Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. О. Мантуров, Гомологии Хованова виртуальных узлов с произвольными коэффициентами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 5, 111–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/im1133>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 15:34:49

УДК 515

В. О. Мантуров

Гомологии Хованова виртуальных узлов с произвольными коэффициентами

Построено обобщение теории гомологий Хованова над произвольным кольцом коэффициентов для случая виртуальных узлов. Дано определение комплекса, гомотопически эквивалентного исходному комплексу Хованова в классическом случае, которое применимо и в виртуальном случае. Построение комплекса не использует дополнительной расстановки знаков на ребрах куба, в отличие от исходной конструкции Хованова. Метод, используемый в работе, позволяет также строить теорию гомологий Хованова для “скрученных виртуальных узлов” в смысле Бургуана и Виро (в частности, для узлов в трехмерном проективном пространстве). Получены обобщения различных результатов теории гомологий Хованова (комплекс Верли, проблемы минимальности, фробениусовы расширения) для виртуальных узлов с неориентируемыми атомами.

Библиография: 30 наименований.

§ 1. Введение

1.1. Виртуальные узлы. Виртуальные узлы были определены в середине 90-х годов прошлого века Л. Кауфманом [1]. *Виртуальной диаграммой* называется четырехвалентный граф на плоскости со следующей дополнительной структурой: каждый перекресток либо помечен как классический (и при этом указывается, какая пара противоположных ребер проходит выше, а какая – ниже), либо как виртуальный (в этом случае перекресток просто помечается кружком). Классические узлы, исходное определение которых топологическое, можно трактовать и комбинаторно: как классы эквивалентности плоских диаграмм относительно движений Рейдемейстера. *Виртуальные зацепления* – более общее понятие – определим как классы эквивалентности виртуальных диаграмм относительно обобщенных движений Рейдемейстера. Обобщенные движения Рейдемейстера состоят из классических движений Рейдемейстера (см., например, [2]) и движения объезда. Последнее представляет собой удаление дуги AB , содержащей только виртуальные перекрестки, и добавление другой дуги, соединяющей точки A и B ; при этом все пересечения и самопересечения, образуемые новой дугой, становятся виртуальными (рис. 1).

Далее мы будем пользоваться, в основном, комбинаторным определением виртуальных узлов, приведенным выше.

Отметим, что виртуальные узлы имеют и топологическую природу, как описано ниже.

Рис. 1. Движение объезда

Виртуальный перекресток не является ни проходом, ни переходом; его нужно понимать так, как будто две линии, его образующие, не пересекаются вообще, но в силу размерности они не могут разойтись на плоскости. С геометрической точки зрения виртуальные узлы получаются из узлов в “утолщенных поверхностях” $S_g \times \mathbb{R}$, где S_g – сфера с ручками; такие узлы были исследованы в работе [3]. Сфера с ручками не предполагается вложенной в трехмерное пространство.

При отображении ориентированной поверхности S_g в плоскость $\mathbb{R}^2$ утолщенная поверхность $S_g \times \mathbb{R}^1$ отображается в $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$. Будем при этом считать, что в окрестностях классических перекрестков отображение сохраняет ориентацию. Тогда классические перекрестки задают классические перекрестки, а виртуальные перекрестки возникают как дефекты проекции (когда разные точки диаграммы кривой на S_g проектируются в одну точку диаграммы на плоскости). Таких пересечений “как бы нет”, и линия, содержащая такие пересечения, может быть перенесена в произвольное место, что дает возможность формально определить виртуальные узлы с помощью абстрактных диаграмм (называемых *гауссовыми*). Классическими узлами являются узлы в утолщенной сфере. Это согласуется с тем фактом, что диаграммы зацеплений на S^2 , факторизованные по классическим движениям Рейдемейстера, задают классические зацепления так же, как и диаграммы на $\mathbb{R}^2$. Имея виртуальную диаграмму на плоскости, можно построить диаграмму на поверхности с ручками. Добавляя и убирая “пустые” ручки, не пересекающиеся с диаграммой, мы будем задавать тот же виртуальный узел. Важная теорема (см., например, [4]) состоит в том, что виртуальные узлы – это как раз узлы в утолщенных поверхностях, рассматриваемые с точностью до изотопий, а также гомеоморфизмов утолщенных поверхностей $S_g \times \mathbb{R}^1$, сохраняющих координату вдоль $\mathbb{R}^1$, и стабилизаций/дестабилизаций поверхностей. Ключевой является теорема Г. Куперберга [5] о том, что минимальный (по количеству ручек поверхности) представитель заданного класса виртуального узла единствен. Из этого следует, что классическая теория узлов является частью виртуальной теории узлов, т.е. если два классических узла эквивалентны как виртуальные узлы, то они эквивалентны как классические узлы (см. [2]).

1.2. Гомологии Хованова. Категорификация полинома Джонса, предложенная М. Ховановым (см. [6], а также [7], [8]), состоит в переходе от полиномов (Лорана) к группам гомологий комплексов биградуированных векторных про-

странств¹. В работе [6] каждой диаграмме зацепления ставится в соответствие биградуированный цепной комплекс; все группы гомологий этого комплекса являются инвариантами узла, при этом эйлерова характеристика (см. ниже) этого комплекса совпадает с полиномом Джонса.

Далее мы будем рассматривать биградуированные комплексы вида $\mathcal{C} = \bigoplus_{i,j} \mathcal{C}^{i,j}$ с высотой i и градуировкой j . Дифференциал ∂ в комплексе сохраняет градуировку и повышает высоту на единицу.

Для градуированного векторного пространства A определим его *градуированную размерность* qdim формулой

$$\text{qdim } A = \sum_j q^j \dim A^j,$$

где A^j – подпространство пространства A , порожденное всеми векторами градуировки j . Пространства цепей $\mathcal{C}^i$ заданной высоты i комплекса $\mathcal{C}$ являются такими градуированными пространствами.

Было бы более верно использовать термин *когомологии*, так как формально дифференциал увеличивает высоту на единицу, но мы будем использовать термин *гомологии Хованова* и вместо “коцепи”, “коциклы”, “кограницы” – “цепи”, “циклы”, “границы”.

Для биградуированных комплексов определены операции сдвига высоты и градуировки: $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}[k]\{l\}$, где $(\mathcal{C}[k]\{l\})^{i,j} = \mathcal{C}^{i-k,j-l}$. *Градуированной эйлеровой характеристикой* комплекса $\mathcal{C}^{i,j}$ называется альтернированная сумма градуированных размерностей пространств цепей, или, что эквивалентно, групп гомологий. Для пространств цепей мы имеем

$$\sum_i (-1)^i \text{qdim } \mathcal{C}^i = \sum_{i,j} (-1)^i q^j \dim \mathcal{C}^{i,j}.$$

1.3. Основной результат. В работах [9], [10] автор построил теорию гомологий Хованова для виртуальных зацеплений. Более точно, комплекс Хованова был определен лишь для диаграмм виртуальных зацеплений, которым соответствуют ориентируемые атомы; в общем случае (и для неориентируемых атомов также) комплекс Хованова был определен лишь над полем $\mathbb{Z}_2$, когда коммутативность граней куба совпадает с антикоммутативностью, и из этого вытекает тот факт, что квадрат дифференциала равен нулю. Атом (определение см. в п. 2.2), в частности его род, а также ориентируемость/неориентируемость, играет важную роль в построении и изучении свойств гомологий Хованова как классических, так и виртуальных узлов (при этом неориентируемость до сих пор являлась главным препятствием для построения общей теории). Для неориентируемых атомов в работе [10] были предложены две геометрические конструкции, переделывающие любое виртуальное зацепление в виртуальное зацепление, которому соответствует ориентируемый атом. Далее было показано, что гомологии Хованова полученного виртуального узла (зацепления) являются инвариантами исходного.

¹Далее мы, как правило, будем использовать термин *векторное пространство*, хотя приводимая в настоящей работе конструкция применяется в случае модуля над произвольной абелевой группой.

Основной трудностью, которая преодолена в настоящей работе, является определение дифференциала для комплексов, соответствующих произвольным виртуальным узлам, когда приходится проверять значительно больше случаев, чем для классических узлов. Первой ключевой идеей является следующая: при переходе от одного перекрестка узла к другому нужно менять базис алгебры Фробениуса, задающей гомологии Хованова тривиального узла. Вторая ключевая идея состоит в том, что вместо обычного тензорного произведения, соответствующего нескольким окружностям в некотором состоянии, мы берем *внешнее произведение* соответствующих градуированных пространств. Это избавляет нас от “искусственной” операции переделывания коммутативного куба в антикоммутативный, как это было сделано в [6], [10], [11].

