Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Г. Мадонна, В. В. Никулин, Явные соответствия
КЗ-поверхности с собой, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008,
том 72, выпуск 3, 89–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/im1130>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 17:34:12

УДК 512.774+512.723

К. Г. Мадонна, В. В. Никулин

Явные соответствия КЗ-поверхности с собой

Для КЗ-поверхности X с поляризацией H степени $H^2 = 2rs$, $r, s \geq 1$, рассматривается пространство модулей Y пучков на X с примитивным изотропным вектором Мукаи (r, H, s) . Оно также является КЗ-поверхностью. В предыдущих работах авторами были получены необходимые и достаточные условия в терминах решетки Пикара $N(X)$, когда поверхности Y и X изоморфны. В настоящей работе доказывается, что из данных условий вытекает существование изоморфизма между Y и X , который является композицией некоторых универсальных геометрических изоморфизмов между модулями пучков на X и геометрического изоморфизма Тюринга между некоторыми модулями пучков на X и самой поверхностью X . Отсюда вытекает, что для общей КЗ-поверхности X при $\rho(X) = \text{rk } N(X) \leq 2$ поверхности Y и X изоморфны, если и только если существует изоморфизм $Y \cong X$, являющийся композицией данных универсальных изоморфизмов и изоморфизма Тюринга.

Библиография: 17 наименований.

§ 1. Введение

Пусть X – КЗ-поверхность над $\mathbb{C}$ с поляризацией H степени $H^2 = 2rs$, где $r, s \in \mathbb{N}$. Предположим, что изотропный вектор Мукаи $v = (r, H, s)$ примитивен. Обозначим через $Y = M_X(r, H, s)$ пространство модулей стабильных пучков ранга r над X с первым классом Чжэня H и эйлеровой характеристикой $r + s$ (иначе говоря, с вектором Мукаи v). В силу результатов Мукаи, полученных в [7], [8], пространство Y также является КЗ-поверхностью.

В [13, теорема 4.4] вторым автором были получены некоторые необходимые и достаточные условия в терминах решетки Пикара $N(X)$ поверхности X , когда поверхность $Y = M_X(r, H, s)$ изоморфна X (см. точную формулировку в теореме 1). Важные частные случаи этой теоремы были также получены в [2], [3] и [12]. Доказательство достаточности этих условий использовало глобальную теорему Торелли для КЗ-поверхностей [14] и не было эффективным.

Мы показываем в настоящей работе, что, тем не менее, достаточные условия из [13, теорема 4.4] (см. далее теорему 1) дают изоморфизм $Y \cong X$, являющийся композицией некоторых универсальных геометрических изоморфизмов между модулями пучков на X (см. их точные определения в леммах 1, 2 и теореме 2) и изоморфизма Тюринга (см. лемму 3) между некоторыми модулями пучков на X и самой поверхностью X (см. точное утверждение в теореме 3). Данные результаты являются для нас очень неожиданными и интригующими.

Работа первого автора выполнена при поддержке контракта I3P, второго – при поддержке гранта EPSRC EP/D061997/1.

Достаточные условия из [13, теорема 4.4] (см. далее теорему 1) также необходимы для общей КЗ-поверхности X с числом Пикара $\rho(X) = \text{rk } N(X) \leq 2$. Таким образом, из приведенных выше результатов вытекает, что для общей КЗ-поверхности X с числом Пикара $\rho(X) \leq 2$ изоморфизм $Y \cong X$ имеет место, если и только если существует изоморфизм $Y \cong X$, являющийся композицией данных универсальных изоморфизмов и изоморфизма Тюринга (см. точные утверждения в теореме 4 и следствии 1).

Эти результаты показывают, что для ответа на вопрос: когда $Y \cong X$? – использование универсальных изоморфизмов и изоморфизма Тюринга чрезвычайно важно, а также достаточно в решении этого вопроса для всех общих (с данной решеткой Пикара) КЗ-поверхностей X при $\rho(X) \leq 2$.

В качестве примера данных общих результатов в § 4 рассматривается классический и замечательный случай вектора Мукай $v = (2, H, 2)$, $H^2 = 8$. В этом случае общая КЗ-поверхность X является пересечением трех квадрик в $\mathbb{P}^5$, а поверхность Y – двулистным накрытием сети $\mathbb{P}^2$ данных трех квадрик, разветвленным в кривой степени 6 вырожденных квадрик сети. Таким образом, нас интересует вопрос: когда данные классические поверхности Y и X изоморфны? Для этого мы даем особенно простой и явный изоморфизм между Y и X , если эти поверхности изоморфны (в случае общего положения).

Предварительные варианты настоящей работы были опубликованы в препринтах [4] (геометрическая интерпретация [2]), [5] (геометрическая интерпретация [12]) и [6] (общий случай, как и рассматриваемый в данной работе); см. также работы авторов [1], [11], связанные с настоящей работой.

§ 2. Некоторые результаты работы [13]

Через X обозначается алгебраическая КЗ-поверхность над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, т. е. X – неособая проективная алгебраическая поверхность над $\mathbb{C}$ с тривиальным каноническим классом $K_X = 0$ и нулевой иррегулярностью $q(X) = 0$. Через $N(X)$ обозначается решетка Пикара (т. е. решетка двумерных алгебраических циклов) поверхности X , через $\rho(X) = \text{rk } N(X)$ – число Пикара поверхности X , а через

$$T(X) = N(X)_{H^2(X, \mathbb{Z})}^\perp \quad (1)$$

– решетка трансцендентных циклов на X .

Для вектора Мукай $v = (r, c_1, s)$, где $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}$ и $c_1 \in N(X)$, через $Y = M_X(r, c_1, s)$ обозначается пространство модулей стабильных (относительно некоторого обильного элемента $H' \in N(X)$) когерентных пучков на X ранга r с первым классом Чжэня c_1 и эйлеровой характеристикой $r + s$.

В силу результатов Мукай [7], [8] при определенных условиях на классы Чжэня пространство модулей Y всегда деформационно эквивалентно некоторой схеме Гильберта нульмерных циклов на X (некоторой размерности).

