тип m_j раз, а t входит k_j раз (и не имеет “радикальных” вхождений).*

б) *Действие оператора $E_{\vec{k}, \vec{m}}(z)$ на правильном слагаемом, для которого каждая переменная t_j входит в j -й тип m_j раз, состоит в умножении на многочлен $\prod_i (1 - z_i^k)^{m_i} - 1$ и, тем самым, не равно нулю.*

в) *Пусть некоторая специализация в $\hat{A}$ многочлена h есть сумма S правильных членов. Тогда многочлен $E_{\vec{k}, \vec{m}}(z)(h)$ в алгебре A^{cl} принимает значение S .*

г) *Кроме того, при ограничении пучка алгебр на общую точку многочлен $E_{\vec{k}, \vec{m}}(z)(h)$ принимает значение, равное ограничению S . Соответствующий факторпучок обращается в нуль при умножении на любой многочлен (от элементов кольца коэффициентов) вида $\prod_i (1 - K(z_i)^k)^{m_i} - 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) очевидно из построения. Поскольку z обращается в нуль на клетках меньшего размера, то разность тождественного отображения и оператора замены $t \rightarrow (1+z)t$ равна нулю. Отсюда следует утверждение б). Утверждение в) есть переформулировка утверждения б). Утверждение г) следует из конструкции наших операторов.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.8. Переменные t_i могут входить также в типы, имеющие размер меньше обрабатываемого (т.е. n). Наличие таких вхождений ни на что не влияет, так как действие подстановок вида $t_i \rightarrow t_i Z^k$ через такие вхождения нулевое. Именно для того, чтобы исключить эффекты, связанные с вхождениями такого рода, и подбирался многочлен $\prod_i (1 - z_i^k)^{m_i} - 1$.

В силу замечания 4.6 путем последовательного уничтожения неправильных членов мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.4. а) *Существует оператор вырезания, являющийся многочленом от операторов замен и уничтожающий все члены, удовлетворяющие условиям утверждений б) и в) предложения 4.16.*

Пусть все концы анфилад размера, большего, чем n , заняты вхождениями t_{α_i} и в других позициях эти вхождения не встречаются. Существует композиция K , составленная из операторов замен, описанная в пп. б), в) предложения 4.16, уничтожающая все члены, для которых t_s входит в клетки большего, чем n , размера, и не уничтожающая остальные члены.

Пусть некоторая специализация в $\hat{A}$ многочлена h есть сумма S правильных членов. Тогда результат применения K к правильным членам, не содержащим вхождения t_s в клетки большего, чем n , размера, в алгебре A^{cl} принимает значение S .

Кроме того, при ограничении пучка алгебр на общую точку $K(h)$ принимает значение, равное ограничению S . Соответствующий факторпучок обращается в нуль при умножении на любой многочлен вида $\prod_i (1 - K(z_i)^k)^{m_i} - 1$.

б) Существует композиция K замен, описанная пп. б), в) предложения 4.16, уничтожающая все члены, не являющиеся правильными. Ее действие на правильных членах обладает свойствами композиции K , описанным в п. а).

Отметим, что тождественное обращение в нуль величины $\prod_i (1 - z_i^k)^{m_i} - 1$ означает наличие клетки конечного типа. Отметим также, что все величины ограничены функцией от степени обрабатываемого полинома и что вместо $k = \prod_i k_i$ можно взять $k = \text{НОК}(k_i)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.9. 1) Значение Z на клетках меньшего размера лежит в радикале. При несмешанной радикальной специализации t_i один из D_{ij} должен иметь первичную специализацию, отвечающую соответствующей клетке. Поэтому композиция расталкивающих операторов, связанных со всеми D_{ij} , и в этом случае приводит к нужному результату.

2) В неоднородном случае система вырезающих замен (и, соответственно, степень многочлена, полученного в результате) зависит от многочлена, к которому она применяется. В случае бесконечного основного поля можно сразу рассмотреть члены, имеющие нужное вхождение t_i .

3) Чтобы многочлен, который образуется при уничтожении лишних специализаций t_j внутри клеток большего размера, чем нужно, не обратился в нуль, координатное кольцо клетки должно быть достаточно большим. Равенство

$$\prod_i (1 - z_i^k)^{m_i} - 1 = 0$$

или соотношение $Z^q - Z = 0$ обеспечивает конечность размера клетки. Появление таких соотношений, как условие “необщего положения” для точек схемы, означает редукцию бесконечного типа к конечному.

Использование предложения 4.16 и следствия 4.4 позволяет оставить только нужные нам правильные члены.

Отметим, что при осуществлении процесса расталкивания переменных t_i возникают многочлены ограниченной степени (оценивающейся через $\deg(f)$). С другой стороны, для получения нужного идеала $P_1(H)$ достаточно взять конечное число полиномов f_i . Поэтому степень идеала из предложения 4.15 можно оценить. Конечность порождающего набора $\{f_i\}$ приводит к тому, что достаточно большой центр в матричной алгебре соответствующей клетке ведет себя как бесконечный.

Сформулируем теперь “первую вынуждающую лемму”.

ЛЕММА 4.9 (о расталкивающих подстановках. I). Пусть $g \in J_C(A)$. Тогда существует многочлен h со следующими свойствами:

i) h получается из некоторой квазилинеаризации g путем замен $x_i \rightarrow Q_i$, где Q_i – многочлены, описанные в п. 3.6, отвечающие концам анфилад клеток максимального состава и связанные с применением расталкивающих операторов из предложения 4.16 и следствия 4.4;

ii) при любой специализации переменных в $\hat{A}$ с ненулевым результатом выполняются условия:

- 1) в ядрах Q_i существует только один смешанный радикальный элемент, и он имеет существенный тип;
- 2) вне ядер Q_i таких специализаций не существует;

- 3) тип каждой такой смешанной специализации соответствует типу многочлена Q_i ;
- 4) структуры соответствий (одинаковости и независимости типов) этих специализаций для концов Q_i во всех слагаемых одни и те же (см. определение 3.14);
- 5) составные специализации переменных отсутствуют (см. определение 3.7);
- 6) полином h порождает R -замкнутый T -идеал, являющийся нётеровым R -модулем;
- 7) множество значений g в алгебре A^{cl} покрывается множествами значений полиномов h из п. i).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 4.8 многочлен f можно считать полным удобным, а рассматриваемую специализацию – полной совсем удобной.

Свойство 6) в силу леммы 2.5 вытекает из предыдущих свойств. Свойство 5) справедливо для любой специализации полинома из $J_C(A)$. В самом деле, будем действовать, как и при доказательстве леммы Кемера [115]. Введем новую радикальную переменную, соответствующую элементу из степени радикала, и приравняем нулю компоненты максимального состава для остальных образующих. Получится элемент из $T(g)$, который не обращается в нуль в алгебре с путями меньшего существенного состава. Свойство 7) следует из приведенных ниже рассуждений и предложения 4.11.

Рассмотрим свойства 1)–4). Сделаем замены $a_i \rightarrow a_i + \sum_j Q_{ij}$, где многочлены Q_{ij} отвечают существенным граничным операторам (т.е. существенным смешанным компонентам a_j), связанным с существенными клетками максимального размера. При этом все переменные, входящие в разные Q_{ij} , различны. Эти замены строятся в зависимости от удачной специализации (представления элемента в виде суммы градуированных компонент). В силу существенной однородности и того факта, что множество значений Q_{ij} покрывает весь радикал соответствующей граничной алгебры (предложение 3.16), ненулевой специализации отвечает ненулевое действие замены вида $a_i \rightarrow a_i + \sum_j Q_{ij}$ с последующей квазилинеаризацией по Q_i – выбором членов, содержащих соответствующие Q_{ij} . Они, в свою очередь, соответствуют набору компонент, задающих полный комплект граничных операторов вдоль пути C .

Будем проводить обработку исходного многочлена g поэтапно, начиная с тех Q_i , которые отвечают клеткам максимального (необработанного) размера, и идти вниз по размеру. Система образований, занявших концы клеток уже обработанных размеров, будет называться *ведущей*. На каждом этапе обрабатывается свой размер. В каждое Q_i , соответствующее первому этапу, должна попасть существенная радикальная компонента, отвечающая клетке максимального размера. Это следует из того, что соответствующие Q_i в факторе, порожденном клетками максимального размера, обращаются в нуль. Затем, используя расталкивающие операторы, добиваемся нужной структуры похожести. Если после этого остается возможность для максимальных существенных специализаций у переменных, не входящих в Q_i , то осуществляется еще одна квазилинеаризация. Продолжаем процесс дальше, пока возможности для “самых больших” Q_i не будут исчерпаны.

Шаг 1. Осуществляем систему замен $a_i \rightarrow a_i + \sum_j Q_{ij}$, где многочлены Q_{ij} отвечают граничным операторам, связанным с существенными клетками максимального размера. При этом все переменные, входящие в разные Q_{ij} , различны и не совпадают с исходными переменными. Далее, в силу процедуры квазилинеаризации можно выделить члены с ненулевой суммой, содержащие максимально возможное число вхождений различных многочленов Q_{ij} (для которых количество различных встречаемых пар индексов (i, j) максимально). Получится многочлен $g_1 \in T(g)$. Пусть s_1 – общее количество концов и переходов для клеток максимального размера вдоль пути C .

Переменные, входящие в Q_{ij} , мы назовем *ведущими*. Заметим, что если провести подстановку вида $a_i \rightarrow a_i + \sum_j Q_{ij}$ с неведущей переменной (многочлен Q_{ij} связан с клетками максимального размера) и выбрать члены, содержащие Q_{ij} , то получим многочлен, равный нулю. (В силу леммы 4.3 возможность осуществления ненулевой специализации равносильна возможности проведения подстановки соответствующего Q_i в квазилинеаризацию.) Поэтому в силу существенной однородности, а также процедуры выбора общих элементов и построения алгебры $\hat{A}$ неведущие переменные не могут иметь соответствующих специализаций (без нулевого результата).

С другой стороны, поскольку $g \in J_C(A)$, общее число таких специализаций должно быть в точности равно s_1 . Поэтому выбранные члены имеют в точности s_1 (с учетом кратностей) совокупных вхождений Q_{ij} .

Первый этап пройден, и многочлен $g_1 \in T(g)$ построен.

Шаг r . Пусть построен многочлен $g_{r-1} \in T(g)$, а также ведущая система Q_{ij}^r такая, что все концы существенных клеток размера выше n_i уже заняты. Рассмотрим теперь подстановку вида $a_i \rightarrow a_i + \sum_j Q_{ij}^r$, где Q_{ij}^r связаны с концами клеток размера n_i . Пусть s_i – количество концов анфилад, относящихся к клеткам размера n_i вдоль пути C . При этом, поскольку концы существенных анфилад из самых крупных клеток уже заняты, в силу леммы 4.5 специализации остальных переменных из каждого данного вхождения Q_{ij}^r лежат целиком либо внутри таких анфилад, либо вне их.

При специализации могут возникнуть члены следующих трех типов:

(i) члены, для которых переменные, входящие в некоторый Q_{ij}^r , не имеют специализаций, связанных с существенными клетками размера, большего n_i , либо с граничными операторами для клеток размера n_1 ; в силу конструкции полиномов Q_{ij}^r (см. предложение 3.18) сумма указанных членов обращается в нуль;

(ii) члены, для которых переменные, входящие в некоторый Q_{ij}^r , имеют специализации, связанные с существенными клетками размера, большего n_i ; такие члены уничтожаются применением расталкивающих операторов с использованием предложения 4.16 и следствия 4.4;

(iii) члены, для которых переменные, входящие в некоторый Q_{ij}^r , не имеют специализаций, связанных с существенными клетками размера, большего n_r , но для каждого Q_{ij}^r одна из переменных, входящих в Q_{ij}^r , имеет специализацию, связанную с граничными операторами для клеток размера n_r .

Отметим, что операторы вырезания не уничтожают суммы членов типа (iii), поскольку все они умножаются на одну и ту же величину.

Далее, воспользовавшись квазилинеаризацией, выберем ненулевую сумму с максимальным возможным числом вхождений типов многочленов Q_{ij}^r (максимальное число возможных пар индексов). Получится многочлен, квазили-

нейный по переменным, входящим в Q_{ij}^r . Рассуждая так же, как на 1-м шаге, устанавливаем, что для неведущей переменной a_i , если рассмотреть подстановку $a_i \rightarrow a_i + \sum_j Q_{ij}^r$ и взять суммы возникающих членов, содержащих Q_{ij}^r , получим нулевой результат. Таким образом, построенный многочлен $g_r \in T(g_{r-1})$ имеет s_r вхождений Q_{ij}^r (с кратностями), и в каждом из них только одна переменная из ядра имеет специализацию, связанную с оператором перехода для существенной клетки размера n_r .

Затем путем последовательного расширения ведущих систем получим искомым полином g_μ , где μ – число различных размеров существенных клеток.

Остается отметить, что свойство 4) обеспечивается после того, как обеспечены остальные свойства. Для этого достаточно применить к g_μ композицию расталкивающих операторов вида $P|_{D_{ij} \rightarrow D_{ij} Z^{m_\alpha}} - P|_{D_{rs} \rightarrow D_{rs} Z^{m_\beta}}$ и получить требуемый полином h . Члены с нужным соответствием между типами умножаются на одну и ту же константу, а остальные члены уничтожаются.

Свойство 7) доказывается индукцией по степени квазилинеаризации. (Берется фактор по квазилинеаризациям. По его модулю членов с дополнительными квазилинеаризациями не остается. В квазилинейном случае свойство 7) устанавливается так же, как и в лемме 4.5. Поэтому имеется совпадение соответствующих пучков в факторпространстве и подпространстве, по которому факторизуют.)

ЗАМЕЧАНИЕ 4.10. Из доказательства леммы 4.9 следует, что для любого конечного набора алгебр, составы максимальных путей которых изоморфны, можно указать универсальную процедуру вырезания (она зависит от степени обрабатываемого многочлена, но не от алгебры).

Лемма 4.9 достаточна для доказательства свойства локальной шпехтовости ассоциативных алгебр. Для доказательства их локальной представимости необходимо утверждение, относящееся к более общей ситуации. Когда $g \notin J_C$, возможны следующие случаи. Во-первых, появление при специализации членов, отвечающих специализации нескольких смешанных элементов (или элемента из идеала, их содержащего) внутри ядер Q_i . Во-вторых, вхождение в разные слагаемые разного числа существенных компонент и нарушение существенной однородности. (В процессе построения многообразий иногда приходится добавлять неоднородные тождества.) В-третьих, присутствие в наборе осуществляемых специализаций не всех типов клеток.

Будем говорить, что однородный элемент из $\hat{A}$ имеет *полный состав*, если его степень получается из произведения компонент, среди которых присутствует компонента, относящаяся к каждой клетке, и *существенно полный состав*, если присутствуют компоненты, относящиеся к каждой существенной клетке. *Совсем полный (существенный) состав* означает, что присутствуют все компоненты, связанные с существенными клетками. Мы будем говорить что T -идеал имеет *(совсем) полный (существенный) состав*, если таковы все его значения.

Определим для переменных типа D , формирующих полиномы Q_i , понятие *предназначенного размера*, обозначаемого $n(D)$. Это размер клетки в граничной алгебре, соответствующей данному полиному, в которую должна попасть соответствующая переменная (т.е. в выражение для значения Q_i в указанной алгебре только такая специализация этой переменной дает ненулевой вклад). Для алгебр входа или выхода это размер единственной клетки, а для алгебры

перехода это размер “левой” или “правой” клетки, в зависимости от того, где стоит эта переменная.

Принципиальное значение имеет то обстоятельство, что подстановки позволяют выделять члены полного состава, но не всегда позволяют выделять члены максимального состава. Количество операторов перехода в разных членах может быть связано по Фробениусу. В этом причина появления неоднородных T -идеалов. Поэтому для доказательства локальной представимости в случае конечного поля понадобится следующая “вторая вынуждающая лемма”.

ЛЕММА 4.10 (о расталкивающих подстановках. II). Пусть f тождественно не равно нулю в A и принимает значение полного существенного состава, $q = p^k > c(\hat{A})$. Тогда существует квазилинейный многочлен $g \in T(f)$, $g|_A \neq 0$, который имеет вид $g = \phi(\vec{x}, Q_1, \dots, Q_s)$, где $\phi \in T(f)$, причем при любой специализации переменных в $\hat{A}$ с ненулевым результатом выполняются следующие условия:

- 1) в ядрах Q_i существует только один смешанный радикальный элемент, он имеет существенный тип;
- 2) вне ядер Q_i таких специализаций нет;
- 3) тип каждой такой смешанной специализации соответствует типам многочлена Q_i и соответствующего граничного оператора;
- 4) структура соответствий (похожести и независимости типов) соответствующих специализаций для D_{ij} – концов Q_i – во всех слагаемых одна и та же (см. определение 3.14);
- 5) составные специализации переменных элементов отсутствуют (см. определение 3.7);
- 6) результат любой подстановки $D_* \rightarrow D_*\psi$ или $D_* \rightarrow \psi D_*$ равен нулю, если ψ – тождество матриц размера $n(D_*)$;
- 7) полином g порождает S^q -замкнутый T -идеал, являющийся нётеровым S -модулем (кольцо S определено в пп. 4.3.2);
- 8) если многочлен g удобен (см. определение 4.2) и $\{x_i\}_{i=1}^d$, $d < c(A)$, – набор выделенных переменных, специализации в которые не могут иметь полный состав с ненулевым результатом, то действие данной системы подстановок на переменных $\{x_i\}_{i=1}^d$ также приводит к нулевому результату;
- 9) если при этом многочлен f совсем удобен и $\{x_i\}$ – выделенный набор переменных, то множество значений f в алгебре A^{cl} покрывается множествами значений полиномов h указанного вида.

При этом переменные из ядер многочленов Q_{ij} не имеют вхождения вне этих ядер.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу индукции можно считать, что лемма установлена для всех собственных квазилинеаризаций многочлена f (не только относительно выделенных переменных). Далее, можно рассмотреть максимальное число смешанных радикальных специализаций в разные переменные с ненулевым результатом. В силу предложения 4.8 можно перейти к другому элементу из $T(f)$ и считать, что f удобен и указанные специализации (в максимальном количестве) осуществлены в выделенные переменные, т. е. многочлен f совсем удобен. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^d$, $d < c(A)$, – выделенный набор переменных. Далее, в силу индукции можно считать, что если g удовлетворяет условиям леммы и является собственной квазилинеаризацией f относительно переменных (не обязательно из выделенного набора $\{x_i\}_{i=1}^d$), то для многочлена g утверждение

леммы установлено. Поэтому можно также считать, что каждая собственная линеаризация многочлена f не имеет полного набора специализаций.

Зафиксируем полный максимальный набор удобных специализаций. Ниже будет построена (в зависимости от этих специализаций) система расталкивающих подстановок в соответствующие переменные, вынуждающая смешанные специализации для каждого результата подстановки в соответствующую переменную, размер соответствующих клеток и структуру их зависимостей. Поэтому если полный максимальный набор специализаций в такие переменные с данной структурой связей для удобного многочлена h приводит к нулевому результату, то и расталкивающая система тоже приводит к нулевому результату.

Прежде всего, мы ведем индукцию по числу различных переменных, в которые произведены радикальные специализации (а потом по типу многочлена f , т. е. важнее увеличить количество таких переменных, чем упростить вид многочлена). База индукции состоит в том, что более чем $c(A)$ таких переменных быть не может. Эта индукция обеспечивает условие 5), которое, в отличие от предыдущего случая (доказательства леммы 4.9), автоматически не обеспечивается, поскольку для исходного многочлена оно может не выполняться. В этом случае положим $x = x_1 x_2$ и вынудим радикальные специализации, связанные с граничными операторами внутрь как x_1 , так и x_2 (мы контролируем не произвольные специализации из квадрата радикала, а отвечающие произведению составных элементов; см. лемму 4.3, а также определение 3.7).

Условие 4) обеспечивается после того, как обеспечены остальные условия, и делается это точно так же, как и в доказательстве леммы 4.9. Условие 8) будет ясно из построения системы расталкивающих замен, так как вынуждается полный набор специализаций.

Условие 7) вытекает из предыдущих условий. С помощью подстановок внутрь многочленов Капелли, содержащихся в ядрах Q_i , мы приобретем возможность умножать на внутренние формы (умножение зависит от записи), причем в силу условия 6) операторы форм будут коммутировать между собой (см. предложение 2.8, суммирующее результаты, относящиеся к многочленам Кемера [130], [136]).

Разложению элементов на радикальные и полупростые части отвечает соответствующее разложение внутренних форм. Заметим следующее.

Во-первых, в силу условия 6) внутренние формы можно переносить из одного “внутриядерного” множителя Капелли в другой. Следовательно, все операторы внутренних форм будут между собой коммутировать, поскольку их можно разнести по разным $C_{n_i^2}$. В частности, радикальная компонента формы коммутирует с полупростой.

Во-вторых, $q > c(A)$, поэтому q -я степень формы не содержит радикальных компонент.

В-третьих, поскольку внутри Q_i содержится более $c(A)$ множителей Капелли C_k , при любой специализации все входящие в него переменные не имеют радикальных специализаций. Тогда для любой специализации в $\hat{A}$ можно сделать следующее: систему подстановок, соответствующих умножению на форму, можно перенести туда, где нет радикальных специализаций у переменных, которые образуют соответствующий множитель $C_{n_i^2}$. В этом случае q -я степень формы не будет иметь радикальную часть.

Внутренняя форма Ψ от полупростого элемента, определенная с помощью многочлена Капелли, все переменные в котором имеют только полупростые специализации, есть просто оператор умножения на коэффициент из кольца, порожденного компонентами матричных единиц, – умножение на элемент Ψ_i .

Итак, полупростая компонента q -й степени внутренней формы будет такой же, как и у соответствующей “внешней”, а радикальная компонента будет равна нулю. Таким образом, q -е степени внешних форм совпадут с q -ми степенями внутренних, действующих умножениями на коэффициенты.

Возможность умножать на q -е степени внутренних форм означает, что соответствующее действие кольца инвариантов S^q (симметрических функций от операторов внутренних форм для всех вхождений в Q_i , связанных с клетками данного размера) осуществляется с помощью одновременного действия для всех концов Q_i , связанных с данным размером, и применения леммы 2.5. Отметим, что можно было бы не переходить к симметрическим функциям, но тогда коммутативное кольцо, действующее на $T(g)$, зависело бы от g , что неудобно. (С переходом к симметрическим функциям, связанным с группой перестановок типов, мы встречаемся неоднократно.)

Докажем выполнимость условия 6). Предположим, что оно не выполняется. Построим многочлен g' , удовлетворяющий условиям 1)–3), 5), и сделаем описанную выше подстановку $D_* \rightarrow D_*\phi$. Получится многочлен $g_1|_A \neq 0$. При этом в многочлене g_1 для одной из переменных, входящих в многочлен ϕ , произойдет некоторая подстановка и в одной из этих новых переменных будет вынуждена (несмешанная) радикальная специализация. Теперь применим систему подстановок к переменным из g_1 и аналогичным образом построим g_2 . В силу нильпотентности радикала процесс остановится. (Можно действовать иначе: осуществить подстановку $D_* \rightarrow D_*P$, где многочлен P выбран так, чтобы результат был ненулевым и при этом P принадлежал максимально возможной степени идеала тождеств матриц порядка $n(D_*)$.)

