Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ф. Лукомский, Ряды Фурье функций с несуммируемой производной, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 2, 91–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/im1131>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 05:48:34

УДК 517.51

С. Ф. Лукомский

Ряды Фурье функций с несуммируемой производной

Рассмотрены вопросы сходимости рядов Фурье по норме пространств Орлича, более узких, чем $L(e^x)$. Показано, что если непрерывная функция имеет несуммируемую производную, то ее ряд Фурье не обязательно сходится по норме таких пространств Орлича. Найдено условие, налагаемое на ограниченную функцию f , при котором ее ряд Фурье сходится по норме пространства Орлича $L(\varphi) \subset L(e^x)$, и показана точность полученного результата.

Библиография: 8 наименований.

Ключевые слова: ряды Фурье, сходимость, пространства Лоренца, локальный модуль непрерывности.

Хорошо известно [1], что если функция f абсолютно непрерывна, то ее ряд Фурье сходится равномерно. В эквивалентной форме это утверждение можно сформулировать следующим образом: если функция f непрерывна, ее производная f' существует всюду, за исключением не более чем счетного множества, и f суммируема на $[-\pi, \pi]$, то ряд Фурье функции f сходится равномерно. Возникает вопрос: что происходит при ослаблении требования $f' \in L$? С другой стороны, известно [2], что ряд Фурье любой функции f , принадлежащей некоторому пространству Орлича $L(\varphi)$, сходится к ней по норме этого же пространства (т. е. тригонометрическая система – базис пространства Орлича $L(\varphi)$) тогда и только тогда, когда и сама функция φ и ее сопряженная φ^* удовлетворяют условию Δ_2 [3]. Кроме того, известно [4], что если $f \in L \log^+ L(-\pi, \pi)$, то ее ряд Фурье сходится по норме пространства L , и ослабить это условие нельзя. Используя этот результат, можно получить, что если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \varphi(x)}{x} = +\infty, \quad (1)$$

то найдется непрерывная функция f , ряд Фурье которой не сходится в пространстве Орлича $L(\varphi)$. В частности, это означает, что условие сходимости ряда Фурье функции f по норме пространства $L(\varphi)$ с условием (1) не может быть выражено в терминах принадлежности f к какому-либо пространству Орлича. Поэтому возникает вопрос: при каких условиях, налагаемых на функцию f , ее ряд Фурье сходится по норме пространства Орлича $L(\varphi)$ с условием (1)?

Оказалось, что эти две задачи тесно связаны между собой. В настоящей статье, во-первых, мы найдем условие для функции f , при котором ее ряд Фурье сходится по норме пространства Орлича $L(\varphi)$ с условием (1), и покажем его точность, во-вторых, мы покажем, что при ослаблении условия $f' \in L[-\pi, \pi]$

Работа выполнена при поддержке Программы Президента РФ "Поддержка ведущих научных школ РФ" (грант № НШ-2970.2008.1).

не только теряется равномерная сходимость ряда Фурье функции f , но нельзя гарантировать и сходимость по норме пространства Орлича $L(\varphi)$, для которого выполнено условие (1).

§ 1. Основные понятия и формулировка основных результатов

Функция $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ называется *функцией Орлича* [5], [6], если она выпуклая, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ при $x > 0$ и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0.$$

Всякая функция Орлича обязательно непрерывна. Функцию

$$\varphi^*(x) = \sup_{y \geq 0} (xy - \varphi(y))$$

называют *сопряженной* к $\varphi(x)$. Она тоже будет функцией Орлича [3], [7].

Если φ – функция Орлича, то совокупность тех $f \in L(a, b)$, для которых при некотором $\lambda > 0$ выполнено

$$\int_{(a,b)} \varphi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx < +\infty,$$

называют *пространством Орлича* и обозначают $L(\varphi)$. Число

$$\|f\|_{L(\varphi)} \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ \lambda > 0: \int_{(a,b)} \varphi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \leq 1 \right\}$$

будет нормой, и $L(\varphi)$ с такой нормой есть банахово пространство. Норму $\|\cdot\|_{L(\varphi)}$ называют *нормой Люксембурга* [3], [7]. Равенство

$$\|f\|_{L(\varphi)} \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ \int_{(a,b)} |\gamma(x)f(x)| dx: \int_{(a,b)} \varphi^*(|\gamma(x)|) dx \leq 1 \right\}$$

также определяет в $L(\varphi)$ норму, которая называется *нормой Орлича*. Известно (см. [3], [7]), что

$$\|f\|_{L(\varphi)} \leq \|f\|_{L(\varphi)} \leq 2\|f\|_{L(\varphi)}.$$

Если функция $\psi(x)$ определена на $[0, +\infty)$, возрастает, вогнута на $[0, +\infty)$ и положительна на $(0, +\infty)$, то через $\psi(L)$ будем обозначать множество тех 2π -периодических измеримых функций на $[0, 2\pi]$, для которых

$$\int_0^{2\pi} \psi(|f(x)|) dx < +\infty.$$

Совокупность $\psi(L)$ в общем случае не является линейным нормированным пространством, и число $\int_0^{2\pi} \psi(|f(x)|) dx$ не будет нормой. Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 0$, то $\psi(L)$ – более широкое пространство, чем $L(0, 2\pi)$.

Если f ограничена на $[0, 2\pi]$, $x \in [0, 2\pi]$, $\delta > 0$, то функцию [8]

$$\omega_\delta(f, x) = \sup \{ |f(x) - f(y)|: |x - y| \leq \delta \}$$

называют *локальным модулем непрерывности*. Очевидно, что если функция f является 2π -периодической, то $\omega_\delta(f, x)$ – тоже периодическая функция. Далее через $S_n(f, x)$ будем обозначать частичную сумму ряда Фурье функции f , $D_n(x)$ – ядро Дирихле, C_j – постоянные, не зависящие от f и номера частичной суммы. Все рассматриваемые функции предполагаются 2π -периодическими. Если $E \subset \mathbb{R}$, то $E - x$ означает сдвиг множества E ; $\log$ будет означать логарифм по основанию 2, $\ln$ – натуральный логарифм.

Основные результаты статьи сформулируем в виде следующих теорем.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\psi(x)$ – возрастающая непрерывная вогнутая на $[0, +\infty)$ функция такая, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 0$, и $\varphi(x)$ – функция Орлича, удовлетворяющая условию (1). Тогда существует 2π -периодическая непрерывная функция f , дифференцируемая на $(0, 2\pi)$ и такая, что:

- 1) $f' \in \psi(L)$;
- 2) ряд Фурье функции f не сходится по норме пространства $L(\varphi)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть f ограничена и 2π -периодична, $S_n(f, x)$ – частичная сумма ряда Фурье функции f . Тогда существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\|S_n(f) - f\|_{L(\varphi)} \leq C \left(\frac{\|f\|_C}{\sqrt{n}} + \|\omega_{\frac{\pi}{n}}(f)\|_{L(\varphi)} + \log n (\|\omega_{\frac{4\pi}{\sqrt{n}}}(f)\|_{L(\varphi)}) \right).$$

В качестве очевидного следствия получается

ТЕОРЕМА 3. Если

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \log \frac{1}{\delta} \|\omega_\delta(f, \cdot)\|_{L(\varphi)} = 0,$$

то ряд Фурье функции f сходится к f по норме пространства $L(\varphi)$.

Теорема 3 является точной по крайней мере для функций $\varphi(x) = \gamma^{x^\alpha}$, $\alpha > 1$, при достаточно больших x .

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\log \varphi(x) = x^\alpha$ при больших x , $\alpha > 1$, и $\varphi_1(x)$ – функция Орлича такая, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \varphi_1(x)}{\log \varphi(x)} = +\infty$. Тогда существует непрерывная 2π -периодическая функция f такая, что:

- 1) $\lim_{\delta \rightarrow 0} \log \frac{1}{\delta} \|\omega_\delta(f)\|_{L(\varphi)} = 0$;
- 2) нормы $\|S_n(f)\|_{L(\varphi_1)}$ неограничены.

