Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Бичегкуев, Условия разрешимости разностных включений, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 4, 25–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/im1123>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 15:48:21

УДК 517.9

М. С. Бичегкуев

Условия разрешимости разностных включений

Получены необходимые и достаточные условия разрешимости разностных включений в пространстве векторных последовательностей, определяемых линейным отношением (многозначным линейным оператором) на банаховом пространстве.

Библиография: 7 наименований.

§ 1. Введение

Пусть X – комплексное банахово пространство и A – замкнутое линейное подпространство (линейное отношение) из $X \times X$. Через Ax , где $x \in D(A)$ (см. § 2), обозначим множество векторов $\{y \in X : (x, y) \in A\}$. Рассматриваются банаховы пространства $l_p = l_p(\mathbb{Z}_+, X)$, $p \in [1, \infty]$, последовательностей $x: \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow X$ векторов из X с нормой

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n \geq 0} \|x(n)\|^p \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty),$$
$$\|x\|_\infty = \sup_{n \geq 0} \|x(n)\|, \quad p = \infty.$$

Основные результаты работы связаны с вопросами разрешимости и представления решений разностного включения в пространстве l_p вида

$$x(n) \in Ax(n-1) + f(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\} = \mathbb{N}, \quad (1)$$

где последовательность f принадлежит пространству l_p , $p \in [1, \infty]$.

Такие разностные включения естественным образом возникают при изучении решений из l_p разностного уравнения вида

$$Bx(n) = Cx(n-1) + g(n), \quad g \in l_p, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

где $C, B: X \rightarrow Y$ – операторы из банахова пространства $\mathcal{B}(X, Y)$ линейных ограниченных операторов, определенных на X , со значениями в банаховом пространстве Y , причем оператор B имеет ненулевое ядро $\text{Ker } B$. В теореме 6 задача о существовании решений уравнения (2) сводится к задаче о существовании решений подходящего разностного включения (1) (где $A = CB^{-1}$ – линейное отношение; основные понятия из теории линейных отношений приведены в § 2).

Следующие две теоремы являются основными результатами настоящей статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 07-01-00131).

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы разностное включение (1) имело единственное решение для любой последовательности $f \in l_p$, необходимо и достаточно, чтобы отношение A было непрерывно обратимо и $r(A^{-1}) < 1$ для спектрального радиуса оператора $A^{-1} \in \mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X, X)$, или, что эквивалентно, выполнено условие

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| > 1\} \quad (3)$$

(т. е. спектр отношения A лежит вне круга $\overline{B}(0, 1) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \leq 1\}$).

ТЕОРЕМА 2. Разностное включение (1) имеет хотя бы одно решение из l_p для любой последовательности $f \in l_p$, если спектр $\sigma(A)$ отношения A обладает свойством

$$\sigma(A) \cap \mathbb{T} = \emptyset, \quad (4)$$

где $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| = 1\}$ – единичная окружность из $\mathbb{C}$.

Получены приложения к разностному уравнению (2) (теорема 6) и формулы (28) для решений разностного включения (1).

§ 2. Некоторые сведения из теории линейных отношений

В этом параграфе приводятся используемые понятия и результаты из теории линейных отношений (многозначных линейных операторов); их можно найти в монографиях [1], [2] и в статье [3].

Линейным замкнутым отношением между банаховыми пространствами $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ называется любое замкнутое подпространство $A \subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Если $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, то A назовем *линейным отношением на $\mathcal{X}$* . Совокупность всех замкнутых линейных отношений между $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ обозначим через $LR(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, а если $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, то через $LR(\mathcal{X})$.

Подпространство

$$D(A) = \{x \in \mathcal{X}: \exists y \in \mathcal{Y} \text{ такой, что } (x, y) \in A\}$$

называется *областью определения* отношения $A \in LR(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Подпространства

$$\text{Ker } A = \{x \in D(A): (x, 0) \in A\}, \quad \text{Im } A = \bigcup_{x \in D(A)} Ax$$

называются соответственно *ядром* и *образом* линейного (слово “линейное” будет иногда опускаться) отношения $A \in LR(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Отметим, что $Ax = y_0 + A0$ для любого $y_0 \in Ax$, где $A0 = \{y \in \mathcal{Y}: (0, y) \in A\}$ – линейное подпространство в $\mathcal{Y}$.

Если $A \in LR(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, то обратное отношение $A^{-1} \in LR(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ определяется равенством

$$A^{-1} = \{(y, x) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{X}: (x, y) \in A\}.$$

Суммой двух отношений $A, B \in LR(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ называется линейное подпространство из $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ вида

$$A + B = \{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}: x \in D(A) \cap D(B), \quad y \in Ax + Bx\},$$

где $Ax + Bx$ – алгебраическая сумма двух множеств Ax , Bx из $\mathcal{Y}$. Значит, $D(A + B) = D(A) \cap D(B)$.