Заметим, что можно видоизменить наши рассуждения. Для какого-то Q_i внутренние формы, определенные через разные множители Капелли $C_{n_i^2}$, не совпадут. Тогда разность таких форм обязана иметь в группе переменных, образующих эти $C_{n_i^2}$ и оператор формы, радикальные специализации, причем по условию эта разность не равна нулю. Рассматриваем следующую пару множителей Капелли и продолжаем процесс. Он может продолжаться не более чем $c(\hat{A})$ шагов.

Условие 4) обеспечивается после того, как обеспечены все остальные условия (см. доказательство леммы 4.9). Для этого используются операторы типа AD_{ij} , действующие через t_i, t_j .

Отметим, что степень получающихся после рассматриваемых подстановок многочленов относительно переменных из ядер многочлена Q_α будет не больше степени соответствующей переменной x_i из выделенного набора.

Будем осуществлять процесс простановки Q_i , как и раньше, начиная с обработки вхождений существенных компонент, связанных с клетками максимального размера, постепенно переходя к клеткам меньшего размера. Работа ведется по этапам, на каждом этапе обрабатывается свой размер и строятся дополнительные ведущие образования, покрывающие концы существенных клеток следующего размера. Когда осуществляется очередной этап, концы существенных анфилад большего размера уже заняты. Поэтому в силу леммы 4.5

возможны вхождения вспомогательных образований целиком или внутрь анфилад большего размера, или наружу. Вхождения первого типа уничтожаются путем применения расталкивающих операторов из предложения 4.16. Вхождения второго типа создают новые Q_i , которые требуется построить, и мы их копим. Процесс ничем не отличается от предыдущего случая, пока не встретится вхождение более одной существенной компоненты внутрь очередного Q_i , либо компоненты переменной, связанной с произведением смешанных элементов.

Кроме того, можно рассматривать переменные, в которые произошла данная радикальная специализация, значение многочлена f есть линейная комбинация его значений на частичных линеаризациях с зарезервированными переменными, с которыми и связана радикальная специализация. (Эти переменные для каждого члена свои, так что от f переходим к набору $\{f_i\} \subset T(f)$, каждое f_i имеет степень не больше $c(A)$ относительно выбранных переменных (в количестве, меньшем, чем $c(A)$), с которыми мы и работаем, т.е. через которые и осуществляются расталкивающие подстановки.)

Сформулируем индукционную лемму, позволяющую пройти каждый этап и построить новую систему ведущих переменных. Основное утверждение доказываемой леммы следует из нее очевидным образом. (В качестве базы индукции можно взять пустое множество специализаций, отвечающих клеткам размера, большего, чем $n_{\max}$.)

ЛЕММА 4.11 (индукционная). Пусть $n_1 > \dots > n_m$ – размеры существенных клеток в алгебре A , кроме того, многочлен Φ в A не обращается тождественно в нуль и имеет следующий вид:

$$\Phi = F(H_1^{n_1}, \dots, H_{p_1}^{n_1}, \dots, H_1^{n_k}, \dots, H_{p_k}^{n_k}, \vec{x}),$$

где $H_i^j = (D')_i^j Q_i^j (D'')_i^j$, многочлены Q_i^j соответствуют концам существенных анфилад из клеток размера n_j и $(D')_i^j, (D'')_i^j$ – вспомогательные переменные. Пусть для любой специализации переменных в $\hat{A}$ с ненулевым результатом имеет место следующее:

- 1) в ядрах Q_i^j имеется ровно по одному смешанному радикальному элементу, существенный тип которого относится к клетке размера² $n_j \geq n_k$;
- 2) вне ядер Q_i^j таких специализаций нет;
- 3) тип каждой такой смешанной специализации соответствует типу многочлена Q_i^j ;
- 4) структура соответствий (зависимости и независимости, похожести и однотипности) у специализаций концов Q_i , которым соответствуют клетки размера не меньше n_k , во всех слагаемых одна и та же (см. определение 3.14);
- 5) специализации переменных, отвечающих произведению смешанных элементов, связанных с клетками размера, большего или равного n_k , отсутствуют;
- 6) все специализации внутри “центрального” полинома Z_{ij}^d , относящегося к Q_i^j , являются внутренними по отношению к соответствующей анфиладе,

²Если конец Q_i^j связан с клетками размера, строго меньшего n_k , то возможны дополнительные смешанные специализации, связанные с меньшими типами. От них избавляемся с помощью леммы 4.4.

причем в каждом слагаемом есть множитель Z из Z_{ij}^d , содержащий только полупростые специализации.

Тогда существует многочлен $\Phi' \in T(\Phi)$, причем $\Phi' \neq 0$ в алгебре A , который имеет вид

$$\Phi' = F'(H_1^{n_1}, \dots, H_{p_1}^{n_1}, \dots, H_1^{n_{k+1}}, \dots, H_{p_{k+1}}^{n_{k+1}}, \vec{x})$$

и удовлетворяет тем же условиям (но уже и для компонент при клетках размера n_{k+1}). Он получается из Φ с помощью следующих процедур: квазилинеаризации по D и переменным из $\vec{x}$; подстановок вида $D \rightarrow D^{(1)}D^{(2)}$, $t_\alpha = D'Q^{k+1}D''$, $t_\alpha = D'_1Q_1^{k+1}D''_1D'_1 \dots (Q'_s)^{k+1}D''_s$; применения расталкивающих операторов (т.е. подстановок типа $D \rightarrow DZ$, где Z – значение подходящего центрального полинома); взятия линейных комбинаций. При этом переменные, участвующие в таких расталкивающих заменах, нигде больше не фигурируют.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если специализации, соответствующие клеткам размера n_{k+1} , уже невозможны, то процесс закончен и можно положить $\Phi' = \Phi$. Условие 6) вытекает из условий 1)–3), 5) в силу леммы 4.5. Оно же, будучи выполнено для Φ , дает возможность осуществлять “вырезания”, т.е. уничтожать попадания дополнительных Q_i внутрь уже “обработанных” анфилад размера $n_j \geq n_k$ (см. предложение 4.16 и следствие 4.4).

Специализация есть вербальный оператор, действующий на многочленах и вставляющий элементы из $\hat{A}$. Назовем специализацию части переменных *удачной*, если она продолжается до полной специализации. *Полная специализация* – это такая специализация, когда суммарная градуировка всех участвующих вербальных операторов полна.

Будем вести обработку специализаций с использованием лемм 4.3 и 4.4, как и раньше.

Осуществляем систему замен $a_i \rightarrow a_i + \sum_j Q_{ij}$, где многочлены Q_{ij} отвечают граничным операторам, связанным с существенными клетками максимального размера. При этом все переменные, входящие в разные Q_{ij} , различны. Эти замены строятся в зависимости от удачной специализации (представления элемента в виде суммы градуированных компонент). Воспользуемся “спектральным рассуждением”. В силу того, что множество значений многочлена типа Q_i , отвечающего своей граничной алгебре, покрывает весь радикал (предложение 3.16), ненулевой специализации отвечает ненулевое действие замены вида $a_i \rightarrow a_i + \sum_j Q_{ij}$ с выбором членов, содержащих соответствующее Q_{ij} .

Как и в доказательстве леммы 4.9, с помощью квазилинеаризации мы будем выбирать члены, содержащие максимально возможное число вхождений типов многочленов Q_{ij}^r (максимальное число возможных пар индексов), линейная комбинация которых дает удобную специализацию. (В доказательстве леммы 4.9 члены с большим числом вхождений типов, чем у данного многочлена, и большего размера давали нулевой вклад.) Для этого нужно воспользоваться процедурой расталкивания, обеспечивающей покрытие всех возможных типов клеток размера n_i , и, далее, леммами 4.13, 4.12, позволяющими вырезать лишние “большие” специализации. Тем самым специализации, связанные с граничными операторами для клеток размера n_r , вне Q_{ij}^r будут уничтожены, а множество значений получившегося многочлена в общей точке спектра будет по-прежнему совпадать с множеством значений исходного многочлена.

Кроме того, могут возникать “неудачные специализации” (связанные с клетками размера n_i), которые в итоге не продолжаются до полной специализации. В частности, они могут возникать в силу того, что исходный многочлен не является квазилинейным, поэтому может появиться сумма соответствующих специализаций, являющихся результатами подстановок в собственную квазилинеаризацию многочлена f . Однако, хотя сумма соответствующих членов на промежуточном этапе может оказаться ненулевой, в конце концов все же возникает нулевая сумма, поскольку “неудачная” специализация не может быть продолжена до полной, а наш процесс вынуждает полноту специализаций³. Итак, “неудачные” специализации (линейные комбинации членов), связанные с операторами, отвечающими клеткам уже обработанных размеров, уничтожаются на последующих шагах в силу условия 8). Поэтому добавочные суммы, отвечающие “неудачным” специализациям, можно не рассматривать.

Кроме того, могут возникнуть дополнительные специализации, связанные с суммой разнотипных специализаций из-за неквазилинейности многочлена f . Они отвечают значениям собственных квазилинеаризаций f , имеющих полный состав. Однако в силу предположения индукции, которая ведется по числу различных переменных с радикальной специализацией, результат таких специализаций будет равен нулю.

Поскольку концы анфилад из клеток размера не меньше n_k уже заняты (см. предложение 4.4), все специализации новых Q_{ij}^r осуществляются либо внутрь анфилад из клеток размера не менее n_k , либо вне их. Таким образом, при специализации могут возникнуть члены четырех типов.

1°. Члены, для которых переменные, входящие в некоторый Q_{ij}^r , не имеют специализаций, связанных с существенными клетками размера, большего n_i , либо с граничными операторами для клеток размера n_1 .

В силу конструкции полиномов Q_{ij}^r (см. предложение 3.18) сумма указанных членов обращается в нуль.

2°. Члены, для которых переменные, входящие в некоторый Q_{ij}^r , имеют специализации, связанные с существенными клетками размера, большего n_i .

Такие члены уничтожаются применением расталкивающих операторов при использовании предложения 4.16 и следствия 4.4.

3°. Члены, для которых переменные, входящие в некоторый Q_{ij}^r , не имеют специализаций, связанных с существенными клетками размера, большего n_r , но для каждого Q_{ij}^r одна из переменных, входящих в Q_{ij}^r , имеет специализацию, связанную с граничными операторами для клеток размера n_r .

Операторы вырезания не уничтожают суммы членов типа 3°, так как все они умножаются на одну и ту же величину.

В отличие от случая, рассмотренного в лемме 4.9, можно ожидать появление членов с ненулевой суммой, отвечающих составной специализации “обрабатываемой” переменной (см. определение 3.7). Эти члены описаны в следующих пунктах.

4°. Члены, для которых суммарная степень однородности некоторых многочленов Q_{ij}^r является составной. Специализация, соответствующая этим членам, отвечает произведению, содержащему несколько существенных компонент, связанных с клетками размера n_{k+1} , но такого рода специализации не

³Этим рассуждением можно заменить использование лемм 4.13, 4.12 в доказательстве индукционной леммы (но не предложения 4.17).

могут продолжаться до конца процесса (см. обсуждения свойства 5) в начале доказательства леммы 4.10).

5°. Члены, отвечающие составной существенной специализации внутрь ядра некоторого Q_i^j , построенного на предыдущих шагах доказываемой леммы, или внутрь D_i .

Соответствующие члены дают нулевой вклад по окончании процесса замен в силу индукционных соображений.

Лемма доказана, а вместе с ней доказана и лемма 4.10.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.11. Замены строятся в соответствии со специализациями. Легко видеть, что возникают позиции с вынужденной смешанной радикальной специализацией, а изучение соответствия членов показывает, что получается ненулевой результат. Для членов, смешанная специализация которых осуществляется в другие типы без соответствия процедуры организации замен (в частности, для “неудачных” членов), результат будет нулевым.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.12. Структура расталкивающих операторов зависит не только от существенного состава (т. е. граничных операторов, относящихся к существенным клеткам), но и от других радикальных компонент, так как может потребоваться разное число “вырезаний”. Однако если многочлен имеет вид, как в леммах 4.9, 4.10, то для любой системы расталкивающих замен и для любой алгебры с тем же существенным составом применение соответствующих операторов к многочлену h приведет к появлению многочлена h' , принимающего то же множество значений в алгебре A^{cl} , что и многочлен h . Поэтому для нескольких алгебр можно брать универсальные вырезающие замены.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.13. В случае поля характеристики $p > 0$ нет смысла “ловить” либо контролировать несмешанные радикальные специализации (что составляло значительные технические трудности в работах [88], [90]), так как у оператора вида x^{p^k} при большом k уничтожается радикальная часть.

Следующее предложение уточняет утверждение леммы 4.10 для полного состава.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.17. *В условии леммы 4.10 пусть имеется ненулевое значение полинома g в алгебре $\hat{A}$, градуированная компонента которого имеет полный существенный состав. Тогда он принимает значение, являющееся линейной комбинацией членов полного существенного состава, и, кроме того:*

- а) значение полинома g в алгебре A содержит ненулевой элемент, являющийся линейной комбинацией элементов полного существенного состава;*
- б) $T(g)$ содержит ненулевой T -идеал указанного в лемме 4.10 вида, имеющий полный существенный состав.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То обстоятельство, что многочлен g имеет значение, являющееся линейной комбинацией членов полного существенного состава, есть следствие существенной однородности T -идеалов в $\hat{A}$ в силу возможности подставлять однородные элементы. Утверждение б) есть непосредственное следствие утверждения а) и леммы 4.10. Однако доказательство утверждения а), по сравнению с доказательством указанной леммы, нуждается в модификации, поскольку после того, как возможности для существенной радикальной специализации будут исчерпаны, может оказаться, что не все существенные типы клеток будут представлены. Процесс выбора компонент может ветвиться.

Например, после получения компонент от всех самых больших клеток может случиться так, что специализации, связанные с дальнейшим выбором таких компонент, будут происходить путем, отличным от построения специализации, соответствующей g , которая гарантирует получение полного состава. Отметим, что при обработке членов максимального состава такой ситуации не возникает, так как жесткость обеспечивается прохождением по отмеченным специализациям.

Таким образом, необходимо научиться осуществлять “вырезания” в тех случаях, когда обработаны все существенные типы размера выше данного, но еще существует возможность для специализаций в такие типы.

Будем говорить, что переменная *входит в клетки данного типа с кратностью k* , если k есть сумма количеств вхождений этой переменной в клетки данного типа с учетом кратностей клеток для каждого вхождения. Далее нам понадобятся две вспомогательные леммы.

ЛЕММА 4.12. Пусть типы T_j и вхождения в них переменных из набора $\{D_i\}$ устроены следующим образом:

- а) размеры клеток для всех T_j одинаковы;
- б) каждая переменная D_i входит в T_j с кратностью k_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, и не имеет других вхождений;
- в) система из n векторов $\vec{k}_i = (k_{i1}, \dots, k_{in})$ линейно зависима.

Тогда существуют два непересекающихся непустых подмножества I и J множества $\{1, \dots, n\}$ и две различные подстановки $D_i \rightarrow D_i Z^{n_i}$, $i \in I$, $\max n_i \neq 0$, и $D_i \rightarrow D_i Z^{n_i}$, $i \in J$, $\max n_i \neq 0$, такие, что соответствующие члены при специализациях D_i удовлетворяют свойствам а)–в), а специализации переменных типа Z полупросты и одинаковы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть векторы $\{\vec{k}_i\}$ линейно зависимы. Тогда между числами k_{ij} при некоторых непересекающихся множествах индексов I и J и неотрицательных целых n_j выполняется набор соотношений

$$\sum_{j \in I} k_{ij} n_j = \sum_{j \in J} k_{ij} n_j.$$

В этом случае пара подстановок $(D_i \rightarrow D_i Z^{n_i}, i \in I; D_i \rightarrow D_i Z^{n_i}, i \in J)$ будет искомой.

Лемма 4.12 позволяет осуществлять “вырезания” в линейно зависимых случаях. Осуществим две подстановки, указанные в этой лемме, и рассмотрим их разность, что приводит к умножению на

$$\tau = \prod_{j=1}^n Z_j^{\sum_{i \in I} k_{ji} n_i} - \prod_{j=1}^n Z_j^{\sum_{i \in J} k_{ji} n_i}$$

(Z_i – значение Z в i -м типе с кратностью 1). Если все типы существенны, то величина τ тождественно не равна нулю.

ЛЕММА 4.13. Пусть типы T_j и вхождения переменной D , а также переменных из набора $\{D_i\}$ устроены следующим образом:

- а) размеры клеток для всех T_j одинаковы и равны m ;
- б) набор $\{T_j\}$ покрывает все существенные клетки размера m ;

в) каждая переменная D_i входит в T_j с кратностью k_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, и не имеет других вхождений;

г) система из n векторов $\vec{k}_i = (k_{i1}, \dots, k_{in})$ линейно независима;

д) переменная D не входит в клетки размера, большего m , в несущественные типы и не имеет радикальной специализации (но может входить в клетки меньшего размера).

Тогда существует оператор расталкивания, обнуляющий все неправильные члены и умножающий правильные на один и тот же многочлен. При этом рассматриваются компоненты при подстановках, действующих через D и $\{D_i\}$ с теми же специализациями этих переменных и полупростыми специализациями других переменных, участвующих в заменах. (Обращать в нуль суммы прочих компонент не требуется.)

Член называется *правильным*, если переменная D не входит в типы из набора $\{T_j\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.13. Достаточно приравнять нулю неправильные члены с фиксированным набором кратностей, сохраняя при этом правильные. Тогда путем последовательного применения этой процедуры для всех таких наборов мы получим только правильные члены.

Пусть Z – центральный многочлен для клеток размера m . Рассмотрим оператор

$$H_k(F) = F|_{D \rightarrow D(1+Z^k)} - F.$$

Он уничтожает правильные члены (так как Z обращается в нуль на клетках меньшего размера). Пусть $\vec{n} = (n_1, \dots, n_s)$ – вектор кратностей вхождений D в типы из набора $\{T_j\}$. Члены, для которых D входит в i -й тип с кратностями $\{n_i\}$, умножаются на полином $\prod_i (1 + Z_i^k)^{n_i} - 1$.

Ясно, что при подходящем k вектор степеней $\vec{z} = \{z_i\}$ выражается через векторы кратностей D_i с целыми коэффициентами. Следовательно, он получается как разность двух таких комбинаций с целыми неотрицательными коэффициентами. При этом вычитаемое может быть одним и тем же для всех таких векторов степеней.

Применим к $H_k(F)$ систему подстановок $D_i \rightarrow D_i Z_i^{n_i}$, где n_i – коэффициенты при линейной комбинации вычитаемого. Обозначим результат через $H'(F)$.

С другой стороны, каждый член в многочлене $\prod_i (1 + Z_i^k)^{n_i} - 1$, умноженный на величину $\prod_j Z_j^{\sum_i n_i k_{ij}}$, возникает в качестве множителя (в членах с полупростыми специализациями величин типа DZ , $D_i Z$ и со специализациями D и D_i , удовлетворяющими описанным выше условиям) при применении к исходному многочлену F подходящей системы подстановок $D_i \rightarrow D_i Z_i^{m_i}$, где m_i – коэффициенты при линейной комбинации уменьшаемого.

Разность между $H'(F)$ и суммой результатов соответствующих подстановок даст требуемый многочлен. Лемма доказана.

Предложение выводится из лемм 4.12, 4.13 с помощью тех же рассуждений, что и лемма 4.10. Единственное, что надо отметить, это возможность радикальных специализаций D_i и переменных, которые через них подставляются. (Если такие специализации полупросты, то переменные, подставляющиеся через D или D_i , принадлежат тому же типу в соответствующем вхождении.) Для этого вместо переменных D и D_α используем произведения переменных $D_1 \cdots D_{c(A)}$ и

$D_{\alpha,1} \cdots D_{\alpha,c(A)}$, обрабатывая наборы $\mathcal{D}$ при каждом индексе (нумерующем позицию в произведении для D или D_α) отдельно и независимо. Предполагаем, что радикальных вхождений в эти D не существует. Данная система оставляет только члены, для которых $\mathcal{D}$ покрывает все существенные специализации, при этом сумма членов с правильным расположением D при подходящем процессе может перейти не в нуль. (Каждый член суммы умножается на ненулевой полином от свободных трансцендентных переменных, который зависит только от кратностей вхождений D в набор типов. Члены с разными кратностями вхождений D_i независимы в $\hat{A}$ в силу однородности. По той же причине радикальные специализации переменных, которые мы использовали, не могут компенсировать нужные члены – для расталкивания всякий раз выбираются новые переменные.) Предложение доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5. Пусть f – произвольный многочлен. Обозначим T -идеал, порожденный элементами из $T(f)$, удовлетворяющими условию предложения 4.17, через $P_2(f)$ и назовем его *производным идеалом* многочлена f . Если f не принимает в алгебре $\hat{A}$ значения полного существенного состава, то $P_2(f) = 0$. Для идеала I производный многочлен $P_2(I)$ есть сумма $\sum_{f \in I} P_2(f)$. Аналогичным образом, $\varphi(f)$ есть множество элементов из $T(f)$, удовлетворяющих заключению леммы 4.10, и $\varphi(I) = \sum_{f \in I} P_2(f)$. Для T -идеала Γ аналогично определяется T -идеал $P_2(\Gamma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.14. Леммы 4.12 и 4.13 позволяют осуществлять “вырезания” в более общей ситуации и без использования процесса квазилинеаризации. Однако при этом могут возникнуть члены с меньшим, чем нужно, числом вхождений t_i и не все концы анфилад будут заняты. (Конечное поле дает возможность осуществить контроль только наличия вхождения, но не их количества.) Поэтому возникающий T -идеал не обязан быть R - или S -замкнутым. Для получения такой замкнутости нужно рассматривать возможности вхождений новых t_j на границы старых анфилад и их исчерпывания. Поэтому максимальный R - или S -замкнутый T -идеал $\Gamma^0 \subset \Gamma$ не получается путем непосредственного применения расталкивающих операторов: необходимо несколько раз брать факторы по идеалам, образованным расталкивающими операторами, и рассматривать расталкивающие операторы в получившихся алгебрах (когда они содержат путь того же максимального существенного состава). Для этого нужно показать, что индекс нильпотентности радикала фактора, порожденно-го существенными произведениями, не растёт (см. далее следствие 4.8).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.15. Лемму 4.10 можно усилить, обеспечивая не только позиции существенных радикальных компонент, но и существенных полупростых компонент (взяв произведения множителей вида x^{p^k} , из которых составляются “внутрианфиладные” переменные) и осуществляя структуру непохожести с концами ранее построенных существенных радикальных элементов. Далее, можно обеспечить смешанные радикальные вхождения в несущественных клетках, а также полупростые вхождения в несущественных клетках со структурой непохожести. Для любого несмешанного элемента вынуждается его тип с помощью взаимодействия с типами других элементов, за исключением типа (ν_0, ν_0) . Единственный известный автору способ вынуждать несмешанный радикал – сделать это “по остаточному принципу”, т. е. путем вынуждения остальных членов. Но это осуществляется только в идеале $J_C(A)$. По всей видимости, другого способа не существует.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.16. Результат предложения 4.17 непосредственно переносится на неполный состав (но наиболее полный для многочленов из рассматриваемого T -идеала Γ). Если многочлен g квазилинеен, то этот результат является следствием доказательства леммы 4.10.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.17. Аналог предложения 4.17 для максимального состава не имеет места, поскольку T -идеал может не быть однородным по существенным радикальным компонентам (хотя сама алгебра $\hat{A}$ и ее тождества по ним однородны). Как и в случае с несущественной клеткой, с помощью тождеств выявляется только факт наличия компоненты.