§ 2. Доказательство основных результатов

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Обозначим здесь через $(k_m)_{m=0}^\infty$ произвольную возрастающую последовательность натуральных чисел такую, что $k_{m+1} \geq 2k_m$, $k_0 = 2$, и пусть $n_m = 2^{k_m}$. Пусть, далее,

$$a_k^{(m)} = \frac{\pi}{n_m + \frac{1}{2}} \left(k + \frac{1}{2} \right), \quad b_k^{(m)} = \frac{\pi}{n_m + \frac{1}{2}} \left(k + \frac{3}{4} \right),$$

$$\Delta_k^{(m)} = (a_k^{(m)}, b_k^{(m)}), \quad k = 1, 2, \dots, l_m, \quad l_m = \left[\frac{n_m + \frac{1}{2}}{n_{m-1} + \frac{1}{2}} \right] - 1, \quad m \geq 1.$$

Очевидно, что

$$\frac{\pi}{n_{m-1} + \frac{1}{2}} - b_{l_m}^{(m)} \geq \frac{\pi}{4(n_m + \frac{1}{2})}.$$

Определим функцию $g(x)$ на $[-\pi, \pi]$ равенствами

$$g(x) = \begin{cases} \alpha_k^{(m)}, & \text{если } x \in \Delta_k^{(m)}, \\ 0, & \text{если } x \notin \Delta_k^{(m)}, \end{cases}$$

где $\alpha_k^{(m)} = (-1)^k |\alpha_k^{(m)}|$, $|\alpha_k^{(m)}| = \alpha^{(m)}$ и $\alpha^{(m+1)} < \alpha^{(m)}$. Покажем, что $\alpha^{(m)}$ и k_m можно выбрать так, чтобы для $g(x)$ выполнялось утверждение 2) теоремы 1.

Выберем произвольно натуральное число m_0 . Частичную сумму $S_{n_{m_0}}(g, x)$ запишем в виде

$$\begin{aligned} S_{n_{m_0}}(g, x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x+t) D_{n_{m_0}}(t) dt = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{l_m} \int_{\Delta_k^{(m)} - x} g(x+t) D_{n_{m_0}}(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{m_0-1} \sum_{k=1}^{l_m} \alpha_k^{(m)} \int_{\Delta_k^{(m)} - x} D_{n_{m_0}}(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{l_{m_0}} \alpha_k^{(m_0)} \int_{\Delta_k^{(m_0)} - x} D_{n_{m_0}}(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{m=m_0+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{l_m} \alpha_k^{(m)} \int_{\Delta_k^{(m)} - x} D_{n_{m_0}}(t) dt = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3. \end{aligned}$$

Оценим $|\Sigma_2|$ снизу при $x \in (0, \frac{\pi}{4(n_{m_0} + \frac{1}{2})})$. В этом случае если $t \in \Delta_k^{(m_0)} - x$, то $\text{sign } D_{n_{m_0}}(t) = (-1)^k$ и $|D_{n_{m_0}}(t)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{t}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \frac{\alpha^{(m_0)}}{\pi} \sum_{k=0}^{l_{m_0}} \int_{\Delta_k^{(m_0)} - x} |D_{n_{m_0}}(t)| dt \geq \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \alpha^{(m_0)} \sum_{k=1}^{l_{m_0}} \int_{\Delta_k^{(m_0)} - x} \frac{dt}{t} \\ &\geq C_1 \alpha^{(m_0)} \log l_{m_0}. \end{aligned} \quad (2)$$

В качестве C_1 можно взять $\frac{\sqrt{2}}{8\pi}$.

Оценим $|\Sigma_3|$ сверху при $x \in (0, \frac{\pi}{4(n_{m_0} + \frac{1}{2})})$. Если $m \geq m_0 + 1$, то все интервалы $\Delta_k^{(m)} - x$ лежат внутри интервала $(-\frac{\pi}{n_{m_0} + \frac{1}{2}}, \frac{\pi}{n_{m_0} + \frac{1}{2}})$. Поэтому каждую сумму

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{l_m} \alpha_k^{(m)} \int_{\Delta_k^{(m)} - x} D_{n_{m_0}}(t) dt &= \alpha^{(m)} \sum_{k=1}^{l_m} (-1)^k \int_{\Delta_k^{(m)} - x} D_{n_{m_0}}(t) dt \\ &= \alpha^{(m)} \sum_{k=1}^{l_m} (-1)^k I_k^{(m)}(x) \end{aligned}$$

можно представить в виде трех слагаемых:

$$\alpha^{(m)} \sum_{k=1}^{\chi_m-1} + \alpha^{(m)} \sum_{k=\chi_m}^{\chi_m} + \alpha^{(m)} \sum_{k=\chi_m+1}^{l_m}. \quad (3)$$

В первой сумме из (3) присутствуют интегралы по интервалам $\Delta_k^{(m)} - x \subset (-\frac{\pi}{n_{m_0} + \frac{1}{2}}, 0)$, в третьей – интегралы по интервалам $\Delta_k^{(m)} - x \subset (0, \frac{\pi}{n_{m_0} + \frac{1}{2}})$, во второй – только один интеграл по интервалу $\Delta_k^{(m)} - x \ni 0$.

Поскольку ядро Дирихле $D_{n_{m_0}}(t)$ убывает на $(0, \frac{\pi}{n_{m_0} + \frac{1}{2}})$, возрастает на $(-\frac{\pi}{n_{m_0} + \frac{1}{2}}, 0)$, то каждая из сумм в (3) не превосходит по модулю одного наибольшего слагаемого. Однако

$$|(-1)^k I_k^{(m)}(x)| \leq \left(n_{m_0} + \frac{1}{2}\right) (b_k^{(m)} - a_k^{(m)}) = \left(n_{m_0} + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{4(n_{m_0} + \frac{1}{2})}.$$

Поэтому

$$|\Sigma_3| \leq \left(n_{m_0} + \frac{1}{2}\right) \sum_{m=m_0+1}^{\infty} \frac{\alpha^{(m)}}{n_m + \frac{1}{2}}. \quad (4)$$

Учитывая неравенство $n_{m+1} \geq (n_m)^2$, из (4) получаем оценку

$$|\Sigma_3| \leq \frac{4}{n_{m_0}} \alpha^{(m_0+1)}. \quad (5)$$

Оцениваем $|\Sigma_1|$ также при $x \in (0, \frac{\pi}{4(n_{m_0} + \frac{1}{2})})$. Записываем Σ_1 в виде

$$\Sigma_1 = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{m_0-1} \alpha^{(m)} \sum_{k=1}^{l_m} (-1)^k \int_{\Delta_k^{(m)} - x} \frac{\sin((n_{m_0} + \frac{1}{2})t)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt. \quad (6)$$

Поскольку знаменатель $2 \sin \frac{t}{2}$ есть монотонная на $\Delta_k^{(m)} - x$ функция, то, используя вторую теорему о среднем, получаем

$$\left| \int_{\Delta_k^{(m)} - x} \frac{\sin((n_{m_0} + \frac{1}{2})t)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \right| \leq \frac{\pi}{4(n_{m_0} + \frac{1}{2})}.$$

Подставляя последнее неравенство в (6) и учитывая, что $l_m \leq \frac{n_m}{n_{m-1}}$, $\alpha^{(m)} \leq \alpha^{(1)}$ и $\frac{n_{m+1}}{n_m} : \frac{n_m}{n_{m-1}} \geq 2$, находим

$$\begin{aligned} |\Sigma_1| &\leq \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{m_0-1} \alpha^{(1)} l_m \frac{\pi}{4(n_{m_0} + \frac{1}{2})} \leq \frac{\alpha^{(1)}}{4(n_{m_0} + \frac{1}{2})} \sum_{m=1}^{m_0-1} \frac{n_m}{n_{m-1}} \\ &\leq \frac{\alpha^{(1)}}{2n_{m_0}} \frac{n_{m_0-1}}{n_{m_0-2}} \leq \frac{\alpha^{(1)}}{2n_{m_0-1}n_{m_0-2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Объединяя неравенства (7), (5) и (2), убеждаемся, что при фиксированной последовательности $\alpha^{(m)}$ последовательность $(n_m) = (2^{k_m})$ можно выбрать растущей настолько быстро, что при $x \in (0, \frac{\pi}{4(n_m + \frac{1}{2})})$ выполнено неравенство

$$|S_{n_m}(g, x)| \geq C_3 \alpha^{(m)} \log(l_m), \quad (8)$$

где $C_3 > 0$ – абсолютная постоянная.

