Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Быковский, О распределении простых знаменателей подходящих дробей для почти всех вещественных чисел, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 2, 65–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/im1124>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 08:43:04

УДК 511.37+511.33

В. А. Быковский

О распределении простых знаменателей подходящих дробей для почти всех вещественных чисел

Доказан асимптотический закон распределения простых чисел среди знаменателей подходящих дробей для почти всех вещественных чисел.

Библиография: 13 наименований.

Введение

Введем следующие обозначения: a, b, l, l', k, P, P' – целые числа; $q, q_1, q_2, \dots, \dots, q_i, \dots, d, m, n, Q, Q'$ – натуральные числа; p, p' – простые числа; $\alpha, u, v, t, x, X, Y, Z$ – вещественные числа; $\#\mathcal{M}$ – число элементов множества $\mathcal{M}$;

$$\varphi(n) = \#\{a \mid 1 \leq a \leq n; \text{НОД}(a, n) = 1\}$$

– функция Эйлера;

$$\sigma_t(n) = \sum_{d|n} d^t$$

– сумма делителей n в степени t ; записи $f(x) \ll g(x)$ и $f(x) \ll_w g(x)$ означают, что в общей области определения функций f и g выполняется неравенство $|f(x)| \leq Cg(x)$ с абсолютной постоянной $C > 0$, зависящей от параметра w во втором случае; $\|x\|$ – расстояние от x до ближайшего целого; $f(x)|_v^u = f(u) - f(v)$;

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{если } n = p^d, \\ 0, & \text{если } n \neq p^d, \end{cases}$$

– функция Мангольдта; $\log x$ – натуральный логарифм.

Напомним, что для $\pi(x)$ (количества всех простых чисел, не превосходящих x) справедлив асимптотический закон:

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} (1 + o(1)) \quad (0.1)$$

при $x \rightarrow \infty$ (см., например, [1]). Опубликовано много работ, в которых этот результат распространяется на некоторые конкретные возрастающие последовательности натуральных чисел типа $a(n) = [n^{1+\delta}]$, $n = 1, 2, \dots$, с небольшими положительными значениями $\delta < 0.1$.

Достаточно простые эвристические соображения (см. [2] и [3]) позволяют предположить, что среди элементов последовательностей вида

$$2^n - 1, \quad 2^n + 3, \quad n \cdot 2^n + 1, \quad \dots \quad (0.2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (грант № 03-51-5070), РФФИ (грант № 07-01-00306) и ДВО РАН (грант № 06-1-П13-047).

содержится бесконечно много простых. Доказательство подобного рода утверждений на сегодняшний день представляется безнадежной задачей.

В последние десятилетия внимание специалистов стали привлекать метрические задачи по этой теме. Речь идет о семействах экспоненциально растущих последовательностей, зависящих от непрерывного вещественного параметра α . В ряде случаев удалось доказать асимптотический закон распределения простых чисел в последовательностях для почти всех α . В частности, Г. Харман [4] доказал, что для любого $\varepsilon > 0$ и почти всех α количество простых вида $[10^n \alpha]$, $1 \leq n \leq N$, есть

$$\log_{10} N + O_{\varepsilon, \alpha}((\log N)^{1/2}(\log \log N)^{3/2+\varepsilon}).$$

Подобного рода результаты получены П. Роу [5] для других последовательностей.

Наша цель состоит в том, чтобы доказать аналог вышеупомянутого результата Г. Хармана для знаменателей подходящих дробей вещественных чисел.

Пусть α – иррациональное число с разложением

$$\alpha = [q_0; q_1, \dots, q_i, \dots]$$

в бесконечную непрерывную дробь с целым $q_0 = q_0(\alpha) = [\alpha]$ (целая часть α) и натуральными $q_i = q_i(\alpha)$ (неполные частные) при $i = 1, 2, 3, \dots$. По определению

$$\frac{P_i}{Q_i} = [q_0; q_1, \dots, q_{i-1}]$$

есть i -я подходящая дробь к α с взаимно простыми целым $P_i = P_i(\alpha)$ и натуральным $Q_i = Q_i(\alpha)$. А. Я. Хинчин [6] доказал, что для почти всех α существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log Q_n(\alpha)}{n} = \gamma \quad (0.3)$$

с универсальной константой γ , для которой чуть позже П. Леви [7] нашел явное выражение:

$$\gamma = \frac{\pi^2}{12 \log 2}.$$

Из (0.3) следует, что для почти всех α последовательность знаменателей $Q_n(\alpha)$, аналогично последовательностям из (0.2), растёт экспоненциально в зависимости от n .

Обозначим через $\mathcal{P}_\alpha(X)$ количество всех номеров n , для которых:

- (I) $Q_n(\alpha) \leq X$;
- (II) $Q_n(\alpha) = p$ – простое.

Из результатов Даффина и Шаффера (см. [8, гл. I, § 2, теорема 2]) непосредственно следует, что для почти всех α

$$\mathcal{P}_\alpha(X) \rightarrow \infty \quad (0.4)$$

при $X \rightarrow \infty$. В свою очередь, асимптотическая формула (1.13) из [9] немедленно приводит к двусторонней оценке

$$c_1 \leq \frac{\mathcal{P}_\alpha(X)}{\log \log X} \leq c_2 \quad (0.5)$$

для почти всех α с некоторыми $0 < c_1 < c_2$ при $X \geq X_0(\alpha)$.

В настоящей работе доказывается асимптотический закон распределения простых среди знаменателей $Q_n(\alpha)$ (аналог (0.1)) для почти всех α в следующем виде:

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{P}_\alpha(X)}{\log \log X} = \log 4. \quad (0.6)$$

Учитывая результат Хинчина (0.3), отсюда заключаем, что для почти всех α натуральные числа n , для которых $Q_n(\alpha)$ – простые числа, составляют экспоненциально растущую последовательность.

На самом деле мы докажем более сильный по сравнению с (0.6) результат.

ТЕОРЕМА 0.1. Пусть $X \geq \exp(e^\varepsilon)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при почти всех α

$$\mathcal{P}_\alpha(X) = \log 4 \cdot \log \log X + O_{\varepsilon, \alpha}(\log^{1/2} \log X \cdot \log^{3/2+\varepsilon} \log \log X).$$

Для α с асимптотическим законом из теоремы 0.1 составим возрастающую последовательность всех простых среди знаменателей подходящих дробей к α :

$$p_1(\alpha), p_2(\alpha), \dots, p_i(\alpha), \dots$$

В качестве следствия теоремы 0.1 получается

ТЕОРЕМА 0.2. Для почти всех α при $n \rightarrow \infty$

$$\log \log p_n(\alpha) = \frac{n}{\log 4} + O_{\varepsilon, \alpha}(\sqrt{n} \log^{3/2+\varepsilon} n) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Для доказательства теоремы 0.1 мы дополняем методы Г. Хармана из работы [4] оценками сумм Клоостермана.