Каждой диаграмме виртуального зацепления мы сопоставляем биградуированный комплекс, группы гомологий которого инвариантны при обобщенных движениях Рейдемейстера. Отметим некоторые важные свойства предлагаемой конструкции.

1. Комплекс строится с использованием атомов; он является инвариантным при так называемой виртуализации (см. определение на стр. 118) – преобразовании, которое меняет диаграмму виртуального узла, но не меняет соответствующего атома (и не меняет полинома Джонса соответствующего узла). Это доказано в лемме 1.

2. Существует естественное отображение из множества “скрученных виртуальных узлов” во множество виртуальных узлов по модулю виртуализации. Поэтому приведенный выше подход приводит к инвариантам скрученных виртуальных узлов. Частным случаем скрученных виртуальных узлов (узлов в ориентированных утолщениях неориентируемых двумерных поверхностей с точностью до стабилизации) являются узлы в проколотом трехмерном проективном пространстве. Таким образом, предложенная теория приводит к построению гомологий Хованова и для узлов в $\mathbb{R}P^3$.

3. В случае коэффициентов над полем $\mathbb{Z}_2$ комплекс в точности совпадает с комплексом, построенным в [9].

4. Для ориентируемых атомов (в частности, для классических узлов) этот комплекс имеет те же гомологии, что и комплекс, построенный в [10].

5. Доказательство инвариантности гомологий является локальным, оно повторяет доказательство инвариантности в классическом случае (см., например, [11]); главная трудность состоит в корректном определении дифференциала – таком подборе знаков, при котором куб становится антикоммутативным. Эта трудность преодолевается посредством построения нового комплекса, гомотопически эквивалентного исходному комплексу Хованова.

1.4. Дальнейшие свойства гомологий Хованова. Замечательным свойством гомологий Хованова является их *функториальность*, которая состоит в следующем. Каждый кобордизм в $\mathbb{R}^3 \times I$ между двумя зацеплениями $K_1 \subset \mathbb{R}^3 \times \{0\}$ и $K_2 \subset \mathbb{R}^3 \times \{1\}$ порождает некоторое естественное отображение гомологий Хованова $\text{Kh}(K_1) \rightarrow \text{Kh}(K_2)$, которое является инвариантным (с точностью до знака) при изотопии кобордизма между зацеплениями K_1 и K_2 .

Функториальность теории гомологий Хованова (с точностью до знака) была доказана Якобсоном [12]. В работе [13] приведено более простое доказательство этого факта для более широкой топологической теории.

Можно считать [13], что сам комплекс Хованова строится из комплексов элементарных кобордизмов, которые, в свою очередь, состоят из элементарных комплексов – окружностей. Эта теория является топологическим аналогом алгебраической теории, описанной выше: объектами категории являются наборы окружностей – тривиальные узлы, а морфизмами – кобордизмы.

Имеется еще одно определение гомологий Хованова [7]. Оно состоит в следующем. Вместо подсчета количества окружностей в каждом состоянии рассматриваются два состояния фрагмента диаграммы — окрестности перекрестка. Каждому такому фрагменту сопоставляется алгебраический объект, называемый *матричной факторизацией* с некоторым *потенциалом*. Эти матричные факторизации позволяют построить (путем многократных тензорных произведений и свертков) формальный цепной комплекс, гомологии которого инвариантны относительно движений Рейдемейстера. Эта замечательная конструкция принадлежит М. Хованову и Л. Розанскому. Впоследствии она была развита ими же для категорификации полинома HOMFLY. При этом исследуемая “сеть не обязана быть планарной, и не предполагается, что она куда-нибудь вложена. В нашей работе все такие диаграммы предполагаются планарными” (см. [7, с. 32]). Из этого замечания вытекает, что конструкция Хованова–Розанского (не только в случае обычных гомологий Хованова, которые называются также $sl(2)$ -гомологиями, но и в общем случае, представляющем собой категорификацию полинома HOMFLY) допускает обобщение на случай виртуальных узлов.

При этом в работе [7] не утверждается (и, тем более, не доказано), что $sl(2)$ -теория Розанского–Хованова изоморфна обычной теории гомологий Хованова, в которой цепи и дифференциалы описываются перестройкой окружностей с двумерной алгеброй на каждой из них. В настоящей работе мы представляем явную конструкцию гомологий Хованова для виртуальных узлов, т.е. описываем цепи и дифференциалы посредством перестроек окружностей.

Заметим, что построенная нами явно теория гомологий Хованова обладает рядом важных свойств. В частности, гомологии Хованова инвариантны при виртуализациях, из чего следует то, что эти гомологии восстанавливаются по “атому”, соответствующему диаграмме виртуальных узлов. Это приводит к теории гомологий Хованова для “скрученных виртуальных узлов” в смысле Виро [14], частным случаем которых являются узлы в трехмерном проективном пространстве $\mathbb{RP}^3$.

Отметим, что скобка Кауфмана для узлов в $\mathbb{RP}^3$ была построена в работе [15].

Кроме того, эта теория допускает различные обобщения, построенные ранее для обычных гомологий Хованова: теория Ле, затягивающее дерево Верли и Кофмана–Чампанеркара и др.

§ 2. Скобка Кауфмана и полином Джонса. Атомы. Перекрученные виртуальные узлы

2.1. Скобка Кауфмана. Рассмотрим ориентированную виртуальную диаграмму L и неориентированную диаграмму $|L|$, получаемую из L забыванием ориентации. Сгладим все классические перекрестки диаграммы $|L|$ согласно одному из способов: $A: \bigcirc \times \bigcirc \rightarrow \bigcirc \bigcirc$ или $B: \bigcirc \times \bigcirc \rightarrow \bigcirc \bigcirc$.

Состоянием называется выбор сглаживания для всех классических перекрестков диаграммы. Каждое состояние задает набор кривых на плоскости, имеющих между собой только виртуальные перекрестки, т.е. некоторую диаграмму тривиального виртуального зацепления. Обозначим количество классических перекрестков диаграммы L через n . Перенумеруем их произвольным образом. Мы получим 2^n состояний, находящихся во взаимно однозначном соответствии с вершинами n -мерного дискретного куба $\{0, 1\}^n$, у которого 0 и 1 соответствуют A -сглаживаниям и B -сглаживаниям соответственно. Назовем этот куб *кубом состояний* диаграммы. Назовем два состояния *соседними*, если они отличаются лишь в одной координате. Любые две соседние вершины куба соединяются ребром. Ориентируем все ребра куба в направлении увеличения соответствующей координаты, т.е. от сглаживания типа A к сглаживанию типа B . Назовем *высотой* вершины куба количество сглаживаний типа B в соответствующем состоянии.

Каждое ребро задает перестройку некоторого состояния куба в соседнее; эти два состояния отличаются в одном перекрестке. Отметим, что бывает три разных типа ребер, в зависимости от того, как изменяется количество окружностей в состоянии. Это количество может уменьшиться на единицу (в этом случае мы говорим о перестройке типа $2 \rightarrow 1$, так как локально в данном перекрестке две окружности перестраиваются в одну), может увеличиться на единицу (в этом случае имеет место перестройка типа $1 \rightarrow 2$) или может не измениться (перестройка $1 \rightarrow 1$). Последняя перестройка представляет собой особый случай, который может иметь место только в случае виртуальных узлов. Его рассмотрение приводит к серьезным трудностям, которые преодолеваются в настоящей работе.

Перестройки типа $2 \rightarrow 1$ и $1 \rightarrow 2$ в комплексе Хованова будут (см. § 4) соответствовать *частичным дифференциалам* ∂' , из которых составляется дифференциал ∂ (см. далее); перестройка $2 \rightarrow 1$ соответствует умножению m в векторных пространствах, соответствующих окружностям, а перестройка $1 \rightarrow 2$ – коумножению Δ .