Покажем, что последовательность (k_m) можно выбрать стремящейся к бесконечности настолько быстро, что $\|S_{n_m}(g)\|_{L(\varphi)} \rightarrow +\infty$. Пусть $\varphi(x) = 2^{\gamma(x)}$

и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(x)}{x} = +\infty$. Из (8) получаем, что при любом $\lambda > 0$ справедливо неравенство

$$\int_0^{2\pi} \varphi\left(\frac{|S_{n_m}(g, x)|}{\lambda}\right) dx \geq \frac{\pi}{4(n_m + \frac{1}{2})} \varphi\left(\frac{C_3}{\lambda} \alpha^{(m)} \log(l_m)\right). \quad (9)$$

Если

$$\lambda = \frac{\frac{1}{2} C_3 \log(l_m)}{\log(\frac{4}{\pi}(n_m + \frac{1}{2}))} \frac{\log(\frac{4}{\pi}(n_m + \frac{1}{2}))}{\gamma^{-1}(\log(\frac{4}{\pi}(n_m + \frac{1}{2})))} \alpha^{(m)}, \quad (10)$$

то правая часть в (9) равна 2. Отметим, что из условия $n_m \geq n_{m-1}^2$ следует, что первая дробь в (10) ограничена снизу. Вторая дробь в (10) стремится к $+\infty$. Таким образом, если λ определено равенством (10) и n_m стремится к ∞ достаточно быстро, то

$$\|S_{n_m}(g, \cdot)\|_{L(\varphi)} \geq \lambda \rightarrow +\infty.$$

Исправим функцию $g(x)$ на каждом отрезке $[a_k^{(m)}, b_k^{(m)}]$ следующим образом. На отрезках

$$\delta_k^{(m,+)} = \left[a_k^{(m)}, a_k^{(m)} + \frac{\pi}{n_{m+1}}\right], \quad \delta_k^{(m,-)} = \left[b_k^{(m)} - \frac{\pi}{n_{m+1}}, b_k^{(m)}\right]$$

определим такие функции $g_k^{(m,+)}(x)$ и $g_k^{(m,-)}(x)$, являющиеся многочленами третьей степени, что

$$\begin{aligned} g_k^{(m,+)}(a_k^{(m)}) &= 0, & g_k^{(m,+)}\left(a_k^{(m)} + \frac{\pi}{n_{m+1}}\right) &= \alpha_k^{(m)}, \\ \frac{dg_k^{(m,+)}(a_k^{(m)})}{dx} &= \frac{dg_k^{(m,-)}(a_k^{(m)} + \frac{\pi}{n_{m+1}})}{dx} = 0, \\ g_k^{(m,-)}(b_k^{(m)}) &= 0, & g_k^{(m,-)}\left(b_k^{(m)} - \frac{\pi}{n_{m+1}}\right) &= \alpha_k^{(m)}, \\ \frac{dg_k^{(m,-)}(b_k^{(m)})}{dx} &= \frac{dg_k^{(m,-)}(b_k^{(m)} - \frac{\pi}{n_{m+1}})}{dx} = 0. \end{aligned}$$

На отрезках $\delta_k^{(m,+)}$ и $\delta_k^{(m,-)}$ заменим $g(x)$ на $g_k^{(m,+)}(x)$ и $g_k^{(m,-)}(x)$ соответственно. Построенную функцию обозначим через $f(x)$. Поскольку $\alpha^{(m)} \downarrow 0$, то функция f непрерывна на $[-\pi, \pi]$. Очевидно также, что $f'(x)$ существует всюду на отрезке $[-\pi, \pi]$, кроме точки $x = 0$.

Покажем, что нормы $\|S_{n_m}(f)\|_{L(\varphi)}$ неограничены. Для этого достаточно доказать, что нормы $\|S_{n_m}(f - g)\|_{L(\varphi)}$ ограничены.

Обозначим $\delta_k^{(m)} = \delta_k^{(m,+)} \sqcup \delta_k^{(m,-)}$. Через $\delta_k^{(m,\pm)}$ обозначим одно из множеств $\delta_k^{(m,+)}$ или $\delta_k^{(m,-)}$. Зафиксируем m_0 и будем искать для $|S_{n_{m_0}}(f - g, x)|$ оценку сверху. Обозначим $h = f - g$. Запишем

$$S_{n_{m_0}}(h, x) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{l_m} \int_{\delta_k^{(m)} - x}^{l_m} h(x+t) \frac{\sin((n_{m_0} + \frac{1}{2})t)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \quad (11)$$

и оценим $S_{n_{m_0}}(h, x)$ в каждой точке $x \in [-\pi, \pi]$. Выберем $x \in [-\pi, \pi]$ и рассмотрим разные возможности:

- 1) $0 \in \left[\frac{\pi}{n_{\mu+\frac{1}{2}}} - x, \frac{\pi}{n_{\mu-1+\frac{1}{2}}} - x \right]$ при некотором μ ;
- 2) $\frac{\pi}{n_{0+\frac{1}{2}}} - x < 0$;
- 3) $0 < \frac{\pi}{n_{m+\frac{1}{2}}} - x$ для любого m .

Сначала рассмотрим случай 1). В зависимости от того, какое может быть μ по отношению к m_0 , выделим следующие ситуации:

- 1.1) $\mu = m_0$;
- 1.2) $\mu = m_0 + 1$;
- 1.3) $\mu \geq m_0 + 2$;
- 1.4) $\mu = m_0 - 1$;
- 1.5) $\mu \leq m_0 - 2$.

Из перечисленных возможностей 1.1)–1.5) рассмотрим несколько характерных.

1.2) $\mu = m_0 + 1$. Сумму (11) запишем в виде

$$S_{n_{m_0}}(h, x) = \frac{1}{\pi} \left(\sum_{m=1}^{m_0-2} \sum_{k=1}^{l_m} + \sum_{k=1}^{l_{m_0-1}} + \sum_{k=1}^{l_{m_0}} + \sum_{m=m_0+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{l_m} \right). \quad (12)$$

Для суммы $\sum_{k=1}^{l_m}$ при $m \geq m_0 + 1$ с учетом неравенств

$$|h(x+t)| \leq \alpha^{(m)}, \quad |D_{n_{m_0}}(t)| \leq n_{m_0} + \frac{1}{2}, \quad l_m \leq \frac{n_m}{n_{m-1}}, \quad n_{m+1} \geq n_m^2$$

имеем

$$\left| \sum_{k=1}^{l_m} \int_{\delta_k^{(m)}-x} h(x+t) D_{n_{m_0}}(t) dt \right| \leq \alpha^{(m)} \left(n_{m_0} + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{n_{m+1}} \cdot 2l_m \leq \frac{4\pi\alpha^{(m)}}{n_m},$$

откуда получаем

$$\left| \sum_{m=m_0+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{l_m} \right| \leq \frac{8\pi\alpha^{(m_0+1)}}{n_{m_0+1}}. \quad (13)$$

Для суммы $\sum_{k=1}^{l_{m_0}}$ аналогично получаем

$$\left| \sum_{k=1}^{l_{m_0}} \right| \leq \alpha^{(m_0)} \left(n_{m_0} + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{n_{m_0+1}} \cdot 2l_{m_0} \leq \frac{4\pi\alpha^{(m_0)}}{n_{m_0-1}}. \quad (14)$$

При оценке суммы $\sum_{k=1}^{l_{m_0-1}}$ воспользуемся тем, что если $t \in \Delta_k^{(m_0-1)} - x$, то $t > \frac{\pi}{2(n_{m_0-1}+\frac{1}{2})}$, а значит, $|\sin \frac{t}{2}| \geq \frac{1}{2(n_{m_0-1}+\frac{1}{2})}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{l_{m_0-1}} \right| &= \left| \sum_{k=1}^{l_{m_0-1}} \int_{\delta_k^{(m_0-1)}} h(x+t) \frac{\sin((n_{m_0} + \frac{1}{2})t)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \right| \\ &\leq \alpha^{(m_0-1)} \left(n_{m_0-1} + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{n_{m_0}} 2l_{m_0-1} \leq \frac{4\pi\alpha^{(m_0-1)}}{n_{m_0-2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