§ 1. Непрерывные дроби и $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$

Напомним, что $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ – мультипликативная группа целочисленных (2×2) -матриц с определителем, равным ± 1 . Обозначим через $\mathrm{GL}_2^{(c)}(\mathbb{Z})$ подмножество в $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, состоящее из всех матриц

$$S = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(S) & P'(S) \\ Q(S) & Q'(S) \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

у которых $1 \leq Q \leq Q'$, $0 \leq P \leq Q$, $1 \leq P' \leq Q'$.

Легко заметить, что равенство $Q = Q'$ выполняется только для одной матрицы из $\mathrm{GL}_2^{(c)}(\mathbb{Z})$, а именно для

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Сформулируем теорему 1 из [10, § 50] (см. также [11]) в следующем виде.

ЛЕММА 1.1. Пусть $\alpha \in (0, 1)$. Тогда следующие два утверждения для матрицы S из $\mathrm{GL}_2^{(c)}(\mathbb{Z})$ эквивалентны:

1) для некоторой пары последовательных подходящих дробей $\frac{P_i}{Q_i}$ и $\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}$ к α , отличных от α , выполняется равенство

$$S = \begin{pmatrix} P_i & P_{i+1} \\ Q_i & Q_{i+1} \end{pmatrix};$$

2) выполняется двойное неравенство

$$0 < S^{-1}(\alpha) = \frac{Q'\alpha - P'}{-Q\alpha + P} < 1.$$

Как было отмечено в [12], из леммы 1.1 непосредственно вытекают следующие замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Соответствие

$$(q_1, \dots, q_n) \rightarrow S = S(q_1, \dots, q_n) = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix},$$

где

$$\frac{P}{Q} = [0; q_1, \dots, q_{n-1}], \quad \frac{P'}{Q'} = [0; q_1, \dots, q_{n-1}, q_n],$$

определяет биекцию множества всех конечных наборов натуральных чисел на $\text{GL}_2^{(c)}(\mathbb{Z})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Для любого набора $(q_1, \dots, q_n)$

$$S(q_1, \dots, q_n) = \prod_{i=1}^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_i \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Множество $\text{GL}_2^{(c)}(\mathbb{Z})$ имеет структуру полугруппы без единицы, и при этом для любых трех его элементов S, S', S'' выполняется равенство $S = S'S''$ тогда и только тогда, когда

$$S = S(q_1, \dots, q_m, q_{m+1}, \dots, q_n), \quad S' = S(q_1, \dots, q_m), \quad S'' = S(q_{m+1}, \dots, q_n).$$

В частности, любая матрица из $\text{GL}_2^{(c)}(\mathbb{Z})$ имеет единственное разложение вида (1.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Для любой пары (Q, Q') , $1 \leq Q < Q'$, $\text{НОД}(Q, Q') = 1$, найдутся ровно две матрицы S_1 и S_2 из $\text{GL}_2^{(c)}(\mathbb{Z})$, для которых

$$Q(S_i) = Q, \quad Q'(S_i) = Q'.$$

При этом

$$S_1 = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} \iff S_2 = \begin{pmatrix} Q - P & Q' - P' \\ Q & Q' \end{pmatrix}.$$

Если $Q/Q' = [0; q_1, \dots, q_n]$ – каноническое разложение в непрерывную дробь при $q_n \geq 2$, то можно положить

$$S_1 = S(q_n, q_{n-1}, \dots, q_1), \quad S_2 = S(1, q_n - 1, q_{n-1}, \dots, q_1).$$

Имеется только одна матрица S такая, что $Q(S) = Q'(S) = 1$, а именно матрица из (1.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Для любой пары (P', Q') , $1 \leq P' < Q'$, $\text{НОД}(P', Q') = 1$, найдутся ровно две матрицы S_1 и S_2 из $\text{GL}_2^{(c)}(\mathbb{Z})$, для которых

$$P'(S_i) = P', \quad Q'(S_i) = Q'.$$

При этом

$$S_1 = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} \Longleftrightarrow S_2 = \begin{pmatrix} P' - P & P' \\ Q' - Q & Q' \end{pmatrix}.$$

Если $P'/Q' = [0; q_1, \dots, q_{n-1}, q_n]$ – каноническое разложение в непрерывную дробь, то можно положить

$$S_1 = S(q_1, \dots, q_{n-1}, q_n), \quad S_2 = S(q_1, \dots, q_{n-1}, q_n - 1).$$

Имеется только одна матрица S такая, что $P'(S) = Q'(S) = 1$, а именно матрица из (1.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. Неравенство $0 < S^{-1}(\alpha) < 1$ из утверждения 2) леммы 1.1 определяет интервал

$$\mathfrak{I}(S) = \begin{cases} \left(\frac{P'}{Q'}, \frac{P' + P}{Q' + Q} \right), & \text{если } \det(S) = 1, \\ \left(\frac{P' + P}{Q' + Q}, \frac{P'}{Q'} \right), & \text{если } \det(S) = -1, \end{cases}$$

с длиной

$$\text{mes } \mathfrak{I}(S) = \frac{1}{Q'(Q + Q')}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.7. Пусть $S = S(q_1, \dots, q_n)$. Тогда $\alpha \in \mathfrak{I}(S)$, если и только если каноническое разложение α в непрерывную дробь имеет вид $\alpha = [0; q_1, \dots, q_n, q_{n+1}, \dots]$ с некоторыми натуральными q_i при $i > n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.8. Интервалы $\mathfrak{I}(S)$ и $\mathfrak{I}(S')$ пересекаются тогда и только тогда, когда один из них содержится в другом. При этом в случае $\mathfrak{I}(S) \subset \mathfrak{I}(S')$ со строгим включением найдется матрица S'' из $\text{GL}_2^{(c)}(\mathbb{Z})$, для которой $S = S'S''$.