Наибольший общий делитель вектора Мукай v есть

$$(r, c_1, s) = (r, d, s),$$

если $c_1 = dc'_1$, где $d \in \mathbb{Z}$, $d \geq 0$, и c'_1 примитивен в решетке Пикара $N(X)$, являющейся свободным $\mathbb{Z}$ -модулем. Элемент $c'_1 \in N(X)$ примитивен, если $c'_1/n \notin N(X)$ для любого натурального $n \geq 2$. Вектор Мукаи v называется примитивным, если его наибольший общий делитель равен единице.

Пусть X – КЗ-поверхность с поляризацией H степени $H^2 = 2rs$, где $r, s \in \mathbb{N}$. Предположим, что изотропный вектор Мукаи $v = (r, H, s)$ примитивен. Тогда $Y = M_X(r, H, s)$ – также КЗ-поверхность. Нас интересует, когда $Y \cong X$.

Введем обозначения: $c = (r, s)$ и $a = r/c$, $b = s/c$. Тогда $(a, b) = 1$. Пусть H делится на $d \in \mathbb{N}$ и $\tilde{H} = H/d$ примитивен в $N(X)$. Примитивность $v = (r, H, s)$ означает, что $(r, d, s) = (c, d) = 1$. Поскольку число $\tilde{H}^2 = 2abc^2/d^2$ четно, то $d^2 \mid abc^2$. Так как $(a, b) = (c, d) = 1$, то $d = d_a d_b$, где $d_a = (d, a)$, $d_b = (d, b)$, и можно определить следующие натуральные числа:

$$a_1 = \frac{a}{d_a^2}, \quad b_1 = \frac{b}{d_b^2}.$$

Тогда $\tilde{H}^2 = 2a_1 b_1 c^2$.

Число $\gamma = \gamma(\tilde{H}) \in \mathbb{N}$ определяется тем, что $\tilde{H} \cdot N(X) = \gamma\mathbb{Z}$, т. е. $H \cdot N(X) = \gamma d\mathbb{Z}$. Ясно, что $\gamma \mid \tilde{H}^2 = 2a_1 b_1 c^2$.

Обозначим

$$n(v) = (r, s, d\gamma) = (r, s, \gamma). \quad (2)$$

В силу результатов Мукаи [7]–[9] имеем $T(X) \subset T(Y)$ и $n(v) = [T(Y) : T(X)]$, где $T(X)$ и $T(Y)$ – решетки трансцендентных циклов поверхностей X и Y . Таким образом,

$$Y \cong X \implies n(v) = (r, s, d\gamma) = (c, d\gamma) = (c, \gamma) = 1. \quad (3)$$

Предполагая, что $Y \cong X$, а тогда $n(v) = 1$, получаем $\gamma \mid 2a_1 b_1$, и можно определить

$$\gamma_a = (\gamma, a_1), \quad \gamma_b = (\gamma, b_1), \quad \gamma_2 = \frac{\gamma}{\gamma_a \gamma_b}. \quad (4)$$

Ясно, что $\gamma_2 \mid 2$.

В [13, теорема 4.4] была получена следующая общая теорема (см. ее важные частные случаи в [2], [3] и [12]). В этой теореме используются определенные выше $c, a, b, d, d_a, d_b, a_1, b_1$. Те же самые обозначения $\gamma, \gamma_a, \gamma_b$ и γ_2 используются, если заменить $N(X)$ на двумерную примитивную подрешетку $N \subset N(X)$, т. е. $\tilde{H} \cdot N = \gamma\mathbb{Z}$, $\gamma > 0$. Число δ определяется тем, что $\det N = -\gamma\delta$, и $\mathbb{Z}f(\tilde{H})$ обозначает ортогональное дополнение к $\tilde{H}$ в N .

ТЕОРЕМА 1 [13, теорема 4.4]. Пусть X – КЗ-поверхность и H – поляризация X такая, что $H^2 = 2rs$, где $r, s \in \mathbb{N}$. Предположим, что вектор Мукаи $v = (r, H, s)$ примитивен. Пусть $Y = M_X(r, H, s)$ – КЗ-поверхность, являющаяся модулями пучков на X с изотропным вектором Мукаи $v = (r, H, s)$. Пусть $\tilde{H} = H/d$, $d \in \mathbb{N}$, – соответствующая примитивная поляризация.

Имеем $Y \cong X$, если существует элемент $\tilde{h}_1 \in N(X)$ такой, что $\tilde{H}$ и $\tilde{h}_1$ принадлежат двумерной примитивной подрешетке $N \subset N(X)$ такой, что $\tilde{H} \cdot N = \gamma\mathbb{Z}$, $\gamma > 0$, $(c, d\gamma) = 1$, и элемент $\tilde{h}_1$ принадлежит a -серии или b -серии:

а) $\tilde{h}_1$ принадлежит a -серии, если

$$\tilde{h}_1^2 = \pm 2b_1c, \quad \tilde{H} \cdot \tilde{h}_1 \equiv 0 \pmod{\gamma(b_1/\gamma_b)c}, \quad f(\tilde{H}) \cdot \tilde{h}_1 \equiv 0 \pmod{\delta b_1c}, \quad (5)$$

где $\gamma_b = (\gamma, b_1)$;

б) $\tilde{h}_1$ принадлежит b -серии, если

$$\tilde{h}_1^2 = \pm 2a_1c, \quad \tilde{H} \cdot \tilde{h}_1 \equiv 0 \pmod{\gamma(a_1/\gamma_a)c}, \quad f(\tilde{H}) \cdot \tilde{h}_1 \equiv 0 \pmod{\delta a_1c}, \quad (6)$$

где $\gamma_a = (\gamma, a_1)$.

Данные условия необходимы для существования изоморфизма $Y \cong X$, если $\rho(X) \leq 2$ и X – общая КЗ-поверхность с ее решеткой Пикара, т. е. группа автоморфизмов трансцендентных периодов $(T(X), H^{2,0}(X))$ равна ± 1 .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В условиях теоремы 4.4 из [13], аналогичных условиям (5) и (6), требовались также некоторые дополнительные условия примитивности элемента $\tilde{h}_1$. Из приводимого ниже доказательства теоремы 3 будет вытекать, что они излишни как достаточные условия. Однако эти дополнительные условия важны как необходимые.