4.4.2. Случай отсутствия существенных смешанных элементов. Техника расталкивающих замен используется, когда существуют смешанные элементы. Иначе нельзя организовать модульную структуру, действуя на подстановках, связанных со смешанными элементами. В остальных случаях для редукции достаточно только T -пространственных действий. Именно в том случае, когда анфилада одна, необходимы умножения. В этом случае мы умножаем рассматриваемый многочлен f на полином Капелли C_{n^2} , после чего появляется возможность умножать на следы. Действие колец, которое было построено выше, определялось с помощью подстановок на граничных операторах. Поэтому нужно специально рассмотреть случай, когда соответствующих операторов нет. Роль расталкивающих подстановок играет просто умножение (правое или левое).

Поскольку в существенную клетку нельзя войти и из нее нельзя выйти, алгебра A разлагается в прямую сумму алгебры без существенных клеток и алгебры, все клетки которой существенны и имеют один и тот же тип. Можно считать, что в $\hat{A}$ нет идеалов с нулевым пересечением. Алгебра без существенных клеток конечна, все идеалы представимы, и конечная базирруемость очевидна. Поэтому достаточно рассмотреть случай однотипных бесконечных клеток.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.18. а) Если $f|_{\mathbb{M}_n} \neq 0$, то f принимает значение, не являющееся делителем нуля.

б) Пусть в алгебре A все элементы однотипны, и пусть $n = \text{PIdeg}(A)$, $x \in R(A)^{c(A)-1}$ и полином f не обращается в нуль на $\mathbb{M}_n$. Тогда найдется значение $f(t)$ такое, что $xf(t) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение б) следует из утверждения а), которое, в свою очередь, следует из того, что алгебра общих матриц вкладывается в тело (получающееся при локализации алгебры по центру).

СЛЕДСТВИЕ 4.5. Пусть $\Gamma \neq 0$ – T -идеал, лежащий в $R(A)^{c(A)-1}$, C_k – полином Капелли порядка k . Тогда T -идеал $\Gamma^0 = \Gamma C_{n^2}$ содержится в Γ , отличен от нуля и замкнут относительно умножения на формы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.19. Пусть Γ – T -идеал. Тогда существует T -идеал $\Gamma' \subset \Gamma$ такой, что для любого $f|_{\mathbb{M}_n} = 0$ выполняются равенства $\Gamma'f = f\Gamma' = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\phi \in \Gamma$ и элемент $\phi_1 = \phi f$ (или $\phi_1 = f\phi$) не равен нулю. Построим по ϕ_1 элемент $\phi_2 = f'\phi_1$ (или $\phi_2 = \phi_1 f'$), по элементу ϕ_2 – элемент ϕ_3 и так далее, пока это возможно. Процесс оборвется на шаге с номером k , не превышающем $c(A) - 1$. Полученный элемент ϕ_k будет удовлетворять условию предложения.

С помощью тех же соображений, что и в начале доказательства леммы 4.10, доказывается

ЛЕММА 4.14. Пусть T -идеал Γ' удовлетворяет предложению 4.19, $q = p^k \geq c(A)$. Тогда T -идеал $\Gamma^0 = \Gamma' C_{n^2}$ замкнут относительно умножения на формы в q -й степени.

Из предложения 4.19 и леммы 4.14 вытекает следующее утверждение, суммирующее результаты настоящего пункта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.20. а) Пусть существенные смешанные элементы в алгебре $\hat{A}$ отсутствуют. Тогда A разлагается в подпрямое произведение конечных алгебр и алгебр с существенными однотипными клетками.

б) Пусть A – алгебра с существенными однотипными клетками. Тогда для $q = p^k \geq c(A)$ любой ненулевой T -идеал Γ алгебры A содержит ненулевой T -идеал $\Gamma^0 \subset \Gamma$, замкнутый относительно форм в q -й степени, определенных внешним образом (с помощью матричных единиц). Кроме того, любой T -идеал, лежащий в $R(A)^{c(A)-1}$, замкнут относительно алгебры форм. Многочлены из этого T -идеала имеют вид

$$\phi = f C_{n^2}^t$$

(произведение многочленов означает произведение с подстановкой разных переменных в сомножители).

4.5. Завершение доказательств для алгебр. Здесь мы завершим доказательство локальной конечной базлируемости и локальной представимости для алгебр.

4.5.1. Сложность и размерность T -идеалов. Пусть B – алгебра нётероваго типа над кольцом R . Нам надо изучить поведение сложных характеристик при факторизации. Проблему составляет поведение индекса нильпотентности (существенного) радикала, так как индекс может возрасти. *Существенным радикалом* называется радикал, порожденный чистыми элементами типа (ν_i, ν_j) , где ν_i или ν_j отвечает существенной клетке.

В чем состоит механизм роста индекса нильпотентности? Мы имеем алгебру $\hat{A}$ нётероваго типа над кольцом представления R . В ней мы находим S -замкнутый T -идеал I . При этом S – подкольцо кольца R , над которым R целое. В факторе возникает S -кручение, которое может вызывать рост индекса нильпотентности. Операторы умножения на элементы из S становятся нильпотентами. Поэтому если брать фактор по S -кручению, то индекс нильпотентности радикала расти не будет (так же, как и индекс нильпотентности существенного радикала). Поскольку существенный элемент в алгебре $\hat{A}$ порождает бесконечный модуль над частичными следами и если он при факторизации перейдет в несущественный, то появится кручение. Кроме того, в отсутствие кручения можно перейти к полю частных кольца S , а представления алгебр над полем можно считать правильными.

При доказательстве конечной базлируемости имеет место случай $S = R$. Что бы показать, что T -идеал J не обратится в нуль при факторизации по модулю кручения, достаточно убедиться в том, что его размерность Гельфанда–Кириллова как пространства совпадает с размерностью Гельфанда–Кириллова кольца R .

Из лемм 4.9, 4.10, а также предложения 4.17 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4.6. а) Пусть все значения T -идеала I в алгебре $\hat{A}$ имеют максимальный существенный состав. Тогда I содержит ненулевой R -замкнутый T -идеал.

б) Пусть T -идеал I в алгебре A принимает значение полного существенного состава (т.е. все его значения таковы). Тогда I содержит ненулевой S^q -замкнутый T -идеал, где $q = p^k > c(A)$.

в) Если T -идеал I в алгебре $\hat{A}$ принимает значение максимального существенного состава, то он содержит ненулевой S^q -замкнутый T -идеал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) есть непосредственное следствие леммы 4.9. Утверждение в) есть переформулировка предложения 4.17. Для доказательства утверждения б) рассмотрим элемент $g \in I$, вид и свойства которого описаны в заключениях предложения 4.17 и леммы 4.9.

ЛЕММА 4.15. Пусть $q = p^k$. Кольцо S (соответственно, R) является нётеровым S^q -модулем (соответственно, R^q -модулем). Размерности колец R , S , R^q , S^q , а также колец инвариантов, отвечающих группе перестановок существенных типов, совпадают.

ТЕОРЕМА 4.1 [114]. Пусть A – s -порожденная относительно свободная алгебра и $s \geq 2$. Тогда $\text{GKdim}(A)$ зависит только от сложностного типа алгебры A и равна максимальной размерности Гельфанда–Кириллова полупрямого произведения алгебр общих матриц из $\text{Var}(A)$. Размерность Гельфанда–Кириллова такого полупрямого произведения равна сумме размерностей Гельфанда–Кириллова сомножителей. Сложностные типы алгебры A и ее подалгебры, порожденной двумя образующими, совпадают. Размерность Гельфанда–Кириллова свободной s -порожденной алгебры A из $\text{Var}(\mathbb{M}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{M}_{n_k})$ равна

$$\text{GKdim}(A) = k + (s - 1) \sum_{i=1}^k n_i^2. \quad (4.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.18. В частном случае, когда $k = 1$, получается, что размерность Гельфанда–Кириллова для s -порожденной алгебры общих матриц порядка n равна $1 + (s - 1)n^2$. Этот результат был впервые установлен К. Прочези [3]. А. В. Гришин [145], [146] дал несколько другое доказательство этого утверждения, установив равенство размерностей Гельфанда–Кириллова алгебры общих матриц и ее идеала, порожденного центральными многочленами, и размерности Гельфанда–Кириллова алгебры общих матриц со следом.

СЛЕДСТВИЕ 4.7. а) Пусть значение T -идеала I в $\hat{A}$ содержит элемент полного существенного состава. Тогда размерность Гельфанда–Кириллова T -идеала I как пространства, градуированного степенями компонент существенных клеток, равна размерности кольца S , или, что то же самое, сумме (по всем различным существенным типам клеток) размерностей Гельфанда–Кириллова для колец, порожденных частичными следами и формами.

б) Если в кольцане алгебры имеется путь C с максимальным составом и $J_C \neq 0$, то размерность Гельфанда–Кириллова алгебры A равна сумме (по всем различным существенным типам клеток) размерностей Гельфанда–Кириллова для колец, порожденных частичными следами и формами.

в) Указанная размерность есть

$$\mathrm{GKdim}(I) = k + (s - 1) \sum_i n_i^2,$$

где s – число образующих, k – число различных существенных типов клеток в пути, суммирование ведется по всем таким типам. Для пути максимального существенного состава суммирование ведется по всем существенным типам вообще, а k есть общее число существенных типов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение б) есть непосредственное следствие утверждения а), которое вытекает из следствия 4.6, конструкции кольца S и его свойств, доказанных в пп. 4.3.2. Утверждение в) следует из формулы для размерности Гельфанда–Кириллова алгебры общих матриц от s образующих: $\mathrm{GKdim}(\mathbb{M}_n^{(s)}) = n^2(s - 1) + 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.19. Теорема 4.1 и следствие 4.7 будут использованы только для доказательства локальной шпехтовости многообразий, причем достаточно ограничиться рассмотрением ситуации максимального существенного состава. Кольцо S и его действие определены в пп. 4.3.2.

Поскольку первичное кольцо R имеет размерность Гельфанда–Кириллова строго больше размерности любого своего фактора, мы имеем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.21. Пусть A' – фактор A по R -замкнутому идеалу I , и пусть A' содержит путь C' максимального существенного состава такого же, как и путь C в колчане A . Пусть $J' \neq 0$ – произвольный T -идеал в A' максимального состава⁴. Тогда $\tilde{J}'$ – R -модуль в $\tilde{A}'$ без кручения. Аналогичное утверждение верно и для полного существенного состава.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что J – точный R -модуль, кроме того, в силу лемм 4.9, 4.10 каждый элемент из J порождает точный R -модуль. Поэтому J порождает R -модуль без кручения.

СЛЕДСТВИЕ 4.8. Колчан, отвечающий алгебре A' , не содержит пути того же состава с большим индексом нильпотентности существенного радикала.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U – T -идеал в A' , все значения которого имеют максимальный состав, а также максимальную существенную радикальную степень. Тогда в силу лемм 4.9 и 4.10 идеал U вкладывается в фактор $\tilde{A}'/(I + H)$, где идеал H порожден элементами $\tilde{A}$, с ненулевым аннулятором из R . Но в этом факторе нет элементов большей существенной радикальной степени, чем в алгебре A . В самом деле, если $\tilde{A}$ локализовать по R , то из $\tilde{A}$ получится конечномерное векторное пространство над полем частных кольца R и H будет ядром соответствующего морфизма. Локализации отвечает естественный морфизм расширения A на расширение алгебры A'/H . Остается заметить, что при факторизации конечномерных алгебр индекс нильпотентности подмножества радикала не растет и новых радикальных элементов не появляется. Противоречие.

⁴Это означает, что когда мы в представимой алгебре A' снова построим колчан и связанные с ним конструкции, то все значения J будут иметь максимальный существенный состав.

ЛЕММА 4.16. *Индекс нильпотентности радикала в факторе алгебры над полем по идеалу, лежащему в радикале, не больше, чем индекс нильпотентности радикала. Если одно хорошее представление ρ' нётерова типа является фактором другого хорошего представления ρ по идеалу, лежащему в радикале, причем кольца представлений R_i совпадают и R -кручение отсутствует, то степень нильпотентности кольца, порожденного радикальными компонентами фактора, для представления ρ' не выше, чем для ρ .*

Рассмотрим случай, когда основное поле бесконечно. Доказательства леммы 4.9 и леммы 4.10 упрощаются, поскольку можно сразу переходить к линейной комбинации членов с нужным числом вхождений t_i и Q_i . Такой переход становится T -пространственной операцией.

В этом случае если множество значений f в $\hat{A}$ содержит элемент максимального состава φ , то имеется многочлен $g \in T(f)$, вид которого указан в лемме 4.9, принимающий значение φ , откуда $g|_A \neq 0$. Многочлен g есть линейная комбинация членов с одним и тем же количеством переменных из ядер Q_i . Таким образом, имеет место следующая

ЛЕММА 4.17. *Если основное поле бесконечно, то для любого T -идеала Γ существует T -идеал Γ^0 , образованный конечным числом многочленов, вид которых описан в лемме 4.9. Они получаютсся путем применения операторов выделения однородных компонент и расталкивающих подстановок к некоторым многочленам из Γ . Этот идеал R -замкнут, и в факторе A/Γ^0 многочлены из Γ не принимают значений, отвечающих максимальному составу в A . (Возможно, что в факторе такие значения невозможны.)*

Данная лемма понадобится при доказательстве теоремы 1.1 о локальной конечной базисуемости алгебр над произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом Φ .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.20. Аналогичные рассуждения, связанные с уменьшением структуры в идеалах, порожденных максимальным числом различных первичных компонент, встречаются в работе А. Р. Кемера [93], посвященной доказательству локальной представимости для бесконечного поля.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.21. Если I – T -идеал, то можно проводить рассуждение, связанное с выбором элемента общего положения, зависимостью или независимостью клеток. Можно показать, что результат правильно осуществленного (с учетом переменных разного сорта) независимого суммирования компонент A' в силу относительной свободы изоморфен A' , а после такого суммирования компоненты, относящиеся к независимым клеткам, независимы. Можно вместо этого воспользоваться предложением 4.4 о структуре соотношений, которые вынуждают зависимость между клетками. Те же рассуждения можно провести в терминах схем, поскольку обращение в нуль факторпучков происходит вне замкнутой подсхемы, связанной с уравнениями из предложения 4.4.

Из результатов работы [114] вытекает

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие ассоциативных алгебр, заданное представимой алгеброй, причем некоторому пути C полного состава отвечает ненулевой элемент⁵. Тогда:*

⁵ Иначе она вкладывается в прямую сумму своих факторов с меньшим числом типов.

а) для любого порядка, в котором существенные типы можно встретить вдоль пути C (не обязательно подряд), $\mathfrak{M}$ содержит соответствующее полупрямое произведение матричных алгебр;

б) размерность Гельфанда–Кириллова относительно свободной алгебры из $\mathfrak{M}$ при $s \geq 2$ образующих определяется по формуле

$$\mathrm{GKdim}(I) = k + (s - 1) \sum_{i=1}^k n_i^2,$$

где k – число различных существенных типов.

Утверждение а) теоремы 4.2 является обобщением одного из основных технических утверждений работ [111], [112] для случая произвольного основного поля.

4.5.2. *Локальная конечная базиримость.* Пусть H – произвольный T -идеал. Через $P_1(H)$ обозначим результат применения к H указанной выше системы расталкивающих замен с произвольной последующей специализацией переменных.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.22. Пусть $\hat{J}_C$ – идеал в алгебре $\hat{A}$, порожденный элементами максимального состава, $J_C = A \cap \hat{J}_C$. Пусть I – существенно однородный (см. определение 3.8) T -идеал алгебры A такой, что $I \cap J_C = 0$. Тогда из представимости идеала I в алгебре A/J_C (т.е. представимости $I + J_C$) вытекает представимость идеала I в алгебре A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что соответствующий T -идеал $\hat{I}$ в алгебре $\hat{A}$ имеет нулевое пересечение с $\hat{J}_C$. В противном случае можно применить систему замен t_i и получить ненулевой многочлен. Этот многочлен не обращается в нуль в алгебрах $\hat{A}$ и A^{cl} , и так как A и $\hat{A}$ имеют одинаковый запас тождеств, то он не обращается в нуль и в алгебре A . С другой стороны, этот многочлен с неизбежностью лежит в J_C . Рассмотрим алгебру $\tilde{A}$, расширяющую $\hat{A}$ путем добавления в основное кольцо следов, относящихся к клеткам. Алгебра $\tilde{A}$ является алгеброй нётерового типа. Элементам из $\hat{J}_C$ отвечают суммы членов полного состава, а элементам из $\hat{I}$ – неполного состава. Кроме того, следы не имеют градуировки, относящейся к радикальным переменным, а элементы из $\hat{A} \cap \hat{J}_C$ этой градуировкой и определяются. Поэтому в алгебре $\tilde{A}$ пересечение соответствующих идеалов по-прежнему равно нулю. (Отметим, что $\tilde{I}$ уже может не быть T -идеалом, даже если он как множество совпадает с I .) Пусть $I' = \tilde{I} \cap \hat{A}$. Тогда I' представим и $I' \supseteq \hat{I}$. Ограничение точного представления $\hat{A}/I'$ на $\hat{J}_C$ есть вложение. Поэтому в $\hat{J}_C$ (а значит, и в J_C) нет препятствия к представимости I и мы можем осуществить редукцию к факторалгебре A/J_C .

Отметим, что если условие “однородности по существу” не использовать, то рассуждения, связанные с переходом к алгебре $\hat{A}$, нельзя осуществить: при расширении основного кольца старшие члены в линейных комбинациях могут выделиться. Тем не менее, расширение происходит формами от полупростых элементов, не имеющих существенной градуировки. Поэтому, рассуждая, как в доказательстве предложения 4.22, и применяя лемму 4.10, б), получим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.23. Пусть $\hat{J}$ – идеал в алгебре $\hat{A}$, порожденный элементами полного состава, $J = A \cap \hat{J}$. Пусть I – произвольный T -идеал алгебры A такой, что $I \cap J = 0$. Тогда если $I + J$ представим, то I также представим.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.22. Основные утверждения еще не вытекают из предложения 4.23 непосредственно, поскольку нет информации об идеалах, содержащихся в J . Эти идеалы могут расширяться при морфизмах в алгебру нетернового типа.

Особо надо разобрать случай, когда существенные радикальные компоненты отсутствуют и анфилада одна (см. пп. 4.4.2). В этом случае мы умножаем многочлен f на полином Капелли C_{n^2} , после чего “приобретаем право умножать на следы” и рассуждаем, как выше, используя результат следствия 4.5.

Кроме того, мы имеем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.24. а) Пусть Γ – T -идеал, I^0 – максимальный R -замкнутый T -идеал, содержащийся в Γ . Тогда если $H_I = I \cap J_C \neq 0$, то $I^0 \neq 0$.

б) Пусть A – алгебра, удовлетворяющая описанным в предложении 4.22 свойствам, C – максимальный путь, I – T -идеал этой алгебры, причем I не вкладывается в образ A при факторизации по элементам максимального состава. Тогда $H_I = I \cap h_C \neq 0$ и существует R -замкнутый T -идеал $I^0 \subseteq I \cap h_C$ такой, что $I^0 \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $H_I \neq 0$. Поэтому утверждение б) следует из утверждения а). Ясно также, что идеал H_I однороден по существу. Остается применить лемму 4.9 к H_I . При этом получится R -замкнутый T -идеал, состоящий из элементов максимального существенного состава.

Из предложений 4.24, 4.23 и следствия 4.8 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4.9. Пусть I – произвольный T -идеал, $I^0 \subset I$ – максимальный R -замкнутый идеал, содержащийся в J_C . Тогда I^0 представим и в факторалгебре $A' = A/I^0$ имеет место равенство $I \cap J_C = 0$. (Предполагается, что C – путь максимального существенного состава, такого же, как и в A . Если такого пути в факторе A' нет, то идеал J_C полагается равным нулю в A' .)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представимость I^0 очевидна. Пусть $\pi(I) \cap J_C \neq 0$ в алгебре A' . Рассмотрим алгебру $A'' = A'/\text{Tor}_R(A')$, где $\text{Tor}_R(A')$ – множество элементов из A' , аннулируемых ненулевым элементом из R . Структура склейки клеток, а значит, и существенные составы в алгебрах A'' и A находятся в естественном взаимно однозначном соответствии. В силу следствия 4.8 идеалы, отвечающие путям полного существенного состава в алгебрах A' и A'' , изоморфны. Поэтому в силу предложения 4.24 и в алгебре A'' имеется ненулевой R -замкнутый T -идеал $(I')^0 \subseteq \pi(I) \cap J_C$. Но тогда $\pi^{-1}((I')^0) \supset \pi^{-1}(0) = I^0$. Кроме того, $\pi^{-1}((I')^0)$ вкладывается в $\pi^{-1}(\pi(I)) = I$ и является R -замкнутым, что противоречит максимальнойности I^0 .

Из предложения 4.24 и следствия 4.9, а также из леммы 4.10 вытекает

ЛЕММА 4.18. Пусть T -идеал I в алгебре $\hat{A}$ содержит элемент максимального (в частном случае полного) существенного состава. Тогда существует T -идеал $0 \neq I^0 \subseteq I$, все значения которого являются элементами максимального состава.

4.5.3. *Окончание доказательства локальной шпехтовости.* В конечно порожденной PI-алгебре выполняются все тождества некоторой конечномерной алгебры. Рассмотрим промежуточный носитель $(\hat{A}, \hat{A})$ (см. п. 2.4) и покажем, что любая возрастающая цепочка значений T -идеалов $\{\Gamma_i\}$ в алгебре $\hat{A}$ стабилизируется. При этом (разлагая алгебру $\hat{A}$ в сумму идеалов с нулевым пересечением) можно считать, что среди путей в соответствующем колчане максимальный состав определен однозначно и не существуют несравнимые максимальные составы.

Предположим противное. Пусть $\{\Gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$ — строго возрастающая цепочка таких T -идеалов. Пусть C_j — пути максимального состава, отвечающие ненулевым произведениям (они могут различаться порядком прохождения клеток). Количество таких путей конечно, а состав их одинаков. Следовательно, одинаковы и кольца R_i , соответствующие этим путям.

Ясно, что соответствующая возрастающая цепочка $\{\Gamma_i^0\}_{i=1}^{\infty}$ максимальных R -замкнутых T -идеалов Γ_i^0 , содержащихся в Γ_i (значения которых отвечают пути максимального существенного состава и максимальной степени существенного радикала), стабилизируется на некотором идеале $\Gamma_{i_0}^0$. Этот идеал представим (ибо он также является идеалом в алгебре нётерова типа $A[R]$), так что можно перейти к фактору $A' = A/\Gamma_{i_0}^0$. В этой новой алгебре (в силу предложения 4.24, следствия 4.9 и леммы 4.18) для всех i значения полиномов из Γ_i не лежат в J_{C_i} . Но тогда мы имеем строго возрастающую цепочку T -идеалов в факторе $A'/J_C(A')$. Эта алгебра имеет меньший максимальный состав пути (чем состав C). В силу индукции по максимальному составу пути можно считать, что $A'/J_C(A')$ представимо, и это завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.23. Пусть сумма и пересечение T -идеалов Γ и I представимы. Однако их расширения в алгебре $\hat{A}$ могут иметь дополнительное пересечение. В случае конечного поля расталкивающие замены могут обеспечить только полноту состава. Редукционные рассуждения обеспечивают только локальную шпехтовость, а представимость надо доказывать отдельно. Приведенное рассуждение локальную представимость не доказывает. Представимость идеала Γ в факторе A/J_C еще не влечет представимости Γ в A из-за эффектов неоднородности: при переходе к $\hat{A}$ с появлением новых коэффициентов старшие члены могут выделяться, хотя в алгебре A (и в $\hat{A}$) они не выделялись. Было бы интересно привести контрпример к такому наивному доказательству представимости, т. е. пример T -идеала Γ в A такого, что

$$\Gamma \cap J_C = 0 \quad (\text{в } A), \quad \text{но} \quad \tilde{\Gamma} \cap \tilde{J}_C \neq 0 \quad (\text{в } \tilde{A}).$$

Действительно, если основное поле бесконечно, то такого рода эффектов нет и локальная представимость получается без специального рассуждения.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.24. Таким путем, однако, можно доказать представимость существенно однородных T -идеалов в A (надо только проследить, чтобы существенная однородность при факторизации не нарушалась).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.25. Доказательство конечной базирюемости, основанное на использовании только “полупростых” подстановок, в положительной характеристике осуществить невозможно.