Для каждого состояния s обозначим через $\alpha(s)$ число A -сглаживаний, и пусть $\beta(s) = n - \alpha(s)$ – число B -сглаживаний, а $\gamma(s)$ – число компонент зацепления в соответствующем состоянии. Тогда *полином Джонса* определяется следующим образом:

$$X(L) = (-a)^{-3w(L)} \sum_s a^{\alpha(s)-\beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s)-1}, \quad (1)$$

где $w(L)$ – число закрученности ориентированной диаграммы L (разность между числом положительных перекрестков и числом отрицательных перекрестков).

Ненормированная версия полинома Джонса $\sum_s a^{\alpha(s)-\beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s)-1}$ называется *скобкой Кауфмана*. Скобка Кауфмана, как и полином Джонса, представляет собой полином Лорана от одной переменной. Полином Джонса является инвариантным при (обобщенных) движениях Рейдемейстера [1].

В результате замены переменной $a = \sqrt{-q^{-1}}$ мы получаем вместо полинома Джонса X его модифицированную версию J . Рассмотрим также полином $\hat{J} = J \cdot (q + q^{-1})$. Более подробно $\hat{J}$ определяется следующим образом. Пусть L – ориентированная виртуальная диаграмма, и пусть $|L|$ – соответствующая неориентированная виртуальная диаграмма; обозначим через n_+ и n_- количества положительных и отрицательных перекрестков диаграммы L ; пусть $n = n_+ + n_-$. Тогда имеем

$$\hat{J}(L) = (-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-} \langle L \rangle, \quad (2)$$

где $\langle L \rangle$ – модифицированная скобка Кауфмана, определяемая аксиоматически по правилу

$$\langle \bigcirc \rangle = (q + q^{-1}), \quad \langle L \rangle = \langle L_A \rangle - q \langle L_B \rangle, \quad \langle L \sqcup \bigcirc \rangle = (q + q^{-1}) \cdot \langle L \rangle$$

(здесь L_A и L_B – диаграммы, получающиеся разведением диаграммы L способами A и B в некотором фиксированном перекрестке).

Далее будем использовать полином $\hat{J}$ и называть его *полиномом Джонса*.

Полином $\hat{J}$ имеет следующее концептуально важное описание в терминах куба состояний. Вынося за скобку нормирующий множитель $(-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-}$, мы получаем (слегка модифицированную) скобку Кауфмана $\sum_s (-q)^{\beta(s)} (q + q^{-1})^{\gamma(s)}$, т.е. мы берем сумму по всем вершинам куба мономов $(-q)$ в степени, равной *высоте вершины*, умноженных на $q + q^{-1}$ в степени, равной количеству окружностей в соответствующем состоянии.

Таким образом, для вычисления полинома необходимо сопоставить каждой окружности полином Лорана $q + q^{-1}$, а затем перемножить эти полиномы, взятые с некоторыми коэффициентами, равными $\pm q^k$, и сложить.

Следовательно, полином Джонса восстанавливается по информации о *количестве* окружностей в каждом из состояний куба. Если мы будем учитывать то, *как эти окружности перестраиваются* при переходе от одного состояния к соседнему, мы сможем построить комплекс Хованова.

2.2. Атомы. Оказывается, что вся необходимая для вычисления полинома Джонса информация содержится в атоме, соответствующем виртуальной диаграмме.

Атомом (это понятие изначально введено А. Т. Фоменко в [16]) называется пара (M, Γ) , где M – замкнутое двумерное многообразие и $\Gamma \subset M$ – четырехвалентный граф (называемый *остовом*), разбивающий M на черные и белые клетки, которые задают шахматную раскраску. Атомы рассматриваются с точностью до естественной комбинаторной эквивалентности – диффеоморфизмов

Рис. 2. Два варианта виртуализации

соответствующих двумерных многообразий, переводящих остов в остов и сохраняющих раскраску клеток.

Вершинами атома называются вершины его второй компоненты, а *родом* атома – род его первой компоненты.

Сопоставим каждой виртуальной диаграмме L атом $V(L)$ следующим образом. Вершины атома $V(L)$ находятся в однозначном соответствии с *классическими* перекрестками диаграммы L . Эти классические перекрестки соединяются *ветвями диаграммы*, которые могут пересекаться (и самопересекаться) в виртуальных перекрестках. В каждом классическом перекрестке мы имеем четыре исходящих ветви. Этим ветвям мы сопоставим четыре ребра атома, соединяющие соответствующие вершины. Правило приклейки черных (соответственно белых) клеток определяется диаграммой L . А именно, пусть X – классический перекресток диаграммы L . Перенумеруем исходящие ребра по часовой стрелке x_1, x_2, x_3, x_4 так, чтобы локально ребра, соответствующие x_1 и x_3 , образовывали проход, а x_2 и x_4 – переход. Тогда для приклейки черных клеток мы локально выбираем пары полуребер атома (x_1, x_2) и (x_3, x_4) .

Понятно, что вся информация о количестве окружностей в состояниях диаграммы может быть получена из атома. Иными словами, куб состояний восстанавливается по атому.

Родом $g(L)$ диаграммы виртуального зацепления L называется род соответствующего атома. В случае диаграмм, которым соответствуют неориентируемые атомы, род может быть полуцелым. Актуальной является задача нахождения *рода виртуального зацепления* – минимального значения рода диаграмм, представляющих данное зацепление. Из определения следует, что диаграммы классических зацеплений, имеющие род нуль, представляют собой связные суммы альтернирующих диаграмм.

Назовем *виртуализацией* локальное преобразование в окрестности классического перекрестка, имеющее вид такой, как показано на рис. 2. Отметим, что виртуализация не изменяет куба состояний. Кроме того, две диаграммы, имеющие изоморфные атомы, могут быть получены друг из друга последовательным применением объездов и виртуализаций (см., например, [2]).

Мы будем строить комплекс Хованова, исходя из виртуальной диаграммы. При этом мы покажем, что гомологии соответствующего комплекса на самом деле инвариантны относительно виртуализации (и, следовательно, восстанавливаются по атому). Это согласуется со следующей гипотезой, выдвинутой

в работе [17]: если классическая диаграмма L может быть получена из классической диаграммы L' применением цепочки обобщенных движений Рейдемейстера и виртуализаций, то классические зацепления L и L' изотопны². Из сказанного выше следует, что соответствующие зацепления имеют изоморфные гомологии Хованова.

В дальнейшем мы будем называть эту гипотезу *гипотезой о виртуализации*.

2.3. Скрученные виртуальные узлы. Скрученные виртуальные узлы [14], [18] являются обобщением виртуальных узлов. Они задаются узлами в ориентированных утолщениях двумерных поверхностей (не обязательно ориентируемых) и рассматриваются с точностью до стабилизации.

Частным случаем теории скрученных узлов является теория узлов в $\mathbb{R}P^3$. Действительно, рассмотрим неориентируемую поверхность S и построим расслоение над ней со слоем отрезок и ориентированным тотальным пространством. Оно будет представлять собой трехмерное многообразие $S \tilde{\times} I$ с краем.

Хорошим примером такой утолщенной поверхности является $\mathbb{R}P^2 \tilde{\times} I$, что гомеоморфно $\mathbb{R}P^3 \setminus \{*\}$. Таким образом, в виде частного случая мы получим теорию гомологий Хованова для узлов в $\mathbb{R}P^3$.

Пусть S – поверхность и $\mathcal{S} = S \tilde{\times} I$ – ее утолщение. Тогда зацепления в $\mathcal{S}$ можно рассматривать посредством их диаграмм – проекций на S .

Существуют два вида стабилизации/дестабилизации узлов в таких утолщенных поверхностях: вдоль ориентируемых циклов и вдоль неориентируемых циклов. Во втором случае к поверхности добавляется/удаляется пустая утолщенная пленка Мёбиуса.

В общем положении такая проекция задает некоторый четырехвалентный граф. Для восстановления зацепления необходимо указать поведение двух ветвей узла в окрестности каждой вершины графа. При этом мы не имеем глобально корректно определенного направления вверх: при проходе вдоль неориентирующего пути направление вверх сменяется направлением вниз. Поэтому понятия “проход” и “переход” нужно считать условными. Однако можно придать им и безусловный смысл, взяв некоторую аффинную карту, покрывающую всю двумерную поверхность, кроме некоторой одномерной ее части. На аффинной карте канонически зададим направление вверх. При этом при переходе через границу направление может меняться в зависимости от ориентируемости соответствующего пути. Так, например, узлы в $\mathbb{R}P^3 \setminus * = \mathbb{R}P^2 \tilde{\times} I$ могут быть заданы диаграммами на $\mathbb{R}P^2$, все перекрестки которых находятся внутри круга $D^2 \subset \mathbb{R}P^2$; при переходе через границу круга направление меняется (рис. 3).