Произведением отношений $A \in LR(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $B \in LR(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$, где $\mathcal{Z}$ – банахово пространство, называется линейное подпространство из $\mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ вида

$$BA = \{(x, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Z} : \exists y \in D(B) \text{ такой, что } (x, y) \in A, (y, z) \in B\}.$$

Отметим, что $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

Каждое отношение $A \in LR(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ является графиком многозначного отображения $\tilde{A}: D(\tilde{A}) \subset \mathcal{X} \rightarrow 2^{\mathcal{Y}}$, где $D(\tilde{A}) = D(A)$ и $\tilde{A}x = Ax$ для всех $x \in D(A)$. В дальнейшем они отождествляются и обозначаются через A . Таким образом, множество $LO(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ линейных замкнутых операторов, содержащее $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, можно считать включенным в $LR(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Отношение $A \in LR(\mathcal{X})$ называется *непрерывно обратимым*, если $A^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, т.е. $\text{Ker } A = \{0\}$ (отношение A инъективно) и $\text{Im } A = \mathcal{X}$ (A сюръективно). *Резольвентным множеством* отношения $A \in LR(\mathcal{X})$ называется множество $\rho(A)$ всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. *Спектром* отношения $A \in LR(\mathcal{X})$ называется множество $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Отметим, что множество $\rho(A)$ открыто, спектр $\sigma(A)$ отношения $A \in LR(\mathcal{X})$ замкнут.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Отображение

$$R(\cdot, A): \rho(A) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{X}), \quad R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(A),$$

называется *резольвентой* отношения $A \in LR(\mathcal{X})$.

Резольвента отношения A является псевдорезольвентой в общепринятом смысле (см., например, [4, § 4.8]), причем

$$A0 = \text{Ker } R(\lambda_0, A), \quad D(A) = \text{Im } R(\lambda_0, A), \quad \lambda_0 \in \rho(A).$$

Линейное подпространство $\mathcal{X}_0$ из $\mathcal{X}$ называется *инвариантным* относительно отношения $A \in LR(\mathcal{X})$, если

$$Ax_0 \cap \mathcal{X}_0 \neq \emptyset, \quad x_0 \in D(A) \cap \mathcal{X}_0.$$

Сужением отношения $A \in LR(\mathcal{X})$ на инвариантное подпространство $\mathcal{X}_0$ называется линейное отношение вида $A_0 = A|(\mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}_0) \in LR(\mathcal{X}_0)$, для которого будет использоваться обозначение $A|_{\mathcal{X}_0}$.

Если $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1$ – прямая сумма двух инвариантных относительно отношения A подпространств и $A_0 = A|_{\mathcal{X}_0}$, $A_1 = A|_{\mathcal{X}_1}$, то будем говорить, что отношение A является прямой суммой отношений A_0 и A_1 , и использовать запись $A = A_0 \oplus A_1$; отношения A_0 и A_1 называются *частями* отношения A .

Отметим, что если $\rho(A) \neq \emptyset$ и в разложении $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1$ подпространства $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1$ инвариантны относительно всех операторов $R(\lambda, A)$, $\lambda \in \rho(A)$, то они инвариантны и относительно A , и тогда $\sigma(A) = \sigma(A_0) \cup \sigma(A_1)$, причем $R(\lambda, A_i) = R(\lambda, A)|_{\mathcal{X}_i}$, $i = 0, 1$.

В статье используется

ТЕОРЕМА 3 [3]. Пусть спектр $\sigma(A)$ отношения $A \in LR(\mathcal{X})$ представим в следующем виде:

$$\sigma(A) = \sigma_0 \cup \sigma_1,$$

где σ_0 – компактное множество из $\mathbb{C}$, σ_1 – замкнутое множество и $\sigma_0 \cap \sigma_1 = \emptyset$. Тогда существует разложение

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1 \quad (5)$$

в прямую сумму двух замкнутых инвариантных относительно A подпространств $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1$ таких, что сужения $A_i = A|_{\mathcal{X}_i}$, $i = 0, 1$, обладают следующими свойствами:

- 1) $A_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{X}_0)$, $\sigma(A_0) = \sigma_0$;
- 2) $A_1 0 = A 0 = \text{Ker } R(\cdot, A) = \text{Ker } R(\cdot, A_1) \subset \mathcal{X}_1$, $D(A) = \mathcal{X}_0 \times D(A_1)$, $\sigma(A_1) = \sigma_1$;
- 3) проектор Рисса $P_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, осуществляющий разложение (5) (т. е. $\text{Im } P_0 = \mathcal{X}_0$, $\text{Ker } P_0 = \mathcal{X}_1$), определяется формулой

$$P_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R(\lambda, A) d\lambda, \quad (6)$$

где γ – жорданов замкнутый контур (или конечное число таких кривых), лежащий в $\rho(A)$ и такой, что σ_0 лежит внутри γ , а σ_1 – вне его.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Два линейных отношения $A_1, A_2 \in LR(\mathcal{X})$ называются *подобными*, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ такой, что $U(D(A_2)) = D(A_1)$ и $A_1 U = U A_2$, или, что эквивалентно, $A_2 = \{(Ux, Uy) : (x, y) \in A_1\}$.