4.6. Вывод локальной представимости из локальной шпехтовости.

Чтобы вывести локальную представимость из локальной шпехтовости, достаточно для любого T -идеала $\Gamma \neq 0$ найти представимый T -идеал $\Gamma^0 \neq 0$, содержащийся в Γ . Поскольку спуск в силу уже установленной локальной шпехтовости конечен, мы получим требуемый результат. Кроме того, T -идеал Γ можно считать заданным квазилинейными тождествами.

Расталкивающие подстановки действуют через граничные операторы, на каждой существенно однородной компоненте действие устроено по-своему, и с умножением в алгебре эти действия не согласованы. Поэтому будет рассматриваться действие на T -идеале крайних элементов, который не выдерживает умножений на граничные операторы. Затем будет построено кольцо операторов, которые выражаются, с одной стороны, через подстановочное действие, а с другой – через умножения на формы. Это и будет искомым кольцом S .

Конструкция представимого экстремального T -идеала Γ^0 осуществляется следующим образом. Алгебра $\hat{A}$ расширяется с помощью ассоциативно-коммутативного кольца R до алгебры $\tilde{A} = \hat{A}[R]$, при этом все частичные следы и формы будут целы над R . Тем самым $\tilde{A}$ будет нётеровым R -модулем. Алгебры A и $\hat{A}$ будут в нее вложены, и будет построен ненулевой R -замкнутый T -идеал $\Gamma^0 \subseteq \Gamma$. Тогда его расширение до идеала в $A'' = A[R]$ совпадает с ним самим. Таким образом, идеал Γ^0 будет представим, а факторалгебра A/Γ^0 вкладывается в фактор $\tilde{A}/\Gamma^0$. Отметим, что идеал Γ^0 в алгебре A'' хотя и совпадает с T -идеалом Γ^0 алгебры A как множество, но T -идеалом в A'' , вообще говоря, не является. (Подстановки вида $t \rightarrow \lambda t$ способны разделять слагаемые, которые в Γ^0 исходно не разделены.)

Нам понадобится еще одно понятие.

4.6.1. Крайние элементы. Построим идеал крайних элементов, который аннулируется умножением на существенные радикальные компоненты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.6. Назовем элемент $x \in \hat{A}$ *крайним*, если результат его умножения на существенный элемент (с любой стороны) равен нулю. Аналогично определяются элементы *крайний слева* и *крайний справа*.

Приведем равносильное определение: результат умножения элемента x на любой элемент из идеала, порожденного существенными (радикальными) элементами, равен нулю.

Примером крайнего элемента может служить элемент максимального существенного состава, но не только. В силу эффекта интерференции путей могут быть элементы, отвечающие прохождению путей с разными концами, которые сами не являются крайними, но их некоторая линейная комбинация является крайней (при умножении на существенный элемент концы сливаются и пути начинают интерферировать).

Из свойства нильпотентности радикала следует, что для любого ненулевого идеала I множество крайних элементов из него также образует ненулевой идеал, обозначаемый I^B . Отметим, что множество крайних элементов T -идеала, вообще говоря, T -идеалом не является. Более того, если определить понятие “крайний элемент” через умножение на произвольный элемент из радикала, то такие “псевдокрайние” элементы T -идеала в некоторой алгебре могут порождать исходный T -идеал (например, в случае расширения алгебр матриц центральными нильпотентами). Вероятно, подобное возможно и для таких

“псевдокрайних идеалов” в алгебре $\hat{A}$ в силу эффектов неоднородности. Тем не менее, имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.25 (о T -идеале крайних элементов). *Для любого T -идеала $I \neq 0$ алгебры A существует ненулевой T -идеал $J \subseteq I$, состоящий из крайних элементов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем действовать в алгебре $\hat{A}$. Прежде всего отметим, что если I содержит не крайний элемент, то, умножив его на произведение существенных элементов, мы получим крайний элемент y , лежащий в сумме существенных градуированных компонент.

Упорядочим компоненты существенной градуировки и их линейные комбинации. *Порядковым типом линейной комбинации* будем считать порядковый тип младшего существенно однородного члена, входящего в нее с ненулевым коэффициентом, а *порядковым типом T -идеала* – минимальный порядковый тип его элемента. Степени существенных градуировок упорядочим так, как был упорядочен состав путей. Для этого мы будем пользоваться набором характеристик, описанных ниже. Сначала сравнивается первая характеристика, при совпадении – вторая и т. д. Приведем список характеристик:

- 1) количество входящих в существенные компоненты типов самых больших клеток;
- 2) количество существенных компонент, связанных с клетками самого большого типа (количество граничных операторов, т. е. проходимых радикальных элементов);
- 3) характеристики 1) и 2) для клеток, следующих по величине, затем следующих и т. д.

Предложение вытекает из леммы 4.10, примененной к T -идеалу, порожденному элементом максимального типа из I . Для этого надо рассмотреть полином типа ϕ из этой леммы с максимально возможным числом переменных, образующих ядра Q_i . Если его умножение на существенный смешанный элемент даст ненулевой результат, то, применив процесс расталкивания из леммы 4.10 к произведению ϕQ_i , можно построить многочлен с большим числом образований Q_i и получить противоречие с исходной максимальной, что завершит доказательство.

Приведем более явное доказательство предложения 4.25 без использования леммы 4.10. Рассмотрим T -идеал J максимального типа, содержащийся в I . Пусть $q = p^k > c(A)$, $\phi \in J$ – ненулевой полином.

Ясно, что достаточно построить T -идеал из элементов, крайних с одной стороны. Тогда, построив T -идеал, состоящий из крайних слева элементов, а по нему – T -идеал крайних справа элементов, мы получим искомый T -идеал. В силу симметрии достаточно установить существование T -идеала, крайнего справа.

Будем исследовать алгебру A^{cl} , являющуюся замыканием по Зарискому алгебр A и $\hat{A}$. В ней коэффициенты при ненулевых существенных компонентах обратимы. Кроме того, множество значений центральных полиномов содержит пирсовские компоненты единицы, относящиеся к группе похожих клеток, а множество значений полиномов Q_i покрывает соответствующие операторы перехода. (Для краткости обозначим полиномы, введенные в п. 3.6, через $Q_k^{r,\mu}$, $Q_k^{l,\mu}$, Q_{k_1,k_2}^μ , $P_{q',q''}^\mu$.)

Пусть Z_{n_1} – центральный полином, отвечающий существенным клеткам максимального размера, причем вместо одной из переменных подставлен полином вида $y^{p^k} - y^{p^s}$, а числа k и s выбраны так, чтобы на клетках конечного типа он обратился в нуль. Тогда значения полинома $[x, Z_{n_1}^q]$ лежат в идеале, порожденном максимальным смешанным элементом. Поэтому результат умножения полинома ϕ на элемент типа $[x, Z_{n_1}^q]$ обращается в нуль. С другой стороны, множество значений $[x, Z_{n_1}^q]$ в A^{cl} содержит компоненты перехода данного типа, отвечающие минимальной степени однородности. Будем последовательно умножать ϕ справа на полиномы, не обращающиеся в нуль на клетках максимального существенного размера и обращающиеся в нуль на остальных клетках. Имеют место две возможности.

1) Процесс можно организовать так, что результат никогда не будет равен нулю. В этом случае мы через некоторое число шагов получим линейную комбинацию членов из левого идеала, порожденного специализациями из существенных клеток максимального размера. Результат любого правого умножения такого элемента на элемент, левая обкладка которого имеет другой тип, равен нулю. С другой стороны, смешанный элемент с обкладкой такого типа в алгебре A^{cl} согласно предложению 3.18 принадлежит множеству значений соответствующего Q_i . Но в результате умножений на такой полином получается идеал строго большего порядкового типа. Поэтому результат такого умножения также равен нулю. Мы получили элемент, крайний справа.

2) В результате процесса получится многочлен ϕ' , который при умножении справа на любой такой полином обращается в нуль. Тогда ϕ' порождает модуль M над фактором A^{cl} по идеалу J , порожденному старшими клетками. Этот модуль также является левым идеалом.

В случае 2) перейдем к фактору A по таким компонентам и продолжим процесс по индукции, рассматривая M как A/J модуль. В итоге получится элемент крайнего справа T -идеала, который нам и нужен.

4.6.2. Локальная представимость алгебр. Мы будем пользоваться результатами пп. 4.3.2. Локальная представимость вытекает из следствия 4.3, а также предложений 4.23, 4.20. В самом деле, если алгебра $\hat{A}$ не содержит существенных смешанных элементов, то для любого T -идеала Γ существование представимого идеала $\Gamma^0 \subseteq \Gamma$, дающего индукционный спуск, следует из предложения 4.20. Таким образом, можно считать, что существенные смешанные элементы присутствуют. В силу предложения 4.25 можно считать, что множество значений Γ состоит из крайних элементов.

Прежде всего, в силу следствия 4.3 для доказательства представимости T -идеала Γ достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда область значений этого идеала не содержит элемент полного существенного состава. Но тогда в силу леммы 4.10 его значения в $\hat{A}$ не содержат таких элементов, стало быть, его значения в A (и в $\hat{A}$) не содержат компонент полного существенного состава, а в алгебре $\hat{A}$ соответствующий идеал тоже не содержит таких компонент. Следовательно, в силу предложения 4.23 в идеале J , порожденном элементами полного существенного состава, нет препятствия к представимости Γ и можно перейти к фактору по J . Мы завершили доказательство локальной конечной базисуемости и локальной представимости многообразий алгебр, т. е. доказательство основной теоремы 1.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.26. В однородном случае в качестве крайнего идеала берутся элементы максимального состава из максимально возможной степени радикала. В неоднородном случае такие элементы не выделяются. Более того, может наблюдаться интерференция путей с различной (несущественной) степенью радикальной компоненты. Поэтому для нас ту же роль играет понятие *полного существенного состава*. Иными словами, для каждого существенного типа клетки нас интересует наличие смешанной радикальной компоненты с такой обкладкой. Это понятие можно сформулировать в терминах тождеств.

§ 5. Общие кольца и алгебры над коммутативным кольцом

Данный параграф посвящен распространению результатов из § 4 на случай колец и алгебр над нётеровым ассоциативно-коммутативным кольцом Φ . Поскольку n -кратное сложение любого элемента с самим собой определено, можно считать, что Φ содержит 1, следовательно, содержит $\mathbb{Z}_n$. Далее $N^\bullet(\Phi)$ обозначает аннулятор нильрадикала $N(\Phi)$ кольца Φ , $c(\Phi)$ – индекс нильпотентности $N(\Phi)$. Вначале будет установлена локальная шпехтовость, а затем с ее помощью – локальная представимость многообразий колец.

5.1. Локальная конечная базირуемость многообразий. Сначала рассмотрим случай PI-колец, т.е. когда идеал K в кольце Φ , порожденный коэффициентами тождеств, содержит единицу, а затем общий случай будет сведен к данному.

5.1.1. Случай PI-колец. Схема доказательства локальной конечной базируемости следующая. Для алгебр над полем локальная шпехтовость установлена. В силу нётеровости Φ можно считать, что для всех факторов Φ локальная шпехтовость соответствующих алгебр также установлена. Промежуточный носитель (см. п. 2.4) будет представляться как подпрямая сумма своего фактора по модулю кручения и фактора, являющегося (Φ/I) -алгеброй для некоторого собственного идеала I кольца Φ . Фактор по модулю кручения естественным образом вкладывается в алгебру над F – полем частных кольца Φ – и хорошо изучен в § 4. В этом факторе ищется экстремальный идеал и процедура повторяется. Различие между алгеброй над кольцом и алгеброй над полем частных этого кольца связано с (Φ/I) -алгеброй – модулем кручения, – для которой цепочки T -идеалов стабилизируются. Сформулируем очевидную, но полезную лемму.

ЛЕММА 5.1. Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие Φ -алгебр, вообще говоря, не ассоциативных, Φ – ассоциативно-коммутативное кольцо, $x \in \Phi$, B – относительно свободная алгебра из $\mathfrak{M}$. Тогда:

- а) пространство xB изоморфно фактору алгебры B (а также алгебры $\Phi/\text{Ann}(x) \otimes B$) по некоторому T -идеалу;
- б) если любое многообразие $(\Phi/\text{id}(x))$ -алгебр из $\mathfrak{M}$ локально конечно базируемо и любое многообразие $(\Phi/\text{Ann}(x))$ -алгебр из $\mathfrak{M}$ локально конечно базируемо, то многообразие Φ -алгебр из $\mathfrak{M}$ также локально конечно базируемо (т.е. локально шпехтово);
- в) для любого идеала $I \triangleleft \Phi$ множество $\{g \mid gI = 0\}$ образует T -идеал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если xf равно нулю, то в силу относительной свободы B нулю равно и xg для любого образа g элемента f при эндоморфизме B (т.е. при

любой подстановке). Поэтому аннулятор x есть T -идеал, фактору по которому изоморфно пространство xB . Утверждение а) доказано.

Аналогично доказывается утверждение в). Оператор умножения на x осуществляет отображение алгебры B на пространство xB , причем образы и прообразы T -идеалов снова являются T -идеалами. Это отображение можно также рассматривать как морфизм алгебры $B/\text{Ann}(x)$. Поэтому любая возрастающая цепочка T -идеалов в пространстве xB стабилизируется. С другой стороны, любая возрастающая цепочка T -идеалов в факторе B/xB также стабилизируется.

Из леммы 5.1 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 5.1. а) Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие Φ -алгебр, вообще говоря, не ассоциативных, Φ – ассоциативно-коммутативное кольцо, $\overline{\Phi} = \Phi/N(\Phi)$. Тогда если любое многообразие $\overline{\Phi}$ -алгебр из $\mathfrak{M}$ локально конечно базлируемо, то многообразие Φ -алгебр из $\mathfrak{M}$ также локально конечно базлируемо (т.е. локально шпехтово).

б) Локальная шпехтовость $\mathfrak{M}$ следует из локальной шпехтовости $\mathfrak{M}$ для всех первичных факторов кольца Φ .

Таким образом, доказательство конечной базлируемости свелось к рассмотрению случая алгебр над первичным кольцом. Поскольку конечное первичное кольцо $\overline{\Phi}$ является полем, для алгебр над конечным кольцом локальная шпехтовость установлена.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Аналогичные рассуждения не приводят к доказательству локальной представимости. Легко привести пример идеала, представимого в $B/N(\Phi)B$, но не представимого в B . При гомоморфизмах в алгебры нётероваго типа могут появляться дополнительные компоненты ядер из xB . Хорошо бы привести соответствующий пример для T -идеалов. Можно ли на этом пути построить локально шпехтовое, но не локально представимое многообразие (неассоциативных алгебр)?

Отметим, что если идеал I представим в $A/N(\Phi)A$ и $x \in N^\bullet(\Phi)$, причем пространство xA изоморфно $A/N(\Phi)A$, то идеал xI также представим в A . Он изоморфен идеалу I как подмодуль в xA . Если изоморфизм пространств xA и $A/N(\Phi)A$ имеет место для всех $x \in N^\bullet(A)$, то идеал $N^\bullet(I)$ также представим в A . Следовательно, его фактор $\overline{\Phi}$ по нильрадикалу $N(\Phi)$ является первичным кольцом. Если Φ конечно, то этот фактор является полем. Коммутативные кольца с первичным фактором по радикалу называются *примарными*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Локализация относительно свободной алгебры (не обязательно ассоциативной) по произвольному множеству S кольца Φ относительно свободна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай, когда множество S порождено одним элементом s . Отсюда будет следовать утверждение для случая конечно порожденных мультипликативных систем. Поскольку многочлен имеет конечное число коэффициентов и входящих в него переменных, то будет доказано утверждение и для общего случая. Кроме того, рассмотрев фактор по модулю кручения (см. утверждение в) леммы 5.1), можно считать, что s не является делителем нуля в Φ и A .

Достаточно показать, что тогда множества тождеств в исходной и локализованной алгебрах совпадают. Для этого достаточно показать, что величина $P(s^{-k_1}x_1, \dots, s^{-k_l}x_l)$, где $k_i \in \mathbb{N}$, выражается как линейная комбинация с коэффициентами из $\mathbb{Z}[s, s^{-1}]$ через полиномы вида $P(s^{r_1}x_1, \dots, s^{r_l}x_l)$, $r_i \in \mathbb{N}$. Полагая все переменные, кроме одной, константами, с помощью очевидной индукции мы приходим к случаю многочленов от одной переменной. Таким образом, предложение свелось к следующей чисто комбинаторной лемме.

ЛЕММА 5.2. Пусть $\vec{e}_t$, $t = 1, \dots, n$, – набор векторов, $\Psi = \mathbb{Z}[S, S^{-1}]$ и

$$\vec{f}_k = \sum_{t=1}^n S^{kt} \vec{e}_t, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда вектор $\vec{f}_{-1}$ лежит в Ψ -модуле M^+ , порожденном набором $\{\vec{f}_k\}_{k \geq 0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кольцо Ψ нётерово, и векторы $\vec{f}_k$ лежат в нётеровом модуле N , порожденном $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$, поэтому Ψ -модули M , M^+ и M^- , порожденные $\{\vec{f}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $\{\vec{f}_k\}_{k \geq 0}$ и $\{\vec{f}_k\}_{k \leq 0}$ соответственно, нётеровы. Значит, для некоторого $m \in \mathbb{N}$ модуль M^+ порождается набором векторов $\{\vec{f}_k\}_{k=0}^m$.

Пусть ρ – инволютивный автоморфизм Ψ такой, что $\rho(S) = S^{-1}$, $\rho|_{\mathbb{Z}} = \text{id}$, $\tau_k: N \rightarrow N$ – такое отображение, что $\tau_k(S^{it}\vec{e}_i) = S^{(k-t)i}\vec{e}_i$ и для любого $\alpha \in \Psi$ выполнено $\tau_k(\alpha\vec{u}) = \rho(\alpha)\tau_k(\vec{u})$.

Отображения τ_k корректно определены и являются полулинейными инволюциями $N \rightarrow N$. Кроме того, $\tau_k(\vec{f}_i) = \vec{f}_{k-i}$, следовательно, $\tau_k(M) = M$. Далее, отображение τ_m переводит в себя множество векторов $\{\vec{f}_k\}_{k=0}^m$, и потому $\tau_m(M^+) = M^+$.

С другой стороны, τ_m должно переводить M^+ в Ψ -модуль, порожденный $\{\vec{f}_k\}_{k=-\infty}^m$ и содержащий M^- , а также $\Psi[\{\vec{f}_k\}_{k=0}^m] = M^+$, поэтому он совпадает с M . Таким образом, $\tau_m(M^+) = M$, $M^+ = \tau_m^2(M^+) = \tau_m(M) = M$. Это означает, что через $\{\vec{f}_k\}_{k=0}^m$ выражаются все $\vec{f}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, т. е. утверждение леммы доказано.

Из предложения 5.1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Пусть Γ – T -идеал Φ -алгебры A , $\mathbb{F}$ – поле частных кольца Φ , Γ' – соответствующий T -идеал в $\mathbb{F} \otimes A$, $\Gamma'' = \Gamma' \cap A$. Тогда Γ'' является T -идеалом и его образ в A/Γ лежит в модуле Φ -кручения.

Назовем модулем существенного кручения подмодуль $\text{Tor}_{\text{Ess}}(M) \subseteq M$, состоящий из элементов с аннулятором не из $N(R)$; $\text{Tor}_{\Phi}(M)$ есть модуль кручения для кольца Φ . Следующее утверждение аналогично лемме 4.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. а) Пусть M – нётеров модуль над первичным нётеровым кольцом R , $\text{Tor}(M)$ – подмодуль кручения. Тогда M вкладывается в прямую сумму своих факторов $M/I \cdot M \oplus M/\text{Tor}(M)$ для некоторого собственного идеала I кольца R .

б) Если при этом $R = \Phi \otimes R_0$ есть тензорное произведение нётеровых первичных колец с единицей, то M вкладывается в прямую сумму своих факторов $M/I \cdot M \oplus M/\text{Tor}_{\Phi}(M)$ для некоторого собственного идеала I кольца Φ .

в) В условиях утверждения а) пусть R – нётерово кольцо без идеалов с нулевым пересечением, так что его фактор по нильрадикалу $\bar{R} = R/N(R)$ первичен. Тогда M вкладывается в прямую сумму своих факторов $M/I \cdot M \oplus M/\text{Tor}_{\text{Ess}}(M)$ для некоторого собственного идеала I кольца R .

г) В условиях утверждения а) пусть R – произвольное нётерово кольцо, $\bar{R}_i$ – первичные кольца и $R/N(R) = \bigoplus \bar{R}_i$, $R_i = \pi^{-1}(\bar{R}_i)$. Тогда M вкладывается в прямую сумму своих факторов $M/R_i^k M$ для некоторого натурального k .

д) Если все указанные в условиях утверждений а)–г) нётеровы кольца эффективно заданы, то все конструкции из утверждений а)–г) также эффективно вычислимы.

Предложение 5.2 при рассуждениях, связанных с промежуточным носителем, позволяет сводить рассмотрения к случаю алгебр над фактором Φ (для которых локальную шпехтовость и локальную конечную базлируемость можно считать доказанными по индукционному предположению) и строить экстремальные идеалы в алгебрах над полем частных кольца Φ (а случай алгебр над полем нами уже разобран).

Из леммы 4.17 и предложений 5.2, 5.1 непосредственно следует

ЛЕММА 5.3. Пусть $\mathbb{F}$ – бесконечное поле частных кольца Φ , A – Φ -алгебра без Φ -крючения, R – кольцо, порожденное следами, $\hat{A} = A[R]$ – алгебра нётероваго типа, Γ – T -идеал в A , $\Gamma_{\mathbb{F}} \equiv \mathbb{F} \otimes \Gamma$ – соответствующий T -идеал в алгебре $\mathbb{F} \otimes A$. Тогда существует R -замкнутый T -идеал Γ^0 в A такой, что T -идеал $\Gamma_{\mathbb{F}}^0 \equiv \mathbb{F} \otimes \Gamma^0$ удовлетворяет условиям леммы 4.17. Кроме того, существует такая константа $\lambda \in \Phi \setminus \{0\}$, что при всех $x \in \Gamma^1 = \Gamma_{\mathbb{F}}^0 \cap A$ имеет место включение $\lambda x \in \Gamma^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать существование такого $\lambda \in \Phi \setminus \{0\}$, что при всех $x \in \Gamma_{\mathbb{F}}^0 \cap A[R]$ имеет место включение $\lambda x \in \Gamma^0$. Существование такой константы вытекает из утверждения б) предложения 5.2.