В доказательстве из [13] достаточности условий теоремы 1 (как и в доказательстве из [2], [3] и [12] ее частных случаев) использовалась глобальная теорема Торелли для КЗ-поверхностей [14], т. е. при условиях теоремы 1 было показано, что периоды КЗ-поверхностей Y и X изоморфны. Из глобальной теоремы Торелли для КЗ-поверхностей [14] тогда вытекает, что поверхности Y и X изоморфны. В § 3 будет дана геометрическая конструкция изоморфизма между Y и X . В этом заключается основной результат настоящей работы.

§ 3. Геометрическая интерпретация теоремы 1

Здесь используем обозначения из § 2. Рассмотрим некоторые естественные изоморфизмы между модулями пучков на КЗ-поверхности X .

ЛЕММА 1. Пусть $v = (r, H, s)$ – примитивный изотропный вектор Мукаи на КЗ-поверхности X и $r, s \geq 1$. Тогда имеет место изоморфизм

$$\delta: M_X(r, H, s) \cong M_X(s, H, r),$$

называемый отражением (см. [15], [16]).

В [15, (4.11)] и [16, лемма 3.4] дана геометрическая конструкция отражения δ при условии, что $M_X(r, H, s)$ содержит регулярное расслоение (это верно, даже если вектор Мукаи $v = (r, H, s)$ не изотропен). С другой стороны, по глобальной теореме Торелли для КЗ-поверхностей [14] существование такого изоморфизма для примитивного изотропного вектора Мукаи v очевидно – оно аналогично приводимому ниже доказательству теоремы 2.

ЛЕММА 2. Пусть (r, H, s) – вектор Мукаи на КЗ-поверхности X и $D \in N(X)$. Тогда имеет место естественный изоморфизм, задаваемый тензорным произведением

$$T_D: M_X(r, H, s) \cong M_X(r, H + rD, s + r(D^2/2) + D \cdot H), \quad \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(D).$$

Кроме того, векторы Мукаи

$$v = (r, H, s), \quad v_1 = (r, H + rD, s + r(D^2/2) + D \cdot H)$$

имеют одинаковые наибольшие общие делители и одинаковые квадраты относительно спаривания Мукаи. В частности, они примитивны и изотропны одновременно.

Мы также используем изоморфизм между модулями пучков на КЗ-поверхности и самой КЗ-поверхностью, определенный А. Н. Тюриным в [16, лемма 3.3] и [17].

ЛЕММА 3. Для КЗ-поверхности X и элемента $h_1 \in N(X)$ такого, что $\pm h_1^2 > 0$ и

$$h^0 \mathcal{O}(h_1) = h^0 \mathcal{O}(-h_1) = 0, \quad \text{если } h_1^2 < 0, \quad (7)$$

имеет место изоморфизм Тюринга

$$\text{Ty}(\pm h_1): M_X(\pm h_1^2/2, h_1, \pm 1) \cong X.$$

Подобно приводимой ниже теореме 2, используя глобальную теорему Торелли для КЗ-поверхностей [14], легко показать, что даже без выполнения условия Тюринга (7) всегда существует изоморфизм

$$M_X(\pm h_1^2/2, h_1, \pm 1) \cong X.$$

Мы называем такой изоморфизм также *изоморфизмом Тюринга*. Когда h_1 удовлетворяет (7), имеется прямая геометрическая конструкция изоморфизма $M_X(\pm h_1^2/2, h_1, \pm 1) \cong X$, определенная Тюриным.

Мы также используем следующий результат, неявно доказанный в работе [13, п. 2.3, доказательство теоремы 2.3.3], где рассматривался значительно более сложный результат, связанный с произвольной решеткой Пикара, поэтому доказательства были длинными и сложными. Ниже мы приводим значительно более простое доказательство необходимого нам здесь результата.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $v = (r, H, s)$ – изотропный вектор Мукаи на КЗ-поверхности X , где $r, s \in \mathbb{N}$, $H \in N(X)$, $H^2 = 2rs$, и H примитивен (тогда v также примитивен). Пусть $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ и $(d_1, s) = (d_2, r) = (d_1, d_2) = 1$. Тогда вектор Мукаи $v_1 = (d_1^2 r, d_1 d_2 H, d_2^2 s)$ также примитивен и изотропен и существует естественный изоморфизм модулей пучков:

$$\nu(d_1, d_2): M_X(r, H, s) \cong M_X(d_1^2 r, d_1 d_2 H, d_2^2 s).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $(d_1, d_2) = (d, 1)$, где $(d, s) = 1$ (общий случай аналогичен).

Пусть $c = (r, s)$ и $a = r/c$, $b = s/c$. Тогда $v = (ac, H, bc)$, где $H^2 = 2abc^2$ и H примитивен. По глобальной теореме Торелли [14] достаточно показать, что периоды поверхностей $Y = M_X(r, H, s)$ и $Y_1 = M_X(d^2r, dH, s)$ изоморфны.

В силу результатов Мукай [7], [8] когомологии поверхности Y (аналогично, поверхности Y_1) суть

$$H^2(Y, \mathbb{Z}) = v^\perp / \mathbb{Z}v,$$

где v рассматривается как элемент решетки Мукай $H^*(X, \mathbb{Z})$, и $H^{2,0}(Y)$ – проекция $H^{2,0}(X)$.

Используя вариант теоремы Витта из [14], можно смоделировать необходимые вычисления следующим образом.

Пусть $U^{(1)}$ – четная унимодулярная гиперболическая плоскость с базисом e_1, e_2 , где $e_1^2 = e_2^2 = 0$ и $e_1 \cdot e_2 = -1$. Пусть $U^{(2)}$ – другая четная унимодулярная гиперболическая плоскость с базисом f_1, f_2 , где $f_1^2 = f_2^2 = 0$ и $f_1 \cdot f_2 = 1$. Рассмотрим ортогональную сумму $U^{(1)} \oplus U^{(2)}$ (модель решетки Мукай $H^*(X, \mathbb{Z})$; чтобы получить настоящую решетку Мукай $H^*(X, \mathbb{Z})$, следует ортогонально добавить к $U^{(1)} \oplus U^{(2)}$ четную унимодулярную решетку сигнатуры $(2, 18)$, которая одна и та же для всех трех поверхностей X , Y и Y_1). Тогда

$$v = ace_1 + bce_2 + H, \quad H = abc^2f_1 + f_2,$$

таким образом,

$$v = ace_1 + bce_2 + abc^2f_1 + f_2.$$

Имеем $N(X) = \mathbb{Z}H$ – модель решетки Пикара поверхности X и $T(X) = \mathbb{Z}t$, $t = -abc^2f_1 + f_2$, – модель решетки трансцендентных циклов поверхности X .