Отметим, что $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$ для подобных отношений A_1 и A_2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Линейное отношение $A \in LR(\mathcal{X})$ называется *перестановочным* с оператором $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, если $(Tx, Ty) \in A$ для любых $(x, y) \in A$.

§ 3. Доказательство теорем 1 и 2

По отношению $A \in LR(X)$ построим отношение $\mathcal{A} \in LR(l_p)$ на банаховом пространстве последовательностей $l_p = l_p(\mathbb{Z}_+, X)$, $p \in [1, \infty]$. Оно состоит из упорядоченных пар $(x, y) \in l_p \times l_p$, для которых выполнены следующие соотношения:

$$(x(k-1), y(k)) \in A, \quad k \geq 1, \quad (7)$$

и, значит, $\mathcal{A} 0 \supset \{(y_0, 0, \dots) : y_0 \in X\}$. Полученное таким образом линейное отношение $\mathcal{A}$ назовем *разностным отношением взвешенного сдвига*.

Важно отметить, что если $A \in LO(X)$, то отношение $\mathcal{A} \subset l_p \times l_p$ имеет вид

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in l_p \times l_p : x(n) \in D(A), y(n) = Ax(n-1), n \geq 1\}.$$

Следовательно, при условии $X \neq \{0\}$ (которое считается выполненным) линейное отношение $\mathcal{A}$ не является линейным оператором (так как $\mathcal{A} 0 = \{y \in l_p : y(k) = 0, k \geq 1\} \neq \{0\}$).

В следующих леммах рассматриваются свойства линейного отношения $\mathcal{A} \subset l_p \times l_p$.

ЛЕММА 1. Если $A \in LR(X)$ (т.е. A – замкнутое отношение на X), то отношение $\mathcal{A}$ замкнуто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (x_n, y_n) , $n \geq 1$, – сходящаяся к $(x_0, y_0) \in l_p \times l_p$ последовательность из $\mathcal{A}$ и, значит, согласно (7)

$$(x_n(k-1), y_n(k)) \in A, \quad k \geq 1. \quad (8)$$

Ввиду замкнутости отношения A возможен предельный переход в (8) при каждом фиксированном $k \geq 1$, и поэтому получаем

$$(x_0(k-1), y_0(k)) \in A, \quad k \geq 1.$$

Следовательно, для пары (x_0, y_0) выполнены соотношения (7), и, значит, $(x_0, y_0) \in \mathcal{A}$. Лемма доказана.

В пространстве l_p , $p \in [1, \infty]$, рассмотрим семейство изометрических обратимых операторов $V(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{T}$,

$$(V(\gamma)x)(n) = \gamma^n x(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \gamma \in \mathbb{T}, \quad x \in l_p.$$

Наряду с отношением $\mathcal{A}$ рассматривается отношение $\mathcal{D} = I - \mathcal{A} \in LR(l_p)$; оно будет играть важную роль в проводимых здесь исследованиях. Его замкнутость вытекает из леммы 1.

ЛЕММА 2. Спектр $\sigma(\mathcal{A})$ отношения взвешенного сдвига $\mathcal{A} \in LR(l_p)$ инвариантен относительно поворота вокруг нуля в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Если $1 \notin \sigma(\mathcal{A})$, то $\sigma(\mathcal{A}) \cap \mathbb{T} = \emptyset$ и имеют место равенства

$$V(\gamma^{-1})\mathcal{D}^{-1}V(\gamma) = \gamma(\gamma I - \mathcal{A})^{-1} = \gamma R(\gamma, \mathcal{A}), \quad \gamma \in \mathbb{T}, \quad (9)$$

$$V(\gamma^{-1})R(\lambda, \mathcal{A})V(\gamma) = \gamma R(\gamma\lambda, \mathcal{A}), \quad \lambda \in \rho(\mathcal{A}), \quad \gamma \in \mathbb{T}. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения отношения $\mathcal{A}$ следует, что если $(x, y) \in \mathcal{A}$, т.е. выполнены включения (7), то из них получаем

$$\{(V(\gamma)x, V(\gamma)y) : (x, y) \in \mathcal{A}\} = \{(x, \gamma^{-1}y) : (x, y) \in \mathcal{A}\}, \quad \gamma \in \mathbb{T}.$$

Из этих равенств следуют равенства

$$V(\gamma^{-1})\mathcal{A}V(\gamma) = \gamma^{-1}\mathcal{A}, \quad \gamma \in \mathbb{T}, \quad (11)$$