§ 2. Простые в прогрессиях

Пусть для $X \geq 1$ и $\text{НОД}(a, m) = 1$

$$\Psi(X; m, a) = \sum_{\substack{n \leq X \\ n \equiv a \pmod{m}}} \Lambda(n), \quad \tilde{\Psi}(X; m, a) = \sum_{\substack{p \leq X \\ p \equiv a \pmod{m}}} \log p,$$

$$E(X; m, a) = \Psi(X; m, a) - \frac{X}{\varphi(m)}, \quad \tilde{E}(X; m, a) = \tilde{\Psi}(X; m, a) - \frac{X}{\varphi(m)}.$$

Нам понадобится хорошо известная (см., например, [13]) оценка

$$\sum_{m \leq Y} \sum_{\substack{1 \leq a \leq m \\ \text{НОД}(a, m) = 1}} E^2(X; m, a) \ll_A Y X \log X + \frac{X^2}{\log^A X}, \quad (2.1)$$

которая имеет место для любого $A \geq 1$ при всех $1 \leq Y < X$. Так как для $1 \leq X < X'$

$$\tilde{E}(X'; m, a) - \tilde{E}(X; m, a) = \sum_{\substack{X < p \leq X' \\ p \equiv a \pmod{m}}} \log p - \frac{X' - X}{\varphi(m)},$$

то справедливо

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Для любых $1 \leq X < X'$

$$|\tilde{E}(X'; m, a) - \tilde{E}(X; m, a)| \leq (X' - X) \left(\frac{1}{\varphi(m)} + \frac{\log X'}{m} \right) + \log X'.$$

ЛЕММА 2.1. Пусть $A \geq 1$ и $1 \leq Y < X$. Тогда

$$\sum_{m \leq Y} \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\substack{1 \leq a \leq m \\ \text{НОД}(a, m) = 1}} |\tilde{E}(X; m, a)| \ll_A (YX)^{1/2} \log^{1/2} X + \frac{X}{\log^A X}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись неравенством Коши–Буняковского, с помощью (2.1) находим

$$\begin{aligned} T(Y, X) &= \sum_{m \leq Y} \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\substack{1 \leq a \leq m \\ \text{НОД}(a, m) = 1}} |E(X; m, a)| \\ &= \sum_{1 \leq 2^l \leq Y} \sum_{2^{-l-1}Y < m \leq 2^{-l}Y} \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\substack{1 \leq a \leq m \\ \text{НОД}(a, m) = 1}} |E(X; m, a)| \\ &\ll_A \sum_{1 \leq 2^l \leq Y} \left(\sum_{2^{-l-1}Y < m \leq 2^{-l}Y} \frac{1}{\varphi(m)} \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(2^{-l}YX \log X + \frac{X^2}{\log^{2A+2} X} \right)^{1/2} \\ &\ll \sum_{1 \leq 2^l \leq Y} \left(2^{-l/2}Y^{1/2}X^{1/2} \log^{1/2} X + \frac{X}{\log^{A+1} X} \right) \\ &\ll (YX)^{1/2} \log^{1/2} X + \frac{X}{\log^A X}. \end{aligned}$$

Пусть $\tilde{T}(Y, X)$ – сумма из левой части доказываемой оценки. Поскольку

$$\Psi(X; m, a) - \tilde{\Psi}(X; m, a) = \sum_{\substack{p^k \leq X, \ k \geq 2 \\ p^k \equiv a \pmod{m}}} \log p,$$

то

$$\begin{aligned} \tilde{T}(Y, X) &\ll T(Y, X) + \sum_{1 \leq m \leq Y} \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\substack{1 \leq a \leq m \\ \text{НОД}(a, m) = 1}} \sum_{\substack{1 < p^k \leq X, \ k \geq 2 \\ p^k \equiv a}} \log p \\ &\quad + \sum_{1 \leq m \leq Y} \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\substack{1 \leq a \leq m \\ \text{НОД}(a, m) = 1}} \sum_{\substack{a < p^k \leq X, \ k \geq 2 \\ p^k \equiv a \pmod{m}}} \log p \\ &\ll T(Y, X) + \sum_{1 \leq m \leq Y} \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{1 < p^k \leq m, \ k \geq 2} \log p \\ &\quad + \sum_{1 \leq a \leq Y} \sum_{\substack{a < p^k \leq X \\ k \geq 2}} \log p \sum_{m | p^k - a, \ m > a} \frac{1}{\varphi(m)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\ll T(Y, X) + \sum_{1 \leq m \leq Y} \frac{1}{\varphi(m)} \cdot \log m \cdot \log m \cdot m^{1/2} \\
&\quad + \sum_{1 \leq a \leq Y} \sum_{p^k \leq X, k \geq 2} \log X \cdot \frac{X^{1/4}}{a} \ll_A (YX)^{1/2} \log^{1/2} X \\
&\quad + \frac{X}{\log^A X} + Y^{1/2} \log^3 Y + X^{3/4} \log Y \cdot \log^2 X \\
&\ll_A (YX)^{1/2} \log^{1/2} X + \frac{X}{\log^A X}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

§ 3. Вспомогательные леммы

Напомним преобразование Абеля:

$$\begin{aligned}
\sum_{m < l \leq n} u(l)v(l) &= u(n)V(n) + \sum_{m < l < n} (u(l) - u(l+1))V(l), \\
V(l) &= \sum_{m < l' \leq l} v(l').
\end{aligned} \tag{3.1}$$

С его помощью, опираясь на стандартную из теории тригонометрических сумм оценку

$$\left| \sum_{l=a+1}^{a+m} e^{2\pi i l x} \right| = \frac{|e^{2\pi i m x} - 1|}{|e^{2\pi i x} - 1|} \leq \frac{2}{2|\sin(\pi x)|} \leq \frac{1}{2\|x\|}$$

с нецелым x , получаем

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n \geq m} \frac{\sin(2\pi n x)}{n} \right| &= \left| \sum_{n \geq m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \left(\sum_{m \leq l \leq n} \sin(2\pi l x) \right) \right| \\
&\leq \sum_{n \geq m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \frac{1}{2} \left| \sum_{m \leq l \leq n} (e^{2\pi i l x} - e^{-2\pi i l x}) \right| \\
&\leq \frac{1}{2\|x\|} \sum_{n \geq m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2m\|x\|}.
\end{aligned}$$

Таким образом, для нецелого x имеем

$$\left| \sum_{n \geq m} \frac{\sin(2\pi n x)}{n} \right| \leq \frac{1}{2m\|x\|}. \tag{3.2}$$

Пусть

$$\frac{1}{1+x} = \log 2 + \sum_{l \neq 0} c(l) e^{2\pi i l x}$$

– разложение функции $(1+x)^{-1}$ в ряд Фурье на интервале $(0, 1)$ при

$$c(l) = \int_0^1 \frac{e^{-2\pi i l x}}{1+x} dx = \frac{1}{4\pi i l} - \frac{1}{2\pi i l} \int_0^1 \frac{e^{-2\pi i l x}}{(1+x)^2} dx$$

$$= \frac{1}{4\pi il} + O\left(\frac{1}{l^2}\right).$$

Поэтому для $Z \geq 1$ и $x \in (0, 1)$ получаем

$$\frac{1}{1+x} = \log 2 + \sum_{0 < |l| \leq Z} c(l) e^{2\pi i l x} + O\left(\frac{1}{Z\|x\|}\right). \quad (3.3)$$