Получаем, что $\xi = xe_1 + ye_2 + zf_1 + wf_2 \in v^\perp$, если и только если $-bcx - acy + z + abc^2w = 0$; эквивалентно, $z = bcx + acy - abc^2w$, где $x, y, w, z \in \mathbb{Z}$. Таким образом,

$$\xi = x(e_1 + bcf_1) + y(e_2 + acf_1) + w(-abc^2f_1 + f_2),$$

и $\alpha = e_1 + bcf_1$, $\beta = e_2 + acf_1$, $t = -abc^2f_1 + f_2$ дают базис решетки $v^\perp$. Имеем $v = a\alpha + b\beta + t$ и

$$a\alpha \bmod \mathbb{Z}v + b\beta \bmod \mathbb{Z}v + t \bmod \mathbb{Z}v = 0.$$

Отсюда следует, что $\bar{\alpha} = \alpha \bmod \mathbb{Z}v$, $\bar{\beta} = \beta \bmod \mathbb{Z}v$ дают базис решетки $v^\perp / \mathbb{Z}v$, которая моделирует $H^2(Y, \mathbb{Z})$. Имеем $\bar{\alpha}^2 = \bar{\beta}^2 = 0$ и $\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} = -1$. Таким образом, $v^\perp / \mathbb{Z}v \cong U$. Видно, что $\bar{t} = t \bmod \mathbb{Z}v = -a\bar{\alpha} - b\bar{\beta}$, и тогда $\bar{t} = \bar{t}/c = -a\bar{\alpha} - b\bar{\beta} \in (v^\perp / \mathbb{Z}v)$ и $\mathbb{Z}\bar{t}$ моделирует решетку трансцендентных циклов $T(Y)$ поверхности Y . Ее ортогональное дополнение $\mathbb{Z}h$, где $h = a\bar{\alpha} - b\bar{\beta}$, моделирует решетку Пикара $N(Y)$ поверхности Y . Имеем $h^2 = 2ab > 0$.

Выполним аналогичные вычисления для Y_1 . Получим

$$\begin{aligned} v_1 &= d^2ace_1 + bce_2 + dH, & H &= abc^2f_1 + f_2, \\ v_1 &= d^2ace_1 + bce_2 + dabc^2f_1 + df_2. \end{aligned}$$

Имеем $\xi_1 = x_1e_1 + y_1e_2 + z_1f_1 + w_1f_2 \in v_1^\perp$, если и только если $-bcx_1 - d^2acy_1 + dz_1 + dabc^2w_1 = 0$. Так как $(d, bc) = 1$, получаем $x_1 = d\tilde{x}_1$ и $z_1 = bc\tilde{x}_1 + dacy_1 - abc^2w_1$, где $\tilde{x}_1, y_1, w_1, z_1 \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\xi_1 = \tilde{x}_1(de_1 + bcf_1) + y_1(e_2 + dacf_1) + w_1(-abc^2f_1 + f_2)$$

и $\alpha_1 = de_1 + bcf_1$, $\beta_1 = e_2 + dacf_1$, $t = -abc^2f_1 + f_2$ дают базис решетки $v_1^\perp$. Имеем $v_1 = dacc_1 + bc\beta_1 + dt$ и

$$dacc_1 \bmod \mathbb{Z}v_1 + bc\beta_1 \bmod \mathbb{Z}v_1 + dt \bmod \mathbb{Z}v_1 = 0.$$

Поскольку $(d, bc) = 1$, получаем $t \bmod \mathbb{Z}v_1 = \tilde{ct}_1$, $\beta_1 \bmod \mathbb{Z}v_1 = d\tilde{\beta}_1$, где $\tilde{t}_1, \tilde{\beta}_1 \in v_1^\perp / \mathbb{Z}v_1$, и

$$a\alpha_1 \bmod \mathbb{Z}v_1 + b\tilde{\beta}_1 + \tilde{t}_1 = 0.$$

Имеем $(\alpha_1 \bmod \mathbb{Z}v_1)^2 = \tilde{\beta}_1^2 = 0$ и $(\alpha_1 \bmod \mathbb{Z}v_1) \cdot \tilde{\beta}_1 = -1$. Таким образом, опять $\alpha_1 \bmod \mathbb{Z}v_1$, $\tilde{\beta}_1$ дают канонические образующие унимодулярной решетки U . Тогда они дают базис решетки $v_1^\perp / \mathbb{Z}v_1$, которая моделирует $H^2(Y_1)$. Кроме того, $\mathbb{Z}\tilde{t}_1$, где $\tilde{t}_1 = -a\alpha_1 \bmod \mathbb{Z}v - b\tilde{\beta}_1$ (см. выше), моделирует решетку трансцендентных циклов поверхности Y_1 . Ее ортогональное дополнение $\mathbb{Z}h_1$, где $h_1 = a\alpha_1 \bmod \mathbb{Z}v - b\tilde{\beta}_1$, моделирует решетку Пикара поверхности Y_1 .

Видно, что наши описания для Y и Y_1 изоморфны, если отождествить $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ с $\alpha_1 \bmod \mathbb{Z}v$ и $\tilde{\beta}_1$ соответственно. Отсюда следует, что поверхности Y и Y_1 имеют изоморфные периоды, и тогда они изоморфны в силу глобальной теоремы Торелли для КЗ-поверхностей [14]. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Было бы очень интересно найти прямое геометрическое доказательство теоремы 2, не использующее глобальную теорему Торелли для КЗ-поверхностей. По-видимому, рассуждения Мукаи, приведенные в [9], связаны с этой проблемой (см. [9, теорема 1.2]).