причем $V(\gamma)(D(\mathcal{A})) = D(\mathcal{A})$. Таким образом, отношение $\mathcal{A}$ подобно отношениям $\theta\mathcal{A}$, $\theta \in \mathbb{T}$. Следовательно, спектр отношения $\mathcal{A}$ инвариантен относительно поворотов комплексной плоскости вокруг нуля. Из (11) вытекают равенства

$$V(\gamma^{-1})(\mathcal{A} - \lambda I)V(\gamma) = \gamma^{-1}(\mathcal{A} - \gamma\lambda I), \quad \lambda \in \rho(\mathcal{A}).$$

Теперь, переходя к обратным операторам, получаем (10). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из определения отношений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{D}$ следует, что разностное включение (1) может быть записано в виде

$$f \in \mathcal{D}x, \quad (12)$$

т. е. $x \in l_p$ – решение включения (1) тогда и только тогда, когда выполнено (12). Таким образом, условия разрешимости включения (1) для любой последовательности f эквивалентны сюръективности отношения $\mathcal{D}$, т. е. условию $\text{Im } \mathcal{D} = l_p$, а условие разрешимости включения (1) для любой f и единственности решения эквивалентно непрерывной обратимости отношения $\mathcal{D} \in LR(l_p)$. Значит, доказывая теоремы 1 и 2, следует рассматривать условия обратимости отношения $\mathcal{D}$ (теорема 1) и его сюръективности (теорема 2).

В условиях следующей леммы используются операторы из $\mathcal{B}(l_p)$ вида

$$(\bar{V}(\varphi)x)(k) = \varphi(k)x(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in l_p,$$

где $\varphi \in l_\infty(\mathbb{Z}_+) = l_\infty(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C})$. Кроме того, рассматривается последовательность $\psi_n: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, из l_p вида

$$\psi_n(k) = \begin{cases} 1, & k \leq n, \\ 2 - \frac{k}{n}, & n < k \leq 2n, \\ 0, & k > 2n, \end{cases}$$

а также соответствующая последовательность $\bar{V}(\psi_n)$, $n \geq 1$, операторов из алгебры $\mathcal{B}(l_p)$. Отметим, что оператор $V(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{T}$, может быть записан также в виде $\bar{V}(\varphi_\gamma)$, где $\varphi_\gamma(n) = \gamma^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

ЛЕММА 3 [6]. Пусть оператор $B \in \mathcal{B}(l_p)$ перестановочен со всеми операторами $V(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{T}$, и выполнено одно из условий:

- 1) $p \in [1, \infty)$;
- 2) $p = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{V}(\psi_n)B - B\bar{V}(\psi_n)\| = 0$.

Тогда оператор B является оператором умножения на ограниченную функцию $\tilde{B}: \mathbb{Z}_+ \rightarrow B(X)$ (т. е. $(Bx)(n) = \tilde{B}(n)x(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$) и $\|B\| = \|\tilde{B}\|_\infty$.

ЛЕММА 4. Резольвента $R(\cdot, \mathcal{A}): \rho(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}(l_p)$ отношения взвешенного сдвига $\mathcal{A} \in LR(l_p)$ обладает свойством

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\lambda \in K} \|\bar{V}(\psi_n)R(\lambda, \mathcal{A}) - R(\lambda, \mathcal{A})\bar{V}(\psi_n)\| = 0, \quad (13)$$

где K – любой компакт из $\rho(\mathcal{A})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отношение $\mathcal{A}\bar{V}(\varphi) - \bar{V}(\varphi)\mathcal{A}$ состоит из пар $(x, y) \in l_p \times l_p$ таких, что

$$((\varphi(n-1) - \varphi(n))x(n-1), y(n)) \in A, \quad n \geq 1.$$

Если $f \in l_\infty(\mathbb{Z}_+)$ имеет вид $f(n) = \varphi(n) - \varphi(n+1)$, $n \geq 0$, то

$$\mathcal{A}\bar{V}(\varphi) - \bar{V}(\varphi)\mathcal{A} = \mathcal{A}\bar{V}(f), \quad (\mathcal{A} - \lambda I)\bar{V}(\varphi) - \bar{V}(\varphi)(\mathcal{A} - \lambda I) = \mathcal{A}\bar{V}(f), \quad \lambda \in \rho(\mathcal{A}).$$

Применяя к обеим частям второго равенства слева и справа оператор $R(\lambda, \mathcal{A})$, получим

$$\bar{V}(\varphi)R(\lambda, \mathcal{A}) - R(\lambda, \mathcal{A})\bar{V}(\varphi) = (I + \lambda R(\lambda, \mathcal{A}))\bar{V}(f)R(\lambda, \mathcal{A}), \quad \lambda \in \rho(\mathcal{A}). \quad (14)$$

При этом использовалось полученное в § 2 равенство $\text{Ker } R(\lambda, \mathcal{A}) = \mathcal{A}0$. Если $\varphi = \psi_n$, $f_n(k) = \psi_n(k) - \psi_n(k+1)$, $k \geq 0$, то из (14), используя равенство $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$, получаем предельное соотношение (13). Лемма доказана.