В сумме $\sum_{m=1}^{m_0-2} \sum_{k=1}^{l_m}$ оцениваем отдельно каждый интеграл

$$\int_{\delta_k^{(m,\pm)}-x} \frac{h(x+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\left(n_{m_0} + \frac{1}{2} \right) t \right) dt. \quad (16)$$

На $\delta_k^{(m,\pm)} - x$ функция $\frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}}$ положительна и убывает, $h(x+t)$ монотонна и сохраняет знак. Если $h(x+t) \geq 0$ и убывает, то дробь $\frac{h(x+t)}{2 \sin \frac{t}{2}}$ тоже убывает. Используя вторую теорему о среднем, получаем оценку

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\delta_k^{(m,\pm)}-x} \frac{h(x+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\left(n_{m_0} + \frac{1}{2} \right) t \right) dt \right| \\ & \leq \max_{\delta_k^{(m,\pm)}-x} \frac{h(x+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \frac{4}{n_{m_0} + \frac{1}{2}} \leq 4\alpha^{(m)} \frac{n_m + \frac{1}{2}}{n_{m_0} + \frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Если функция $h(x+t) \leq 0$ и возрастает, то, умножая $h(x+t)$ на -1 , получаем ту же оценку (17).

Если функция $h(x+t) \leq 0$ и убывает, то, записывая дробь $\frac{h(x+t)}{2 \sin \frac{t}{2}}$ в виде

$$\frac{h(x+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} = \frac{h(x+t) - H}{2 \sin \frac{t}{2}} + \frac{H}{2 \sin \frac{t}{2}},$$

где $H = \min_{\delta_k^{(m,\pm)}-x} h(x+t)$, снова сводим оценку интеграла (16) к использованию второй теоремы о среднем. В результате получаем оценку интеграла, как в (17), но с коэффициентом 8, а не 4. Случай, когда функция $h(x+t) \geq 0$ и возрастает, рассматривается аналогично. Таким образом, имеем

$$\left| \int_{\delta_k^{(m,\pm)}-x} \frac{h(x+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\left(n_{m_0} + \frac{1}{2} \right) t \right) dt \right| \leq 16\alpha^{(m)} \frac{n_m + \frac{1}{2}}{n_{m_0} + \frac{1}{2}}. \quad (18)$$

Используя (18), получаем

$$\left| \sum_{m=1}^{m_0-2} \sum_{k=1}^{l_m} \right| \leq 16 \sum_{m=1}^{m_0-2} l_m \alpha^{(m)} \frac{n_m + \frac{1}{2}}{n_{m_0} + \frac{1}{2}} \leq \frac{16\alpha^{(1)}}{n_{m_0-1}}. \quad (19)$$

Подставляя (19), (15), (14) и (13) в соотношение (12), для случая 1.2) окончательно получаем

$$|S_{n_{m_0}}(h, x)| \leq \frac{8\alpha^{(1)}}{n_{m_0-2}}. \quad (20)$$

1.4) $\mu = m_0 - 1$. Выражение (11) для $S_{n_{m_0}}(h, x)$ записываем в виде

$$S_{n_{m_0}}(h, x) = \frac{1}{\pi} \left(\sum_{m=1}^{m_0-2} \sum_{k=1}^{l_m} + \sum_{k=1}^{l_{m_0-1}} + \sum_{m=m_0}^{\infty} \sum_{k=1}^{l_m} \right) = \frac{1}{\pi} (\Sigma_{1.4.1} + \Sigma_{1.4.2} + \Sigma_{1.4.3}) \quad (21)$$

и оцениваем каждую из трех сумм отдельно.

Рассмотрим сумму $\Sigma_{1.4.2}$. Предположим сначала, что $0 \in \delta_{k_0}^{(m_0-1, \pm)} - x$ при некотором k_0 . Сумму $\Sigma_{1.4.2}$ представим в виде суммы двух слагаемых:

$$\begin{aligned} \Sigma_{1.4.2} &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^{l_{m_0-1}} \int_{\delta_k^{(m_0-1)} - x} f(x+t) D_{n_{m_0}}(t) dt + \int_{\delta_{k_0}^{(m_0-1)} - x} f(x+t) D_{n_{m_0}}(t) dt \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^{l_{m_0-1}} I_k^{(m_0-1)}(x) + I_{k_0}^{(m_0-1)}(x). \end{aligned} \quad (22)$$

Для последнего интеграла в (22) имеем

$$|I_{k_0}^{(m_0-1)}(x)| \leq \alpha^{(m_0-1)} \left(n_{m_0} + \frac{1}{2} \right) \frac{2\pi}{n_{m_0}} \leq 4\pi \alpha^{(m_0-1)}.$$

Для оценки интегралов $I_k^{(m_0-1)}(x)$ при $k \neq k_0$ отметим, что расстояние между соседними отрезками $\delta_{k'}^{(m, \pm)}$ и $\delta_{k''}^{(m, \pm)}$ больше, чем $\frac{\pi}{8n_m}$. Поэтому в этих интегралах $|\sin \frac{t}{2}| \geq \frac{|t|}{\pi} \geq \frac{1}{8n_{m_0-1}}$ и, значит,

$$\left| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^{l_{m_0-1}} I_k^{(m_0-1)}(x) \right| \leq l_{m_0-1} \alpha^{(m_0-1)} 8n_{m_0-1} \frac{2\pi}{n_{m_0}} \leq \frac{16\pi \alpha^{(m_0-1)}}{n_{m_0-2}} \leq \pi \alpha^{(m_0-1)}$$

при $m_0 \geq 3$. Подставляя найденные оценки в (22), получаем, что при $m_0 \geq 3$

$$\left| \sum_{k=0}^{l_{m_0-1}} \right| \leq \pi \alpha^{(m_0-1)}. \quad (23)$$

Пусть теперь нуль находится между двумя соседними отрезками $\delta_{k'}^{(m_0-1, \pm)}(x)$ и $\delta_{k''}^{(m_0-1, \pm)}(x)$. Интегралы $I_k^{(m_0-1)}(x)$ по этим отрезкам оцениваются так же, как интеграл $I_{k_0}^{(m_0-1)}(x)$ в (22), а остальные – как $I_k^{(m_0-1)}(x)$ при $k \neq k_0$. В результате получаем, что при $m_0 \geq 3$ выполнено (23).

Каждый интеграл в сумме $\Sigma_{1.4.3}$ оценивается с использованием неравенств $|D_{n_{m_0}}(t)| \leq n_{m_0} + \frac{1}{2}$ и $n_{m_0+1} \geq n_m^2$:

$$|\Sigma_{1.4.3}| \leq \sum_{m=m_0}^{\infty} \sum_{k=1}^{l_m} \frac{2\pi \alpha^{(m)}}{n_{m+1}} \left(n_{m_0} + \frac{1}{2} \right) \leq \frac{8\pi \alpha^{(m_0)}}{n_{m_0-1}}. \quad (24)$$

Интегралы в сумме $\Sigma_{1.4.1}$ оцениваются, как в случае $\mu = m_0 + 1$, с использованием второй теоремы о среднем:

$$\left| \int_{\delta_k^{(m, \pm)} - x} f(x+t) D_{n_m}(t) dt \right| \leq 8\alpha^{(m)} \frac{n_m}{n_{m_0}},$$

откуда получаем

$$|\Sigma_{1.4.1}| \leq \frac{16\alpha^{(1)}}{n_{m_0-1}} \sum_{m=1}^{m_0-2} \frac{1}{n_{m-1}} \leq \frac{8\alpha^{(1)}}{n_{m_0-1}} \quad (25)$$

при $m_0 \geq 2$. Объединяя (21)–(25), получаем, что при $m_0 \geq 3$

$$|S_{n_{m_0}}(h, x)| \leq C_4 \alpha^{(1)}, \quad (26)$$

где C_4 – абсолютная постоянная.