Заметим, что узлы в таких поверхностях хорошо описываются атомами. Действительно, фиксируем ориентацию утолщенной поверхности $S \tilde{\times} I$. Далее, для диаграммы зацепления в S мы имеем остов атома – четырехвалентный граф со структурой противоположных полуребер в каждом перекрестке.

Способ приклейки черных клеток следующий. Для каждой вершины X атома рассмотрим два исходящих из нее не противоположных полуребра a и b .

²Отметим, что если две классические диаграммы являются виртуально эквивалентными, то они эквивалентны в обычном смысле; это следует, например, из теоремы Куперберга [5].

Рис. 3. Ветвь AB образует переход на левой картинке и проход на правой

Рис. 4. Построение атома по диаграмме

В окрестности вершины X выберем небольшой вектор, направленный от ребра a к ребру b . Если теперь базис (a, b, c) из трех векторов задает локально выбранную нами ориентацию трехмерного многообразия, то мы скажем, что угол, порожденный полуредрами a и b , должен быть белым, как и противоположный ему угол. Оставшиеся два угла объявляются черными. В противном случае угол между a и b определяется как черный (для приклейки черной клетки).

Отметим, что этот выбор не зависит ни от пары (a, b) , ни от порядка полуребер a, b . Это приводит к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. *Существует корректно определенное отображение из множества скрученных виртуальных узлов во множество виртуальных узлов, рассмотренных с точностью до виртуализации.*

Узлы в таких поверхностях рассматривались в работе [19], а также [14]. В работе [19] была построена теория гомологий Хованова для узлов в таких поверхностях, которая существенно опиралась на дополнительную топологическую информацию, использующую топологию поверхности.

Из теоремы 1 и инвариантности гомологий Хованова относительно виртуализации (см. далее лемму 1) непосредственно следует, что теория гомологий Хованова для виртуальных узлов, построение которой мы начинаем, обобщается на скрученные виртуальные узлы.

Рис. 5. Виртуальный узел и его гауссова диаграмма

§ 3. Гауссовы диаграммы и гипотеза о виртуализации

Виртуальные узлы представляют собой обобщение классических узлов или приближение к классическим узлам. Так, ко многим задачам, которые до сих пор остаются нерешенными в классической теории узлов, давно были найдены контрпримеры в теории виртуальных узлов (например, задача об узле с тривиальным полиномом Джонса).

Как виртуальные узлы, так и классические узлы кодируются гауссовыми диаграммами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Гауссовой диаграммой*, соответствующей плоской диаграмме (виртуального) узла K , называется диаграмма, состоящая из ориентированной окружности (с фиксированной точкой), на которой прообразы прохода и перехода (для каждого перекрестка) соединены хордами. Прообразы каждого классического перекрестка соединены стрелкой, которая направлена от прообраза перехода к прообразу прохода. Каждая хорда (стрелка) снабжена знаком, который совпадает со знаком перекрестка, т.е. равен 1 для и -1 для .

Заметим, что прообразы виртуальных перекрестков не обозначаются на гауссовой диаграмме. Это согласуется с определением движения объезда: две плоские диаграммы задают одну и ту же гауссову диаграмму тогда и только тогда, когда одна получается из другой последовательным применением движения объезда.

Если заданная гауссова диаграмма с мечеными стрелками реализуема диаграммой классического узла, то она однозначно определяет некоторый классический узел.

Если имеется нереализуемая диаграмма, то вместо вложения можно рассмотреть *погружение* диаграммы в $\mathbb{R}^2$. Разумеется, мы имеем в виду только “хорошие” погружения без тройных точек и касаний. При погружении мы будем сопоставлять виртуальные перекрестки пересечениям образов ребер, а классические перекрестки – образам перекрестков (рис. 5).

Таким образом, мы построили виртуальную диаграмму узла по гауссовой диаграмме (возможно, неоднозначно).

ТЕОРЕМА 2 [20]. *Класс изотопий виртуального узла однозначно определен его гауссовой диаграммой.*

Если гауссова диаграмма *реализуема* (классическим узлом), то, как нетрудно заметить, тип узла восстанавливается по знакам на хордах гауссовой диаграммы (без указания стрелок). В виртуальном случае, когда мы рассматриваем уже не вложения, а погружения, это не так: замена стрелки на противоположную приводит к виртуализации.

Таким образом, гипотеза о виртуализации в терминах гауссовых диаграмм приобретает следующее звучание.

Рассмотрим множество всех гауссовых диаграмм без стрелок, факторизованное по формальным соотношениям, соответствующим движениям Рейдемейстера.

Верно ли, что подмножество данного фактормножества, соответствующее реализуемым гауссовым диаграммам, однозначно соответствует множеству всех классических узлов?

Если это верно, то для работы с классическими узлами можно использовать более простой объект, чем гауссовы диаграммы: гауссовы диаграммы без стрелок.

Отметим, что гауссовы диаграммы (реализуемые и нереализуемые) использовались в работе [20] для доказательства существования комбинаторных формул для инвариантов Васильева классических узлов. Эти комбинаторные формулы выражались в терминах гауссовых диаграмм (как реализуемых, так и нереализуемых).

В связи с этим возникает вопрос: существуют ли явные комбинаторные формулы для гауссовых диаграмм без стрелок? По крайней мере можно искать такие формулы для инвариантов Васильева, инвариантных относительно виртуализации, например инвариантов, происходящих из полинома Джонса для виртуальных узлов (см. [1]).

§ 4. Определение комплекса Хованова для виртуальных узлов

Нашей целью является построение теории гомологий (с произвольными коэффициентами) для виртуальных узлов такой, что:

- 1) гомологии должны быть инвариантными относительно (обобщенных) движений Рейдемейстера;
- 2) в случае узлов, которым соответствуют ориентируемые атомы, гомологии изоморфны гомологиям Хованова, построенным в [10];
- 3) тензорное произведение нашего комплекса на $\mathbb{Z}_2$ дает гомологии, построенные в [9].

В работе [10] была построена теория гомологий Хованова (с произвольными коэффициентами) для виртуальных узлов, которым соответствуют ориентируемые атомы. Основным препятствием в случае неориентируемых атомов является возможность перестройки типа $1 \rightarrow 1$ вдоль ребра куба.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В настоящей работе роль кольца коэффициентов может играть любая абелева группа с единицей, например $\mathbb{Z}$. Соответствующие комплексы с коэффициентами в произвольном кольце $\mathcal{R}$ получаются тензорным умножением всего комплекса на $\mathcal{R}$.

Определим V как двумерный градуированный модуль над $\mathcal{R}$, свободно порожденный элементами v_+ и v_- градуировок $+1$ и -1 соответственно.

Если перестроек типа $1 \rightarrow 1$ не возникает, можно построить куб состояний с использованием обычных дифференциалов, соответствующих умножению m (для перестроек типа $2 \rightarrow 1$) и коумножению Δ (для перестроек типа $1 \rightarrow 2$) согласно [11].

Наличие перестроек типа $1 \rightarrow 1$ (существенный феномен теории виртуальных узлов, возникающий именно в связи с неориентируемостью атома) усложняет проблему. Действительно, для построения биградуированной теории (без привнесения новой градуировки в основное кольцо) необходимо построить отображение из V в V , понижающее градуировку на единицу (так как затем мы компенсируем это изменение градуировки, повышая ее на единицу). В пространстве V базис состоит из двух элементов градуировки $+1$ и -1 . Поэтому единственное отображение, удовлетворяющее описанным выше условиям, является нулевым. При этом необходимо проверить антикоммутативность получающегося куба (мы будем называть его кубом перестроек). Оказывается, что в случае поля коэффициентов $\mathbb{Z}_2$ нулевое отображение типа $1 \rightarrow 1$ сразу приводит к теории гомологий Хованова [9]; при этом в общем случае (над $\mathbb{Z}$) нужно проверять совместимость некоторых уравнений (которые, как будет видно далее, связаны с некоторыми атомами, имеющими две вершины). Без дополнительных предположений такая теория построена не была.