Введем в рассмотрение линейное отношение $\tilde{A}$ на $l_p(\mathbb{Z}_+, X)$ по отношению $A \in LR(X)$ следующим образом:

$$\tilde{A} = \{(x, y) \in l_p \times l_p : (x(n), y(n)) \in A, n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Ясно, что оно замкнуто, и согласно определению отношения $\mathcal{A}$ следует, что

$$\tilde{A} = \mathcal{A}S(1), \quad (15)$$

где $S(1) \in \mathcal{B}(l_p)$ – оператор сдвига последовательностей влево на число 1, т. е.

$$(S(1)x)(n) = x(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in l_p.$$

Таким образом,

$$A = \tilde{A}S(-1), \quad (16)$$

где $S(-1) = S(1)^{-1}$ – линейное отношение на l_p вида

$$S(-1) = \{(x, y) \in l_p \times l_p : y(n) = x(n-1), n \geq 1\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Необходимость. В ходе доказательства следует иметь в виду замечание 1. Пусть отношение $\mathcal{D} \in LR(l_p)$ непрерывно обратимо. Значит, $1 \notin \sigma(\mathcal{A})$, и поэтому в силу леммы 2 спектр $\sigma(\mathcal{A})$ отношения $\mathcal{A}$ допускает представление вида

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_{\text{int}} \cup \sigma_{\text{out}}, \quad (17)$$

где $\sigma_{\text{int}} = \{\lambda \in \sigma(\mathcal{A}) : |\lambda| < 1\}$, $\sigma_{\text{out}} = \{\lambda \in \sigma(\mathcal{A}) : |\lambda| > 1\}$. По множеству σ_{int} построим проектор Рисса $\mathcal{P} \in \mathcal{B}(l_p)$ с помощью формулы

$$\mathcal{P} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} R(\lambda, \mathcal{A}) d\lambda, \quad (18)$$

где интегрирование осуществляется по окружности $\mathbb{T}$ (ориентированной в положительном направлении). Применив к обеим частям равенства (18) операторы $V(\gamma^{-1})$ и $V(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{T}$, и используя равенство (10), получим

$$\begin{aligned} V(\gamma^{-1})\mathcal{P}V(\gamma) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} V(\gamma^{-1})R(\lambda, \mathcal{A})V(\gamma) d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \gamma R(\gamma\lambda, \mathcal{A}) d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} R(\mu, \mathcal{A}) d\mu = \mathcal{P}, \quad \gamma \in \mathbb{T}. \end{aligned}$$

Таким образом, верны равенства

$$\mathcal{P}V(\gamma) = V(\gamma)\mathcal{P}, \quad \gamma \in \mathbb{T},$$

т.е. проектор $\mathcal{P} \in \mathcal{B}(l_p)$ перестановочен с операторами $V(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{T}$. Если $p \in [1, \infty)$, то из леммы 3 следует, что проектор $\mathcal{P}$ представим в виде

$$(\mathcal{P}x)(n) = P(n)x(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in l_p, \quad (19)$$

где $P: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathcal{B}(X)$ – ограниченная проекторнозначная функция и $\|\mathcal{P}\| = \sup_{n \geq 0} \|P(n)\|$. Для доказательства представления $\mathcal{P}$ в виде (19) при $p = \infty$ достаточно проверить условие 2) леммы 3. Его выполнение следует из леммы 4 и формулы (18). А именно, имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|\bar{V}(\psi_n)\mathcal{P} - \mathcal{P}\bar{V}(\psi_n)\| &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\mathbb{T}} (\bar{V}(\psi_n)R(\lambda, \mathcal{A}) - R(\lambda, \mathcal{A})\bar{V}(\psi_n)) d\lambda \right\| \\ &\leq \sup_{\lambda \in \mathbb{T}} \|\bar{V}(\psi_n)R(\lambda, \mathcal{A}) - R(\lambda, \mathcal{A})\bar{V}(\psi_n)\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Из равенств (15), (16) следует, что $\mathcal{A}S(1) = S(1)\mathcal{A}$, т.е. $\mathcal{A}$ перестановочно с оператором $S(1)$. Поэтому верны равенства $S(1)R(\lambda, \mathcal{A}) = R(\lambda, \mathcal{A})S(1)$, $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, и тогда из формулы (18) следует, что проектор $\mathcal{P}$ перестановочен с оператором $S(1)$. Значит, верны равенства

$$P(k)x(k+1) = P(k+1)x(k+1), \quad k \geq 0, \quad x \in l_p,$$

из которых получаем, что $P(k) = P(0) = P_{\text{int}} \in \mathcal{B}(X)$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$, т.е. функция P не зависит от $k \in \mathbb{Z}_+$.

Из формулы (15) следует, что $\mathcal{P}$ перестановочен с отношением $\tilde{A} \in LR(l_p)$, а из определения $\tilde{A}$ и вида проектора $\mathcal{P}$ следует, что проектор P_{int} перестановочен с отношением A .