ЛЕММА 3.1. Пусть $2 \leq q \leq X$ и $1 \leq m \leq X/q$. Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{m \leq n \leq X/q} \frac{1}{u \log u} \Big|_{(n+m)q}^{nq} - \frac{\log 2}{q \log(mq)} \\ & \ll \frac{1}{q \log^2(mq)} + \frac{m}{X \log X} + \frac{1}{mq \log(mq)}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действуя стандартным способом, для интересующей нас суммы получим представление в виде

$$\begin{aligned} & \int_m^{X/q} \frac{1}{u \log u} \Big|_{(x+m)q}^{xq} dx + O\left(\frac{1}{mq \log(mq)}\right) \\ & = \frac{1}{q} \log\left(1 + \frac{\log 2}{\log(mq)}\right) - \frac{1}{q} \log\left(1 + \frac{\log(1 + \frac{mq}{X})}{\log X}\right) \\ & \quad + O\left(\frac{1}{mq \log(mq)}\right). \end{aligned}$$

Осталось только заметить, что

$$\begin{aligned} & \log\left(1 + \frac{\log 2}{\log(mq)}\right) - \frac{\log 2}{\log(mq)} \ll \frac{1}{\log^2(mq)}, \\ & \log\left(1 + \frac{\log(1 + \frac{mq}{X})}{\log X}\right) \ll \frac{\log(1 + \frac{mq}{X})}{\log X} \ll \frac{mq}{X \log X}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3.2. В условиях леммы 3.1

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{m \leq n \leq X/q \\ \text{НОД}(n, m) = 1}} \frac{1}{u \log u} \Big|_{(n+m)q}^{nq} - \frac{\varphi(m) \log 2}{mq \log(mq)} \\ & \ll \frac{\sigma_{-1}(m)}{q \log^2(mq)} + \frac{\sigma_1(m)}{X \log X} + \frac{\sigma_0(m)}{mq \log(mq)}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Освобождаясь от условия взаимной простоты n и m с помощью функции Мёбиуса, запишем сумму из левой части оценки леммы в виде (внешнее суммирование проводится по делителям m)

$$\begin{aligned} & \sum_{d|m} \mu(d) \sum_{m \leq dl \leq X/q} \frac{1}{u \log u} \Big|_{(dl+m)q}^{dlq} \\ & = \sum_{d|m} \mu(d) \sum_{m/d \leq l \leq X/(dq)} \frac{1}{u \log u} \Big|_{(l + \frac{m}{d})(dq)}^{l(dq)}. \end{aligned}$$

Осталось только воспользоваться леммой 3.1.

Положим

$$F(X, q, m) = \sum_{\substack{1 \leq a \leq m \leq n \leq X/q \\ an \equiv \pm 1 \pmod{m}}} \left(1 + \frac{a}{m}\right)^{-1} \left(\frac{1}{u \log u} \Big|_{(n+m)q}^{nq}\right). \quad (3.4)$$

ЛЕММА 3.3. В условиях леммы 3.1

$$\begin{aligned} F(X, q, m) - \frac{\varphi(m)}{m} \frac{\log^2 2}{q \log(mq)} \\ \ll \frac{1}{m^{1/4} q \log(mq)} + \frac{\sigma_{-1}(m)}{q \log^2(mq)} + \frac{\sigma_1(m)}{X \log X} + \frac{\sigma_0(m)}{mq \log(mq)}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $m = 1$ утверждение непосредственно следует из леммы 3.1. Пусть теперь $m \geq 2$. Воспользовавшись равенством (3.3) при $Z = \sqrt{m}$, получим

$$F(X, q, m) = \log 2 \sum_{\substack{m \leq n \leq X/q \\ \text{НОД}(n, m) = 1}} \frac{1}{u \log u} \Big|_{(n+m)q}^{nq} + R_1 + R_2,$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &\ll \sum_{\substack{1 \leq a \leq m \leq n \leq X/q \\ an \equiv \pm 1 \pmod{m}}} \frac{1}{\sqrt{m} \left\| \frac{a}{m} \right\|} \left(\frac{1}{u \log u} \Big|_{(n+m)q}^{nq}\right) \\ &\ll \sqrt{m} \sum_{1 \leq a \leq m/2} \frac{1}{a} \sum_{\substack{m \leq n \leq X/q \\ an \equiv \pm 1 \pmod{m}}} \frac{1}{u \log u} \Big|_{(n+m)q}^{nq} \\ &\ll \sqrt{m} \sum_{1 \leq a \leq m/2} \frac{1}{a} \int_1^{X/(qm)} \left(\frac{1}{u \log u} \Big|_{mq(1+x)}^{mqx}\right) dx \\ &\ll \frac{\log m}{\sqrt{m}} \int_m^{X/q} \left(\frac{1}{u \log u} \Big|_{q(m+y)}^{qy}\right) dy \ll \frac{\log m}{\sqrt{m}} \frac{1}{q \log(mq)}, \end{aligned}$$

а также

$$R_2 \ll \sum_{0 < |l| \leq \sqrt{m}} \frac{1}{|l|} \left| \sum_{\substack{m \leq n \leq X/q \\ \text{НОД}(n, m) = 1}} e^{2\pi i \frac{l\bar{n}}{m}} \left(\frac{1}{u \log u} \Big|_{(n+m)q}^{nq}\right) \right|,$$

где $\bar{n}$ определяется из сравнения $\bar{n}n \equiv 1 \pmod{m}$. Хорошо известно, что (см., например, [3]) для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{1 \leq n \leq X} e^{2\pi i l \bar{n}/m} \ll_{\varepsilon} \left(1 + \frac{X}{m}\right) m^{1/2+\varepsilon} \text{НОД}^{1/2}(l, m).$$

Применяя преобразования Абеля (3.1), а также выбрав достаточно малое ε , с помощью леммы 3.1 и этой оценки находим

$$R_2 \ll_{\varepsilon} \sum_{1 \leq l \leq \sqrt{m}} m^{-1/2+\varepsilon/2} \frac{\text{НОД}^{1/2}(l, m)}{l} \sum_{m \leq n \leq X/q} \frac{1}{u \log u} \Big|_{(n+m)q}^{nq}$$

$$\ll m^{-1/2+\varepsilon/2} \left(\sum_{d|m} \frac{1}{\sqrt{d}} \right) \left(\sum_{1 \leq l \leq \sqrt{m}} \frac{1}{l} \right) \frac{1}{q \log(mq)} \ll \frac{1}{m^{1/4} q \log(mq)}.$$

Осталось только воспользоваться леммой 3.2.