В настоящей работе для решения этой проблемы мы привлечем две дополнительные конструкции: замена базиса в алгебре Фробениуса $(1, X)$, являющейся группой гомологий тривиального зацепления, при переходе от одного перекрестка к другому, а также использование внешней степени “окружностей” вместо их симметрической степени.

Введем следующие обозначения. Пусть дан неупорядоченный набор векторных пространств. Упорядочим их произвольным образом: $V_1, \dots, V_n$.

Определим новое пространство, не зависящее от порядка, которое будем обозначать³ через $V_1 \wedge V_2 \wedge \dots \wedge V_n$, следующим образом. Рассмотрим всевозможные тензорные произведения этих пространств и отождествим их элементы согласно следующему правилу. Пусть $x_i \in V_i$, $i = 1, \dots, n$. Положим $x_{\sigma_1} \otimes \dots \otimes x_{\sigma_n} = \text{sign}(\sigma) x_1 \otimes \dots \otimes x_n$.

Мы будем обозначать такое тензорное произведение $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ элементов $x_i \in V_i$ через $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$ и называть *упорядоченным тензорным произведением*.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Чтобы избежать путаницы, заметим, что когда мы пишем $X \wedge X$, мы всегда имеем в виду, что первый элемент X и второй элемент X

³В случае совпадения пространств $V = V_1 = \dots = V_n$ мы будем использовать также обозначение $V^{\wedge n}$.

принадлежат разным (пусть даже изоморфным) пространствам. Таким образом, $X \wedge X$ не равно нулю (в отличие от внешних произведений 1-форм на себя).

Для того чтобы куб перестроек был антикоммутативным, необходимо добавить два следующих составляющих.

1. Каждой окружности C в каждом состоянии мы сопоставляем векторное пространство⁴ градуированной размерности $q + q^{-1}$. А именно, пусть дана ориентация o некоторой окружности C в некотором состоянии, сопоставим этой окружности градуированное векторное пространство, порожденное элементами 1 и $X_{C,o}$. При замене ориентации o окружности на противоположную $-o$ мы имеем $X_{C,-o} = -X_{C,o}$.

2. Пусть дано состояние s диаграммы виртуального зацепления с k окружностями $C_1, \dots, C_k$ в нем, этому состоянию мы сопоставим упорядоченное тензорное произведение $V^{\wedge k}$, в качестве базиса этого произведения выберем тензорные произведения $(p^1)_{C_{a_1}} \wedge (p^2)_{C_{a_2}} \wedge \dots \wedge (p^k)_{C_{a_k}}$, где $(p^i)_{C_{a_i}}$ – элемент базиса пространства $V_{C_{a_k}}$.

Таким образом, мы определили пространство цепей комплекса, соответствующего узлу K , которое мы обозначим через $[[K]]$. Все элементы этого пространства соответствуют состояниям диаграммы $|K|$. Пусть s – состояние диаграммы K с набором окружностей $C_1, \dots, C_l$, при этом на данных окружностях выбраны элементы $\gamma_1, \dots, \gamma_l$. Тем самым задана цепь комплекса $[[K]]$. Этой цепи сопоставляем высоту h , где h – количество разведений типа B в состоянии s , и градуировку, равную $h + \#1 - \#X$, где $\#1$ – количество элементов 1 среди $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ и $\#X$ – количество элементов $\pm X$ среди этих элементов.

Нашей следующей целью является описание действия дифференциала ∂ на данном комплексе, который повышал бы высоту на единицу и не менял градуировки.

Введем определение частных дифференциалов. Будем смотреть на классические перекрестки таким образом, чтобы их ветви были ориентированы снизу вверх.

Рассмотрим некоторое состояние диаграммы ориентированного виртуального зацепления. Выберем классический перекресток и рассмотрим все окружности, ему инцидентные. Фиксируем ориентации этих окружностей согласно ориентации ребра, исходящего в направлении направо вверх и против ориентации ребра, входящего в перекресток слева снизу (рис. 6).

Таким образом, ориентация этих окружностей согласуется локально с ориентацией ребра, исходящего локально в направлении направо вверх (а также ребра, входящего справа снизу) и противоположно направлению ребер с левой стороны перекрестка. Мы ориентируем полуребра, инцидентные перекрестку, так, как указано в левой нижней части рис. 6; скажем, что ориентация окружности в некотором состоянии является *положительной* (в данном перекрестке), если она согласуется с локальными ориентациями, изображенными

⁴С настоящего момента мы переходим от обозначений v_+ и v_- к обозначениям 1 и X (при умножении элемент v_+ ранее играл роль единицы). Это приводит к той же теории гомологий с точностью до сдвига градуировки и нормализации. В дальнейшем мы не будем обращать внимания на эти сдвиги и нормализации, это делается так же, как в [21].

Рис. 6. Задание базиса в перекрестке

на рис. 6; в противном случае скажем, что окружность является *отрицательно ориентированной*. Тем самым мы зафиксировали выбор образующей X на каждой окружности, инцидентной выбранному перекрестку. Отметим, что в другом перекрестке для той же окружности образующая X может отличаться от исходной образующей знаком.

Дифференциалы определяются согласно ориентациям окружностей в перекрестках и локальному упорядочению компонент по следующему правилу.

Описанная выше ориентация окружностей состояний является корректно определенной, за исключением случая, когда ребро куба, соответствующее перекрестку, переводит одну окружность в одну окружность. В таких ситуациях мы полагаем частичный дифференциал, соответствующий ребру, равным нулю.

Пусть теперь мы имеем перестройку типа $1 \rightarrow 2$ или $2 \rightarrow 1$ в некотором перекрестке.

При рассмотрении двух окружностей, инцидентных перекрестку с противоположных сторон, мы упорядочиваем их таким образом, чтобы верхняя (соответственно левая) окружность считалась первой; тогда нижняя (соответственно правая) окружность будет считаться второй. Далее при определении частичных дифференциалов мы предполагаем, что все окружности упорядочены таким образом, что те окружности, которые мы рассматриваем, находятся на самых начальных местах в нашем упорядоченном тензорном произведении; этого всегда можно добиться посредством предварительной перестановки, которая приведет, быть может, к замене знака. На остальных окружностях отображение действует тождественно.

Пусть дано ребро куба перестроек, в котором количество окружностей изменяется на единицу. Эта перестройка происходит в некотором перекрестке, таким образом, возможны два случая: либо две окружности перестраиваются в одну, либо одна в две. В состоянии, когда имеются две окружности, инцидентные данному перекрестку, они упорядочены. Кроме того, все три окружности

Рис. 7. Определение операций m и Δ

ориентированы, тем самым выбран базис для пространства, соответствующего каждой из этих окружностей.

Зададим теперь отображения $\Delta: V \rightarrow V \wedge V$ и $m: V \wedge V \rightarrow V$ локально согласно предписанному выше выбору образующих в перекрестке и предписанному упорядочению по формулам

$$\begin{aligned} \Delta(1) &= 1_1 \wedge X_2 + X_1 \wedge 1_2, & \Delta(X) &= X_1 \wedge X_2, \\ m(1_1 \wedge 1_2) &= 1, & m(X_1 \wedge 1_2) &= m(1_1 \wedge X_2) = X, & m(X_1 \wedge X_2) &= 0 \end{aligned}$$

(см. рис. 7).

При наличии окружностей $C_1, \dots, C_l$, не инцидентных перекрестку, в котором происходит перестройка, и элементов $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ на них формулы частных дифференциалов ∂' переписываются в виде

$$\begin{aligned} \partial'(1 \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k) &= \Delta(1) \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k \\ &= 1_1 \wedge X_2 \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k + X_1 \wedge 1_2 \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k, \\ \partial'(X \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k) &= \Delta(X) \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k = X_1 \wedge X_2 \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k, \\ \partial'(1_1 \wedge 1_2 \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k) &= m(1_1 \wedge 1_2) \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k = 1 \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k, \\ \partial'(X_1 \wedge 1_2 \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k) &= \partial'(1_1 \wedge X_2 \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k) \\ &= m(X_1 \wedge 1_2) \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k = X \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k, \\ \partial'(X_1 \wedge X_2 \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k) &= m(X_1 \wedge X_2) \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k = 0. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 1. Таким образом, если мы хотим подвергнуть коумножению второй сомножитель X_2 в $X_1 \wedge X_2$, мы получим $X_1 \wedge X_2 = -X_2 \wedge X_1 \rightarrow -X_2 \wedge X_3 \wedge X_1 = -X_1 \wedge X_2 \wedge X_3$, где X_3 принадлежит новообразованной (третьей) компоненте.