Следующее утверждение аналогично леммам 4.9, 4.10 для поля нулевой характеристики и является переформулировкой второй леммы Кемера [119] (см. определение 2.10).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3 [91], [106], [115], [130]. Пусть A – относительно свободная алгебра над полем характеристики нуль. Тогда A вкладывается в прямую сумму $B_0 \oplus B_1$. При этом $c(B_0) = d(A)$, размерность полупростой части B_0 есть $b(A)$ и сложностный тип алгебры B_1 меньше сложностного типа алгебры A , т. е. $(b(A), d(A)) \succ (b(A), d(A))$. Если $(b(A), d(A)) \succ (b(A, \Gamma), d(A, \Gamma))$, то T -идеал Γ принадлежит тождествам алгебры B_0 .

Завершим доказательство локальной конечной базлируемости для многообразий ассоциативных алгебр над произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом Φ , идеал коэффициентов тождеств которых содержит единицу кольца Φ . Кольцо Φ нётерово, и в силу индуктивных соображений конечную базлируемость для алгебр над всеми факторами кольца Φ можно считать установленной. Кроме того, локальная конечная базлируемость над кольцом Φ сведена к локальной конечной базлируемости над его первичными факторами, и потому Φ можно считать первичным. Пусть F – поле частных кольца Φ . Если Φ – поле, то конечная базлируемость уже доказана, поэтому можно считать,

что $F \neq \Phi$ и кольцо Φ бесконечно. Алгебру $F \otimes A$ назовем Φ -локализацией алгебры A .

Мы исследуем пару (Γ, A) , где $\Gamma \supseteq T(A)$, алгебра A имеет нётеров тип над кольцом представления $\Phi \otimes R$. (Поскольку Φ бесконечно, мы рассматриваем не пары алгебр $(A, \hat{A})$, а только одну алгебру A .) В силу предложения 5.2 можно считать, что A – точный Φ -модуль без кручения, и тогда $\text{Var}(F \otimes A) = \text{Var}(A)$. Кроме того, можно считать, что в A нет R -замкнутых идеалов с нулевым пересечением.

Суммируя результаты из п. 4.3 и пп. 4.4.1 (для случая положительной характеристики) и применяя лемму 5.3, в случае, когда $\text{Char}(F) = 0$, имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. Пусть A – относительно свободная алгебра над первичным ассоциативно-коммутативным кольцом Φ без Φ -кручения, Γ – произвольный T -идеал в алгебре A , $\hat{\Gamma}$ – Φ -замыкание Γ . Тогда $\hat{\Gamma}$ представим. Кроме того, существует представление алгебры A над нётеровым кольцом R , порождающее нётеров R -модуль и такое, что:

- а) алгебра A представлена как алгебра общих элементов для некоторого колчана G ;
- б) кольцо R цело над множеством форм от мономов степени не выше $\deg(A)$, составленных из образующих алгебры A ;
- в) множество форм от мономов степени не выше $\deg(A)$, составленных из образующих алгебры A , цело над R ;
- г) пересечение Γ с максимальным T -идеалом, отвечающим элементам полного состава, либо равно нулю, либо содержит ненулевой R -замкнутый T -идеал Γ^0 , являющийся нётеровым R -модулем.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Аналогичное утверждение для слабых тождеств пары, состоящей из алгебры Ли алгебры $(p \times p)$ -матриц с нулевым следом и обертывающей матричной алгебры, неверно: кольцо форм не будет целым над кольцом R , возникающим из подстановок. Соответственно, в факторгруппе обертки по алгебре Ли наблюдается p^k -кручение для любого k .

Пусть A – алгебра над кольцом Φ , $I \triangleleft A$ – идеал в A . Назовем Φ -замкнутым идеал I , если в факторе A/I нет Φ -кручения. Пусть Γ_{cl}^0 – Φ -замыкание Γ^0 в алгебре A . Ясно также, что идеал I_0 является R -замкнутым ($I^0 \subseteq I$ определяется аналогично $\Gamma^0 \subseteq \Gamma$, см. предложение 5.3). В силу представимости T -идеала Γ^0 из предыдущих результатов настоящего подпункта следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. Существует константа $\gamma \in \Phi \setminus 0$, аннулирующая Γ_{cl}^0/Γ^0 . При этом в факторе A/Γ_{cl}^0 нет Φ -кручения и A/Γ^0 вкладывается в сумму $A/\lambda \cdot A/\Gamma^0 \oplus A/\Gamma_{cl}^0$.

Пусть $\{\Gamma_i\}_{i=1}^\infty$ – неуклонно возрастающая цепочка T -идеалов в алгебре A (т. е. $\Gamma_i \subsetneq \Gamma_{i+1}$ для бесконечно многих i). Тогда имеет место одна из следующих возможностей:

1) $\Gamma_i \cap I_0 = 0$ для всех i , и тогда можно перейти к фактору A/I_0 , т. е. к случаю меньшего сложностного типа;

2) $\Gamma_i \cap I_0 \neq 0$ для всех $i \geq i_0$, и тогда:

а) либо цепочке $\{\Gamma_i\}_{i=i_0}^\infty$ отвечает неуклонно возрастающая цепочка T -идеалов $\{\Gamma_i \cap (\Gamma_{i_0}^0)_{cl}\}_{i=1}^\infty$, а стало быть, и цепочка T -идеалов в алгебре $(A/\lambda) \cdot A$ для некоторого $\lambda \neq 0$, аннулирующего $\Gamma_{i_0}^0/(\Gamma_{i_0}^0)_{cl}$, и можно перейти к фактору

$(A/\lambda) \cdot A$, т. е. к Φ' -алгебре, $\Phi' = (\Phi/\lambda) \cdot \Phi$, для которой локальную шпехтовость можно считать установленной;

б) либо $\{\Gamma_i\}_{i=i_0}^\infty$ – неуклонно возрастающая цепочка T -идеалов в относительно свободной алгебре $A' = A/(\Gamma_{i_0})_{cl}$, которая не имеет Φ -кручения и Φ -локализация которой порождает собственное подмногообразие многообразия, порожденного Φ -локализацией алгебры A , тем самым, от алгебры A мы перешли к алгебре A' , а в силу уже установленной локальной конечной базирюемости многообразий алгебр над полем (теорема 1.1) такие переходы могут произойти только конечное число раз.

Доказательство локальной конечной базирюемости многообразий алгебр над произвольным нётеровым ассоциативно-коммутативным кольцом в случае, когда идеал коэффициентов тождеств содержит единицу (т. е. основных теорем 1.2, 1.3 для этого случая), завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Когда F бесконечно, то вместо расталкивающих замен для построения экстремального идеала можно воспользоваться конструкцией А. Р. Кемера из работы [93].

5.1.2. Несобственные тождества. Нильпотентность радикала и финитная аппроксимируемость. Теперь рассмотрим несобственный случай, когда идеал K в кольце Φ , порожденный коэффициентами тождеств, не содержит единицы (тождество *собственное*, если один из его коэффициентов равен единице). В этом случае имеет место экспоненциальный рост, а представимость места не имеет (и ее не надо доказывать). Чтобы установить конечную базирюемость для T -идеалов, достаточно доказать следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.6. *Для любого T -идеала Γ с идеалом коэффициентов K в конечно порожденной алгебре существует T -идеал W , содержащий собственное тождество, причем пересечение идеала W с множеством многочленов, имеющих коэффициенты из K , лежит в идеале тождеств исходной алгебры.*

Предложение 5.6 обеспечивает переход к ранее разобранному случаю. Отметим, что если идеал, порожденный коэффициентами тождества, содержит единицу, то из него следует собственное тождество.

Приведем еще два следствия из предложения 5.6 (и результатов из п. 5.2). Рассмотрим убывающую систему T -идеалов $\{\Gamma_k = \Gamma + T(C_k)\}_{k=1}^\infty$ в конечно порожденной (к.п.) абсолютно свободной Φ -алгебре A . Из предложения 5.6 следует, что пересечение элементов этой системы есть Γ . С другой стороны, из результатов п. 5.2 вытекает представимость факторов A/Γ_k , а, как показал А. И. Мальцев, каждая представимая алгебра финитно аппроксимируема. Таким образом, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 5.1 (гипотеза Л. А. Бокутя и И. В. Львова [100]). *Относительно свободное ассоциативное PI-кольцо финитно аппроксимируемо.*

В к.п. PI-алгебре имеет место теорема Размыслова–Кемера–Брауна о нильпотентности радикала [147]. Поэтому из предложения 5.6 следует, что многочлены, лежащие в $K \cdot A$, порождают нильпотентный идеал. С другой стороны, если A относительно свободна, то многочлены не из KA не могут лежать в радикале. Таким образом, имеет место следующий аналог теоремы Брауна о нильпотентности радикала.

ТЕОРЕМА 5.2. *Радикал конечно порожденной относительно свободной ассоциативной алгебры над нётеровым ассоциативно-коммутативным кольцом Φ нильпотентен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5.6. Далее нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 5.4. *Пусть K – идеал в кольце Φ , порожденный коэффициентами многочленов из T -идеала H . Тогда существует такой многочлен f с целыми коэффициентами, причем один из коэффициентов равен единице, что для любого $x \in K$ многочлен xf принадлежит H . При достаточно больших n все тождества, выполняющиеся в алгебре $M(n, \Phi) = M_n(\mathbb{Z}[x]) \otimes \Phi$, удовлетворяют этому условию.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что если тождество f Φ -алгебры A имеет вид

$$f = \sum_{i=1}^n x_i u_i,$$

где каждое u_i – линейная комбинация мономов с целыми коэффициентами, взаимно простыми в совокупности, а x_i – свободные коммутативные переменные кольца $\Phi = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, то идеал $T(f)$ для любого i содержит тождество вида $x_i g_i$, где коэффициенты x_i – целые числа и многочлен g_i собственный. Тогда (в силу конечной порожденности исходной алгебры A) из тождества g_i следуют все тождества алгебры матриц некоторого порядка n_i . В условии леммы достаточно положить $n = \max_i(n_i)$.

Далее, пусть случай, когда x_i является коэффициентом при мономе u_i старшей степени, разобран. Тогда можно осуществить индукционный спуск по числу переменных $\{x_\alpha\}$, поскольку если $x_i g_i \in T(A)$, то многочлен вида $f g_i - x_i g_i h$ является тождеством в A и в него входит меньший набор переменных $\{x_\alpha\}$.

Поскольку мы пришли к указанному случаю, в силу процедуры квазилинеаризации тождество f можно считать полилинейным. Перенумеровав переменные, полагаем $i = 1$.

Пусть B – свободная счетно порожденная алгебра из $\text{Var } A$ с образующими $\{y_1, y_2, \dots\}$, при этом $y_1 \prec y_2 \prec \dots$; M_h – пространство полилинейных слов степени h относительно $\{y_1, \dots, y_h\}$. Рассмотрим пространства $M^h = \sum_i x_i M_h$. Лексикографически упорядочим мономы и рассмотрим элементы вида $x_k m_k$, не линейно представимые членами вида $x_j m_j$, где $m_j \prec m_k$. Легко видеть, что такие m_k не являются q -разбиваемыми, где $q = \deg(f)$. Поэтому ранг $\mathbb{Z}$ -модуля M^h не превосходит $nh^{2(q-1)}$. В пространстве M^h действует симметрическая группа S_h , переставляющая переменные. Если диаграмма Юнга D содержит квадрат размера $2nq^4$, то любая компонента соответствующего ей модуля равна нулю (см. [130]).

Пусть g – один из полилинейных многочленов с коэффициентами из $\mathbb{Z}$, соответствующих диаграмме D . Тогда для любого i в алгебре A выполняется тождество $x_i f = 0$, что и требовалось установить.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. *Существует такая рекурсивная функция $H(n, s)$, что если в s -порожденной алгебре A выполняется набор тождеств $\{g_i\}$ степени не выше n , то для любого $f \in T(\mathbb{M}_{H(n,s)}(\mathbb{Z}))$ и любого x из идеала $K \trianglelefteq \Phi$, порожденного всеми коэффициентами многочленов $\{g_i\}$, выполняется включение $xf \in T(A)$.*

Отметим, что алгебра $M(n, \Phi)$ не является алгеброй общих матриц над Φ , поскольку, например, из элемента алгебры, порожденной общими матрицами, при делении на целое число может получаться матрица с целыми полиномиальными коэффициентами, которая не выражается через исходные общие матрицы. Поэтому в алгебре $M(n, \Phi)$ не больше тождеств, чем в алгебре общих матриц.

ЛЕММА 5.5. а) В алгебре $M(n, \Phi)$ нет кручения, она является свободным Φ -модулем, и образы элементов из $M_n(\mathbb{Z}[x]) \otimes 1$ образуют базис.

б) Множества нормальных базисов и старших членов тождеств в алгебрах $M(n, \Phi)$ и $M_n(\mathbb{Z}[x])$ совпадают.

в) Все тождества алгебры $M(n, \Phi)$ имеют вид λg , где $g \in T(M_n(\mathbb{Z}[x]))$, $\lambda \in \Phi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) очевидно. Утверждение б) следует из а), а утверждение в) следует из б).

Из лемм 5.4, 5.5 вытекает, что существует такое n , что идеал тождеств в A содержит все тождества из $M(n, \Phi)$, все коэффициенты которых лежат в K , что и завершает доказательство предложения 5.6, а значит, и доказательства основных теорем 1.2, 1.3.

Из леммы 5.4 и локальной представимости (которая будет доказана в п. 5.2) PI-колец, обладающих собственным тождеством, следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.7. Пусть A – относительно свободная конечно порожденная Φ -алгебра, K – идеал кольца Φ , порожденный коэффициентами тождеств, выполняющихся в A . Тогда существует морфизм ρ алгебры A в алгебру нётероваго типа, ограничение которого на пространство KA является вложением.

5.1.3. Кручение в относительно свободных кольцах. Здесь изучается Φ -кручение, так как многие его свойства вытекают из локальной конечной базиремости. Кроме того, результаты, представленные в настоящем подпункте, нам понадобятся при доказательстве локальной представимости, т. е. теоремы 1.4.

Пусть M – произвольный Φ -модуль. Идеалам в кольце Φ соответствуют их аннуляторы в M , являющиеся его подмодулями, и, наоборот, подмодулям в M соответствуют их аннуляторы в Φ , являющиеся идеалами. При этом сумме соответствует пересечение, а то, что соответствует пересечению (а также произведению), содержит сумму. Кроме того, данное соответствие является антигомоморфизмом структуры включения: если $X_1 \subset X_2$, то $Y_1 \supseteq Y_2$, где Y_i соответствует X_i . Это соответствие не является взаимно однозначным, но если Y соответствует X , а Z соответствует Y , то Y соответствует Z , и наоборот. Иными словами, двойное применение соответствия приводит к замыканию, а соответствие замкнутых объектов уже взаимно однозначно. Замкнутым будем называть подмодуль (идеал), являющийся образом при этом соответствии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Кручение называем *существенным* для данной *первичной компоненты* Ψ кольца Φ , если соответствующий идеал содержит Ψ -*существенный* элемент, т. е. элемент с ненулевой проекцией на Ψ . Если $\bar{\Phi}$ *первично*, то кручение называется просто *существенным* в случае, когда оно содержит элемент не из радикала $N(\Phi)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.8. Пусть B – относительно свободная Φ -алгебра (не обязательно ассоциативная). Тогда идеалам в кольце Φ соответствуют T -идеалы в алгебре B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аннулятор $I \triangleleft B$ любого идеала $N \triangleleft B$ отображается в аннулятор идеала N , т.е. $\varphi(I) \subseteq I$. Таким образом, I выдерживает произвольный эндоморфизм и является T -идеалом в B .

Теперь нас будет интересовать соответствие между решеткой замкнутых идеалов кольца Φ и замкнутых T -идеалов относительно свободной алгебры A . Поскольку соответствие замкнутых объектов является антиизоморфизмом по отношению включения, а идеалы в Φ и T -идеалы в A удовлетворяют условию обрыва возрастающих цепей, то замкнутые объекты удовлетворяют аналогичному условию обрыва как возрастающих, так и убывающих цепей.

Применим это соображение к $\mathbb{Z}$ -алгебрам, т.е. просто кольцам. Пусть M – произвольный $\mathbb{Z}$ -модуль, $M_p = M \otimes \mathbb{Z}_p$, $\pi: M \rightarrow M_p$ – каноническая проекция, и пусть

$$M_{p,k} = \ker \varphi_{p,k}, \quad \varphi_{p,k}: M \rightarrow M, \quad x \mapsto p^k x, \quad M^{p,k} = \operatorname{Im} \varphi_{p,k}, \quad M^p = \bigcap_k M^{p,k}.$$

Ясно, что $M_{p,k} \subset M_{p,k+1}$. Кроме того, если $M_{p,k} = M_{p,k+1}$, то $M_{p,q} = M_{p,q+1}$ для всех $q > k$.

Нам понадобится следующая техническая

ЛЕММА 5.6. Если M обладает дополнительной структурой R -модуля, то $M_{p,k} R^{p,k} = 0$, R^p аннулирует все $M_{p,k}$.

Пусть A – относительно свободное кольцо. Если положить $M = A$, $M_p = A \otimes \mathbb{Z}_p$, то соответствующие модули $\pi(M_{p,k})$ также будут T -идеалами. Отсюда непосредственно следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.9. Пусть A – относительно свободная к.п. ассоциативная Φ -алгебра. Тогда:

- а) множество таких p , что в A есть p -кручение, конечно;
- б) множество таких k , что $\ker(p^k) \neq \ker(p^{k+1})$, конечно;
- в) если M – относительно свободная Φ -алгебра, рассматриваемая как Φ -модуль, и $M_{p,k} \neq M_{p,k+1}$, то $\pi(M_{p,k}) \neq \pi(M_{p,k+1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Модули кручения, отвечающие множествам из утверждений а), б) предложения, суть T -идеалы. Пусть I_p – T -идеал, порожденный элементами, имеющими p^k -кручение для некоторого k , $I_{p,k}$ – T -идеал, порожденный элементами x такими, что $p^k x = 0$. Тогда $\bigoplus_{p < q} I_p$, а также $I_{p,k}$ образуют возрастающие цепочки T -идеалов, которые стабилизируются. Утверждение в) есть непосредственное следствие утверждения б).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Алгебра $A \otimes \mathbb{Q}$ относительно свободна и задается конечным набором тождеств из любой наперед заданной полной системы тождеств. В работе [148] показано, что для любой к.п. относительно свободной $\mathbb{Z}$ -алгебры имеется кручение по конечному числу простых модулей. Поэтому утверждение а) предложения 5.9 также следует из результатов работы [148].

Таким образом, решетка замкнутых идеалов для колец (случай $\Phi = \mathbb{Z}$) конечна.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.5. В случае общего кольца $\Phi \neq \mathbb{Z}$ решетка замкнутых идеалов может оказаться бесконечной. Пусть $\Phi = \mathbb{Q}[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta_1, \delta_2, \mu]$, при этом $\varepsilon_i \delta_j = \alpha_{ij} \mu$, $\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$, $\det(\alpha_{ij}) \neq 0$. Кроме того, $\varepsilon_i \varepsilon_j = \delta_i \delta_j = \varepsilon_i \mu = \delta_j \mu = \mu^2 = 0$. Таким образом, умножая выражение $\delta_1 f + \delta_2 g$ на подходящую сумму $a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2$, $a_i \in \mathbb{Q}$, можно получить любое выражение вида $\mu(b_1 f + b_2 g)$ для любой пары рациональных чисел (b_1, b_2) . Семейство тождеств может зависеть от параметра λ . Используя это, легко получаем бесконечное семейство аннуляторов вида $a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2$ и соответствующее семейство замкнутых T -идеалов вида $\delta_1 f + \delta_2 g$.

Тем не менее, имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.10. а) Для первичного кольца Φ существует элемент $\phi \in \Phi \setminus \{0\}$, аннулирующий все имеющие нетривиальное кручение элементы относительно свободной конечно порожденной Φ -алгебры.

б) Для примарного кольца Φ существует элемент $\phi \in \Phi \setminus \{0\}$, аннулирующий все имеющие нетривиальное существенное кручение элементы относительно свободной конечно порожденной Φ -алгебры.

в) Для каждой первичной компоненты Ψ кольца Φ существует элемент $\phi \in \Phi \setminus \{0\}$, аннулирующий все имеющие нетривиальное существенное Ψ -кручение элементы относительно свободной конечно порожденной Φ -алгебры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\text{Ann}(xy) \supseteq \text{Ann}(x) + \text{Ann}(y)$, а произведение существенных элементов существенно, утверждения а)–в) следуют из условия обрыва возрастающих цепей для T -идеалов.

В заключение пункта приведем несколько технических утверждений.

ЛЕММА 5.7. Пусть для некоторых элементов e_i Φ -модуля M и некоторых $\lambda_{ij} \in \Phi$ выполняется система уравнений

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{ij} e_i = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда при всех i имеем $e_i \Delta = 0$, где $\Delta = \det(\lambda_{ij})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M_{ij} – минор матрицы $\Lambda = (\lambda_{ij})$, $M = (M_{ij})$. Тогда $\Lambda M = \Delta E$ или $\sum_j M_{ij} \lambda_{jk} = \Delta \delta_{ik}$ ($\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$ и $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$). Поэтому

$$0 = \sum_{j,k} M_{ij} \lambda_{jk} e_k = \Delta e_i.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.11. а) Однородная компонента тождества f по переменной x обращается в нуль при умножении на любое значение определителя Вандермонда матрицы, составленной из любых элементов Φ , размер которой равен степени многочлена f по x .

б) Пусть кольцо $\overline{\Phi}$ бесконечно. Тогда однородные компоненты тождеств из A имеют существенное кручение.

в) Пусть кольцо Φ для любого n содержит обратный элемент к некоторому значению определителя Вандермонда матрицы порядка n . Тогда любое тождество равносильно набору своих полиоднородных компонент и любое многообразие Φ -алгебр однородно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения б), в) следуют из а). Докажем утверждение а).

Пусть $f = \sum_{i=0}^n f_i$, f_i – компонента f степени однородности i относительно переменной x . Результат подстановки $\lambda^k x \rightarrow x$ в f есть многочлен $\sum_{i=0}^n \lambda^{ki} f_i$, являющийся следствием тождества f . Поэтому утверждение а) следует из леммы 5.7.

ЛЕММА 5.8. Пусть кольцо Φ содержит несколько идеалов $I_\alpha \ni E_\alpha$, E_α – семейство ортогональных идемпотентов, в сумме дающих единицу. Тогда любой Φ -модуль (любая Φ -алгебра) разлагается в прямую сумму (Φ/I_α) -модулей (алгебр), являющихся его факторами.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.6. Утверждение, аналогичное лемме 5.8, даже для двух идеалов с нулевым пересечением неверно. Например, пусть M – 2-порожденный модуль с образующими a, b и соотношениями $ai_1 = bi_2$, $i_1 \in I_1$, $i_2 \in I_2$. При этом факторы Φ/I_1 и Φ/I_2 могут оказаться даже первичными кольцами. Тем не менее, для конечного кольца подобное разложение имеет место. Отметим также, что любая алгебра есть подпрямое произведение своих факторов, имеющих примарное кручение в аддитивной группе либо не имеющих кручения. (Кручение примарно, если везде оно есть степень одного и того же простого числа.)

Отметим, что ответ на вопрос И.В. Львова [100]: верно ли, что любое PI-кольцо есть гомоморфный образ PI-кольца без кручения? – до сих пор неизвестен. (Трудность заключается в бесконечной порожденности колец.) К редукциям относительно свободных алгебр по простым модулям относится и

ГИПОТЕЗА ПРОЧЕЗИ. Пусть M_n – алгебра общих матриц над $\mathbb{Z}$. Имеется естественный гомоморфизм этой алгебры в алгебру общих матриц над $\mathbb{Z}_p$. Совпадает ли ядро этого гомоморфизма с идеалом, порожденным числом p ?