С другой стороны, изоморфизм $\nu(d_1, d_2)$ универсален и существует даже для общих (с числом Пикара, равным единице) КЗ-поверхностей. Как показано в [10], существует ровно один изоморфизм (или два для степени два) между алгебраическими КЗ-поверхностями с единичным числом Пикара. Таким образом, данный изоморфизм является геометрическим по определению.

Покажем, что при условиях теоремы 1 существует изоморфизм между $Y = M_X(r, H, s)$ и X , который является композицией определенных выше универсальных геометрических изоморфизмов. Используем обозначения из § 2 и теоремы 1.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – КЗ-поверхность и H – поляризация поверхности X такая, что $H^2 = 2rs$, где $r, s \in \mathbb{N}$. Предположим, что вектор Мукаи

(r, H, s) примитивен. Пусть $Y = M_X(r, H, s)$ – КЗ-поверхность, являющаяся модулями пучков на X с изотропным вектором Мукаи $v = (r, H, s)$. Пусть $\tilde{H} = H/d$, $d \in \mathbb{N}$, – соответствующая примитивная поляризация. Предположим, что существует $\tilde{h}_1 \in N(X)$ такой, что $\tilde{H}$ и $\tilde{h}_1$ принадлежат двумерной примитивной подрешетке $N \subset N(X)$ такой, что $\tilde{H} \cdot N = \gamma\mathbb{Z}$, $\gamma > 0$, $(c, d\gamma) = 1$, и $\tilde{h}_1$ принадлежит a -серии или b -серии:

а) $\tilde{h}_1$ принадлежит a -серии, если

$$\tilde{h}_1^2 = \pm 2b_1c, \quad \tilde{H} \cdot \tilde{h}_1 \equiv 0 \pmod{\gamma(b_1/\gamma_b)c}, \quad f(\tilde{H}) \cdot \tilde{h}_1 \equiv 0 \pmod{\delta b_1c}, \quad (8)$$

где $\gamma_b = (\gamma, b_1)$;

б) $\tilde{h}_1$ принадлежит b -серии, если

$$\tilde{h}_1^2 = \pm 2a_1c, \quad \tilde{H} \cdot \tilde{h}_1 \equiv 0 \pmod{\gamma(a_1/\gamma_a)c}, \quad f(\tilde{H}) \cdot \tilde{h}_1 \equiv 0 \pmod{\delta a_1c}, \quad (9)$$

где $\gamma_a = (\gamma, a_1)$.

Тогда имеем:

1) если $\tilde{h}_1$ принадлежит a -серии, то

$$\tilde{h}_1 = d_2\tilde{H} + b_1cD \quad \text{для некоторых } d_2 \in \mathbb{N}, \quad D \in N, \quad (10)$$

что определяет изоморфизм

$$\mathrm{Tu}(\pm\tilde{h}_1) \cdot T_D \cdot \nu(1, d_2) \cdot \delta \cdot \nu(d_a, d_b)^{-1}: Y = M_X(r, H, s) \cong X; \quad (11)$$

2) если $\tilde{h}_1$ принадлежит b -серии, то

$$\tilde{h}_1 = d_2\tilde{H} + a_1cD \quad \text{для некоторых } d_2 \in \mathbb{N}, \quad D \in N, \quad (12)$$

что определяет изоморфизм

$$\mathrm{Tu}(\pm\tilde{h}_1) \cdot T_D \cdot \nu(1, d_2) \cdot \nu(d_a, d_b)^{-1}: Y = M_X(r, H, s) \cong X. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся описанием пары $\tilde{H} \in N$, приведенным в [13, предложение 3.1.1] (где следует заменить $N(X)$ на N), которое непосредственно вытекает из того, что $\mathrm{rk} N = 2$, $\tilde{H}$ примитивен в N и $\tilde{H} \cdot N = \gamma\mathbb{Z}$. Пусть $\det N = -\delta\gamma$, $\delta \in \mathbb{N}$, и $\mathbb{Z}f(\tilde{H})$ – ортогональное дополнение к $\tilde{H}$ в N . Тогда $f^2(\tilde{H}) = -2a_1b_1c^2\delta/\gamma$.

Для некоторого $\mu \in (\mathbb{Z}/(2a_1b_1c^2/\gamma))^*$, где $\delta \equiv \mu^2\gamma \pmod{4a_1b_1c^2/\gamma}$, имеем

$$N = \left[\tilde{H}, f(\tilde{H}), w = \frac{\mu\tilde{H} + f(\tilde{H})}{2a_1b_1c^2/\gamma} \right], \quad (14)$$

где $[M]$ обозначает “подрешетку, порожденную множеством M ”. Здесь $\pm\mu$ – инвариант пары $\tilde{H} \in N$. Отсюда следует, что

$$N = \left\{ z = \frac{x\tilde{H} + yf(\tilde{H})}{2a_1b_1c^2/\gamma} \mid x, y \in \mathbb{Z}, x \equiv \mu y \pmod{\frac{2a_1b_1c^2}{\gamma}} \right\}, \quad (15)$$

где

$$z^2 = \frac{\gamma x^2 - \delta y^2}{2a_1 b_1 c^2 / \gamma}. \quad (16)$$

При условиях теоремы 2 пусть $\tilde{h}_1$ принадлежит a -серии. Тогда $\tilde{h}_1 = (p\tilde{H} + qf(\tilde{H})) / (2a_1 b_1 c^2 / \gamma)$, где $p, q \in \mathbb{Z}$ и

$$p \equiv \mu q \pmod{\frac{2a_1 b_1 c^2}{\gamma}}. \quad (17)$$

По условию a -серии имеем $\tilde{H} \cdot \tilde{h}_1 = \gamma p \equiv 0 \pmod{\gamma(b_1/\gamma_b)c}$. Эквивалентно, $p \equiv 0 \pmod{(b_1/\gamma_b)c}$. Из (17) тогда получаем $q \equiv 0 \pmod{(b_1/\gamma_b)c}$. Обозначая $p = p_1(b_1/\gamma_b)c$ и $q = q_1(b_1/\gamma_b)c$, где $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}$, получаем

$$\tilde{h}_1 = \frac{p_1 \tilde{H} + q_1 f(\tilde{H})}{(2/\gamma_2)(a_1/\gamma_a)c},$$

где $p_1 \equiv \mu q_1 \pmod{(2/\gamma_2)(a_1/\gamma_a)c}$.