§ 5. Формулировка и доказательство основной теоремы

Мы построили по заданной ориентированной диаграмме K виртуального зацепления набор биградуированных групп с дифференциалом ∂ , равным сумме

частичных дифференциалов. Обозначим этот набор групп через $[[K]]$. Дифференциал повышает высоту и не меняет градуировку.

В настоящем параграфе мы докажем основную теорему.

ТЕОРЕМА 3. *Набор групп $[[K]]$ вместе с дифференциалом ∂ является корректно определенным биградуированным комплексом, т.е. $\partial^2 = 0$, при этом дифференциал сохраняет градуировку и повышает высоту на единицу.*

Обозначим через n_+ число перекрестков типа , а через n_- число перекрестков типа .

Пусть $\mathcal{C}(K)$ – комплекс, полученный из $[[K]]$ сдвигом высоты и градуировки: $\mathcal{C}(K) = [[K]]\{n_+ - 2n_-\}[-n_-]$, т.е. высота каждой цепи уменьшается на n_- , а градуировка увеличивается на $n_+ - 2n_-$; все дифференциалы сдвигаются согласованно.

Из построений будет следовать, что гомологии комплекса $\mathcal{C}(K)$ совпадают с гомологиями, построенными в [10] для случая виртуальных узлов, которым соответствуют ориентируемые атомы. Случай с коэффициентами в поле $\mathbb{Z}_2$ приводит к гомологиям, которые дословно совпадают с гомологиями, описанными в [9].

ТЕОРЕМА 4. *Группы гомологий биградуированного комплекса $\mathcal{C}(K)$ являются инвариантами зацепления K относительно обобщенных движений Рейдемейстера.*

Докажем сначала теорему 3. После этого мы докажем теорему 4; ее доказательство будет более техническим и будет проходить по стандартной схеме, предложенной в работе [11], но с учетом дополнительной проверки совпадения знаков частичных дифференциалов, возникающих при упорядочении и ориентации окружностей. Мы покажем также, что гомологии комплекса $\mathcal{C}(K)$ совпадают с гомологиями, построенными в [10] для случая виртуальных узлов, которым соответствуют ориентируемые атомы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Сначала мы докажем две леммы, устанавливающие некоторые свойства комплекса $\mathcal{C}(K)$ и упрощающие дальнейшие рассуждения.

Пусть K – виртуальная диаграмма. Рассмотрим некоторый ее классический перекресток U . Пусть диаграмма K' получается из K виртуализацией перекрестка U . Тогда существует естественное взаимно однозначное соответствие между множествами классических перекрестков диаграмм K и K' . Оно порождает взаимно однозначное соответствие ϕ между состояниями, которое задается одинаковым (в обоих случаях способом A или в обоих случаях способом B) выбором сглаживаний для соответствующих перекрестков. Отметим, что такое взаимно однозначное соответствие не меняет количества окружностей в состояниях, это проверяется локальным сравнением разведения перекрестка U на диаграмме K и на диаграмме K' (например, это очевидно следует из того факта, что окружности в состояниях полностью описываются атомом, а атом не меняется при виртуализации). Это отождествление задает отображение $g: [[K]] \rightarrow [[K']]$ пространств цепей согласно следующему правилу. Для

Рис. 8. Изменение куба при виртуализации, $j = \pm 1$

каждого состояния s и соответствующего ему состояния $\phi(s)$ диаграммы K и K' вне окрестности перекрестка U совпадают. Таким образом, можно установить взаимно однозначное соответствие между ориентированными окружностями состояния s и состояния $\phi(s)$ с согласованными ориентациями, что приводит к корректно определенному отображению g . То же обозначение g мы будем использовать и для отображения векторных пространств (модулей), соответствующих окружностям в состояниях s и $\phi(s)$.

Каждому состоянию V диаграммы K соответствует подпространство пространства цепей комплекса $[[K]]$, которое мы обозначим через C_V . Обозначим соответствующее пространство для K' через $C_{V'}$.

ЛЕММА 1. Пусть K, K' – две виртуальные диаграммы, получающиеся одна из другой посредством виртуализации. Тогда существует сохраняющее градуировку отображение пространств цепей $f: [[K]] \rightarrow [[K']]$, переводящее C_V изоморфно в $C_{V'}$ и коммутирующее с частичными дифференциалами. В частности, если $[[K]]$ является комплексом, то таковым является и $[[K']]$; при этом их группы градуированных гомологий изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть диаграмма K' получается из диаграммы K виртуализацией перекрестка U .

Будем строить отображение f в зависимости от типа перекрестка U ( ) или ( )

По построению частичные дифференциалы комплекса $[[K']]$ совпадают с образами частичных дифференциалов комплекса $[[K]]$ относительно отображения g , за исключением, быть может, частичных дифференциалов, соответствующих перекрестку U . Далее, дифференциалы, соответствующие U , разбивают наш куб состояний на “верхний подкуб” и “нижний подкуб”, как показано на рис. 8.

Оставшиеся частичные дифференциалы отличаются, быть может, знаками на ребрах (которые соответствуют перекрестку U). Мы покажем, что эти частичные дифференциалы либо все согласуются, либо все отличаются знаком, как показано на рис. 8.

Действительно, базисы во всех перекрестках, кроме U , согласуются для диаграмм K и K' . Это приводит к отождествлению цепей соответствующих комплексов. При этом изоморфизме для каждой окружности, инцидентной перекрестку U , мы имеем $g(X_{U,K}) = -X_{U,K'}$. Последнее выполнено потому, что

Рис. 9. Виртуализация

в каждом состоянии s окружности C , подходящей справа сверху к перекрестку U диаграммы K , соответствует окружность $\phi_*(C)$ в состоянии $\phi(s)$, которая подходит к перекрестку U слева сверху, что соответствует замене X на $-X$ в базисе, соответствующем данному перекрестку (см. рис. 6).

В случае обычных тензорных произведений и неупорядоченных окружностей переход $X \rightarrow -X$ оставляет локальные отображения типа m инвариантными и заменяет Δ на $-\Delta$.

Сначала предположим, что перекресток U является положительным ( ) . Все отображения типа m , отвечающие U , соответствуют перестройке двух окружностей (правой и левой) в одну. После виртуализации левая окружность становится правой, а правая – левой (рис. 9).

Глобально мы получаем изменение знака дифференциалов типа m в фиксированном базисе. Для частичных дифференциалов типа Δ одна окружность перестраивается в две: верхнюю и нижнюю; соотношение “верх-низ” не меняется при виртуализации, что оставляет частичный дифференциал типа Δ неизменным. Первая компонента изображена на рис. 9 сплошной линией, вторая компонента изображена пунктирной линией.

Суммируя все сказанное выше, мы видим, что виртуализация положительного перекрестка меняет знаки всех частичных дифференциалов, соответствующих данному перекрестку.

Разделим теперь каждый из кубов $[[K]]$ и $[[K']]$ на две части соответственно сглаживанию в U : будем считать одну часть кубов верхней, а вторую – нижней. Определим отображение $f: [[K]] \rightarrow [[K']]$ как g на всех элементах из нижнего подкуба и как $-g$ на всех элементах из верхнего подкуба.

Очевидно, что такое отображение коммутирует с частичными дифференциалами, следовательно, если исходный куб был антикоммутативным, то построенное отображение будет изоморфизмом в гомологиях.

Аналогичные рассуждения показывают, что виртуализация отрицательного перекрестка не меняет куба вообще: знак минус, который появляется на ребрах, соответствующих частичному дифференциалу типа Δ , затем сокращается со

Рис. 10. Куб перестроек (а) и его двумерная грань (б), порождающая атом

знаком минус, возникающим от перестановки окружностей (правой и левой). Тем самым лемма доказана.

Из леммы 1 следует, что гомологии двух диаграмм, отличающихся виртуализацией, изоморфны.

Таким образом, чтобы показать, что для диаграммы K построенный выше куб является антикоммутативным, мы можем применить виртуализации в некоторых классических перекрестках и рассмотреть аналогичный вопрос для получающейся диаграммы K' .

Для проверки антикоммутативности куба $[[K]]$ необходимо рассмотреть все его двумерные грани.