Проектор P_{int} осуществляет разложение

$$X = X_{\text{int}} \oplus X_{\text{out}} \quad (20)$$

банахова пространства X в прямую сумму подпространств $X_{\text{int}} = \text{Im } P_{\text{int}}$, $X_{\text{out}} = \text{Ker } P_{\text{int}}$, инвариантных относительно отношения A , а проектор $\mathcal{P}$ – разложение

$$l_p = l_p^- \oplus l_p^+, \quad (21)$$

где подпространства $l_p^- = l_p(\mathbb{Z}_+, X_{\text{int}})$, $l_p^+ = l_p(\mathbb{Z}_+, X_{\text{out}})$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$ (и, значит, $\mathcal{D}$). Согласно теореме 3 сужения $\mathcal{A}_{\text{int}} = \mathcal{A}|_{l_p^-}$, $\mathcal{A}_{\text{out}} = \mathcal{A}|_{l_p^+}$ обладают свойствами:

- 1) $\mathcal{A}_{\text{int}} \in \mathcal{B}(l_p^-)$, $\sigma(\mathcal{A}_{\text{int}}) = \sigma_{\text{int}}$;
- 2) $\sigma(\mathcal{A}_{\text{out}}) = \sigma_{\text{out}}$, $\mathcal{A}_{\text{out}}^{-1} \in \mathcal{B}(l_p^+)$, $\mathcal{A}_{\text{out}}0 = \mathcal{A}0$.

Поскольку $r(\mathcal{A}_{\text{int}}) < 1$ и

$$\mathcal{A}_{\text{int}}x(n) = \mathcal{A}_{\text{int}}x(n-1), \quad n \geq 1,$$

где $\mathcal{A}_{\text{int}} \in \mathcal{B}(X_{\text{int}})$ – сужение отношения A на X_{int} (см. формулу (17)), то любая последовательность $x \in l_p^-$ принадлежит $\text{Ker } \mathcal{D}$, т.е. $l_p^- = \{0\}$. Следовательно, $\sigma_{\text{int}} = \emptyset$, и поэтому $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\text{out}}$, $X = X_{\text{out}}$ и $r(\mathcal{A}^{-1}) < 1$. Так как отношение $S(-1) \in LR(l_p)$ непрерывно обратимо и $S(-1)^{-1} = S(1)$, то из равенства (15)

получаем, что отношение $\tilde{A}$ непрерывно обратимо, $r(\tilde{A}^{-1}) < 1$, значит, непрерывно обратимо отношение A и $r(A^{-1}) < 1$. Необходимость условия доказана.

Достаточность. Из непрерывной обратимости отношения A , условия $r(A^{-1}) < 1$ и равенства (15) следует, что отношение $\mathcal{D}$ представимо в виде

$$\mathcal{D} = I - \tilde{A}S(-1) = \tilde{A}S(-1)(\tilde{A}^{-1}S(1) - I)$$

и непрерывно обратимо, причем

$$\mathcal{D}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}^{-n-1}S(n+1),$$

т. е. для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ справедливо равенство

$$(\mathcal{D}^{-1}x)(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}^{-n-1}x(k+n+1), \quad x \in l_p. \quad (22)$$

Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует

ТЕОРЕМА 4. Если отношение A непрерывно обратимо и $r(A^{-1}) < 1$, то отношение $\mathcal{D}$ непрерывно обратимо и оператор $\mathcal{D}^{-1}$ определяется формулой (22).

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\mathcal{D}$ – непрерывно обратимое отношение, то

$$\{\lambda \in \sigma(\mathcal{A}): |\lambda| < 1\} = \emptyset.$$

ТЕОРЕМА 5. Спектр $\sigma(\mathcal{A})$ отношения $\mathcal{A}$ совпадает с одним из следующих подмножеств:

1) $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C}$ (это равенство имеет место тогда и только тогда, когда $0 \in \sigma(A)$ и $\sigma(A)$ содержит хотя бы одно ненулевое число);

2) $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus B(0, r)$, где $B(0, r) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| < r\}$, $r > 0$ (это представление возможно тогда и только тогда, когда $A \in LR(X)$ непрерывно обратимо и $r(A^{-1}) = r$);