Имеем $f(\tilde{H}) = (2a_1 b_1 c^2 / \gamma)w - \mu \tilde{H}$, где $w \in N$. Тогда

$$\tilde{h}_1 = \frac{p_1 \tilde{H} + q_1 ((2a_1 b_1 c^2 / \gamma)w - \mu \tilde{H})}{(2/\gamma_2)(a_1/\gamma_a)c} = \frac{p_1 - \mu q_1}{(2/\gamma_2)(a_1/\gamma_a)c} \tilde{H} + q_1 \left(\frac{b_1}{\gamma_b} \right) cw. \quad (18)$$

По условию a -серии имеем

$$f(\tilde{H}) \cdot \tilde{h}_1 = -q_1(b_1/\gamma_b)\delta c \equiv 0 \pmod{\delta b_1 c}$$

и тогда получаем

$$q_1 \equiv 0 \pmod{\gamma_b}.$$

Поскольку μ определен по модулю $(2/\gamma_2)(a_1/\gamma_a)(b_1/\gamma_b)c^2$ и $q_1 \equiv 0 \pmod{\gamma_b}$, то корректно определен элемент $p_1 - \mu q_1 \pmod{(2/\gamma_2)(a_1/\gamma_a)b_1 c^2}$. Так как $p_1 - \mu q_1 \equiv 0 \pmod{(2/\gamma_2)(a_1/\gamma_a)c}$, то корректно определен элемент

$$\frac{p_1 - \mu q_1}{(2/\gamma_2)(a_1/\gamma_a)c} \pmod{b_1 c}.$$

Поскольку $q_1 \equiv 0 \pmod{\gamma_b}$, из (18) получаем корректное сравнение

$$\tilde{h}_1 \equiv \frac{p_1 - \mu q_1}{(2/\gamma_2)(a_1/\gamma_a)c} \tilde{H} \pmod{b_1 c N}. \quad (19)$$

Тогда существует $d_2 \in \mathbb{N}$ такой, что

$$d_2 \equiv \frac{p_1 - \mu q_1}{(2/\gamma_2)(a_1/\gamma_a)c} \pmod{b_1 c}. \quad (20)$$

Поэтому

$$\tilde{h}_1 = d_2 \tilde{H} + b_1 c D, \quad d_2 \in \mathbb{N}, \quad D \in N. \quad (21)$$

По теореме 2 имеет место изоморфизм

$$\nu(d_a, d_b)^{-1}: Y = M_X(ac, H, bc) \cong M_X(a_1c, \tilde{H}, b_1c)$$

(это один из первых шагов в доказательстве теоремы 2.1 из [13]). По лемме 1 имеет место изоморфизм

$$\delta: M_X(a_1c, \tilde{H}, b_1c) \cong M_X(b_1c, \tilde{H}, a_1c).$$

По лемме 2 и формуле (21) получаем

$$T_D: (b_1c, d_2\tilde{H}, d_2^2a_1c) \rightarrow (b_1c, \tilde{h}_1, \pm 1),$$

так как $(b_1c, d_2\tilde{H}, d_2^2a_1c)$ – изотропный вектор Мукаи и $\tilde{h}_1^2 = \pm 2b_1c$. Поскольку $(b_1c, \tilde{h}_1, \pm 1)$ примитивен, то $(b_1c, d_2\tilde{H}, d_2^2a_1c)$ также примитивен, и тогда $(d_2, b_1c) = 1$. По теореме 2 тогда имеет место изоморфизм

$$\nu(1, d_2): M_X(b_1c, \tilde{H}, a_1c) \cong M_X(b_1c, d_2\tilde{H}, d_2^2a_1c),$$

и по лемме 2 получаем изоморфизм

$$T_D: M_X(b_1c, d_2\tilde{H}, d_2^2a_1c) \cong M_X(b_1c, \tilde{h}_1, \pm 1).$$

Наконец, по лемме 3 имеем

$$\text{Ту}(\pm\tilde{h}_1): M_X(b_1c, \tilde{h}_1, \pm 1) \cong X.$$

Таким образом, получаем изоморфизм

$$\text{Ту}(\pm\tilde{h}_1) \cdot T_D \cdot \nu(1, d_2) \cdot \delta \cdot \nu(d_a, d_b)^{-1}: Y = M_X(r, H, s) \cong X. \quad (22)$$

Если $\tilde{h}_1$ принадлежит b -серии, аналогично получаем

$$\tilde{h}_1 = d_2\tilde{H} + a_1cD, \quad d_2 \in \mathbb{N}, \quad D \in N, \quad (23)$$

и тогда имеет место изоморфизм

$$\text{Ту}(\pm\tilde{h}_1) \cdot T_D \cdot \nu(1, d_2) \cdot \nu(d_a, d_b)^{-1}: Y = M_X(r, H, s) \cong X. \quad (24)$$

В этом случае не используется отражение δ . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Поскольку условия теоремы 3 уже дают изоморфизм $Y \cong X$, все другие условия теоремы 4.4 из [13] излишни как достаточные условия. Они важны как необходимые условия.