§ 4. Доказательство основного результата

Пусть $\chi_{\mathfrak{I}}(\alpha)$ – характеристическая функция интервала $\mathfrak{I}$ в $(0, 1)$. Положим для $1 \leq Y < X$

$$\mathcal{P}_{\alpha}(Y, X) = \sum_{\substack{Y < Q'(S) = p \leq X \\ S \in \text{GL}_2^{(c)}(\mathbb{Z})}} \chi_{\mathfrak{I}(S)}(\alpha). \quad (4.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Из леммы 1.1 непосредственно следует, что если число α отлично от концов интервалов $\mathfrak{I}(S)$ по всем S при $Y < Q'(S) \leq X$, то $\mathcal{P}_{\alpha}(Y, X)$ совпадает с количеством простых среди знаменателей $Q_i(\alpha)$ подходящих дробей к α , расположенных в полуинтервале $(Y, X]$.

ЛЕММА 4.1. Пусть $e \leq Y \leq X^{1/e}$. Тогда

$$\int_0^1 \mathcal{P}_{\alpha}(Y, X) d\alpha = \log 4 \cdot \log \frac{\log X}{\log Y} + O(1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с замечаниями 1.5 и 1.6 рассматриваемый интеграл имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{Y < p \leq X \\ 1 \leq Q < p}} \frac{2}{p(Q+p)} &= 2 \sum_{Y < p \leq X} \frac{1}{p} \left(\log 2 + O\left(\frac{1}{p}\right) \right) \\ &= \log 4 \cdot \log \frac{\log X}{\log Y} + O(1), \end{aligned}$$

что и составляет утверждение леммы.

Положим

$$G(Y, X) = \sum_{Y < p < X} \sum_{\substack{1 \leq a \leq m \leq n \leq X/p \\ an \equiv \pm 1 \pmod{m}}} \left(1 + \frac{a}{m} \right)^{-1} \sum_{\substack{np < p' \leq np+mp \\ p' \equiv np \pmod{m}}} (p')^{-2}.$$

ЛЕММА 4.2. В условиях леммы 4.1

$$\int_0^1 \mathcal{P}_{\alpha}^2(Y, X) d\alpha = 2G(Y, X) + O\left(\log \frac{\log X}{\log Y} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Раскрывая квадрат суммы из правой части (4.1), получим выражение

$$\sum_{\substack{Y < p, p' \leq X \\ Q'(S)=p, Q'(S')=p'}} \int_0^1 \chi_{\mathfrak{I}(S) \cap \mathfrak{I}(S')}(\alpha) d\alpha,$$

в котором суммирование проводится по всем матрицам S и S' из $\text{GL}_2^{(c)}(\mathbb{Z})$ с соответствующими ограничениями. Воспользовавшись замечанием 1.8 и леммой 4.1 (для части суммы с $S = S'$), преобразуем последнее выражение к виду

$$2 \sum_{\substack{Y < p < p' \leq X \\ S', S''}} \frac{1}{p'(aQ + bp + p')} + O\left(\log \frac{\log X}{\log Y}\right)$$

с суммированием по матрицам

$$S' = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & p \end{pmatrix}, \quad S'' = \begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix}$$

из $\text{GL}_2^{(c)}(\mathbb{Z})$, для которых

$$S = S'S'' = \begin{pmatrix} * & * \\ aQ + bp & mQ + np \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & p' \end{pmatrix}.$$

Далее n, m, p, p' – свободные переменные. Поскольку $p' = mQ + np$ и $Q < p$, то

$$p' < (m + n)p. \quad (4.2)$$

Заметим, что

$$aQ + bp + p' = \left(1 + \frac{a}{m}\right)p' - \det(S)p,$$

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{a}{m}\right)p' \pm p} - \frac{1}{\left(1 + \frac{a}{m}\right)p'} \ll \frac{p}{(p')^2}.$$

Поэтому

$$\int_0^1 \mathcal{P}_\alpha^2(Y, X) d\alpha - 2 \sum_{\substack{Y < p < p' \leq X \\ S', S''}} \frac{1}{\left(1 + \frac{a}{m}\right)(p')^2} \ll R + \log \frac{\log X}{\log Y},$$

где

$$R \ll \sum_{Y < p \leq X} \sum_{n \leq X/p} \sum_{1 \leq m \leq n} \sum_{\substack{np < p' \\ p' \equiv np \pmod{m}}} \frac{p}{(p')^3}.$$

Поскольку

$$\sum_{\substack{np < p' \\ p' \equiv np \pmod{m}}} \frac{1}{(p')^3} \leq \sum_{\substack{np < l \\ l \equiv np \pmod{m}}} \frac{1}{l^3} \ll \frac{1}{m(np)^2},$$

то

$$R \ll \sum_{Y < p \leq X} \frac{1}{p} \sum_{n \leq X/p} \frac{\log n}{n^2} \ll \sum_{Y < p \leq X} \frac{1}{p} \ll \log \frac{\log X}{\log Y}.$$

Далее, с учетом (4.2) находим

$$G'(Y, X) = \sum_{\substack{Y < p < p' \leq X \\ S', S''}} \frac{1}{\left(1 + \frac{a}{m}\right)(p')^2}$$

$$= \sum_{Y < p < X} \sum_{\substack{1 \leq a \leq m \leq n \leq X/p \\ an \equiv \pm 1 \pmod{m}}} \left(1 + \frac{a}{m}\right)^{-1} \sum_{\substack{np < p' \leq \min\{X, (n+m)p\} \\ p' \equiv np \pmod{m}}} (p')^{-2}.$$

Заметим, что $(n+m)p \leq 2np \leq X$ для $np \leq X/2$. Поэтому при таких n и p

$$\min\{X, (n+m)p\} = (n+m)p.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} G'(Y, X) - G(Y, X) &\ll \sum_{Y < p < X} \sum_{\substack{1 \leq m \leq n \\ X/2 < np \leq X}} \sum_{\substack{np < p' \leq X \\ p' \equiv np \pmod{m}}} (p')^{-2} \\ &\ll \frac{1}{X^2} \sum_{Y < p < X} \sum_{1 \leq m \leq X/p} \sum_{m \leq n \leq X/p} \pi(X; m, np), \end{aligned}$$

где $\pi(X; m, a)$ – количество всех простых чисел $p \equiv a \pmod{m}$ при $p \leq X$.

Поскольку $m \leq X/p$, то

$$\begin{aligned} \sum_{m \leq n \leq X/p} \pi(X; m, np) &= \sum_{\substack{1 \leq a \leq m \\ \text{НОД}(a, m) = 1}} \pi(X; m, a) \sum_{\substack{m \leq n \leq X/p \\ np \equiv a \pmod{m}}} 1 \\ &\ll \frac{X}{mp} \sum_{\substack{1 \leq a \leq m \\ \text{НОД}(a, m) = 1}} \pi(X; m, a) = \frac{X}{mp} \pi(X) \ll \frac{X^2}{mp \log X}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} G'(Y, X) - G(Y, X) &\ll \frac{1}{\log X} \sum_{Y < p < X} \frac{1}{p} \sum_{1 \leq m \leq X/n} \frac{1}{m} \\ &\ll \sum_{Y < p < X} \frac{1}{p} \ll \log \frac{\log X}{\log Y}. \end{aligned}$$

Объединяя эти оценки, получим утверждение леммы.