Ответ в общем случае, как показал А.Р. Кемер с учениками, отрицателен. Может получиться так, что дробь x/p не лежит в алгебре, порожденной общими матрицами, но лежит в алгебре матриц со следом. Однако если p велико по сравнению с n и числом образующих, то гипотеза Прочези (вместе с ее естественным обобщением для редукций представлений относительно свободных алгебр в виде алгебр общих элементов) все же верна. Хотелось бы иметь аналогичный результат для бесконечного числа образующих.

ВОПРОС. Пусть A – относительно свободная $\mathbb{Z}$ -алгебра, представимая матрицами над кольцом многочленов над $\mathbb{Z}$ (возможно, от бесконечного числа переменных), A_p – редукция представления по модулю p . Верно ли, что при всех достаточно больших p многообразия, порожденные алгебрами A_p и $\mathbb{Z}_p \otimes A$, совпадают?

5.2. Локальная представимость многообразий. Настоящий пункт посвящен доказательству теоремы 1.4, т.е. доказательству локальной представимости PI-алгебры над произвольным нётеровым ассоциативно-коммутативным кольцом.

ТЕОРЕМА 5.3. Относительно свободная PI-алгебра над произвольным нётеровым ассоциативно-коммутативным кольцом Φ локально представима.

Пусть A – к.п. относительно свободная Φ -алгебра, $\bar{\Phi} = \Phi/N(\Phi)$, $\bar{A} = \bar{\Phi} \otimes A$. Будем считать, что для всех факторов Φ , а также для всех локализаций Φ с меньшим набором первичных компонент локальная представимость доказана. Тогда условие нётеровости Φ обеспечит корректность индукции.

5.2.1. Редукция к случаю, когда $\bar{\Phi}$ – поле. Отметим, что для конечных колец эта редукция получается непосредственно: конечное полупервичное кольцо является прямой суммой полей, так что достаточно воспользоваться леммой 5.8.

Рассмотрим произвольную первичную компоненту Ψ кольца Φ (т.е. первичную компоненту фактора $\Phi/N(\Phi)$). В силу предложения 5.10 в кольце Φ есть Ψ -существенный элемент ϕ , аннулирующий все элементы существенно- Ψ -крючения (см. определение 5.1). Тогда A вкладывается в сумму своих факторов $A/\phi A \oplus A/\text{Tor}_{\text{Ess}}(A)$. Алгебру $A/\phi A$ можно рассматривать как $(\Phi/\text{id}(\phi))$ -алгебру, которая представима. Поэтому можно считать, что в алгебре A существенно- Ψ -крючения нет. Но тогда A вкладывается в $(\Phi_{\text{EssLoc}}^{\Psi})$ -алгебру $\Phi_{\text{EssLoc}}^{\Psi} \otimes A$, где $\Phi_{\text{EssLoc}}^{\Psi}$ – локализация Φ по множеству Ψ -существенных элементов. При этом алгебра $\Phi_{\text{EssLoc}}^{\Psi} \otimes A$ относительно свободна (в силу предложения 5.1), а кольцо $\bar{\Phi}_{\text{EssLoc}}^{\Psi}$ является полем. Представимость $\Phi_{\text{EssLoc}}^{\Psi} \otimes A$ вытекает из индукционного предположения.

5.2.2. Построение экстремальных идеалов. Покажем, что последовательное применение расталкивающих операторов стабилизируется “в проективном смысле”. Аналогичные рассуждения используются и в классической ситуации: вторая лемма Кемера (см. [130], [115], [136]) утверждает по сути, что если $f|_A \neq 0$ и f является следствием многочлена Кемера для A (но не обязательно многочленом Кемера, так как вместо переменных могут быть подставлены мономы от перекрывающихся наборов переменных), то существует $h \in T(f)$, $h|_A \neq 0$, являющийся также многочленом Кемера. В книге [130] это называется *Phoenix property*. Далее нам потребуется

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Пусть M – нётеров модуль без кручения над нётеровым первичным кольцом R . Назовем подмодуль $N \subseteq M$ *проективно минимальным*, если $N \neq 0$ и для любого его подмодуля N' существует элемент $r \in R$ такой, что $N' \supseteq rN$; R -замкнутый T -идеал $I \neq 0$ *проективно минимален*, если для любого R -замкнутого T -идеала $J \subseteq I$ существует $r \in R$ такой, что $J \supseteq rI$, и *сильно проективно минимален*, если для любого T -идеала $J \subseteq I$ существует указанное r . Понятие *сильной проективной минимальности* определено для всех T -идеалов, не обязательно R -замкнутых.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.12. *Любой нётеров R -модуль без кручения содержит проективно минимальный подмодуль. То же верно для R -замкнутых T -идеалов, являющихся нётеровыми R -модулями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При локализации все рассматриваемые модули превращаются в конечномерные векторные пространства над полем частных кольца R . Если двум нётеровым R -подмодулям N_1 и N_2 отвечает одно и то же подпространство, то умножение на некоторое $r \in R$ переводит некоторую систему образующих N_1 в систему образующих N_2 . Следовательно, $rN_1 \subset N_2$. Проективно минимальным модулям отвечают одномерные подпространства (а проективно минимальным T -идеалам – не обязательно).

Из леммы 4.9 (основной случай) и предложения 4.18 (случай отсутствия существенных смешанных элементов) вытекает

ЛЕММА 5.9. *Проективно минимальный T -идеал, удовлетворяющий условию леммы 4.9, является сильно проективно минимальным, если R – кольцо из леммы 4.9. Любой T -идеал максимального состава содержит сильно проективно минимальный R -замкнутый T -идеал I . Все содержащиеся в нем T -идеалы будут сильно проективно минимальными.*

Вернемся к рассмотрению относительно свободной к.п. Φ -алгебре A . Поскольку локальная конечная базлируемость уже доказана, достаточно найти такой T -идеал $I \neq 0$ в A , в котором нет препятствия к представимости всей алгебры, т.е. построить гомоморфизм в представимую алгебру, в образе которого элементы из I тождественно в нуль не обращаются. Кольцо Φ можно считать примарным, а кольцо $\bar{\Phi}$ – полем.

Кроме того, если характеристика $\bar{\Phi}$ равна нулю, то кольцо Φ содержит $\mathbb{Q}$, многообразие задается полилинейными тождествами и справедливы результаты А.Р. Кемера о локальной представимости (и даже о представимости грасмановой оболочкой конечномерной супералгебры). Поэтому мы считаем, что поле $\bar{\Phi}$ имеет характеристику $p > 0$ и, таким образом, нётерово кольцо Φ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условию $p^k x = 0$ при всех $x \in \Phi$.

Тогда алгебра $\hat{A} = \bar{\Phi} \otimes A$ представима по теореме 1.1. Пусть существенные смешанные элементы присутствуют. Тогда в этой алгебре есть ненулевой экстремальный идеал J_C , отвечающий пути C максимального состава в соответствующем колчане (т.е. градуированной компоненте максимального состава; см. пп. 3.3.2). Кольцо R , отвечающее действию подстановок на элементах максимального состава, определено в пп. 4.3.1. При этом тождества в $\hat{A}$ однородны по всем существенным компонентам и по компонентам существенных клеток (с учетом кратностей).

Если существенные смешанные элементы отсутствуют, то можно в качестве J_C взять идеал Γ , соответствующий степени радикала $s(A) - 1$, и идеал $\Gamma^0 \subseteq \Gamma$, построенный в пп. 4.4.2, и воспользоваться следствием 4.5; R будет кольцом форм.

Пусть H – проективно минимальный R -замкнутый T -идеал в J_C . Тогда он сильно проективно минимален и, кроме того, состоит из крайних элементов. Наша цель – построить (“нелинейное”) представимое пространство в A , изоморфное H .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.13. *Пусть H – проективно минимальный R -замкнутый T -идеал в J_C . Тогда существуют такие $r \in R$ и $x \in \Phi$, что T -идеал xrH в алгебре A изоморфен (как T -пространство и $\bar{A}$ -бимодуль) T -идеалу rH в $\bar{A}$. При этом для любого $\varepsilon \in N(\Phi)$ выполнено равенство $\varepsilon xrH = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in N^\bullet(\Phi)$. Тогда в силу предложения 5.1 T -идеал xH в A изоморфен фактору I в $\bar{A}$ по некоторому T -идеалу E . Если $E = 0$, то предложение доказано, иначе x аннулирует T -идеал $H_1 = rH$ для некоторого $r \in R \setminus \{0\}$. Пусть $\Psi_1 = \Psi / \text{id}(x)$. Выберем произвольный элемент из $N^\bullet(\Psi_1)$ и его представитель $x_1 \in \Psi$. Теперь перейдем к элементу x_2 и T -идеалу H_2 . Процесс, очевидно, закончится, что приведет к построению нужного объекта.

Таким образом, мы построили идеал xH , где H удовлетворяет заключению леммы 4.9. Этот идеал R -замкнут, аннулируется радикалом $N(\Phi)$ и является

точным нётеровым сильно проективно минимальным R -модулем. (Действие кольца R определено формально через подстановки.) Мы покажем, что в этом идеале нет препятствия к представимости A . Этот идеал экстремален в двух смыслах: в смысле максимального состава и в смысле “цокольности” – умножения на радикал кольца Φ .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.7. Техника, изложенная в настоящем подпункте, есть не что иное, как развитие техники, связанной с применением леммы 4.1, и ее некоммутативное обобщение. Использование этой леммы при изучении вопросов конечной базируемости позволяет контролировать потерю равносильности при операциях над системами тождеств. Например, если S – система многочленов в алгебре общих матриц, а Z – центральный полином, то система SZ при некотором $k \in \mathbb{N}$ покрывает пересечение $S \cap \text{id}(Z)^k$. Это позволяет осуществлять спуск по сложности. В общем случае умножений недостаточно, нужны расталкивающие замены. Для них верно аналогичное свойство: $P_2(I) \supset I \cap P^s(H)$, где H – пространство всех полиномов, P_2 символически изображает операцию расталкивающих замен. Удобнее использовать накрытия идеалов из коммутативного кольца R . Отсюда возникает конструкция проективно минимальных модулей.

Итак, чего мы добились? Поясним на примере. В работах [135], [149]–[151] было показано следующее. Пусть в алгебре выполняется система тождеств Капелли C_{n+1} порядка $n+1$, и пусть имеются n переменных $t_1, \dots, t_n$, по которым ведется альтернирование. Рассматриваются многочлены, полилинейные по $\{t_i\}$. Пусть U – препятствие к алгебраичности порядка n для элементов алгебры, выражающихся без помощи $\{t_i\}$. Пусть D – алгебра из таких элементов. Тогда если провести альтернирование по $\{t_i\}$, то пересечение пространства U с пространством элементов, полилинейных по $\{t_i\}$, станет равно нулю. Иными словами, в пространстве элементов, полилинейных и кососимметричных по $\{t_i\}$, нет препятствия к представимости алгебры, и это пространство вкладывается в аналогичное для канонического алгебраического представления алгебры, отвечающего остальным элементам. Аналогия с ситуацией из работы [135] во втором основном случае (когда отсутствуют смешанные элементы) становится более понятной (см. пп. 5.2.4).

Одна из ключевых идей доказательства локальной представимости состоит в следующем. С помощью предложения 2.8 показывается, что препятствие к алгебраичности порядка n для одного элемента d из D в полилинейных кососимметрических многочленах по $\{t_i\}$ обращается в нуль. Далее переходят к расширенной алгебре путем добавления коэффициентов многочлена, аннулирующего d , в нее вкладывается пространство таких многочленов, затем проводят те же рассуждения с новым элементом $d' \in D$ и т. д. В итоге пространство полилинейных кососимметрических многочленов по $\{t_i\}$ вложится в аналогичное пространство, соответствующее каноническому алгебраическому представлению D порядка n (см. доказательство леммы 2.8 в работах [135], [130], [114]).

Поскольку в конечно порожденном случае выполняется тождество Капелли некоторого порядка, то хотелось бы получить, таким образом, локальную представимость. Проблема состоит в том, что альтернироваться могут не только выделенные переменные, которые нигде больше не встречаются, а целые мономы и T -идеал может быть составлен из комбинаций выражений такого рода.

После произвольных подстановок в переменные $\{t_i\}$ и взятия линейных комбинаций получим новый многочлен, и теперь не ясно, как вернуться к исходному хорошему виду.

Однако T -идеал H , построенный нами, позволяет осуществить возвращение к виду многочлена, указанного в лемме 4.9. Любой многочлен $f \in H$ всегда выдерживает процедуру “расталкивания”. Таким образом, буквы, необходимые для осуществления замен и встречающиеся только на контролируемых местах, мы всегда можем приобрести с помощью T -пространственной операции, причем результат всегда будет не нулевым, а проективно эквивалентным исходному многочлену. В этом состоит основная идея доказательства локальной представимости.

Сформулируем это в виде леммы.

ЛЕММА 5.10. а) Пусть $f \in H'$, где $H' = xH$ – ранее построенный экстраемальный T -идеал. Тогда существует ненулевой элемент $P_2(f)$ из $T(f)$, имеющий вид, указанный в лемме 4.9 (или предположении 4.20).

б) Более того, композицию расталкивающих замен можно проводить любое число раз⁶, так что определена ненулевая бесконечная композиция $P^\infty(f)$ расталкивающих замен из $T(f)$ (соответствующая конструкция определена ниже).

Что происходит при повторном применении процедуры расталкивающих замен? В силу леммы 4.10 в ядрах Q_i имеется по одной существенной смешанной радикальной специализации (а остальные специализации в ядрах имеют существенный несмешанный радикальный или полупростой тип), а вне ядер существенных смешанных радикальных специализаций нет. Поэтому повторное применение расталкивающих замен производится только в ядра многочленов Q_i , построенных на предыдущем этапе. Такое применение мы называем *правильным*, а находящиеся вне ядер Q_i переменные из полиномов Капелли, формирующих Q_i для s -го этапа, будем называть *переменными s -го этапа*.

Таким образом, существует бесконечная последовательность ненулевых многочленов из $T(f)$, каждый следующий из которых получается применением системы расталкивающих замен к ядрам предыдущих. При этом переменные для каждого этапа свои, в частности не пересекающиеся с переменными, не участвующими в подстановке через t_i для первого этапа. Поэтому корректно определена *бесконечная композиция расталкивающих замен*. Такая композиция считается не равной нулю, если результат на каждом шаге ненулевой, и равной нулю в противном случае. Это аналог процедуры *локализации*.

Приведем одно алгоритмическое наблюдение. При осуществлении процесса из доказательства леммы 4.10, начиная со второго шага (применения к ядрам уже полученных Q_i , удовлетворяющих этой лемме), мы используем только переменные, имеющие ограниченные степени вхождения (причем для всех дальнейших шагов сразу). Поэтому количество применяемых элементарных операторов вырезания и их типов ограничено.

Из утверждения б) леммы 5.10 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 5.4. Пусть f удовлетворяет условию леммы 5.10. Тогда существует ненулевой элемент $g \in T(f)$, имеющий вид, указанный в лемме 4.10.

⁶Как и умножение на многочлен Капелли порядка $b(A)$ в случае без существенных смешанных элементов.

Она порождает бесконечную ненулевую композицию расталкивающих замен, которая описана выше (после леммы 5.10).

Использование бесконечной композиции расталкивающих замен удобно тем, что на каждом конечном шаге можно “распотрошить” образования, участвующие в организации структуры замен, с помощью соотношений алгебры. Для бесконечной системы можно “распотрошить” только конечное число образований. Кроме того, на каждом шаге процесса замен (возможно) происходит факторизация, и остановка этого процесса даст соотношений не больше, чем предельное образование. (Но начиная с некоторого шага факторизация не происходит.) Использовать мы будем системы полиномов, к ядрам которых последовательно применяется расталкивающая система подстановок. T -идеал H такую расталкивающую систему выдерживает, и мы покажем, что он содержит ненулевой T -идеал, изоморфный (как T -пространство и бимодуль над алгеброй) T -идеалу некоторой представимой алгебры из $\text{Var}(A)$. Эта алгебра есть результат канонического алгебраического представления некоторого порядка относительно множества элементов, выражающихся через переменные, не входящие в структуру замен.

5.2.3. Представимые пространства и тестовые алгебры. В настоящем подпункте рассмотрим первый основной случай. Второй основной случай изучается в пп. 5.2.4. При этом предложение 5.20 соответствует предложениям 5.15–5.17.

Рассмотрим многочлен вида h из леммы 4.9. А именно, рассмотрим наборы переменных t_{ij} , символизирующие существенные межклеточные переходы вдоль пути максимального состава, и расширение $A(\{t_{ij}\})$ в многообразии $\text{Var}(A)$ и профакторизуем его по однородным относительно набора $\{t_{ij}\}$ компонентам соотношений. Кроме того, возьмем фактор по словам, содержащим хотя бы одну переменную из набора $\{t_{ij}\}$ в количестве, большем, чем число вхождений соответствующего граничного оператора в путь максимального состава C (т. е. градуированную компоненту максимального состава) для соответствующего колчана алгебры $\bar{A}$. Получили $\check{A}$ – некоторое расширение Φ -алгебры A .

Факторам алгебры A , а также ее центральным расширениям отвечают аналогичные образования для $\check{A}$. Кроме того, через $\{t_i\}$ можно осуществлять действие расталкивающих замен, в том числе повторно. Тогда эти замены будут осуществляться правильным образом. Помимо алгебры A будут рассматриваться ее центральные расширения, при этом отметим, что в расталкивающих операторах фигурируют только элементы основного кольца Φ , а также новые резервные переменные, а не константы, с помощью которых произведено расширение алгебры. Таким образом, мы исследуем тройки $(A, \check{A}, \mathfrak{M})$, где A – некоторое центральное расширение алгебры из $\mathfrak{M}$, а конструкция $\check{A}$ строится по пути максимального состава для носителя многообразия $\bar{\Phi} \otimes \mathfrak{M}$. Все свойства операторов расталкивающих замен, применяемых к переменным типа t , сохраняются. (В случае алгебр над полем мы использовали тождества пары $(A, \check{A})$.)

Теперь рассмотрим фактор по препятствию к алгебраичности порядка $kc(\Phi)$ для всех элементов из A . Здесь $c(\Phi)$ – индекс нильпотентности радикала кольца Φ , а число k таково, что в алгебре $\bar{A}$ нет препятствия к алгебраичности порядка k и, кроме того, все элементы из $\bar{A}$ алгебраичны порядка не выше k над

кольцом R из леммы 4.9. Поскольку $\bar{\Phi}$ – поле и для алгебр над полем локальная представимость уже доказана, а в алгебре нётерового типа все элементы алгебраичны над кольцом представления ограниченного порядка, то такое k существует. Получившуюся алгебру будем обозначать $\check{A}$.

Алгебра $\check{A}_k$ есть подалгебра фактора центрального расширения $\check{A}$ набором констант $\{\delta_{a,j}\}$ по идеалу, порожденному элементами вида $a^k - \sum_{i=1}^k \delta_{a,i} a^{k-i}$. Это и есть та представимая алгебра, которая нам нужна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.14. а) Алгебра $\check{A}$ представима.

б) Любой многочлен из xH , который не равен тождественно нулю в A , не равен тождественно нулю в $\check{A}$.

в) В T -идеале xH нет препятствия к представимости алгебры A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) непосредственно следует из теоремы Ширшова о высоте [56], [57]. Поскольку если в алгебре B каждый элемент есть сумма элемента из нильпотентного радикала и элемента, алгебраичного над коммутативным кольцом S , коммутирующим с элементами из B , то такая алгебра представима. Утверждение в) есть переформулировка б). Доказательство утверждения б) следует из вспомогательных утверждений, которые будут приведены ниже.

Отметим, что к доказательству утверждения б) свелось доказательство теоремы 1.4 о локальной представимости. В самом деле, предложение осуществляет редукцию представимости алгебры A к представимости A/xH , и рассуждения завершаются индукционным спуском. Спуск обрывается за конечное число шагов в силу локальной шпехтовости, которая уже доказана. Поэтому нам осталось доказать утверждение б), к чему мы и переходим.

Рассмотрим элементы из расширения $\check{A}$, лежащие в идеале J , порожденном словами, содержащими $\{t_{ij}\}$ в максимально возможном количестве. (По препятствию к алгебраичности при конструкции $\check{A}$ мы не факторизуем.) Осуществим через переменные $\{t_{ij}\}$ систему расталкивающих замен. Получим квазимоном вида $g = \phi(\vec{x}, Q_1, \dots, Q_s)$ из леммы 4.10, который отвечает путям максимального существенного состава (а не только полного) и который, кроме того, однороден по переменным из Q_i . Квазимономами мы называем многочлены, представимые в виде сумм слагаемых таких, что во всех слагаемых переменные из $\vec{x}$ и ядра Q_i введены на одном этапе, остальные переменные из Q_i осуществляют расталкивающие замены. При этом множества расталкивающих переменных, переменных из ядер для различных Q_i , переменных внутри Q_i , предназначенных для “приема форм”, и переменных из $\vec{x}$ не пересекаются. Иными словами, это результат применения расталкивающих замен, осуществляемых через переменные $\{t_{ij}\}$ к моному. Переменные из $\vec{x}$ соответствуют элементам A . Многочлен назовем *правильным*, если он есть линейная комбинация квазимономов. Наборы переменных, входящих в многочлены Q_i и не входящих в их ядра, построенные на k -м этапе, мы называем *этажами*. Эти наборы предназначены для “приема форм”.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.15. Определим величины k и $c = c(\Phi)$, как это сделано в предложении 5.14. Пусть E – правильный многочлен. Определим действие операторов из R на записях формальным образом. Данное действие определено корректно на правильных многочленах.

а) Пусть E содержит k -ю степень элемента $v \in A$. Тогда E линейно представим по модулю $N(\Phi)A$ результатами замен $v^s \rightarrow v^k$, где $s < k$, в фиксированном вхождении v^k с формальными коэффициентами из R .

б) Пусть E содержит (ck) -ю степень элемента $v \in A$, W – результат c -кратного правильного применения к ядрам Q_i из E системы расталкивающих замен. Тогда W линейно представим результатами подстановок $v^s \rightarrow v^k$, где $s < ck$, в данное фиксированное вхождение v^{ck} в W с формальными коэффициентами из R , примененных к разным группам переменных, принимающих формы.

В случаях а), б) коэффициенты из R не зависят от выбора многочлена E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) следует из уже доказанного утверждения о том, что в алгебре $\check{A}$ формы целы над операторами из R . Выведем утверждение б) из а). Разобьем (ck) -ю степень v на c блоков, каждый из которых равен v^k . Сопоставим каждому блоку свой этаж в правильной системе замен и группу переменных для “приема форм”. Применим замены из утверждения а) по отдельности и независимо (т.е. вместо v^k ставим разность $v^k - \sum_{s < k} v^s r_s$, при этом $r_i \in R$ действуют на своем этаже).

Из утверждения а) следует, что результат будет равен нулю. В самом деле, первая разность обеспечит попадание результата в идеал $N(\Phi)A$. Тогда попадание в этот идеал можно обеспечить, даже если остальные степени v^k закодировать одной буквой, а ядра первого этажа не раскрывать. Аналогично, второй множитель обеспечит попадание в $N(\Phi)^2 A$ и т.д. Поскольку $N(\Phi)^c A = 0$, в результате преобразований получим нуль, но равенство нулю такой системы операторов замен и есть искомая алгебраичность v над подстановками.

Отметим одно важное наблюдение: операторы r_i , соответствующие данному v , выражаются через комбинации подстановок типа $y_i \rightarrow y_i v$ и потому друг с другом коммутируют. (По модулю $\text{id}(N(\Phi))$ они коммутируют и при разных v .)