Так как условия теоремы 3 также необходимы для общей КЗ-поверхности X с $\rho(X) \leq 2$, чтобы поверхности Y и X были изоморфны (см. теорему 1), мы также получаем следующее интересное утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть X – КЗ-поверхность с поляризацией H такой, что $H^2 = 2rs$, $r, s \geq 1$, вектор Мукаи (r, H, s) примитивен и $Y = M_X(r, H, s)$ – модули пучков на X с изотропным вектором Мукаи (r, H, s) . Предположим, что $\rho(X) \leq 2$ и X – общая поверхность с ее решеткой Пикара, т.е. группа автоморфизмов трансцендентных периодов $\text{Aut}(T(X), H^{2,0}(X))$ равна ± 1 . Пусть $\tilde{H} = H/d$, $d \in \mathbb{N}$, – соответствующая примитивная поляризация. Тогда поверхность $Y = M_X(r, H, s)$ изоморфна X , если и только если существуют $d_2 \in \mathbb{N}$ и $D \in N(X)$ такие, что:

1) либо

$$\tilde{h}_1 = d_2 \tilde{H} + b_1 c D \quad \text{имеет} \quad \tilde{h}_1^2 = \pm 2b_1 c, \quad (25)$$

что определяет изоморфизм

$$\text{Tyu}(\pm \tilde{h}_1) \cdot T_D \cdot \nu(1, d_2) \cdot \delta \cdot \nu(d_a, d_b)^{-1}: Y = M_X(r, H, s) \cong X; \quad (26)$$

2) либо

$$\tilde{h}_1 = d_2 \tilde{H} + a_1 c D \quad \text{имеет} \quad \tilde{h}_1^2 = \pm 2a_1 c, \quad (27)$$

что определяет изоморфизм

$$\text{Tyu}(\pm \tilde{h}_1) \cdot T_D \cdot \nu(1, d_2) \cdot \nu(d_a, d_b)^{-1}: Y = M_X(r, H, s) \cong X. \quad (28)$$

Из теоремы 4 следует, что изоморфизм между Y и X есть явная композиция универсальных изоморфизмов δ , T_D , $\nu(d_1, d_2)$ и Tyu . Не учитывая явный вид этой композиции, получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть X – КЗ-поверхность с поляризацией H такой, что $H^2 = 2rs$, $r, s \geq 1$, вектор Мукаи (r, H, s) примитивен и $Y = M_X(r, H, s)$ – модули пучков на X с изотропным вектором Мукаи (r, H, s) . Предположим, что $\rho(X) \leq 2$ и X – общая поверхность с ее решеткой Пикара, т.е. группа автоморфизмов трансцендентных периодов $\text{Aut}(T(X), H^{2,0}(X))$ равна ± 1 . Тогда поверхность $Y = M_X(r, H, s)$ изоморфна X , если и только если существует изоморфизм между $Y = M_X(r, H, s)$ и X , являющийся композицией универсальных изоморфизмов δ , $\nu(d_1, d_2)$ и T_D между модулями пучков на X и универсального изоморфизма Тюринга Tyu между некоторыми модулями пучков на X и самой поверхностью X .

Здесь также важно, что изоморфизмы δ , T_D и Tyu имеют геометрическое описание, в котором не используется глобальная теорема Торелли для КЗ-поверхностей. Только для изоморфизма $\nu(d_1, d_2)$ прямая геометрическая конструкция не известна. С другой стороны, изоморфизм $\nu(d_1, d_2)$ универсален и является геометрическим по определению (см. замечание 2).

Эти результаты также показывают, что изоморфизм Тюринга Tyu , а также изоморфизмы δ , T_D , $\nu(d_1, d_2)$ универсально важны в проблеме: когда $Y = M_X(r, H, s) \cong X$?, которую мы здесь рассматриваем. Они достаточны для ее решения с случае общих (с их решеткой Пикара) КЗ-поверхностей X при $\rho(X) \leq 2$.

§ 4. Классический пример

Здесь мы рассматриваем частный, но классический и замечательный пример.

Рассмотрим частный случай примитивного изотропного вектора Мукаи $v = (2, H, 2)$, где $H^2 = 8$ и $H \in N(X)$ примитивен. В этом случае хорошо известно, что для общей КЗ-поверхности X полная линейная система $|H|$ дает вложение $X \subset \mathbb{P}^5$, при котором X является полным пересечением трех квадрик в $\mathbb{P}^5$. Сеть данных трех квадрик определяет проективную плоскость $\mathbb{P}^2$, кривая C_6 вырожденных квадрик, проходящих через X , имеет степень 6, и поверхность $Y = M_X(2, H, 2)$ – двулистное накрытие плоскости $\mathbb{P}^2$, разветвленное в C_6 . Таким образом, нас интересует ответ на классический вопрос: когда две данные КЗ-поверхности X и Y изоморфны?

Этот вопрос был детально рассмотрен в [2]. Используя изложенные выше результаты, мы можем теперь добавить к ним явную геометрическую конструкцию изоморфизма между Y и X . В [2] мы доказывали только существование такого изоморфизма, пользуясь глобальной теоремой Торелли для КЗ-поверхностей [14].

В этом случае $r = s = 2$, $c = 2$, $a = a_1 = b = b_1 = 1$, $d_a = d_b = 1$, $\gamma = 1$. Кроме того, a -серия и b -серия совпадают.

По теореме 3 имеем $Y \cong X$, если существует элемент $h_1 = \tilde{h}_1 \in N(X)$ такой, что $h_1 = d_2 H + 2D$, где $d_2 \in \mathbb{N}$, $D \in N(X)$, и $h_1^2 = \pm 4$. Кроме того, по теореме 4 эти условия необходимы для существования изоморфизма $Y \cong X$ для общей поверхности X при $\rho(X) \leq 2$.

Имеем

$$h_1^2 = \pm 4 = 8d_2^2 + 4d_2(H \cdot D) + 4D^2,$$

где $D^2 \equiv 0 \pmod{2}$. Отсюда следует, что число d_2 нечетно и можно взять $d_2 = 1$. Таким образом, можно записать

$$h_1 = H + 2D, \quad \text{где} \quad h_1^2 = \pm 4, \quad D \in N(X). \quad (29)$$

Из (13) тогда получаем геометрический изоморфизм

$$\text{Tyu}(\pm h_1) \cdot T_D: Y = M_X(2, H, 2) \cong X. \quad (30)$$

В этом случае изоморфизмы $\nu(d_1, d_2)$ и отражение δ не используются.

Дополнительно предположим, что имеет место общий случай теоремы 4, где $\rho(X) \leq 2$ и $\text{Aut}(T(X), H^{2,0}(X)) = \pm 1$. В [2, предложение 3.2.1, теоремы 3.2.2, 3.2.3] было показано (также следует воспользоваться теоремой 3 из настоящей статьи), что $N(X)$ имеет либо элемент h_1 , удовлетворяющий (29) и имеющий $h_1^2 = 4$, либо элемент h_1 , удовлетворяющий (29) и имеющий $h_1^2 = -4$, при этом $N(X)$ не имеет элементов с квадратом, равным -2 . В последнем случае все эффективные элементы из $N(X)$ имеют неотрицательные квадраты, поэтому получаем $h^0 \mathcal{O}(h_1) = h^0 \mathcal{O}(-h_1) = 0$, если $h_1^2 = -4 < 0$. Таким образом, условия леммы 3 выполнены и изоморфизм Тюринга имеет ясный геометрический смысл, как и изоморфизм (30).