Положим в (3.1) $m = 1$ и $n = \infty$, а также

$$\begin{aligned} u(l) &= \begin{cases} \frac{1}{l^2 \log l}, & \text{если } np < l \leq (n+m)p, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \\ v(l) &= \begin{cases} \log p', & \text{если } l = p' \equiv np \pmod{m}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned}$$

После очевидных преобразований для $\text{НОД}(m, np) = 1$ получим

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{np < p' \leq (n+m)p \\ p' \equiv np \pmod{m}}} \frac{\log p'}{(p')^2 \log p'} &= \\ &= \frac{\tilde{\Psi}(x; m, np)}{x^2 \log x} \Big|_{np}^{(n+m)p} + \sum_{np \leq l < (n+m)p} \frac{1}{x^2 \log x} \Big|_{l+1}^l \cdot \tilde{\Psi}(l; m, np) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{np \leq l < (n+m)p} \frac{1}{l^2 \log l} + \frac{\tilde{E}(x; m, np)}{x^2 \log x} \Big|_{np}^{(n+m)p} \\
&\quad + \sum_{np \leq l < (n+m)p} \frac{1}{x^2 \log x} \Big|_{l+1}^l \cdot \tilde{E}(l; m, np).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
G(Y, X) - \sum_{Y < p < X} \sum_{\substack{1 \leq a \leq m \leq n \leq X/p \\ an \equiv \pm 1 \pmod{m}}} \frac{1}{\varphi(m)} \left(1 + \frac{a}{m}\right)^{-1} \sum_{np < l \leq (n+m)p} \frac{1}{l^2 \log l} \\
\ll R_1 + R_2 + R_3,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
R_j &= \sum_{Y < p < X} \sum_{\substack{1 \leq m \leq n \leq X/p \\ \text{НОД}(np, m)=1}} R_j(m, n, p), \\
R_1(m, n, p) &= \frac{|\tilde{E}(np; m, np)|}{(np)^2 \log(np)}, \\
R_2(m, n, p) &= \frac{|\tilde{E}(np + mp; m, np)|}{(np + mp)^2 \log(np + mp)}, \\
R_3(m, n, p) &= \sum_{np \leq l < (n+m)p} \frac{1}{x^2 \log x} \Big|_{l+1}^l \cdot |\tilde{E}(l; m, np)|.
\end{aligned}$$

ЛЕММА 4.3. В условиях леммы 4.1

$$R_2 \ll \log \frac{\log X}{\log Y} + \sqrt{\frac{\log X}{Y}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из замечания 2.1 следует, что для натурального k и для $p \nmid m$ имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{km \leq n < (k+1)m \\ \text{НОД}(n, m)=1}} \frac{|\tilde{E}(np; m, np)|}{(np)^2 \log(np)} = \\
&= \sum_{\substack{1 \leq a \leq m \\ \text{НОД}(a, m)=1}} \sum_{\substack{km \leq n < (k+1)m \\ np \equiv a \pmod{m}}} \frac{|\tilde{E}(np; m, a)|}{(np)^2 \log(np)} \\
&\ll \frac{1}{m} \sum_{\substack{1 \leq a \leq m \\ \text{НОД}(a, m)=1}} \sum_{km \leq n < (k+1)m} \frac{|\tilde{E}(np; m, a)| + \frac{m}{\varphi(m)} + \log(np)}{(np)^2 \log(np)}.
\end{aligned}$$

Применяя лемму 2.1, отсюда находим

$$\begin{aligned}
R_1 &\ll \sum_{Y < p < X} \sum_{n \leq 2X/p} \frac{1}{(np)^2 \log(np)} \cdot \sum_{1 \leq m \leq n} \frac{1}{m} \\
&\quad \times \sum_{\substack{1 \leq a \leq m \\ \text{НОД}(a, m)=1}} \left(|\tilde{E}(np; m, a)| + \frac{m}{\varphi(m)} + \log(np) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\ll \sum_{Y < p < X} \sum_{n \leq X/p} \frac{1}{(np)^2 \log(np)} \left((n \cdot np)^{1/2} \log^{1/2}(np) + \frac{np}{\log(np)} \right) \\
&\ll \sum_{Y < p < X} \left(\frac{\sqrt{\log(X/p)}}{p^{3/2}} + \frac{1}{p} \right) \ll \sqrt{\frac{\log X}{Y}} + \log \frac{\log X}{\log Y}.
\end{aligned}$$

Лемма полностью доказана.

ЛЕММА 4.4. В условиях леммы 4.1

$$R_2 \ll \log \frac{\log X}{\log Y} + \sqrt{\frac{\log X}{Y}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действуя точно так же, как в предыдущем случае, получим

$$\begin{aligned}
R_2 &\ll \sum_{Y < p < X} \sum_{n \leq 2X/p} \sum_{1 \leq m \leq n} \frac{1}{m(np + mp)^2 \log(np + mp)} \\
&\quad \times \sum_{\substack{1 \leq a \leq m \\ \text{НОД}(a, m) = 1}} \left(|\tilde{E}(np + mp; m, a)| + \frac{m}{\varphi(m)} + \log(np + mp) \right) \\
&\ll \sqrt{\frac{\log X}{Y}} + \log \frac{\log X}{\log Y}.
\end{aligned}$$