1.5) $\mu \leq m_0 - 2$. Частичную сумму $S_{n_{m_0}}(h, x)$ записываем в виде (см. (11))

$$S_{n_{m_0}}(h, x) = \frac{1}{\pi} \left(\sum_{m=\mu+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{l_m} + \sum_{k=1}^{l_{\mu}} + \sum_{m=1}^{\mu-1} \sum_{k=1}^{l_m} \right) = \frac{1}{\pi} (\Sigma_{1.5.1} + \Sigma_{1.5.2} + \Sigma_{1.5.3}).$$

При оценке суммы $\Sigma_{1.5.2}$ снова нужно рассмотреть два случая:

а) существует k_0 , для которого $0 \in \delta_{k_0}^{(\mu, \pm)} - x = [a, b]$;

б) точка $t = 0$ лежит между двумя соседними отрезками $\delta_{k'}^{(\mu, \pm)}(x)$ и $\delta_{k''}^{(\mu, \pm)}(x)$.

В случае а) каждый интеграл, входящий в сумму $\Sigma_{1.5.2}$, представим в виде

$$\int_{\delta_{k_0}^{(\mu, \pm)} - x} f(x+t) D_{n_{m_0}}(t) dt = \int_{[a_1, b_1]} + \int_{[a, b] \setminus [a_1, b_1]}, \quad (27)$$

где

$$[a_1, b_1] = [a, b] \cap \left[-\frac{\pi}{n_{m_0}}, \frac{\pi}{n_{m_0}} \right].$$

Первый из интегралов в (27) оценивается с использованием неравенства $|D_{n_{m_0}}(t)| \leq n_{m_0} + \frac{1}{2}$. Второй интеграл в (27) разбивается на два: по отрезкам $[a, a_1]$ и $[b_1, b]$, каждый из которых оценивается с помощью второй теоремы о среднем. В результате получим

$$|\Sigma_{1.5.2}| \leq (4\pi + 3)\alpha^{(\mu)}.$$

В случае б) интегралы по каждому отрезку $\delta_{k'}^{(\mu, \pm)} - x$ и $\delta_{k''}^{(\mu, \pm)} - x$ оцениваются так же, как интеграл по отрезку $\delta_{k_0}^{(\mu, \pm)} - x$ в случае а), интегралы по остальным отрезкам – с использованием второй теоремы о среднем, как в случае а). В результате получим

$$|\Sigma_{1.5.2}| \leq (4\pi + 5)\alpha^{(\mu)}. \quad (28)$$

При оценке суммы $\Sigma_{1.5.1}$ надо учесть, что правая граница отрезка $\delta_{l_m}^{(m, -)}(x)$ отстоит от точки $\frac{\pi}{n_{m-1} + \frac{1}{2}} - x$ на расстоянии, не меньшем, чем $\frac{\pi}{4(n_m + \frac{1}{2})}$. Поэтому

$$\left| \int_{\delta_k^{(m, \pm)} - x} f(x+t) D_{n_{m_0}}(t) dt \right| \leq \frac{\pi}{2} \alpha^{(m)} \int_{\delta_k^{(m, \pm)} - x} \frac{dt}{|t|} \leq 4\pi \alpha^{(m)} \frac{n_m}{n_{m+1}} \leq \frac{4\pi \alpha^{(m)}}{n_m},$$

значит, имеем

$$\begin{aligned} |\Sigma_{1.5.1}| &\leq \sum_{m=\mu+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{l_m} \frac{4\pi \alpha^{(m)} \alpha^{(m)}}{n_m} \leq \sum_{m=\mu+1}^{\infty} 4\pi \alpha^{(m)} \frac{l_m}{n_m} \\ &\leq 4\pi \alpha^{(\mu+1)} \sum_{m=\mu+1}^{\infty} \frac{1}{n_{m-1}} \leq \frac{8\pi \alpha^{(\mu+1)}}{n_{\mu}}. \end{aligned} \quad (29)$$

При оценке суммы $\Sigma_{1.5.3}$ необходимо учесть, что расстояние от отрезка $\delta_1^{(m,+)} - x$ до точки $\frac{\pi}{n_m + \frac{1}{2}} - x$ будет не меньше $\frac{\pi}{2(n_m + \frac{1}{2})}$. Аналогично предыдущему случаю получаем

$$\left| \sum_{k=1}^{l_m} \int_{\delta_k^{(m)} - x} f(x+t) D_{n_{m_0}}(t) dt \right| \leq \frac{\pi l_m \alpha^{(m)}}{2} \int_{\delta_k^{(m)} - x} \frac{dt}{t} \leq \frac{4\pi \alpha^{(m)}}{n_{m-1}},$$

значит, имеем

$$|\Sigma_{1.5.3}| \leq 4\pi \sum_{m=1}^{\mu-1} \frac{\alpha^{(m)}}{n_{m-1}} \leq 4\pi \alpha^{(1)} \frac{2}{n_0} = 2\pi \alpha^{(1)}. \quad (30)$$

Объединяя (30), (29) и (28), имеем неравенство

$$|S_{n_{m_0}}(h, x)| \leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{8\pi \alpha^{(\mu+1)}}{n_\mu} + (4\pi + 5)\alpha^{(\mu)} + 2\pi \alpha^{(1)} \right) \leq C_5 \alpha^{(1)}, \quad (31)$$

где C_5 – абсолютная постоянная.

Случаи 1.1), $\mu = m_0$, и 1.3), $\mu \geq m_0 + 2$, рассматриваются аналогично. В обоих случаях имеем

$$|S_{n_{m_0}}(h, x)| \leq 2\pi \alpha^{(1)}. \quad (32)$$

Объединяя (32), (31), (26) и (20), видим, что существует постоянная $C_6 > 0$ такая, что при всех x и при $m_0 \geq 3$

$$|S_{n_{m_0}}(h, x)| \leq C_6 \alpha^{(1)}.$$

Осталось рассмотреть случаи $0 > \frac{\pi}{n_0 + \frac{1}{2}} - x$ и $0 < \frac{\pi}{n_m + \frac{1}{2}} - x$ при всех $m \geq$

1. В случае $0 > \frac{\pi}{n_0 + \frac{1}{2}} - x$ надо учесть, что расстояние от отрезка $\delta_{l_m}^{(n_m)} - x$ до точки $\frac{\pi}{n_{m-1} + \frac{1}{2}} - x$ не меньше $\frac{\pi}{4(n_m + \frac{1}{2})}$. Так же, как при доказательстве неравенства (29), находим

$$|S_{n_{m_0}}(h, x)| \leq 4\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha^{(m)}}{n_{m-1}} \leq 4\pi \alpha^{(1)}. \quad (33)$$

Наконец, в случае $0 < \frac{\pi}{n_m + \frac{1}{2}} - x$ надо воспользоваться тем, что если $t \in \delta_k^{(m, \pm)} - x$, то $t > \frac{\pi}{2(n_m + \frac{1}{2})}$. В результате получаем

$$|S_{n_{m_0}}(h, x)| \leq 2\alpha^{(1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n_{m-1}} \leq \alpha^{(1)}.$$

Соединяя все рассмотренные случаи, мы видим, что нормы $S_{n_m}(h, x)$ равномерно ограничены на $[-\pi, \pi]$, а значит, и нормы $\|S_{n_m}(h, x)\|_{L(\varphi)}$ тоже равномерно ограничены. Это и означает, что нормы $\|S_{n_m}(f, x)\|_{L(\varphi)}$ неограничены.