3) $\sigma(\mathcal{A}) = \emptyset$ (это равенство эквивалентно условию $\sigma(A) = \emptyset$, или, другими словами, условию квазинильпотентности оператора $A^{-1} \in \mathcal{B}(X)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имея в виду лемму 2, допустим, что окружность $\mathbb{T}(\alpha) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| = \alpha\}$, где $\alpha > 0$, лежит в $\rho(\mathcal{A})$, причем множество $\{\lambda \in \sigma(\mathcal{A}): |\lambda| < \alpha\}$ не пусто. Рассмотрим отношение $\mathcal{A}_\alpha = \alpha^{-1}\mathcal{A}$. Тогда отношение $\mathcal{D}_\alpha = I - \mathcal{A}_\alpha$ будет непрерывно обратимым, $\sigma(\mathcal{D}_\alpha) \cap \mathbb{T} = \emptyset$ и согласно следствию 1 множество $\{\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_\alpha) = \alpha^{-1}\sigma(\mathcal{A}): |\lambda| < 1\} = \{\lambda \in \sigma(\mathcal{A}): |\lambda| < \alpha\}$ пусто. Получено противоречие. Из доказанного следует, что множество $\sigma(\mathcal{A})$ может быть только одним из подмножеств, указанных в условиях теоремы. При этом из теоремы 1 следует, что представление 2) имеет место тогда и только тогда, когда $0 \in \rho(A)$ и $r(A^{-1}) = r$. Следовательно, $\sigma(A) = \mathbb{C}$ возможно только в том случае, когда $0 \in \sigma(A)$ и $\sigma(A)$ содержит хотя бы одно ненулевое число. Далее из представления 2) вытекает, что равенство $\sigma(A) = \emptyset$ имеет место только тогда, когда A^{-1} принадлежит $\mathcal{B}(X)$ и $r(A^{-1}) = r$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Имеет место равенство*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq \frac{1}{r(A^{-1})} \right\}$$

для непрерывно обратимого отношения A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Согласно замечанию 1 следует доказать сюръективность отношения $\mathcal{D}$. Пусть спектр отношения A обладает свойством (4). Тогда

$$\sigma(A) = \sigma_- \cup \sigma_+, \quad (23)$$

где $\sigma_- = \{\lambda \in \sigma(A) : |\lambda| < 1\}$, $\sigma_+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > 1\}$.

Рассмотрим проектор Рисса

$$P_- = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} R(\lambda, A) d\lambda. \quad (24)$$

Тогда справедливо разложение

$$X = X_- \oplus X_+,$$

осуществляемое проектором P_- (т. е. $X_{\pm} = \text{Im } P_{\pm}$, $P_+ = I - P_-$). Из теоремы 3 следует, что:

1) сужение $A_- = A|_{X_-}$ отношения A на X_- принадлежит алгебре $\mathcal{B}(X_-)$ и $r(A_-) < 1$;

2) $A_+^{-1} \in \mathcal{B}(X_+)$, $r(A_+^{-1}) < 1$.

Банахово пространство $l_p = l_p(\mathbb{Z}_+, X)$ допускает разложение

$$l_p = l_p(\mathbb{Z}_+, X_-) \oplus l_p(\mathbb{Z}_+, X_+) = l_p^- \oplus l_p^+,$$

рассмотрим сужения $\mathcal{A}_-$ и $\mathcal{A}_+$ отношения $\mathcal{A} \in LR(l_p)$ на l_p^- и l_p^+ соответственно. Первое будет ограниченным оператором из $\mathcal{B}(l_p^-)$ вида

$$(\mathcal{A}_- x)(n) = \begin{cases} A_- x(n-1), & n \geq 1, \\ 0, & n = 0, \end{cases} \quad (25)$$

а второе $\mathcal{A}_+$ – линейным отношением на l_p^+ , определяемым соотношениями

$$\{(x, y) \in l_p^+ \times l_p^+ : (x(n-1), x(n)) \in A_+, n \geq 1\}.$$

Поэтому $\mathcal{A}_+ \in LR(l_p^+)$ непрерывно обратимо и

$$(\mathcal{A}_+^{-1} x)(n) = A_+^{-1} x(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in l_p^+. \quad (26)$$

Из формул (25), (26), определяющих оператор $\mathcal{A}_-$ и отношение $\mathcal{A}_+$, следует, что $r(\mathcal{A}_-) = r(A_-) < 1$, $r(\mathcal{A}_+^{-1}) = r(A_+^{-1}) < 1$.

Из отмеченного следует, что для любой $f \in l_p$ включение $f \in \mathcal{D}x$ имеет решение $x \in D(\mathcal{A}) = D(\mathcal{D}) \subset l_p$ вида (см. замечание 1)

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_-^n x_- - \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_+^{-n-1} x_+ = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_-^n P_- x - \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_+^{-n-1} P_+ x. \quad (27)$$

Теорема доказана.

Из формулы (27) и равенства $\text{Ker } \mathcal{D} = \{y \in l_p : y(n) = P_-x(n), n \geq 0, x \in l_p\}$ получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. Если выполнено условие (4), то любое решение $x \in l_p$ разностного включения (1) имеет вид

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} G(n-k)f(k) + P_-x(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (28)$$

где функция $G: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathcal{B}(X)$ определяется равенствами

$$G(m)y = \begin{cases} \mathcal{A}_-^m P_-y, & m \geq 0, \\ -\mathcal{A}_+^m P_+y, & m < 0, \end{cases} \quad y \in X,$$

а P_- – проектор Рисса (см. (24)).