Каждая двумерная грань куба соответствует некоторому способу сглаживания некоторых $n-2$ классических перекрестков диаграммы K (рис. 10). Оставшиеся два перекрестка могут быть сглажены произвольным образом; четыре возможности такого сглаживания соответствуют вершинам двумерной грани.

На рис. 10 куб перестроек изображен слева, а его двумерная грань и соответствующая диаграмма, порождающая атом, – справа. Атом восстанавливается по диаграмме узла, изображенной справа по правилу, описанному в п. 2.2.

Для этих четырех состояний имеется некоторое количество общих окружностей, не инцидентных никакому из двух рассматриваемых перекрестков. После удаления этих окружностей мы получаем атом с двумя вершинами.

Таким образом, необходимо проверить, что каждая двумерная грань, которая может соответствовать некоторому атому с двумя вершинами, задает антикоммутативную диаграмму. В двух вершинах всякого такого атома мы имеем некоторые локальные ориентации зацепления. Эти ориентации определяют вид частичных дифференциалов.

Отметим, что на атоме при переходе от вершины к вершине ориентации могут быть не согласованными, а именно ребро атома с двумя вершинами по-

Рис. 11. Ориентация в перекрестках атома

рождается сглаживанием нескольких подряд идущих ребер, каждое из которых имело свою ориентацию (рис. 11).

Оказывается, что эти локальные ориентации могут быть выбраны произвольным образом, что не ограничивает общности при проверке коммутативности. А именно, фиксируем атом с двумя вершинами. Всевозможные “вхождения” этого атома в куб задаются локальными ориентациями ребер в двух вершинах атома. Фиксируем ориентацию одного перекрестка V_1 и выберем две различные ориентации второго перекрестка V_2 , отличающиеся друг от друга поворотом стрелок на угол, равный $\frac{\pi}{2}$, по часовой стрелке. Мы получим два квадрата (двумерных куба): Q_1 и Q_2 .

ЛЕММА 2. *Если куб Q_1 является антикоммутативным, то антикоммутативен и куб Q_2 . При этом существует сохраняющее градуировку отображение пространств цепей $f: [[K]] \rightarrow [[K']]$, переводящее C_V изоморфно в $C_{V'}$ и коммутирующее с частичными дифференциалами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО во многом повторяет доказательство леммы 1. В общих чертах оно состоит в следующем. После поворота направляющих стрелок по часовой стрелке в перекрестке V_2 мы получим смену знака образующей X для всех окружностей, инцидентных этому перекрестку. Для этого, как и в доказательстве леммы 1, мы рассматриваем два комплекса и отождествляем их пространства цепей посредством отображения g (аналогичного отображению g из леммы 1) так, чтобы дифференциалы, соответствующие другому перекрестку, совпадали.

После этого мы, как и в лемме 1, подправим отображение g до отображения f , согласующегося с частичными дифференциалами, из чего и будет следовать утверждение леммы 2.

Если бы мы рассматривали неупорядоченное тензорное произведение, то замена X на $-X$ привела бы к смене знака для всех частичных дифференциалов типа Δ , соответствующих перекрестку V_2 .

Далее, в случае положительного перекрестка все дифференциалы типа m , соответствующие этому перекрестку, также меняют знак. В случае отрицательного перекрестка знаки всех умножений m не меняются, а отображения Δ повторно меняют знак. Таким образом, имеет место та же ситуация, что и в доказательстве леммы 1. Лемма доказана.

Из леммы 2 следует, что для проверки антикоммутативности всех возможных двумерных граней куба достаточно перечислить все атомы с двумя вершинами и проверить антикоммутативность для каждого из них. А именно, мы фиксируем реализацию выбранного атома посредством погружения остова в плоскость с сохранением структуры противоположных ребер; такие погружения отличаются возможной виртуализацией (которая не влияет на антикоммутативность и не меняет гомотопий по лемме 1); в этом случае мы можем выбрать произвольную локальную ориентацию ребер и проверить соответствующий случай.

Отметим, что среди атомов с двумя вершинами существуют несвязные, т.е. такие, каждое ребро которых соединяет некоторую вершину с ней самой. Для таких атомов в случае обычного тензорного произведения мы получаем коммутативные двумерные грани. В случае упорядоченных тензорных произведений соответствующие грани будут, очевидно, антикоммутировать.

Некоторые (связные) атомы являются несущественными в следующем смысле. Мы полагаем частичный дифференциал типа $1 \rightarrow 1$ равным нулю. Очевидно, что двумерная грань куба (атом) может иметь 0, 2 или 4 таких ребра. Легко проверить, что если таких ребер нет, то атом ориентируем. Если все четыре ребра задают дифференциалы типа $1 \rightarrow 1$, то доказательство очевидно. Также доказательство очевидно в случае, когда в диаграмме, антикоммутативность которой проверяется, мы имеем две композиции отображений, в каждой из которых одно из двух отображений нулевое.

Остаются шесть существенных связных атомов с двумя вершинами; они все изображены на рис. 12. Все эти атомы, за исключением первого, являются ориентируемыми.

В первом случае аккуратный подсчет (см. рис. 13) показывает, что обе композиции дают нулевое отображение. Действительно, в нижней композиции мы имеем тождественно нулевое отображение. Подставляя в верхнюю композицию отображений элемент X , мы получим $\pm X \wedge X$ на первом шаге и нуль на втором шаге. При подстановке единицы мы получаем $1_1 \wedge X_2 + X_1 \wedge 1_2$ на первом шаге; здесь индекс относится к номеру окружности (большая окружность – первая, а маленькая – вторая). При переходе ко второму перекрестку V_2 первая и вторая окружности меняются ролями: окружность 1 становится нижней, а окружность 2 становится верхней. Кроме того, для первой окружности происходит замена базиса: X переходит в $-X$. Таким образом, мы имеем $-X \wedge 1 + 1 \wedge X$, что под действием умножения m переходит в нуль.

Перейдем к проверке ориентируемых атомов. Для каждого из них фиксируем ориентацию так, как показано на рис. 12. После этого мы можем фиксировать базисы $\{1, X\}$ для всех окружностей в вершинах согласно правилу, указанному на рис. 6.

Рис. 12. Существенные атомы с двумя вершинами

Рис. 13. Неориентируемый атом

Рис. 14. Ориентируемый атом с двумя вершинами

После этого антикоммутативность проверяется следующим образом. В случае обычного (неупорядоченного) тензорного произведения мы получили бы коммутативные диаграммы. Перенумерация окружностей может привести к появлению знака минус на некоторых ребрах. Необходимо проверить, что для каждого атома все появляющиеся знаки в целом приведут к антикоммутативности.

Так, например, на рис. 14 мы имеем ориентированный атом с двумя вершинами. Проверка случая неупорядоченного тензорного произведения сводится к обычному свойству ассоциативности $m \circ (m \otimes 1) = m \circ (1 \otimes m)$, где окружности перенумерованы слева направо.

В левой части рис. 14 одна пара номеров 1, 2 окружностей изображена в перевернутом виде, чтобы отметить, что ребра ориентированы снизу вверх. При этом указывается, какая из окружностей является локально первой (левой), а какая – второй (правой).

Здесь нужно принять во внимание глобальное упорядочение компонент. Отметим, что в случае трех компонент умножение всегда должно применяться к первым двум, т.е. иметь вид $m \wedge \text{id}$.

Поэтому, применяя $m \circ (m \wedge \text{id})$ к $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$, мы получим

$$m(m(A_1, A_2), A_3) = -(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3);$$

здесь $\cdot$ означает обычное умножение в смысле Хованова: $X \cdot X = 0$, $X \cdot 1 = 1 \cdot X = X$, $1 \cdot 1 = 1$. Знак минус появляется по причине второго перекрестка: мы имеем две ветви, ориентированные сверху вниз, поэтому самая правая окружность оказывается локально слева.