Следующие два предложения аналогичны соответствующим утверждениям из работы [135].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.16. Пусть $a \in A$, $\text{Obstr}_m(a)$ – препятствие к алгебраичности порядка m для элемента a , $J_m(a) \subset \check{A}$ есть $J \cap \text{Obstr}_m(a)$. Тогда при $c(\Phi)$ -кратном применении систем расталкивающих замен, осуществленном через переменные t_{ij} , образ $J_{c(\Phi)k}(a)$ равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что поскольку $\check{A}$ однородна по t_{ij} и $a \in A$ имеет равную нулю степень однородности по t_{ij} , то препятствие к алгебраичности также однородно по t_{ij} . Распишем алгебру A свободными коммутативными константами δ_i , где $i = 1, \dots, ck$. Каждому полиному из $\check{A}[\delta_i] \cap J$ сопоставим полином из пространства, порожденного расталкивающими заменами, при этом каждому δ_i сопоставим оператор r_i . Данное соответствие корректно, и мы видим, что идеалу в J , порожденному элементами $a^{ck} - \sum_{i=1}^{ck} \delta_i a^{ck-i}$, отвечает нулевой идеал.

Из предложения 5.16 точно так же, как и в работе [135], выводится следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.17. Пусть Obstr_m – препятствие к алгебраичности порядка m для всех элементов из A одновременно, $J_m \subset \check{A}$ есть $J \cap \text{Obstr}_m$. Тогда

при $c(\Phi)$ -кратном применении систем расталкивающих замен, осуществленном через переменные t_{ij} , образ $J_{c(\Phi)k}$ равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in A$ – произвольный элемент. Расширим алгебру A свободными коммутативными константами δ_i , $i = 1, \dots, ck$, и возьмем фактор по идеалу, порожденному элементом $a^{ck} - \sum_{i=1}^{ck} \delta_i a^{ck-i}$. Обозначим получившуюся алгебру через A_1 (некоторые тождества, выполняющиеся в A , в A_1 могут не выполняться). Ей естественным образом соответствует алгебра $\check{A}_1$, являющаяся фактором расширения $\check{A}[\vec{\delta}]$ по идеалу, порожденному элементом $a^{ck} - \sum_{i=1}^{ck} \delta_i a^{ck-i}$.

Пересечение ядра такой факторизации с идеалом J алгебры $\check{A}$ согласно предложению 5.16 аннулируется под действием системы расталкивающих замен. Поэтому образ соответствующего пространства J для алгебры $\check{A}_1$ под действием расталкивающих замен изоморфен образу J для алгебры $\check{A}$. Итак, мы перешли к тройке $(A_1, \check{A}_1, \mathfrak{M})$.

Теперь возьмем другой элемент $a_1 \in A$ и проведем с этой тройкой аналогичную конструкцию (со своими константами δ_i). Препятствие к алгебраичности элемента a_1 в новой алгебре A_1 также обратится в нуль (поскольку соответствующий идеал порождается элементами, не содержащими старых δ_i , которые на новом этапе с операторами из R больше не взаимодействуют). Затем перейдем к тройке $(A_2, \check{A}_2, \mathfrak{M})$ и т.д. При этом образ пространства J в $\check{A}_i$ вкладывается в образ пространства J в $\check{A}_{i+1}$, а значит, и в $\check{A}_k$ при всех $k \geq i$. Следовательно, для каждого конечного подмножества $N \subset A$ в нуль обращается образ препятствия к алгебраичности порядка ck для элементов из N . Такие идеалы, очевидно, покрывают все препятствие $\text{Obstr}_{ck}(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.8. Приведенное рассуждение заимствовано из работы [135]. Оно непривычно (автор сам к нему привыкал). Для наших целей достаточно алгебраичности конечного числа элементов – базиса Ширшова. Сделаем нужное число расталкивающих замен, при этом каждый элемент базиса Ширшова обслуживается своим этажом, либо осуществим сразу бесконечную правильную цепочку и воспользуемся проективной минимальностью. Результат обратит в нуль препятствие, но оставит ненулевым проективно минимальный T -идеал, тем не менее, мы хотим иметь конкретное утверждение. Кроме того, расталкивающие операторы следует рассматривать как важное обобщение операторов симметрирования и альтернирования. Такая точка зрения автору представляется очень важной при рассмотрении неассоциативной ситуации, а возможно, и теории представлений.

Из предложения 5.17 следует, что, взяв фактор по ядру канонического представления A порядка ck , мы из алгебры $\check{A}$ получим алгебру, изоморфную $\check{A}$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.18. Пусть образ $f \in J$ в алгебре $\check{A}$ не обращается в нуль при системе расталкивающих замен. Тогда его образ при редукции в алгебре $\check{A}$ не равен тождественно нулю.

СЛЕДСТВИЕ 5.5. T -пространства полиномов, получаемых в алгебрах A и $\check{A}$ путем применения систем расталкивающих замен, изоморфны.

Поскольку T -идеал sH , заданный многочленом с фиксированными переменными t_{ij} , изоморфен T -идеалу H в $\bar{A}\langle t_{ij} \rangle = \bar{\Phi} \otimes A\langle t_{ij} \rangle$ и выдерживает любое

число расталкивающих замен, образ соответствующих многочленов в алгебре $\check{A}$ не всегда равен тождественно нулю. Таким образом, для первого основного случая (когда существенные смешанные элементы в $\check{A}$ имеют место) мы доказали утверждение б) предложения 5.14, а тем самым и локальную представимость Φ -алгебр для произвольного нётерова кольца Φ . Объединяем результаты из настоящего пункта в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.19. а) Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие Φ -алгебр конечного базисного ранга. Тогда решетки T -идеалов в относительно свободной алгебре A из $\mathfrak{M}$ и в соответствующей алгебре $\check{A}$, содержащие сумму Σ проективно минимальных T -идеалов, изоморфны.

б) Пусть Γ – идеал тождеств $\mathfrak{M}$, $f \notin \Gamma$. Тогда либо $f \notin \Sigma$, либо $\check{A}$ отделяет f от Γ .

Если $f \notin \Sigma$, то можно перейти к изучению отделения f от $\Sigma + \Gamma$. Из предложения 5.19 (вместе с его естественным аналогом для второго основного случая) вытекает ограниченность отделителя и, следовательно, редукционный шаг в локальной представимости.

5.2.4. Случай отсутствия смешанных элементов в факторе $A/N(\Phi)A$. Завершение доказательства теоремы 1.4. В этом случае представимый T -идеал $\Gamma^0 \subseteq \Gamma$ ищется проще, но немного иначе (как и в случае алгебр над полем; см. пп. 4.4.2). Вместо расталкивающих замен используется умножение на полином Капелли C_{n^2} , где $n = \text{PIdeg}(A)$. Умножение заменяет действие расталкивающей подстановки через смешанный элемент и необходимо только в этом случае (конец слова – это “несобственный смешанный элемент”). Остальные рассуждения аналогичны, и доказательства переносятся из работ [91], [106] почти дословно. Положим $b(A) = b(A/N(\Phi)A)$. Через $d(A)$ обозначается минимальное целое число такое, что любой многочлен, кососимметрический по переменным внутри d групп из $b + 1$ переменных в каждой, обращается в нуль. Отметим, что $d(A)$ – радикальная характеристика и, вообще говоря, $d(A) \neq d(A/N(\Phi)A)$. Препятствие к алгебраичности элемента a порядка q обозначается $\text{Obstr}_q(a)$.

Сформулируем утверждение, аналогичное предложениям 5.15–5.17.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.20. Пусть $b = b(A)$, $d = d(A)$. Рассмотрим пространство $A(C_b)^d$. Тогда:

- а) каждый элемент $a \in A$ алгебраичен порядка bd над операторами внутренних форм, определенных с помощью множителей Капелли;
- б) $\text{Obstr}_{db}(a) \cdot (C_b)^d = 0$;
- в) $\text{Obstr}_{db}(A) \cdot (C_b)^d = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.9. В формулировке предложения 5.20, как и других результатов настоящего подпункта, величина $c(\Phi)$ не фигурирует, поскольку уже учтена в показателе $d(A)$. Если p – характеристика первичных факторов основного кольца Φ , $A_p = \mathbb{Z}_p \otimes A$, то

$$b(A) = b(A_p), \quad d(A) \leq d(A_p)c(\Phi).$$

Такая формулировка выбрана потому, что в случае, который рассматривается в настоящем подпункте, достаточно ограничиться использованием техники А. Р. Кемера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5.20. Справедливость утверждения а) устанавливается аналогично доказательству предложения 5.15. Утверждение б) выводится из а) точно так же, как предложение 5.16 выводится из предложения 5.15 (при этом следует заметить, что в ассоциативной ситуации формы, связанные с одним элементом $a \in A$, коммутируют между собой). Утверждение в) получается аналогично доказательству предложения 5.17.

Отметим, что предложение 5.20 – аналог технических предложений о расталкивающих заменах – по сути есть видоизменение результатов работы [135] (см. также предложение 2.8).

Аналогом предложения 5.18 является следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.21. Пусть $n = \text{PIdeg}(A)$, $f \cdot (C_{n^2})^{b(A)d(A)} \neq 0$. Тогда образ f при редукции по модулю $\text{Obstr}_{db}(A)$ не равен тождественно нулю.

СЛЕДСТВИЕ 5.6. T -пространства полиномов в алгебрах A и $A/\text{Obstr}_{db}(A)$ после умножения на $(C_{n^2})^{b(A)d(A)}$ изоморфны.

Из следствия 5.6 вытекает утверждение б) предложения 5.14 для второго основного случая, что завершает доказательство локальной представимости алгебр над кольцами, т. е. доказательство основной теоремы 1.4.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.10. Особенность ассоциативного случая состоит в том, что полином контролируется разреженным множеством ключевых позиций – вхождениями существенных радикальных элементов, которые контролируются расталкивающими подстановками. Эти элементы контролируют ситуацию, задавая переходы для существенных клеток. Наверное, в неассоциативной ситуации, когда есть такие контролирующие образования, также можно построить аналогичную теорию.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.11. Было бы интересно построить теорию “улучшенных” представлений относительно свободных колец и Φ -алгебр, аналогичную теории “улучшенных” представлений алгебр над полем. Рассуждения, связанные с замыканием по Зарискому, переносятся и на этот случай. Для первичных клеток возникает дополнительная характеристика: аддитивное кручение (число p) или его отсутствие (кручение 0). Отметим, что произведение элементов с p -кручением и q -кручением равно нулю, а каждый элемент представим в виде суммы элементов примарного кручения. Поэтому можно ограничиться рассмотрением случая, когда кручение каждого элемента есть либо нуль, либо степень p . Кроме того, может наблюдаться совпадение клеток по модулю степени p , а также появление радикальных операторов, связанных с умножением на p .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.12. Интересно, что взаимосвязи между первым и вторым основными случаями, а также с методом Кемера были поняты автором после анализа ситуации, возникающей в алгебрах над общими кольцами.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.13. Можно изучить второй основной случай, как и первый, введя одну дополнительную радикальную переменную t (символизирующую умножения – “несобственные подстановки”) и определив алгебру $\tilde{A}$ как фактор $A\langle t \rangle / \text{id}(t)^2$, в котором элементы из A принудительно объявлены алгебраическими порядка $nc(A)c(\Phi)$, где n – максимальная степень тождества Капелли, не выполняющегося в A . В качестве показателя k (введенного в пп. 5.2.3) можно взять произведение $c(\Phi) \cdot \max(\max_p(d(A_p)), d(A \otimes \mathbb{Q}))$.

Список литературы

1. L. H. Rowen, *Polynomial identities in ring theory*, Pure Appl. Math., **84**, Academic Press, New York–London, 1980.
2. В. С. Дренски, “О тождествах в алгебрах Ли”, *Алгебра и логика*, **13**:3 (1974), 265–290; англ. пер.: V. S. Drenski, “On identities in Lie algebras”, *Algebra and Logic*, **13**:3 (1974), 150–165.
3. С. Процеси, *Rings with polynomial identities*, Dekker, New York, 1973.
4. Ю. П. Размыслов, *Тождества алгебр и их представлений*, Наука, М., 1989; англ. пер.: Yu. P. Razmyslov, *Identities of algebras and their representations*, Transl. Math. Monogr., **138**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
5. Л. А. Бокуть, И. В. Львов, В. К. Харченко, “Некоммутативные кольца”, *Алгебра* – 2, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **18**, ВИНТИ, М., 1988, 5–116; англ. пер.: L. A. Bokut', I. V. L'vov, V. K. Kharchenko, “Noncommutative rings”, *Algebra II: Noncommutative rings*, Encyclopaedia Math. Sci., **18**, Springer, Berlin, 1991, 1–106.
6. К. И. Бейдар, В. Н. Латышев, В. Т. Марков, А. В. Михалёв, Л. А. Скорняков, А. А. Туганбаев, “Ассоциативные кольца”, Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом., **22**, ВИНТИ, М., 1984, 3–115; англ. пер.: K. I. Beidar, V. N. Latyshev, V. T. Markov, A. V. Mikhalev, L. A. Skorniyakov, A. A. Tuganbaev, “Associative rings”, *J. Math. Sci.*, **38**:3 (1987), 1855–1929.
7. Ю. А. Бахтурин, А. Ю. Ольшанский, “Тождества”, *Алгебра* – 2, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **18**, ВИНТИ, М., 1988, 117–240; англ. пер.: Yu. A. Bakhturin, A. Yu. Ol'shanskij, “Identities”, *Algebra II: Noncommutative rings*, Encyclopaedia Math. Sci., **18**, Springer, Berlin, 1991, 107–221.
8. М. З. Голубчик, А. В. Михалёв, “О многообразиях алгебр с полугрупповым тождеством”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1982, № 2, 8–11; англ. пер.: I. Z. Golubchik, A. V. Mikhalev, “On varieties of algebras with semigroup identity”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **37**:2 (1982), 5–9.
9. А. И. Мальцев, “Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями”, *Матем. сб.*, **26(68)**:1 (1950), 19–33.
10. Ю. Н. Мальцев, “О представлении конечных колец матрицами над коммутативным кольцом”, *Матем. сб.*, **128(170)**:3 (1985), 383–402; англ. пер.: Yu. N. Mal'tsev, “On the representation of finite rings by matrices over commutative rings”, *Math. USSR-Sb.*, **56**:2 (1987), 379–402.
11. Ю. Н. Мальцев, “О многообразиях ассоциативных алгебр”, *Алгебра и логика*, **15**:5 (1976), 579–584; англ. пер.: Yu. N. Mal'tsev, “Varieties of associative algebras”, *Algebra and Logic*, **15**:5 (1976), 361–364.
12. С. И. Адян, “Бесконечные неприводимые системы групповых тождеств”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **34**:4 (1970), 715–734; англ. пер.: S. I. Adjan, “Infinite irreducible systems of group identities”, *Math. USSR-Izv.*, **4**:4 (1970), 721–739.
13. Ю. А. Бахтурин, *Тождества в алгебрах Ли*, Наука, М., 1985.
14. Ю. А. Бахтурин, А. Ю. Ольшанский, “Тождественные соотношения в конечных кольцах Ли”, *Матем. сб.*, **96(138)**:4 (1975), 543–559; англ. пер.: J. A. Bahturin, A. J. Ol'sanskii, “Identical relations in finite Lie rings”, *Math. USSR-Sb.*, **25**:4 (1975), 507–523.
15. К. А. Желваков, А. М. Слинько, И. П. Шестаков, А. И. Ширшов, *Кольца, близкие к ассоциативным*, Наука, М., 1978; англ. пер.: K. A. Zhevlaikov, A. M. Slin'ko, I. P. Shestakov, A. I. Shirshov, *Rings that are nearly associative*, Pure Appl. Math., **104**, Academic Press, New York, 1982.
16. А. И. Кострикин, *Вокруг Бернсайда*, Наука, М., 1986; англ. пер.: A. I. Kostrikin, *Around Burnside*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*(3), **20**, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

17. И. В. Львов, “О многообразиях ассоциативных колец. I, II”, *Алгебра и логика*, **12:3** (1973), 269–297; № 6, 667–689; англ. пер.: I. V. L’vov, “Varieties of associative rings. I, II”, *Algebra and Logic*, **12:3** (1973), 150–167; № 6, 381–393.
18. В. А. Уфнаровский, “Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре”, *Алгебра* – 6, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **57**, ВИНТИ, М., 1990, 5–177; англ. пер.: V. A. Ufnarovskij, “Combinatorial and asymptotic methods in algebra”, *Algebra VI*, Encyclopaedia Math. Sci., **57**, Springer, Berlin, 1995, 1–196.
19. И. Н. Херстейн, *Некоммутативные кольца*, Мир, М., 1972; пер. с англ.: I. N. Herstein, *Noncommutative rings*, Wiley, New York, 1968.
20. А. Я. Белов, В. В. Борисенко, В. Н. Латышев, “Мономимальные алгебры”, *Алгебра* – 4, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **26**, ВИНТИ, М., 2002, 35–214; англ. пер.: A. Ya. Belov, V. V. Borisenko, V. N. Latyshev, “Monomial algebras”, *J. Math. Sci. (New York)*, **87:3** (1997), 3463–3575.
21. К. I. Beidar, W. S. Martindale, A. V. Michalev, *Rings with generalized identities*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **196**, Dekker, New York, 1996.
22. G. Birkhoff, “On the structure of abstract algebras”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **31:2** (1935), 433–454.
23. V. Drensky, *Free algebras and PI-algebras. Graduate course in algebra*, Springer, Singapore, 2000.
24. A. Kemer, “On the multilinear components of the regular prime varieties”, *Methods in ring theory* (Levico Terme, Italy, 1997), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **198**, Dekker, New York, 1998, 171–183.
25. E. Formanek, “Central polynomials for matrix rings”, *J. Algebra*, **23:1** (1972), 129–132.
26. R. L. Kruse, “Identities satisfied by a finite ring”, *J. Algebra*, **26:2** (1973), 298–318.
27. S. A. Amitsur, “Rational identities and applications to algebra and geometry”, *J. Algebra*, **3:3** (1966), 304–359.
28. M. Dehn, “Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlssysteme”, *Math. Ann.*, **85:1** (1922), 184–194.
29. В. П. Белкин, “О многообразиях правоальтернативных алгебр”, *Алгебра и логика*, **15:5** (1976), 491–508; англ. пер.: V. P. Belkin, “Varieties of right alternative algebras”, *Algebra and Logic*, **15:5** (1976), 309–320.
30. А. Я. Вайс, “О нормальных многообразиях алгебр Ли”, XIX Всес. алгебр. конференция, Львовский гос. ун-т, Львов, 1987, 48.
31. И. Б. Воличенко, “Об одном многообразии алгебр Ли, связанных со стандартными тождествами. I, II”, *Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук*, 1980, № 1, 23–30; № 2, 22–27.
32. И. М. Исаев, “Конечные правоальтернативные алгебры с бесконечными базисами тождеств”, XVII Всес. алг. конф. Тезисы сообщ., Ч. I, Новосибирск, 1985.
33. А. В. Ильяков, *Представимость алгебр и конечность базиса тождеств*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, ИМ СО РАН, Новосибирск, 1990.
34. А. Н. Красильников, “О тождествах алгебр Ли треугольных матриц над полем положительной характеристики”, Тез. докл. VI Симпоз. по теории колец, алгебр и модулей, Львовский гос. ун-т, Львов, 1990.
35. И. В. Львов, “Конечномерные алгебры с бесконечным базисом тождеств”, *Сиб. матем. журн.*, **19:1** (1978), 91–99; англ. пер.: I. V. L’vov, “Finite-dimensional algebras with infinite bases of identities”, *Siberian Math. J.*, **19:1** (1978), 63–69.
36. И. В. Львов, “О многообразиях, порожденных конечными альтернативными кольцами”, *Алгебра и логика*, **17:3** (1978), 282–286; англ. пер.: I. V. L’vov, “Varieties generated by finite alternative rings”, *Algebra and Logic*, **17:3** (1978), 195–198.

37. Ю. Н. Мальцев, В. А. Парфенов, “Пример неассоциативной алгебры, не допускающей конечного базиса тождеств”, *Сиб. матем. журн.*, **18**:6 (1977), 1420–1421; англ. пер.: Yu. N. Mal'tsev, V. A. Parfenov, “A nonassociative algebra having no finite basis for its laws”, *Siberian Math. J.*, **18**:6 (1977), 1007–1008.
38. С. В. Полин, “О тождествах конечных алгебр”, *Сиб. матем. журн.*, **17**:6 (1976), 1356–1366; англ. пер.: S. V. Polin, “Identities of finite algebras”, *Siberian Math. J.*, **17**:6 (1976), 992–999.
39. В. В. Стомба, “О конечной базисуемости некоторых многообразий алгебр Ли и ассоциативных колец”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1982, № 2, 54–58; англ. пер.: V. V. Stovba, “On the finite basis property for certain varieties of Lie algebras and associative algebras”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **37**:2 (1982), 69–74.
40. У. У. Умирбаев, “Шпехтовость многообразия разрешимых альтернативных алгебр”, *Алгебра и логика*, **24**:2 (1985), 226–239; англ. пер.: U. U. Umirbaev, “Specht varieties of soluble alternative algebras”, *Algebra and Logic*, **24**:2 (1985), 140–149.
41. W. Specht, “Gesetze in Ringen. I”, *Math. Z.*, **52**:1 (1950), 557–589.
42. В. Д. Мазуров, Е. И. Хухро (ред.), *Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп*, изд. 13, Изд-во ин-та матем. СО АН СССР, Новосибирск, 1995; англ. пер.: V. D. Mazurov, E. I. Khukhro (eds.), *The Kourouka notebook. Unsolved problems in group theory*, ed. 13, Institute of Math., Novosibirsk, 1995.
43. Г. К. Генов, “Некоторые шпехтовы многообразия ассоциативных алгебр”, *PLISKA Stud. Math. Bulgar.*, 1981, № 2, 30–40.
44. А. В. Гришин, “Бесконечно базисуемое T -пространство над полем характеристики 2”, *Международ. конфер. по алгебре и анализу, посв. 100-летию со дня рожд. Н. Г. Чеботарёва* (5–11 июня 1994 г. Тезисы докл.), НГУ, Казань, 1982, 29.
45. А. Н. Зубков, “Об одном обобщении теоремы Размысова–Прочези”, *Сиб. матем. журн.*, **35**:4 (1996), 433–457; англ. пер.: A. N. Zubkov, “A generalization of the Razmyslov–Procesi theorem”, *Algebra and Logic*, **35**:4 (1996), 241–254.
46. В. Н. Латышев, “Конечная базисуемость тождеств некоторых колец”, *УМН*, **32**:4 (1977), 259–260.
47. В. Н. Латышев, *Нематричные многообразия ассоциативных алгебр*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1977.
48. Ю. Н. Мальцев, Е. Н. Кузьмин, “Базис тождеств алгебры матриц второго порядка над конечным полем”, *Алгебра и логика*, **17**:1 (1978), 28–32; англ. пер.: Yu. N. Mal'tsev, E. N. Kuz'min, “A basis for the identities of the algebra of second-order matrices over a finite field”, *Algebra and Logic*, **17**:1 (1978), 18–21.
49. В. Т. Марков, “О системах образующих T -идеалов конечно порожденных свободных алгебр”, *Алгебра и логика*, **18**:5 (1979), 587–598; англ. пер.: V. T. Markov, “Systems of generators of t -ideals of finitely generated free algebras”, *Algebra and Logic*, **18**:5 (1979), 371–378.
50. А. Ю. Ольшанский, “О проблеме конечного базиса тождеств в группах”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **34**:2 (1970), 376–384; англ. пер.: A. J. Ol'sanskii, “On the problem of a finite basis of identities in groups”, *Math. USSR-Izv.*, **4**:2 (1970), 381–389.
51. Ю. М. Рябухин, Е. Н. Захарова, “О шпехтовости некоторых многообразий ассоциативных колец”, *Матем. иссл. (Кишинев)*, **74** (1983), 122–130.
52. R. M. Bryant, M. R. Vaughan-Lee, “Soluble varieties of Lie algebras”, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **23**:1 (1972), 107–112.
53. Е. И. Зельманов, “Решение ослабленной проблемы Бернсайда для групп нечетного показателя”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:1 (1990), 42–59; англ. пер.: E. I. Zel'manov, “Solution of the restricted Burnside problem for groups of odd exponent”, *Math. USSR-Izv.*, **36**:1 (1991), 41–60.