ЛЕММА 4.5. В условиях леммы 4.1

$$R_3 \ll \log \frac{\log X}{\log Y} + \sqrt{\frac{\log X}{Y}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$g(l) = \frac{1}{x^2 \log x} \Big|_{l+1}^l \ll \frac{1}{l^3 \log l}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
R_3 &\ll \sum_{Y < p < X} \sum_{\substack{1 \leq m \leq n \leq X/p \\ \text{НОД}(n, m) = 1}} \sum_{np \leq l < (n+m)p} g(l) |\tilde{E}(l; m, np)| \\
&\leq \sum_{l \leq 2X} g(l) \sum_{Y < p \leq l} \sum_{\substack{1 \leq m \leq l/p \\ \text{НОД}(np, m) = 1}} \sum_{n \leq l/p} |\tilde{E}(l; m, np)| \\
&\leq \sum_{l \leq 2X} g(l) \sum_{Y < p \leq l} \sum_{1 \leq m \leq l/p} \sum_{\substack{1 \leq a \leq m \\ \text{НОД}(a, m) = 1}} \sum_{\substack{n \leq l/p \\ np \equiv a \pmod{m}}} |\tilde{E}(l; m, a)| \\
&\ll \sum_{l \leq 2X} g(l) \sum_{Y < p \leq l} \sum_{1 \leq m \leq l/p} \frac{l}{pm} \sum_{\substack{1 \leq a \leq m \\ \text{НОД}(a, m) = 1}} |\tilde{E}(l; m, a)| \\
&\ll \sum_{l \leq 2X} lg(l) \sum_{Y < p \leq l} \frac{1}{p} \left(\left(\frac{l}{p} \cdot l \right)^{1/2} \log^{1/2} l + \frac{l}{\log l} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\ll \left(\sum_{l \leq 2X} \frac{1}{l \sqrt{\log l}} \right) \left(\sum_{Y < p} \frac{1}{p^{3/2}} \right) + \left(\sum_{l \leq 2X} \frac{1}{l \log^2 l} \right) \left(\sum_{Y < p < X} \frac{1}{p} \right) \\
&\ll \sqrt{\frac{\log X}{Y}} + \log \frac{\log X}{\log Y}.
\end{aligned}$$

Лемма полностью доказана.

Учитывая очевидную оценку

$$\sum_{Y < p < X} \sum_{\substack{1 \leq a \leq m \leq n \leq X/p \\ p|m \\ an \equiv \pm 1 \pmod{m}}} \frac{1}{\varphi(m)} \left(1 + \frac{a}{m} \right)^{-1} \sum_{np < l \leq (n+m)p} \frac{1}{l^2 \log l} \ll 1,$$

из предыдущих лемм 4.3–4.5 получаем следующую лемму.

ЛЕММА 4.6. Пусть $1 \leq \log X \leq Y \leq X^{1/e}$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \mathcal{P}_\alpha^2(Y, X) d\alpha - \sum_{Y < p < X} \sum_{\substack{1 \leq a \leq m \leq n \leq X/p \\ an \equiv \pm 1 \pmod{m}}} \frac{1}{\varphi(m)} \left(1 + \frac{a}{m} \right)^{-1} \\
&\quad \times \sum_{np < l \leq (n+m)p} \frac{1}{l^2 \log l} \ll \log \frac{\log X}{\log Y}.
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
\sum_{np < l \leq (n+m)p} \frac{1}{l^2 \log l} &= \int_{np}^{(n+m)p} \frac{dx}{x^2 \log x} + O\left(\frac{1}{(np)^2 \log(np)} \right) \\
&= \frac{1}{x \log x} \Big|_{(n+m)p}^{np} + O\left(\frac{mp}{(np)^2 \log^2(np)} \right).
\end{aligned}$$

Учитывая обозначение (3.4), при выполнении условий леммы 4.6 отсюда получаем, что

$$\int_0^1 \mathcal{P}_\alpha^2(Y, X) d\alpha - 4 \sum_{Y < p < X} \sum_{1 \leq m \leq X/p} \frac{F(X, p, m)}{\varphi(m)} \ll \log \frac{\log X}{\log Y} + R,$$

где

$$\begin{aligned}
R &\ll \sum_{Y < p < X} \sum_{1 \leq m \leq X/p} \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{m \leq n \leq X/p} \frac{m}{n^2 p \log^2(np)} \\
&\ll \sum_{Y < p < X} \frac{1}{p} \sum_{1 \leq m \leq X/p} \frac{1}{\varphi(m)} \frac{1}{\log^2(mp)} \ll \log \frac{\log X}{\log Y}.
\end{aligned}$$

Применяя лемму 3.3, находим

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \mathcal{P}_\alpha^2(Y, X) d\alpha - 8 \log^2 2 \sum_{Ym < mp \leq X} \frac{1}{mp \log(mp)} \\
&\ll \sum_{Ym < mp \leq X} \frac{1}{\varphi(m)} \left(\frac{1}{m^{1/4} p \log(mp)} + \frac{\sigma_{-1}(m)}{p \log^2 m} + \frac{\sigma_1(m)}{X \log X} + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\sigma_0(m)}{mp \log(mp)}) \ll \sum_{Y < p \leq X} \frac{1}{p} \ll \log \frac{\log X}{\log Y}.$$

Осталось только заметить, что

$$\begin{aligned} & \sum_{Y < p \leq X} \frac{1}{p} \sum_{1 \leq m \leq X/p} \frac{1}{m(\log m + \log p)} \\ &= \sum_{Y < p \leq X} \frac{1}{p} \left(\int_1^{X/p} \frac{du}{u(\log u + \log p)} + O\left(\frac{1}{\log p}\right) \right) \\ &= \sum_{Y < p \leq X} \frac{1}{p} \log\left(\frac{\log X}{\log p}\right) + O(1) = \sum_{Y < p \leq X} \frac{1}{p \log p} \log\left(\frac{\log X}{\log p}\right) \log p + O(1) \\ &= \int_Y^X \frac{1}{u \log u} \log\left(\frac{\log X}{\log u}\right) du + O(1) = \int_{\log Y}^{\log X} \frac{1}{v} \log\left(\frac{\log X}{v}\right) dv + O(1) \\ &= \log \log X \cdot \log \frac{\log X}{\log Y} - \frac{1}{2}(\log^2 \log X - \log^2 \log Y) + O(1) \\ &= \frac{1}{2} \log^2 \frac{\log X}{\log Y} + O(1). \end{aligned}$$

При этом мы воспользовались асимптотическим законом распределения простых чисел в форме

$$\sum_{p \leq X} \log p = X + O\left(\frac{X}{\log X}\right)$$

для $X \geq e$. Собирая все вычисления вместе, в условиях леммы 4.6 получим оценку

$$\int_0^1 \left(\mathcal{P}_\alpha(Y, X) - \log 4 \cdot \log \frac{\log X}{\log Y} \right)^2 d\alpha \ll 1 + \log \frac{\log X}{\log Y}. \quad (4.3)$$

ЛЕММА 4.7. Оценка (4.3) справедлива для $e^e \leq Y < X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\exp((\log X)^{1/2}) \leq Y < X$, то утверждение непосредственно следует из леммы 4.6. Пусть теперь $Y < \exp((\log X)^{1/2})$. Определим натуральное k из условия $X_{k+1} \leq Y < X_k$, где $X_k = \exp((\log X)^{1/2^k})$, и положим

$$\tilde{\mathcal{P}}_\alpha(Y, X) = \mathcal{P}_\alpha(Y, X) - \log 4 \cdot \log \frac{\log X}{\log Y}.$$