Осталось проверить, что $f' \in \psi(L)$. На отрезках $\delta_k^{(m, \pm)}$ функция f есть многочлен третьей степени и $|f'(x)| \leq \frac{5}{4\pi} \alpha^{(m)} n_{m+1}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \psi(|f'(x)|) dx &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{l_m} \int_{\delta_k^{(m)}} \psi\left(\frac{5}{4\pi} \alpha^{(m)} n_{m+1}\right) dx \\ &\leq 2\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{l_m}{n_{m+1}} \psi\left(\frac{5}{4\pi} \alpha^{(m)} n_{m+1}\right). \end{aligned} \quad (34)$$

Поскольку $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 0$, то при фиксированном $\alpha^{(m)}$ значение n_{m+1} можно выбрать настолько большим, чтобы

$$\frac{\psi\left(\frac{5}{4\pi}\alpha^{(m)}n_{m+1}\right)}{\frac{5}{4\pi}\alpha^{(m)}n_{m+1}} \leq \frac{1}{m^2 l_m}.$$

В этом случае ряд в (34) сходится. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Прежде всего отметим, что если функция g ограничена, то

$$\|g\|_{L(\varphi)} \leq \frac{\|g\|_C}{\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2\pi}\right)}. \quad (35)$$

Запишем разность $S_n(f) - f$ в виде [1, с. 108]

$$\begin{aligned} S_n(f) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi_x(t) \frac{\sin(nt)}{t} dt - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi_x(t) h(t) \sin(nt) dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \Phi_x(t) \cos(nt) dt = I_{1,n}(f, x) - I_{2,n}(f, x) + I_{3,n}(f, x), \end{aligned}$$

где

$$\Phi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x), \quad h(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}}.$$

Функция $h(t) \geq 0$ на отрезке $[0, 2\pi]$ возрастает и выпукла на $[0, \pi]$. Кроме того,

$$h(0) = 0, \quad h(\pi) = \frac{1}{\pi}, \quad \frac{1}{12} \leq h'(t) \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}.$$

1) Оценим интеграл $I_{2,n}(f, x)$. Запишем его в виде

$$I_{2,n}(f, x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\frac{\pi}{n}}^{(k+1)\frac{\pi}{n}} \Phi_x(t) h(t) \sin(nt) dt.$$

В каждом внутреннем интеграле делаем замену $t = \frac{\xi + k\pi}{n}$. Получаем

$$I_{2,n}(f, x) = \frac{1}{\pi n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^\pi \Phi_x\left(\frac{\xi + k\pi}{n}\right) h\left(\frac{\xi + k\pi}{n}\right) \sin \xi d\xi. \quad (36)$$

Пусть сначала $n = 2m$ – четное число. В этом случае

$$\begin{aligned} I_{2,n}(f, x) &= \frac{1}{\pi n} \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^\pi \Phi_x\left(\frac{\xi + 2k\pi}{n}\right) \left[h\left(\frac{\xi + 2k\pi}{n}\right) - h\left(\frac{\xi + (2k+1)\pi}{n}\right) \right] \sin \xi d\xi \\ &\quad + \frac{1}{\pi n} \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^\pi \left[\Phi_x\left(\frac{\xi + 2k\pi}{n}\right) - \Phi_x\left(\frac{\xi + (2k+1)\pi}{n}\right) \right] \\ &\quad \times h\left(\frac{\xi + (2k+1)\pi}{n}\right) \sin \xi d\xi = \Sigma_{2,n,1} + \Sigma_{2,n,2}. \end{aligned} \quad (37)$$

Используя теорему Лагранжа для h , находим

$$|\Sigma_{2,n,1}| \leq \frac{4\pi}{n^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi^2} \right) m \|f\|_C \leq \frac{\pi}{2n} \|f\|_C.$$

С учетом (35) имеем

$$\|\Sigma_{2,n,1}\|_{L(\varphi)} \leq \frac{2\pi}{2n} \|f\|_C \frac{1}{\varphi^{-1}(\frac{1}{2\pi})}. \quad (38)$$

Из определения функции $\Phi_x(t)$ следует, что

$$\begin{aligned} & \left| \Phi_x\left(\frac{\xi + 2k\pi}{n}\right) - \Phi_x\left(\frac{\xi + (2k+1)\pi}{n}\right) \right| \\ & \leq \omega_{\frac{\pi}{n}}\left(f, x + \frac{\xi + 2k\pi}{n}\right) + \omega_{\frac{\pi}{n}}\left(f, x - \frac{\xi + 2k\pi}{n}\right), \end{aligned}$$

и поэтому

$$|\Sigma_{2,n,2}| \leq \frac{1}{\pi^2 n} \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^\pi \left[\omega_{\frac{\pi}{n}}\left(f, x + \frac{\xi + 2k\pi}{n}\right) + \omega_{\frac{\pi}{n}}\left(f, x - \frac{\xi + 2k\pi}{n}\right) \right] d\xi.$$

Выполняя в каждом внутреннем интеграле замену $\frac{\xi + 2k\pi}{n} = t$, приходим к неравенству

$$|\Sigma_{2,n,2}| \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \omega_{\frac{\pi}{n}}(f, x+t) dt + \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \omega_{\frac{\pi}{n}}(f, x-t) dt = I_{2,n,2}(f, x) + \tilde{I}_{2,n,2}(f, x). \quad (39)$$

Выберем $\gamma(x) \geq 0$ так, чтобы

$$\int_0^{2\pi} \varphi^*(\gamma(x)) dx \leq 1,$$

где φ^* — сопряженная к φ функция. По теореме Фубини

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \gamma(x) I_{2,n,2}(f, x) dx &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \gamma(x) \int_0^\pi \omega_{\frac{\pi}{n}}(f, x+t) dt dx \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \gamma(x) \omega_{\frac{\pi}{n}}(f, x+t) dx dt \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \|\omega_{\frac{\pi}{n}}(f, \cdot + t)\|_{L(\varphi)} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \|\omega_{\frac{\pi}{n}}(f)\|_{L(\varphi)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\|I_{2,n,2}(f)\|_{L(\varphi)} \leq \frac{1}{\pi} \|\omega_{\frac{\pi}{n}}(f)\|_{L(\varphi)}. \quad (40)$$

Аналогично,

$$\|\tilde{I}_{2,n,2}(f)\|_{L(\varphi)} \leq \frac{1}{\pi} \|\omega_{\frac{\pi}{n}}(f)\|_{L(\varphi)}. \quad (41)$$

Объединяя (37)–(41), получаем, что при четном n

$$\|I_{2,n}\|_{L(\varphi)} \leq \frac{\pi}{n} \|f\|_C \frac{1}{\varphi^{-1}(\frac{1}{2\pi})} + \frac{2}{\pi} \|\omega_{\frac{\pi}{n}}(f)\|_{L(\varphi)}.$$

Если $n = 2m + 1$ – нечетное число, то последнее слагаемое в (36) не превосходит $\frac{4\|f\|_C}{\pi n}$, а его норма в $L(\varphi)$ не превосходит $\frac{8\|f\|_C}{\pi n} \frac{1}{\varphi^{-1}(\frac{1}{2\pi})}$. Поэтому при любом $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\begin{aligned} \|I_{2,n}\|_{L(\varphi)} &\leq \frac{\|f\|_C}{n} \frac{1}{\varphi^{-1}(\frac{1}{2\pi})} \left(\pi + \frac{8}{\pi} \right) + \frac{2}{\pi} \|\omega_{\frac{\pi}{n}}(f)\|_{L(\varphi)} \\ &\leq \frac{C_7}{n} \|f\|_C + C_8 \|\omega_{\frac{\pi}{n}}(f)\|_{L(\varphi)}. \end{aligned} \quad (42)$$

2) Так же, как при оценке интеграла $I_{2,n}(f, x)$, получаем

$$\|I_{3,n}(f)\|_{L(\varphi)} \leq 2 \|\omega_{\frac{\pi}{n}}(f)\|_{L(\varphi)}. \quad (43)$$

3) Оценим интеграл $I_{1,n}(f, x)$. Запишем его в виде

$$I_{1,n}(f, x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^\pi \Phi_x \left(\frac{\xi + k\pi}{n} \right) \frac{\sin \xi}{\xi + k\pi} d\xi$$

и снова рассмотрим два случая: $n = 2m$ и $n = 2m + 1$.

Пусть $n = 2m$. Повторяя рассуждения, проводимые при получении равенства (37), имеем

$$\begin{aligned} I_{1,n}(f, x) &= 2 \int_0^\pi \sin \xi \sum_{k=0}^{m-1} \Phi_x \left(\frac{\xi + 2k\pi}{n} \right) \frac{d\xi}{(\xi + 2k\pi)(\xi + (2k+1)\pi)} \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin \xi \sum_{k=0}^{m-1} \left[\Phi_x \left(\frac{\xi + 2k\pi}{n} \right) - \Phi_x \left(\frac{\xi + (2k+1)\pi}{n} \right) \right] \frac{d\xi}{\xi + (2k+1)\pi} \\ &= I_{1,n,1}(f, x) + I_{1,n,2}(f, x). \end{aligned} \quad (44)$$

Оцениваем отдельно каждый из интегралов в (44).