54. А. Г. Курош, “Проблемы теории колец, связанные с проблемой Бернсайда о периодических группах”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **5**:3 (1941), 233–240.
55. E. I. Zel'manov, “On the nilpotency of nil algebras”, *Algebra some current trends*, Lect. Notes in Math., **1352**, Springer-Verlag, Berlin, 1988, 227–240.
56. А. И. Ширшов, “О некоторых неассоциативных ниль-кольцах и алгебраических алгебрах”, *Матем. сб.*, **41(83)**:3 (1957), 381–394.
57. А. И. Ширшов, “О кольцах с тождественными соотношениями”, *Матем. сб.*, **43(85)**:2 (1957), 277–283.
58. B. Plotkin, “Varieties of algebras and algebraic varieties”, *Israel J. Math.*, **96**:2 (1996), 511–522.
59. Б. И. Плоткин, “Некоторые понятия алгебраической геометрии в универсальной алгебре”, *Алгебра и анализ*, **9**:4 (1997), 224–248; англ. пер.: B. I. Plotkin, “Some notions of algebraic geometry in universal algebra”, *St. Petersburg Math. J.*, **9**:4 (1998), 859–879.
60. A. Berzins, B. Plotkin, E. Plotkin, “Algebraic geometry in varieties of algebras with the given algebra of constants”, *J. Math. Sci. (New York)*, **102**:3 (2000), 4039–4070.
61. B. Plotkin, *Seven lectures in universal algebraic geometry*, Preprint, Institute of Mathematics, Jerusalem, 2000.
62. К. И. Бейдар, “К теоремам А. И. Мальцева о матричных представлениях алгебр”, *УМН*, **41**:5 (1986), 161–162; англ. пер.: K. I. Beidar, “On theorems of A. I. Mal'tsev concerning matrix representations of algebras”, *Russian Math. Surveys*, **41**:5 (1986), 127–128.
63. А. З. Анан'ин, “Локально финитно аппроксимируемые и локально представимые многообразия алгебр”, *Алгебра и логика*, **16**:1 (1977), 3–23; англ. пер.: A. Z. Anan'in, “Locally finitely approximable and locally representable varieties of algebras”, *Algebra and Logic*, **16**:1 (1977), 1–16.
64. В. Т. Марков, “О представимости матрицами конечно порожденных PI-алгебр”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1989, № 2, 17–20; англ. пер.: V. T. Markov, “Matrix representability of finitely-generated PI-algebras”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **44**:2 (1989), 23–27.
65. А. Мекей, “О представимости кольца эндоморфизмов конечной абелевой группы матрицами над коммутативным кольцом”, *Науч. Отчет. Инф. Цен. МНР*, 02–910004 (1991), 3–15.
66. S. A. Amitsur, L. W. Small, “Finite-dimensional representations of PI algebras”, *J. Algebra*, **133**:2 (1990), 244–248.
67. И. В. Львов, “О представимости нильпотентных алгебр матрицами”, *Сиб. матем. журн.*, **21**:5 (1980), 158–161.
68. А. И. Мальцев, “О представлениях бесконечных алгебр”, *Матем. сб.*, **13(55)**:2–3 (1943), 263–286.
69. С. И. Кублановский, *Локально финитно-аппроксимируемые и локально представимые многообразия ассоциативных колец и алгебр*, деп. в ВИНТИ 6143–82, 1982.
70. С. И. Кублановский, *О многообразиях ассоциативных алгебр с локальными условиями конечности*, Дис. . . . докт. физ.-матем. наук, ЛГУ, СПб., 1996.
71. И. В. Львов, “Условия максимальности в алгебрах с тождественными соотношениями”, *Алгебра и логика*, **8**:4 (1969), 449–459; англ. пер.: I. V. L'vov, “Maximality conditions in algebras with identity relations”, *Algebra and Logic*, **8**:4 (1969), 258–263.
72. И. В. Львов, “Локально слабо нетеровы многообразия алгебр над нетеровыми кольцами”, 3-й Всес. симпоз. по теории колец, алгебр и модулей, Тарту, 1976, 67.
73. Ю. П. Размыслов, “О конечной базирруемости тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль”, *Алгебра и логика*, **12**:1 (1973),

- 83–113; англ. пер.: Yu. P. Razmyslov, “Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero”, *Algebra and Logic*, **12**:1 (1973), 47–63.
74. Ю. П. Размыслов, “Тождества со следом полных матричных алгебр над полем характеристики нуль”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **38**:4 (1974), 723–756; англ. пер.: Yu. P. Razmyslov, “Trace identities of full matrix algebras over a field of characteristic zero”, *Math. USSR-Izv.*, **8**:4 (1974), 727–760.
 75. С. Procesi, “The invariant theory of $n \times n$ matrices”, *Advances in Math.*, **19**:3 (1976), 306–381.
 76. Ю. П. Размыслов, “Алгебры, удовлетворяющие тождественным соотношениям типа Капелли”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45**:1 (1981), 143–166; англ. пер.: J. P. Razmyslov, “Algebras satisfying Capelli identities”, *Math. USSR-Izv.*, **18**:1 (1982), 125–144.
 77. Ю. П. Размыслов, “О радикале Джекобсона в PI-алгебрах”, *Алгебра и логика*, **13**:3 (1974), 337–360; англ. пер.: Yu. P. Razmyslov, “The Jacobson radical in PI-algebras”, *Algebra and Logic*, **13**:3 (1974), 192–204.
 78. Г. К. Генов, “Базис тождеств алгебры матриц третьего порядка над конечным полем”, *Алгебра и логика*, **20**:4 (1981), 365–388; англ. пер.: G. K. Genov, “A basis of identities of the algebra of third-order matrices over a finite field”, *Algebra and Logic*, **20**:4 (1981), 241–257.
 79. Г. К. Генов, П. Н. Сидеров, “Базис тождеств алгебры матриц четвертого порядка над конечным полем. I, II”, *Serdica*, **8**:3 (1982), 313–323; **8**:4, 351–366.
 80. А. Н. Красильников, “О тождествах алгебр Ли треугольных матриц над полем”, Тр. ММО, **52**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1989, 229–245; англ. пер.: A. N. Krasil’nikov, “On identities of triangular matrix representations of groups”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 1990, 233–249.
 81. Г. К. Генов, “Шпехтовость некоторых многообразий ассоциативных алгебр над полем характеристики нуль”, *Докл. Болг. АН*, **29**:7 (1976), 939–941.
 82. А. П. Попов, “О шпехтовости некоторых многообразий ассоциативных алгебр”, *PLISKA Stud. Math. Bulgar.*, **2** (1981), 41–53.
 83. В. С. Дренски, “Представления симметрической группы и многообразия линейных алгебр”, *Матем. сб.*, **115(157)**:1(5) (1981), 98–115; англ. пер.: V. S. Drenski, “Representations of the symmetric group and varieties of linear algebras”, *Math. USSR-Sb.*, **43**:1 (1982), 85–101.
 84. M. R. Vaughan-Lee, “Varieties of Lie algebras”, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **21**:3 (1970), 297–308.
 85. Ю. А. Медведев, “Пример многообразия разрешимых альтернативных алгебр над полем характеристики 2, не имеющего конечного базиса тождеств”, *Алгебра и логика*, **19**:3 (1980), 300–313; англ. пер.: Yu. A. Medvedev, “Example of a variety of solvable alternative algebras over a field of characteristic 2 having no finite basis of identities”, *Algebra and Logic*, **19**:3 (1980), 191–201.
 86. С. В. Пчелинцев, “Структура слабых тождеств на грассмановых оболочках центрально-метабелевых альтернативных супералгебр суперранга 1 над полем характеристики 3”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **7**:3 (2001), 849–871.
 87. А. Я. Вайс, Е. И. Зельманов, “Теорема Кемера для конечно порожденных йордановых алгебр”, *Изв. вузов. Матем.*, 1989, № 6, 42–51; англ. пер.: A. Ya. Vajs, E. I. Zel’manov, “Kemer’s theorem for finitely generated Jordan algebras”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **33**:6 (1989), 38–47.
 88. А. В. Ильтяков, “Конечность базиса тождеств конечнопорожденной альтернативной PI-алгебры над полем характеристики 0”, *Сиб. матем. журн.*, **32**:6 (1991), 61–76; англ. пер.: A. V. Il’tyakov, “Finiteness of basis of identities of a finitely generated alternative PI-algebra over a field of characteristic zero”, *Siberian Math. J.*, **32**:6 (1991), 948–961.

89. A. V. Ильяков, "On finite basis of identities of Lie algebra representations", *Nova J. Algebra Geom.*, **1**:3 (1992), 207–259.
90. А. В. Ильяков, *Шпехтовость многообразий PI-представлений конечнопорожденных алгебр Ли*, Препринт № 10, ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 1991.
91. А. Р. Кемер, "Конечная базлируемость тождеств ассоциативных алгебр", *Алгебра и логика*, **26**:5 (1987), 597–641; англ. пер.: A. R. Kemer, "Finite basis property of identities of associative algebras", *Algebra and Logic*, **26**:5 (1987), 362–397.
92. А. Р. Кемер, "Многообразия и Z_2 -градуированные алгебры", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:5 (1984), 1042–1059; англ. пер.: A. R. Kemer, "Varieties and Z_2 -graded algebras", *Math. USSR-Izv.*, **25**:2 (1985), 359–374.
93. А. Р. Кемер, "Тождества конечнопорожденных алгебр над бесконечным полем", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:4 (1990), 726–753; англ. пер.: A. R. Kemer, "Identities of finitely generated algebras over an infinite field", *Math. USSR-Izv.*, **37**:1 (1991), 69–96.
94. А. В. Гришин, "О конечной базлируемости абстрактных T -пространств", *Фундамент. и прикл. матем.*, **1**:3 (1995), 669–700.
95. А. В. Гришин, "О конечной базлируемости систем обобщенных многочленов", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:5 (1990), 899–927; англ. пер.: A. V. Grishin, "On finitely based systems of generalized polynomials", *Math. USSR-Izv.*, **37**:2 (1991), 243–272.
96. В. В. Щиголев, "Конечная базлируемость T -пространств над полями нулевой характеристики", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:5 (2001), 191–224; англ. пер.: V. V. Shchigolev, "The finite basis property of T -spaces over fields of characteristic zero", *Izv. Math.*, **65**:5 (2001), 1041–1071.
97. В. В. Щиголев, "Примеры бесконечно базлируемых T -пространств", *Матем. сб.*, **191**:3 (2000), 143–160; англ. пер.: V. V. Shchigolev, "Examples of T -spaces with an infinite basis", *Sb. Math.*, **191**:3 (2000), 459–476.
98. А. В. Гришин, "Примеры не конечной базлируемости T -пространств и T -идеалов в характеристике 2", *Фундамент. и прикл. матем.*, **5**:1 (1999), 101–118.
99. В. В. Щиголев, "Примеры бесконечно базлируемых T -идеалов", *Фундамент. и прикл. матем.*, **5**:1 (1999), 307–312.
100. *Нерешенные проблемы теории колец и модулей*, Днестровская тетрадь, 4-е изд., Изд-во ин-та матем. СО АН СССР, Новосибирск, 1993.
101. А. И. Мальцев, "О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики", *Международный конгресс по математике* (Москва, 1966), Мир, М., 1968, 217–231.
102. A. J. Belov, "Specht type problems and related questions", *Formal power series and algebraic combinatorics*, Proceedings of the 12th International Conference (FPSAC'00) (Moscow, 2000), Springer-Verlag, Berlin, 2000, 9–10.
103. A. J. Belov, "Solution of one Maltzev problem", II Международная конференция "Полугруппы: теория и приложения" в честь профессора Е. С. Ляпина. Тезисы докл., СПб., 1999, 3–9.
104. А. Я. Белов, "Локальная представимость относительно свободных ассоциативных алгебр", *Неклассические уравнения математической физики*, Третий сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-98), посвященный памяти С. Л. Соболева. Тезисы докладов (Новосибирск, 1998), **5**, Изд-во ИМ СО РАН, Новосибирск, 1998, 4–5.
105. А. Я. Белов, "Локальная представимость относительно свободных ассоциативных алгебр", *Algebra*, Proceedings of the international algebraic conference on the occasion of the 90th birthday of A. G. Kurosh (Moscow, 1998), de Gruyter, Berlin, 2000, 143–144.

106. А. Р. Кемер, “Представимость приведенно-свободных алгебр”, *Алгебра и логика*, **27:3** (1988), 274–294; англ. пер.: A. R. Kemer, “Representability of reduced free algebras”, *Algebra and Logic*, **27:3** (1988), 167–184.
107. Л. А. Бокут’, И. Р. Шестаков, “Some results by A. I. Shirshov and his school”, *Proceedings of the second international conference on algebra dedicated to the memory of A. I. Shirshov* (Barnaul, Russia, 1991), Contemp. Math., **184**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 1–12.
108. S. A. Amitsur, “The T -ideals of the free ring”, *J. London Math. Soc.*, **30** (1955), 470–475.
109. S. A. Amitsur, “A generalization of Hilbert’s Nullstellensatz”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8:4** (1957), 649–656.
110. J. Lewin, “A matrix representation for associative algebras. I, II”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **188:2** (1974), 293–317.
111. A. Giambruno, M. Zaicev, *Exponential Codimensional Growth of PI-algebras: an exact estimate*, Preprint № 62, Marso–Aprile, 1998.
112. A. Giambruno, M. Zaicev, “Exponential codimension growth of PI algebras: an exact estimate”, *Adv. Math.*, **142:2** (1999), 221–243.
113. A. Giambruno, M. Zaicev, “Minimal varieties of algebras of exponential growth”, *Adv. Math.*, **174:2** (2003), 310–323.
114. А. Я. Белов, “Размерность Гельфанда–Кириллова относительно свободных ассоциативных алгебр”, *Матем. сб.*, **195:12** (2004), 3–26; англ. пер.: A. Ya. Belov, “The Gel’fand–Kirillov dimension of relatively free associative algebras”, *Sb. Math.*, **195:12** (2004), 1703–1726.
115. А. Р. Кемер, *Идеалы тождеств ассоциативных алгебр*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, Барнаул–СПб., 1988.
116. С. А. Пихтильков, *О многообразии, порожденном n -мерными алгебрами*, деп. в ВИНТИ № 1213-80, 1980.
117. С. А. Пихтильков, *Полиномиальные тождества алгебр, близких к конечномерным*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1980.
118. А. В. Гришин, *Коммутативно-алгебраический подход к исследованию полиномиальных тождеств и T -пространств*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, МГУ, М., 2000.
119. В. Н. Латышев, “К теореме Реева о тождествах тензорного произведения PI -алгебр”, *УМН*, **27:4** (1972), 213–214.
120. S. A. Amitsur, “The sequence of codimensions of PI-algebras”, *Israel J. Math.*, **47:1** (1984), 1–22.
121. V. Drensky, “Codimensions of T -ideals and Hilbert series of relatively free algebras”, *J. Algebra*, **91:1** (1984), 1–17.
122. A. Kemer, “Multilinear identities of the algebras over a field of characteristic p ”, *Internat. J. Algebra Comput.*, **5:2** (1995), 189–197.
123. В. Н. Латышев, “Обобщение теоремы Гильберта о конечности базисов”, *Сиб. матем. журн.*, **7:6** (1966), 1422–1424; англ. пер.: V. N. Latysev, “Generalization of the Hilbert theorem on the finiteness of bases”, *Siberian Math. J.*, **7:1** (1966), 1112–1113.
124. В. Н. Латышев, “О шпехтовости некоторых многообразий ассоциативных алгебр”, *Алгебра и логика*, **8:6** (1969), 660–673; англ. пер.: V. N. Latyshev, “On the Specht property of certain varieties of associated algebras”, *Algebra and Logic*, **8:6** (1969), 374–382.
125. И. П. Шестаков, “Супералгебры и контрпримеры”, *Сиб. матем. журн.*, **32:6** (1991), 187–196; англ. пер.: I. P. Shestakov, “Superalgebras and counterexamples”, *Siberian Math. J.*, **32:6** (1991), 1052–1060.

126. А. В. Бадеев, “О шпехтовости многообразий коммутативных альтернативных алгебр над полем характеристики 3 и коммутативных луп Муфанг”, *Сиб. матем. журн.*, **41:6** (2000), 1252–1268; англ. пер.: A. V. Badeev, “On the Specht property of varieties of commutative alternative algebras over a field of characteristic 3 and commutative Moufang loops”, *Siberian Math. J.*, **41:6** (2000), 1027–1041.
127. А. В. Бадеев, *О шпехтовости разрешимых многообразий коммутативных альтернативных алгебр над полем характеристики 3*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, МПГУ, М., 1999.
128. А. Е. Залесский, “Групповые кольца индуктивных пределов знакопеременных групп”, *Алгебра и анализ*, **2:6** (1990), 132–149; англ. пер.: A. E. Zaleskij, “Group rings of inductive limits of alternating groups”, *Leningrad Math. J.*, **2:6** (1991), 1287–1303.
129. А. Р. Кемер, *Нематричные многообразия, многообразия со степенным ростом и конечно порожденные PI-алгебры*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, МИ СО АН СССР, Новосибирск, 1981.
130. A. Kanel-Belov, L. H. Rowen, *Computational aspects of polynomial identities*, Res. Notes in Math., **9**, Peters, Wellesley, MA, 2005.
131. А. Я. Белов, “Контрпримеры к проблеме Шпехта”, *Матем. сб.*, **191:3** (2000), 13–24; англ. пер.: A. Ya. Belov, “Counterexamples to the Specht problem”, *Sb. Math.*, **191:3** (2000), 329–340.
132. А. Я. Белов, “О нешпехтовых многообразиях”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **5:1** (1999), 47–66.
133. И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, Мир, М., 1985; пер. с англ.: I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Clarendon Press, Oxford, 1979.
134. А. Я. Белов, “О базисе Ширшова относительно свободных алгебр сложности n ”, *Матем. сб.*, **135(177):3** (1988), 373–384; англ. пер.: A. Ya. Belov, “On a Shirshov basis of relatively free algebras of complexity n ”, *Math. USSR-Sb.*, **63:2** (1988), 363–374.
135. К. А. Зубрилин, “Алгебры, удовлетворяющие тождествам Капелли”, *Матем. сб.*, **186:3** (1995), 53–64; англ. пер.: K. A. Zubrilin, “Algebras satisfying Capelli identities”, *Sb. Math.*, **186:3** (1995), 359–370.
136. А. Я. Белов, “О кольцах, асимптотически близких к ассоциативным”, *Матем. тр.*, **10:1** (2007), 29–96; англ. пер.: A. Ya. Belov, “On rings asymptotically close to associative rings”, *Siberian Adv. Math.*, **17:4** (2007), 227–267.
137. А. Я. Белов, *Алгебры с полиномиальными тождествами: представления и комбинаторные методы*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, МГУ, М., 2002.
138. В. Н. Латышев, “О некоторых многообразиях ассоциативных алгебр”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **37:5** (1973), 1010–1037; англ. пер.: V. N. Latyšev, “On some varieties of associative algebras”, *Math. USSR-Izv.*, **7:5** (1973), 1011–1038.
139. J. Tits, *Lectures on algebraic groups*, Dept. of Math., Yale Univ., NH, 1966/67.
140. M. Rosenlicht, “Questions of rationality for solvable algebraic groups over nonperfect fields”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **62:1** (1963), 97–120.
141. T. Kambayashi, M. Miyanishi, M. Takeuchi, *Unipotent algebraic groups*, Lecture Notes in Math., **414**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1974.
142. А. Я. Белов, “О многообразиях, порожденных кольцом, конечномерным над центроидом”, *УМН*, **62:2** (2007), 171–172; англ. пер.: A. Ya. Belov, “On manifolds generated by a ring finite-dimensional over a centroid”, *Russian Math. Surveys*, **62:2** (2007), 379–381.
143. V. Drensky, “On the Hilbert series of relatively free algebras”, *Comm. Algebra*, **12:19** (1984), 2335–2347.

144. Н. Бурбаки, *Коммутативная алгебра. Элементы математики*, Мир, М., 1971; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*, Fasc. XXVII: Algèbre commutative, Chapitre 1: Moduls plats. Chapitre 2: Localisation, Hermann, Paris, 1961; Fasc. XXVIII: Algèbre commutative, Chapitre 3: Graduations, filtrations et topologies. Chapitre 4: Idéaux premiers associés et décomposition primaire, 1961; Fasc. XXX: Algèbre commutative, Chapitre 5: Entiers. Chapitre 6: Valuations, 1964; Fasc. XXXI: Algèbre commutative, Chapitre 7: Diviseurs, 1965.
145. А. В. Гришин, “Асимптотические свойства свободных конечно порожденных алгебр некоторых многообразий”, *Алгебра и логика*, **22**:6 (1983), 608–625; англ. пер.: A. V. Grishin, “Asymptotic properties of free finitely generated algebras in certain varieties”, *Algebra and Logic*, **22**:6 (1983), 431–444.
146. А. В. Гришин, “Показатель роста многообразия алгебр и его приложения”, *Алгебра и логика*, **26**:5 (1987), 536–557; англ. пер.: A. V. Grishin, “The growth exponent of a variety of algebras and its applications”, *Algebra and Logic*, **26**:5 (1987), 318–333.
147. A. Braun, “The radical in a finitely generated P. I. algebra”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **7** (1982), 385–386.
148. A. K. Belov, L. H. Rowen, U. Vishnu, “Normal bases of PI-algebras”, *Adv. in Appl. Math.*, **37**:3 (2006), 378–389.
149. К. А. Зубрилин, “О классе нильпотентности препятствия для представимости алгебр, удовлетворяющих тождествам Капелли”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **1**:2 (1995), 409–430.
150. К. А. Зубрилин, “О наибольшем нильпотентном идеале в алгебрах, удовлетворяющих тождествам Капелли”, *Матем. сб.*, **188**:8 (1997), 93–102; англ. пер.: K. A. Zubrilin, “On the largest nilpotent ideal in algebras satisfying Capelli identities”, *Sb. Math.*, **188**:8 (1997), 1203–1211.
151. К. А. Зубрилин, “Об идеале Бэра в алгебрах, удовлетворяющих тождествам Капелли”, *Матем. сб.*, **189**:12 (1998), 73–82; англ. пер.: K. A. Zubrilin, “On the Baer ideal in algebras satisfying Capelli identities”, *Sb. Math.*, **189**:12 (1998), 1809–1818.

А. Я. БЕЛОВ (A. YA. BELOV)
 Московский институт открытого образования;
 Bar-Ilan University, Ramat Gan, Israel
E-mail: kanelster@gmail.com, kanel@mccme.ru

Поступило в редакцию
 26.06.2006