§ 4. Приложения теорем 1 и 2

В этом параграфе рассматривается разностное уравнение вида (2), где оператор $B \in \mathcal{B}(X, Y)$ имеет ненулевое ядро. Для формулировки результатов используется следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Комплексное число λ отнесем к *резольвентному множеству* $\rho(B, C)$ упорядоченной пары (B, C) из $\mathcal{B}(X, Y)$, если оператор $B - \lambda C$ (непрерывно) обратим. Множество $\sigma(B, C) = \mathbb{C} \setminus \rho(B, C)$ называется *спектром* пары (B, C) .

При изучении спектральных свойств упорядоченной пары (B, C) из $\mathcal{B}(X, Y)$ важную роль играют два линейных отношения $A_l = B^{-1}C \in LR(X)$, $A_r = CB^{-1} \in LR(Y)$. Отношение A_l называется *левым*, а A_r – *правым* линейными отношениями. При этом B^{-1} – линейное отношение между пространствами Y и X .

В уравнении (2) сделаем замену $y(n) = Bx(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $x \in l_p$, и тогда возникает задача о разрешимости разностного включения вида

$$y(n) \in (CB^{-1})y(n-1) + f(n) = A_r y(n-1) + f(n), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (29)$$

Ясно, что $x \in l_p$ есть решение уравнения (2) тогда и только тогда, когда $y(n) = Bx(n)$, $n \geq 0$, есть решение разностного включения (29). Из [3, теорема 6.1] следует, что

$$\sigma(B, C) \setminus \{0\} = \sigma(A_r) \setminus \{0\}.$$

Поэтому имеет место следующая теорема, которая соответствует теореме 1.

ТЕОРЕМА 6. Для того чтобы включение (29) имело единственное решение для любой последовательности $f \in l_p$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

- 1) $A_r^{-1} = BC^{-1} \in \mathcal{B}(Y)$, что эквивалентно одновременному выполнению условий $\text{Im } C = Y$, $\text{Ker } C \subset \text{Ker } B$;
- 2) $r(BC^{-1}) < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 1 следует, что для существования и единственности включения (29) для любой $f \in l_p$ необходимо и достаточно, чтобы отношение $A_r = CB^{-1}$ было непрерывно обратимым и $r(A_r^{-1}) < 1$. Поскольку $A_r = \{(Bx, Cx): x \in X\}$, то $A_r^{-1} = \{(Cx, Bx): x \in X\}$. Ясно, что отношение A_r^{-1} будет ограниченным оператором тогда и только тогда, когда $\text{Im } C = Y$ и $\text{Ker } C \subset \text{Ker } B$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если оператор C обратим, $r(BC^{-1}) < 1$ и выполнены условия теоремы 6, то решение x уравнения (2) определяется формулой

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} (BC^{-1})^{k+1} C^{-1} f(n+k+1), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что задача единственности решения линейных дифференциальных включений рассматривается в статье [7].

Автор выражает искреннюю благодарность рецензентам за ряд полезных замечаний.

Список литературы

1. R. Cross, *Multivalued linear operators*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **213**, Dekker, New York, 1998.
2. A. Favini, A. Yagi, *Degenerate differential equations in Banach spaces*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **215**, Dekker, New York, 1999.
3. А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов, “Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов”, *Матем. сб.*, **193**:11 (2002), 3–42; англ. пер.: A. G. Baskakov, K. I. Chernyshov, “Spectral analysis of linear relations and degenerate operator semigroups”, *Sb. Math.*, **193**:11 (2002), 1573–1610.
4. Е. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: E. Hille, R. S. Phillips, *Functional analysis and semigroups*, American Mathematical Society Colloquium Publications, **31**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1957.
5. I. Gohberg, S. Goldberg, M. A. Kaashoek, *Classes of linear operators*, Vol. 1, Operator Theory: Advances and Applications, **49**, Birkhäuser, Basel, 1990.
6. А. Г. Баскаков, А. И. Пастухов, “Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами”, *Сиб. матем. журн.*, **42**:6 (2001), 1231–1243; англ. пер.: A. G. Baskakov, A. I. Pastukhov, “Spectral analysis of a weighted shift operator with unbounded operator coefficients”, *Siberian Math. J.*, **42**:6 (2001), 1026–1035.
7. М. С. Бичегкуев, “Об ослабленной задаче Коши для линейного дифференциального включения”, *Матем. заметки*, **79**:4 (2006), 483–487; англ. пер.: M. S. Bichegkuev, “On a weakened Cauchy problem for a linear differential inclusion”, *Math. Notes*, **79**:3–4 (2006), 449–453.

М. С. БИЧЕГКУЕВ (M. S. BICHEGKUEV)
 Северо-Осетинский государственный университет,
 г. Владикавказ
 E-mail: bichegkuev@yandex.ru

Поступило в редакцию
 26.06.2006
 04.07.2007