Тогда согласно ранее доказанному имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (\tilde{\mathcal{P}}_\alpha(Y, X))^2 d\alpha = \int_0^1 (\tilde{\mathcal{P}}_\alpha(Y, X_k) + \tilde{\mathcal{P}}_\alpha(X_k, X))^2 d\alpha \\ & \leq 2 \int_0^1 (\tilde{\mathcal{P}}_\alpha(Y, X_k))^2 d\alpha + 2 \int_0^1 \left(\sum_{0 \leq n < k} \tilde{\mathcal{P}}_\alpha(X_{n+1}, X_n) \right)^2 d\alpha \\ & \ll \log \frac{\log X_k}{\log Y} + \left(\sum_{0 \leq n < k} \frac{1}{(n+1)^2} \right) \sum_{0 \leq n < k} (n+1)^2 \log \frac{\log X_n}{\log X_{n+1}} \\ & \ll \log \frac{\log X_k}{\log Y} + \sum_{0 \leq n < k} \frac{(n+1)^2}{2^n} \log \log X \ll \log \frac{\log X_k}{\log Y} + \log \log X \end{aligned}$$

$$\ll \log \frac{\log X_k}{\log Y} + \log \frac{\log X}{\log X_k} = \log \frac{\log X}{\log Y}.$$

Лемма полностью доказана.

Далее нам понадобится следующее утверждение (см., например, [8]).

ЛЕММА 4.8. Пусть $f_k(\alpha)$ – последовательность интегрируемых по Лебегу функций на $(0, 1)$, а f_k и φ_k – последовательности вещественных чисел, $0 \leq f_k \leq \varphi_k \leq 1$, $k = 1, 2, \dots$. Предположим, что для любых натуральных $m < n$

$$\int_0^1 \left(\sum_{m < k \leq n} f_k(\alpha) - \sum_{m < k \leq n} f_k \right)^2 d\alpha \ll \sum_{m < k \leq n} \varphi_k.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и для почти всех $\alpha \in (0, 1)$ при любом натуральном n

$$\sum_{1 \leq k \leq n} f_k(\alpha) = \sum_{1 \leq k \leq n} f_k + O_{\alpha, \varepsilon}(\Phi^{1/2}(n) \log^{3/2+\varepsilon} \Phi(n)), \quad \Phi(n) = \sum_{1 \leq k \leq n} \varphi_k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.1. Поскольку знаменатели подходящих дробей чисел α и $\alpha + a$ ($\forall a \in \mathbb{Z}$) одни и те же, то достаточно рассмотреть случай $\alpha \in (0, 1)$. Пусть

$$f_k(\alpha) = \frac{1}{\log 4} \mathcal{P}_\alpha(\exp(e^k), \exp(e^{k+1})).$$

По лемме 4.7 для любых натуральных $m < n$ и $f_k = \varphi_k = 1$

$$\int_0^1 \left(\sum_{m < k \leq n} f_k(\alpha) - \sum_{m < k \leq n} 1 \right)^2 d\alpha \ll \sum_{m < k \leq n} 1.$$

Поэтому согласно лемме 4.8 для почти всех $\alpha \in (0, 1)$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\alpha(\exp(e^n)) &= \log 4 \cdot \log \log(\exp(e^n)) \\ &+ O_{\alpha, \varepsilon}(\log^{1/2} \log(\exp(e^n)) \cdot \log^{3/2+\varepsilon} \log \log(\exp(e^n))). \end{aligned}$$

Для произвольного X выберем натуральное n из условия

$$\exp(e^n) \leq X < \exp(e^{n+1}).$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\alpha(\exp(e^n)) &\leq \mathcal{P}_\alpha(X) \leq \mathcal{P}_\alpha(\exp(e^{n+1})), \\ \log \log X - \log \log(\exp(e^n)) &\ll 1, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\alpha(X) &= \log 4 \cdot n + O_{\alpha, \varepsilon}(n^{1/2} \log^{3/2+\varepsilon} n) \\ &= \log 4 \cdot \log \log X + O_{\alpha, \varepsilon}(\log^{1/2} \log X \cdot \log^{3/2+\varepsilon} \log \log X). \end{aligned}$$

Теорема полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.2 непосредственно вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned} n &= \mathcal{P}_\alpha(p_n(\alpha)) = \log 4 \cdot \log \log p_n(\alpha) \\ &+ O_{\alpha, \varepsilon}(\log^{1/2} \log p_n(\alpha) \cdot \log^{3/2+\varepsilon} \log \log p_n(\alpha)) \\ &= \log 4 \cdot \log \log p_n(\alpha) + O_{\alpha, \varepsilon}(\sqrt{n} \log^{3/2+\varepsilon} n). \end{aligned}$$

Список литературы

1. К. Прахар, *Распределение простых чисел*, Мир, М., 1967; пер. с нем.: K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1957.
2. “Из «любительских задач» А. Д. Сахарова”, *Квант*, 1991, № 5, 11–12.
3. К. Хооли, *Применение методов решета в теории чисел*, Наука, М., 1987; пер. с англ.: C. Hooley, *Applications of sieve methods to the theory of numbers*, Cambridge Tracts in Mathematics, **70**, Cambridge University Press, Cambridge–New York–Melbourne, 1976.
4. G. Harman, “Metrical theorems on prime values of the integer parts of real sequences”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **75**:3 (1997), 481–496.
5. P. Rowe, “Metrical results on sums of squares and prime values of the integer parts of sequences”, *Acta Arith.*, **118**:2 (2005), 101–115.
6. A. Khintchine, “Zur metrischen Kettenbruchtheorie”, *Compositio Math.*, **3** (1936), 276–285.
7. P. Lévy, “Sur le développement en fraction continue d’un nombre choisi au hasard”, *Compositio Math.*, **3** (1936), 286–303.
8. В. Г. Спринджук, *Метрическая теория диофантовых приближений*, Наука, М., 1977.
9. G. Harman, “Metric Diophantine approximation with two restricted variables. I. Two square-free integers, or integers in arithmetic progressions”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **103**:2 (1988), 197–206.
10. И. В. Арнольд, *Теория чисел*, Гос. изд-во Наркомпроса РСФСР, М., 1939.
11. А. В. Устинов, “О статистических свойствах конечных цепных дробей”, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **322**, 2005, 186–211; англ. пер.: A. V. Ustinov, “On statistical properties of finite continued fractions”, *J. Math. Sci.*, **137**:2 (2006), 4722–4738.
12. В. А. Быковский, “Оценка дисперсии длин конечных непрерывных дробей”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **11**:6 (2005), 15–26.
13. Г. Монтгомери, *Мультипликативная теория чисел*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: H. L. Montgomery, *Topics in multiplicative number theory*, Lecture Notes in Math., **227**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1971.

В. А. Быковский (V. A. BYKOVSKIY)
Институт прикладной математики ДВО РАН,
Хабаровское отделение

Поступило в редакцию
29.06.2006