Первый интеграл в (44) записываем в виде

$$\begin{aligned} I_{1,n,1}(f, x) &= 2 \int_0^\pi \sin \xi \sum_{k=0}^{[\sqrt{m-1}]} \Phi_x \left(\frac{\xi + 2k\pi}{n} \right) \frac{d\xi}{(\xi + 2k\pi)(\xi + (2k+1)\pi)} \\ &\quad + 2 \int_0^\pi \sin \xi \sum_{k=[\sqrt{m-1}]+1}^{m-1} \Phi_x \left(\frac{\xi + 2k\pi}{n} \right) \frac{d\xi}{(\xi + 2k\pi)(\xi + (2k+1)\pi)} \\ &= I_{1,n,1}^{(1)}(f, x) + I_{1,n,1}^{(2)}(f, x). \end{aligned} \quad (45)$$

Используя неравенство $|\Phi_x(\frac{\xi+2k\pi}{n})| \leq 4\|f\|_C$ для второго интеграла в (45), получаем оценку

$$|I_{1,n,1}^{(2)}(f, x)| \leq \frac{1}{\sqrt{m-1}} \frac{4\|f\|_C}{\pi}. \quad (46)$$

Первый интеграл в (45) записываем в виде

$$\begin{aligned}
 I_{1,n,1}^{(1)}(f, x) &= 2 \int_0^{\frac{1}{m}} (\sin \xi) \Phi_x \left(\frac{\xi}{n} \right) \frac{d\xi}{\xi(\xi + \pi)} \\
 &\quad + 2 \int_0^{\frac{1}{m}} \sin \xi \sum_{k=1}^{[\sqrt{m-1}]} \Phi_x \left(\frac{\xi + 2k\pi}{n} \right) \frac{d\xi}{(\xi + 2k\pi)(\xi + (2k+1)\pi)} \\
 &\quad + 2 \int_{\frac{1}{m}}^{\pi} \sin \xi \sum_{k=0}^{[\sqrt{m-1}]} \Phi_x \left(\frac{\xi + 2k\pi}{n} \right) \frac{d\xi}{(\xi + 2k\pi)(\xi + (2k+1)\pi)} \\
 &= I_{1,n,1,1}^{(1)}(f, x) + I_{1,n,1,2}^{(1)}(f, x) + I_{1,n,1,3}^{(1)}(f, x).
 \end{aligned} \tag{47}$$

Учитывая, что $\frac{\sin \xi}{\xi} \leq 1$, для первого интеграла в (47) находим

$$|I_{1,n,1,1}^{(1)}(f, x)| \leq \frac{1}{m} \frac{8\|f\|_C}{\pi}. \tag{48}$$

Для второго интеграла в (47) с учетом $\sin \xi \leq 1$ аналогично получаем

$$|I_{1,n,1,2}^{(1)}(f, x)| \leq \frac{1}{m} \frac{4\|f\|_C}{\pi^2}. \tag{49}$$

В последнем интеграле в (47) имеем $\frac{\xi + 2k\pi}{n} \leq \frac{2\pi}{\sqrt{m}}$, поэтому

$$\left| \Phi_x \left(\frac{\xi + 2k\pi}{n} \right) \right| \leq 2\omega_{\frac{2\pi}{\sqrt{m}}}(f, x).$$

Тогда

$$|I_{1,n,1,3}^{(1)}(f, x)| \leq 4\omega_{\frac{2\pi}{\sqrt{m}}}(f, x) \int_{\frac{1}{m}}^{\pi} \frac{d\xi}{\xi} = 4 \ln(\pi m) \omega_{\frac{2\pi}{\sqrt{m}}}(f, x). \tag{50}$$

Объединяя (45)–(50), получаем

$$\|I_{1,n,1}\|_{L(\varphi)} \leq \frac{48}{\sqrt{m}} \frac{\|f\|_C}{\varphi^{-1}(\frac{1}{2\pi})} + 4 \log(\pi m) \|\omega_{\frac{2\pi}{\sqrt{m}}}(f)\|_{L(\varphi)}. \tag{51}$$

Для оценки второго интеграла в (44) воспользуемся неравенством

$$\begin{aligned}
 \left| \Phi_x \left(\frac{\xi + 2k\pi}{n} \right) - \Phi_x \left(\frac{\xi + (2k+1)\pi}{n} \right) \right| &\leq \omega_{\frac{\pi}{n}} \left(f, x + \frac{\xi + (2k+1)\pi}{n} \right) \\
 &\quad + \omega_{\frac{\pi}{n}} \left(f, x - \frac{\xi + (2k+1)\pi}{n} \right).
 \end{aligned}$$

Имеем

$$|I_{1,n,2}(f, x)| \leq \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \omega_{\frac{\pi}{n}}(f, x+t) dt + \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \omega_{\frac{\pi}{n}}(f, x-t) dt.$$

Используя теорему Фубини и определение нормы $\|\cdot\|_{L(\varphi)}$, находим

$$\|I_{1,n,2}(f)\|_{L(\varphi)} \leq 2(\log n) \|\omega_{\frac{\pi}{n}}(f)\|_{L(\varphi)}. \tag{52}$$

Объединяя (51) и (52), в случае $n = 2m$ имеем

$$\|I_{1,n}(f)\|_{L(\varphi)} \leq C \left(\frac{\|f\|_C}{\sqrt{n}} + (\log n) \|\omega_{\frac{\pi}{n}}(f)\|_{L(\varphi)} + (\log \sqrt{n}) \|\omega_{\frac{2\pi}{\sqrt{2n}}}(f)\|_{L(\varphi)} \right), \quad (53)$$

где C зависит только от φ .

Если $n = 2m + 1$ — нечетное число, последнее слагаемое в $I_{1,n}(f, x)$ не превосходит $\frac{4\|f\|_C}{n-1}$, а его норма в $L(\varphi)$ не превосходит $\frac{8\|f\|_C}{n-1} \frac{1}{\varphi^{-1}(\frac{1}{2\pi})}$. Сумма предшествующих $2m$ слагаемых оценивается, как в (53), с заменой n на $n-1$. Объединяя эти оценки с неравенствами (42) и (43), окончательно имеем

$$\begin{aligned} \|S_n(f) - f\|_{L(\varphi)} &\leq \frac{C_{13}}{\sqrt{n}} \|f\|_C + C_{14} \|\omega_{\frac{\pi}{n}}(f)\|_{L(\varphi)} \\ &\quad + C_{15} \ln n \left(\|\omega_{\frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{n}}}(f)\|_{L(\varphi)} + \|\omega_{\frac{\pi}{n}}(f)\|_{L(\varphi)} \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть $\log \varphi(x) = x^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, при достаточно больших x , и пусть

$$\begin{aligned} n_m &= 2^{2^{m+1}}, \quad m = 0, 1, \dots; \\ a_k^{(m)} &= \frac{\pi}{n_m + \frac{1}{2}} \left(k + \frac{1}{2} \right), \quad b_k = \frac{\pi}{n_m + \frac{1}{2}} \left(k + \frac{3}{4} \right), \\ \Delta_k^{(m)} &= (a_k^{(m)}, b_k^{(m)}), \quad k = 1, 2, \dots, l_m, \quad l_m = \left[\frac{n_m + \frac{1}{2}}{n_{m-1} + \frac{1}{2}} \right] - 1, \quad m \geq 1. \end{aligned}$$

Зададим $g(x)$ равенствами

$$g(x) = \begin{cases} \alpha_k^{(m)}, & \text{если } x \in \Delta_k^{(m)}, \\ 0, & \text{если } x \notin \Delta_k^{(m)}, \end{cases}$$

где $\alpha_k^{(m)} = (-1)^k |\alpha_k^{(m)}|$, $|\alpha_k^{(m)}| = \alpha^{(m)} = (\log n_m)^{-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \beta_m$, $\varepsilon > 0$, $\beta_m \rightarrow 0$. Значения β_m определим позже.