Таким образом, в этом классическом случае получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 5. Пусть X – КЗ-поверхность с примитивной поляризацией $H \in N(X)$ степени $H^2 = 8$. Пусть $Y = M_X(2, H, 2)$ – пространство модулей пучков на X с изотропным примитивным вектором Мукаи $v = (2, H, 2)$. Тогда $Y \cong X$, если существует

$$h_1 = H + 2D \in N(X), \quad \text{где} \quad h_1^2 = \pm 4, \quad D \in N(X), \quad (31)$$

и

$$h^0 \mathcal{O}(h_1) = h^0 \mathcal{O}(-h_1) = 0, \quad \text{если} \quad h_1^2 = -4, \quad (32)$$

что определяет явный геометрический изоморфизм

$$\mathrm{Tyu}(\pm h_1) \cdot T_D: Y = M_X(2, H, 2) \cong X. \quad (33)$$

Условия (31) и (32) необходимы для существования изоморфизма $Y \cong X$, если $\rho(X) \leq 2$ и X – общая КЗ-поверхность с ее решеткой Пикара, т. е. группа автоморфизмов трансцендентных периодов $(T(X), H^{2,0}(X))$ равна ± 1 .

Этот случай более детально разобран в работе [4].

Список литературы

1. C. G. Madonna, “On some moduli spaces of bundles on K3 surfaces”, *Monatsh. Math.*, **146**:4 (2005), 333–339.
2. К. Г. Мадонна, В. В. Никулин, “О классическом соответствии между поверхностями КЗ”, *Тр. МИАН*, **241** (2003), 132–168; англ. пер.: C. G. Madonna, V. V. Nikulin, “On a classical correspondence between K3 surfaces”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **241** (2003), 120–153.
3. C. G. Madonna, V. V. Nikulin, “On a classical correspondence between K3 surfaces. II”, *Strings and geometry*, Clay Math. Proc., **3**, AMS, Providence, RI, 2004, 285–300.
4. C. G. Madonna, V. V. Nikulin, *On a classical correspondence between K3 surfaces. III*, [arXiv:math/0605362](https://arxiv.org/abs/math/0605362).
5. C. G. Madonna, V. V. Nikulin, *On correspondences of a K3 surface with itself. III*, [arXiv:math/0606239](https://arxiv.org/abs/math/0606239).
6. C. G. Madonna, V. V. Nikulin, *On correspondences of a K3 surface with itself. IV*, [arXiv:math/0606289](https://arxiv.org/abs/math/0606289).
7. Sh. Mukai, “On the moduli space of bundles on K3 surfaces. I”, *Vector bundles on algebraic varieties* (Bombay, 1984), Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., **11**, 1987, 341–413.
8. Sh. Mukai, “Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or K3 surface”, *Invent. Math.*, **77**:1 (1984), 101–116.
9. Sh. Mukai, “Duality of polarized K3 surfaces”, *New trends in algebraic geometry. Selected papers presented at the Euro conference* (Warwick, UK, July 1996), London Math. Soc. Lect. Notes, **264**, Cambridge University Press, Cambridge, 1999, 311–326.
10. В. В. Никулин, “Конечные группы автоморфизмов келеровых поверхностей типа КЗ”, *Тр. ММО*, **38** (1979), 75–137.
11. В. В. Никулин, “О соответствиях между поверхностями типа КЗ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **51**:2 (1987), 402–411; англ. пер.: V. V. Nikulin, “On correspondences between surfaces of K3 type”, *Math. USSR-Izv.*, **30**:2 (1998), 375–383.

12. В. В. Никулин, “О соответствиях поверхности $K3$ с собой. I”, *Тр. МИАН*, **246** (2004), 217–239; англ. пер.: V. V. Nikulin, “On correspondences between surfaces of $K3$ type”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **246** (2004), 204–226.
13. V. V. Nikulin, “On correspondences of a $K3$ surface with itself. II”, *Contemp. Math.*, 2007, № 422, 121–172.
14. И. И. Пятецкий-Шапиро, И. Р. Шафаревич, “Теорема Торелли для алгебраических поверхностей типа $K3$ ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35**:3 (1971), 530–572; англ. пер.: I. I. Pyatetskii-Shapiro, I. R. Shafarevich, “A Torelli theorem for algebraic surfaces of type $K3$ ”, *Math. USSR-Izv.*, **5**:3 (1971), 547–588.
15. A. N. Tyurin, “Cycles, curves and vector bundles on algebraic surfaces”, *Duke Math. J.*, **54**:1 (1987), 1–26.
16. А. Н. Тюрин, “Специальные 0-циклы на поляризованной поверхности типа $K3$ ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **51**:1 (1987), 131–151; англ. пер.: A. N. Tyurin, “Special 0-cycles on a polarized surface of type $K3$ ”, *Math. USSR-Izv.*, **30**:1 (1988), 123–143.
17. А. Н. Тюрин, “Симплектические структуры на многообразии модулей векторных расслоений на алгебраических поверхностях с $p_g > 0$ ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **52**:4 (1988), 813–852; англ. пер.: A. N. Tyurin, “Symplectic structures on the varieties of moduli of vector bundles on algebraic surfaces with $p_g > 0$ ”, *Math. USSR-Izv.*, **33**:1 (1989), 139–177.

К. Г. МАДОННА (C. G. MADONNA)
 Spanish National Research Council
 (Consejo Superior de Investigaciones Científicas)
E-mail: carlo@madonna.rm.it, cgm@imaff.cfmac.csic.es

Поступило в редакцию
 10.07.2006

В. В. НИКУЛИН (V. V. NIKULIN)
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
 University of Liverpool
E-mail: vnikulin@liv.ac.uk, vvnikulin@list.ru