На отрезках $\delta_k^{(m,+)}$ и $\delta_k^{(m,-)}$, определенных при доказательстве теоремы 1, заменим функцию g на линейную так, чтобы исправленная функция стала непрерывной. Обозначим полученную функцию через f . Оценим $\|\omega_\delta(f)\|_{L(\varphi)}$.

Выберем δ так, что

$$\frac{\pi}{n_{m+1} + \frac{1}{2}} \leq \delta < \frac{\pi}{n_m + \frac{1}{2}}.$$

Тогда:

- 1) если $x \in \left(-\frac{\pi}{n_m + \frac{1}{2}}, \frac{\pi}{n_{m-2} + \frac{1}{2}} \right)$, то $\omega_\delta(f, x) \leq \alpha^{(m-2)}$;
- 2) если

$$x \in \left[a_k^{(m-\nu)} - \delta, a_k^{(m-\nu)} + \frac{\pi}{n_{m-\nu+1}} + \delta \right] \cup \left[b_k^{(m-\nu)} - \frac{\pi}{n_{m-\nu+1}} - \delta, b_k^{(m-\nu)} + \delta \right],$$

где $3 \leq \nu \leq m-1$, то $\omega_\delta(f, x) \leq \frac{\alpha^{(m-\nu)}}{\pi} n_{m-\nu+1} \delta$;

- 3) $\omega_\delta(f, x) = 0$ в остальных точках.

Отсюда находим, что при $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \varphi\left(\frac{\omega_\delta(f, x)}{\lambda}\right) dx &\leq \frac{2\pi}{n_{m-2} + \frac{1}{2}} \varphi\left(\frac{\alpha^{(m-2)}}{\lambda}\right) \\ &+ 2 \sum_{\nu=3}^{m-1} \sum_{k=1}^{l_{m-\nu}} \left(\frac{\pi}{n_{m-\nu+1}} + 2\delta\right) \varphi\left(\frac{\alpha^{(m-\nu)}}{\lambda\pi} n_{m-\nu+1}\delta\right). \end{aligned}$$

Положим $\lambda = \frac{\alpha^{(m-2)}}{\varphi^{-1}\left(\frac{n_{m-2}}{4\pi}\right)}$, где φ^{-1} – обратная к φ функция. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \varphi\left(\frac{\omega_\delta(f, x)}{\lambda}\right) dx \\ \leq \frac{1}{2} + 2 \sum_{\nu=3}^{m-1} \sum_{k=1}^{l_{m-\nu}} \left(\frac{\pi}{n_{m-\nu+1}} + 2\delta\right) \varphi\left(\frac{\alpha^{(m-\nu)}}{\alpha^{(m-2)}} \frac{n_{m-\nu+1}}{\pi} \delta \varphi^{-1}\left(\frac{n_{m-2}}{4\pi}\right)\right). \end{aligned} \quad (54)$$

Отметим, что если $y > 1$, $0 < x < 1$, $xy < 1$, то $\varphi(x\varphi^{-1}(y)) \leq xy$. Поскольку

$$\frac{\alpha^{(m-\nu)}}{\alpha^{(m-2)}} \frac{n_{m-\nu+1}}{\pi} \delta \frac{n_{m-2}}{4\pi} \leq \frac{1}{4\pi} \frac{\alpha^{(1)}}{\alpha^{(m-2)}} \frac{1}{n_{m-1}} < 1,$$

то из (54) следует

$$\int_0^{2\pi} \varphi\left(\frac{\omega_\delta(f, x)}{\lambda}\right) dx \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=3}^{m-1} l_{m-\nu} \left(\frac{\pi}{n_{m-\nu+1}} + \frac{2\pi}{n_m}\right) \frac{\alpha^{(1)}}{\alpha^{(m-2)}} \frac{1}{n_{m-1}} \leq 1.$$

Поэтому

$$\|\omega_\delta(f)\|_{L(\varphi)} \leq \lambda = \frac{\alpha^{(m-2)}}{\varphi^{-1}\left(\frac{n_{m-2}}{4\pi}\right)}.$$

Учитывая, что $\varphi^{-1}(y) = (\log y)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$ и $\alpha^{(m)} = (\log n_m)^{-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \beta_m$, откуда получаем

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\log \frac{1}{\delta}\right) \|\omega_\delta(f)\|_{L(\varphi)} = 0.$$

Пусть теперь φ_1 – функция Орлича такая, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \varphi_1(x)}{\log \varphi(x)} = +\infty.$$

Повторяя рассуждения, приводимые при получении неравенства (8), находим, что существуют $C_{18} > 0$, $m_0 \in \mathbb{N}$ такие, что при всех $m \geq m_0$ и всех $x \in (0, \frac{\pi}{4(n_{m+1} + \frac{1}{2})})$ выполнено

$$|S_{n_m}(f, x)| \geq C_{16} \alpha^{(m)} \log l_m.$$

Тогда

$$\int_0^{2\pi} \varphi_1\left(\frac{|S_{n_m}(f, x)|}{\lambda}\right) dx \geq \frac{\pi}{4(n_{m+1} + \frac{1}{2})} \varphi_1\left(\frac{C_{16} \alpha^{(m)} \log l_m}{\lambda}\right).$$

Отсюда сразу находим, что

$$\|S_{n_m}(f)\|_{L(\varphi_1)} \geq \frac{C_{16}\alpha^{(m)} \log l_m}{\varphi_1^{-1}\left(\frac{4}{\pi}(n_m + \frac{1}{2})\right)} = \frac{C_{16}\alpha^{(m)} \log l_m}{\varphi^{-1}\left(\frac{4}{\pi}(n_m + \frac{1}{2})\right)} \frac{\varphi^{-1}\left(\frac{4}{\pi}(n_m + \frac{1}{2})\right)}{\varphi_1^{-1}\left(\frac{4}{\pi}(n_m + \frac{1}{2})\right)}.$$

Обозначим

$$\gamma_m = \frac{\varphi^{-1}\left(\frac{4}{\pi}(n_m + \frac{1}{2})\right)}{\varphi_1^{-1}\left(\frac{4}{\pi}(n_m + \frac{1}{2})\right)}.$$

Поскольку $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \varphi_1(x)}{\log \varphi(x)} = +\infty$, то $\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_m = +\infty$. Если теперь положим $\beta_m = \frac{1}{\sqrt{\gamma_m}}$, то

$$\|S_{n_m}(f)\|_{L(\varphi_1)} \geq C_{17}\sqrt{\gamma_m} \rightarrow +\infty.$$

Теорема доказана.

В заключение отметим, что остается открытым вопрос о том, можно ли в теореме 1 утверждать, что функция f дифференцируема всюду.

Список литературы

1. Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматлит, М., 1961.
2. R. Ryan, "Conjugate functions in Orlicz spaces", *Pacific J. Math.*, **13**:4 (1963), 1371–1377.
3. М. А. Красносельский, Я. Б. Рунтцкий, *Выпуклые функции и пространства Орлица*, Соврем. пробл. матем., Физматлит, М., 1958; англ. пер.: М. А. Krasnosel'skii, Ja. B. Rutickii, *Convex functions and Orlicz spaces*, Noordhoff, Groningen, 1961.
4. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, 2, Мир, М., 1965; пер. с англ.: A. Zygmund, *Trigonometric series*, vols. I, II, Cambridge Univ. Press, New York, 1959.
5. J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces. II. Function spaces*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, **97**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1979.
6. Sh. Chen, *Geometry of Orlicz spaces*, *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, **36**, Polish Acad. of Sciences, Warsaw, 1996.
7. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977; англ. пер.: L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Functional analysis*, Pergamon Press, Oxford, 1982.
8. Б. Сендов, В. Попов, *Усредненные модули гладкости*, Мир, М., 1988; пер. с болг.: B. Sendov, V. A. Popov, *Averaged moduli of smoothness*, B'lgarski Matematicheski Monografii, **4**, Izdatelstvo na B'lgarskata Akademiya na Naukite, Sofiya, 1983.

С. Ф. ЛУКОМСКИЙ (S. F. LUKOMSKIY)
Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет
E-mail: LukomskiiSF@info.sgu.ru

Поступило в редакцию
10.07.2006
26.06.2007