С другой стороны, если мы рассмотрим сначала второй перекресток V_2 , мы получим

$$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 = (A_2 \wedge A_3) \wedge A_1 = -(A_3 \wedge A_2) \wedge A_1 \rightarrow -(A_2 \cdot A_3) \wedge A_1 = A_1 \wedge (A_2 \cdot A_3).$$

Применяя к полученному умножение m , мы имеем $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

Антикоммутативность в случае всех остальных атомов проверяется аналогично. Отметим, что наша конструкция приводит непосредственно к антикоммутативному кубу, в отличие от исходной конструкции Хованова, где мы получали антикоммутативный куб путем добавления знаков на ребрах некоторого коммутативного куба. Теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. На протяжении дальнейшего доказательства теоремы 4 мы не будем отслеживать сдвиги высоты и градуировки соответствующих комплексов. Совпадение соответствующих градуировок для диаграмм, отличающихся движением Рейдемейстера, дословно повторяет классический случай (см., например, [11]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Заметим сначала, что комплекс $\mathcal{C}(K)$ не меняется при применении движения объезда.

Доказательство инвариантности гомологий комплекса при классических движениях Рейдемейстера проходит аналогично доказательству Бар-Натана [11].

Инвариантность при первом движении Рейдемейстера дословно повторяет рассуждения из [11]. Комплекс, соответствующий диаграмме с добавленным завитком, имеет вид

$$[[\text{loop}]] = ([[\text{point}]] \xrightarrow{m} [[\text{loop}]]\{1\}). \quad (3)$$

Отображение m является сюръективным, при этом подкомплекс комплекса $\textcircled{\circ}$ слева, в котором на малой окружности стоит ± 1 , переводится отображением m на весь комплекс $\textcircled{\cup}$ справа. Тем самым мы получаем ацикличный подкомплекс исходного комплекса. Поэтому мы приходим к тому, что весь комплекс имеет те же гомологии, что и его факторкомплекс по описанной выше ациклической части. Последний имеет те же гомологии, что и $[[\textcircled{\cup}]]$.

Аналогичным образом рассматривается и другой завиток; в этом случае используется инъективность отображения Δ .

Как и в случае с первым движением Рейдемейстера, доказательство инвариантности при втором движении Рейдемейстера повторяет соответствующее доказательство Бар-Нагана в классическом случае. Мы приведем его здесь потому, что оно нам понадобится при доказательстве инвариантности относительно третьего движения Рейдемейстера.

Для второго движения Рейдемейстера заметим, что можно выбрать ориентацию для всех окружностей локально согласованным образом так, чтобы при переходе по одной окружности от одного перекрестка к другому переменная X не меняла знак (рис. 15).

Далее мы продолжаем рассуждения, учитывая, что знак при X не меняется при переходе от одного перекрестка ко второму. Изначальный комплекс $\mathcal{C}$ имеет вид

$$\begin{array}{ccc}
[[\text{circle with dot}]]\{1\} & \xrightarrow{m} & [[\text{figure-eight}]]\{2\} \\
\Delta \uparrow & & \uparrow \\
[[\text{figure-eight}]] & \longrightarrow & [[\text{circle with dot}]]\{1\}
\end{array} \quad (4)$$

Рис. 15. Согласованные ориентации ребер при движении Ω_2

Этот комплекс содержит подкомплекс

$$C' = \begin{array}{ccc} [[\textcircled{\circ}]]_1 \{1\} & \xrightarrow{m} & [[\textcircled{\cup}]] \{2\} \\ \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (5)$$

Здесь и далее 1 означает метку на малой окружности. Ацикличность комплекса C' очевидна.

Факторизуя C по C' , мы получаем

$$\begin{array}{ccc} [[\textcircled{\circ}]] \{1\} /_{1=0} & \longrightarrow & 0 \\ \Delta \uparrow & & \uparrow \\ [[\textcircled{\cup}]] & \longrightarrow & [[\textcircled{\cup}]] \{1\} \end{array} \quad (6)$$

В левом верхнем углу $1 = 0$ означает, что пространство $\{1, X\}$, соответствующее малой окружности, факторизовано по соотношению $1 = 0$, т.е. в соответствующем упорядоченном тензорном произведении вместо двумерного пространства стоит одномерное, порожденное элементом X . В комплексе (6) стрелка Δ , направленная вверх, является изоморфизмом. Следовательно, этот комплекс (после некоторой нормализации) имеет те же группы гомологий, что и $[[\textcircled{\cup}]]$. Это завершает доказательство инвариантности относительно Ω_2 .

Это рассуждение нам понадобится в дальнейшем при доказательстве инвариантности гомологий Хованова относительно третьего движения Рейдемейстера. Возвращаясь назад к исходному комплексу (4), мы видим, что все его группы гомологий однозначно соответствуют группам гомологий комплекса, стоящего в правом нижнем углу диаграммы (6). Отметим также следующее обстоятельство. В изначальном комплексе все нетривиальные циклы имеют “локальную” высоту, соответствующую правому нижнему и левому верхнему углам диаграммы. Тем самым, в изначальном комплексе каждый элемент α ,

Рис. 16. Третье движение Рейдемейстера

стоящий в левом верхнем углу, гомологичен ровно одному элементу $-\tau(\alpha)$, стоящему в правом нижнем углу. Отображение τ получается композицией отображения Δ^{-1} и стрелки, направленной вправо. При третьем движении Рейдемейстера мы проведем упрощение подкомплексов, соответствующее второму движению Рейдемейстера. Такое упрощение будет сделано в двух местах и приведет к двум отображениям, аналогичным τ , которые мы обозначим через τ_1 и τ_2 .

Рассмотрим теперь третье движение Рейдемейстера, изображенное на рис. 16.

Общеизвестно (см., например, [22]), что любой вариант третьего движения Рейдемейстера получается композицией движений Ω_1 , Ω_2 и какого-нибудь одного (заранее фиксированного) варианта третьего движения Рейдемейстера, в котором выбрана расстановка проходов-переходов и ориентации ребер. Достаточно рассмотреть только один случай, в котором ориентации выбраны так, как на рис. 17, а перекрестки устроены так, как на рис. 16.

В каждом перекрестке (согласно рис. 17) есть локальное правило задания ориентации для всех инцидентных данному перекрестку ребер (см. рис. 6). Если два перекрестка являются соседними, то такие ориентации могут быть или не быть согласованными. Мы видим, что ориентация (направление направо вверх) в третьем перекрестке на левой картинке не согласуется с ориентациями в первом и втором перекрестках; аналогичным образом, на рис. 16, б второй перекресток не согласуется с первым и третьим.

Применим виртуализацию к перекресткам 1, 2 диаграммы на рис. 16, а и к перекрестку 2 диаграммы на рис. 16, б; после этого все локальные ориентации на двух диаграммах (в смысле переменной X) будут согласованы (см. рис. 17).

Положительное сглаживание обеих полученных диаграмм в первом перекрестке (см. рис. 16) приводит к совпадающим (с точностью до виртуализации)

Рис. 17. Виртуализация перекрестков при Ω_3 для согласования базисов

диаграммам. Отрицательные сглаживания приводят к диаграммам, получающимся одна из другой применением (виртуализации и) вторых классических движений Рейдемейстера.

Таким образом, мы можем перестроить комплексы, соответствующие двум диаграммам, так, чтобы их нижние подкубы совпадали, а верхние имели одинаковые гомологии (в обоих случаях мы применили преобразование Ω_2). Нам остается проверить, что частичные дифференциалы, идущие снизу вверх, согласуются, т.е. отображения “снизу вверх” в обоих случаях либо совпадают, либо отличаются знаком.

В классическом случае это показано в [11]. В нашей ситуации единственное отличие состоит в том, что могут возникнуть знаки “минус” в связи с упорядочением тензорного произведения.

Мы заимствуем рис. 18 из работы [11]. В обычном (классическом) случае окончательные комплексы (после факторизации) имеют вид, показанный на этом рисунке.

Запись $1 = 0$ в левом верхнем углу на рис. 18 означает, что пространство, соответствующее данному состоянию, факторизовано по подпространству, на малой окружности которого выбран элемент 1. Здесь τ_1 и τ_2 не являются дифференциалами, а представляют собой отображения, которые переводят элемент ζ в гомологичный элементу $-\zeta$.

Чтобы установить изоморфизм в гомологиях, достаточно показать, что

$$\tau_1 \circ d_{1*01} = d_{2*01}, \quad d_{1*10} = \tau_2 \circ d_{2*10}.$$

В этом случае мы покажем, что отображения “снизу вверх” на обоих комплексах отличаются знаком (так как в обоих случаях τ_i в гомологиях представляет собой отображение $-\text{id}$). После этого гомотопическая эквивалентность двух комплексов, соответствующих третьему движению Рейдемейстера, доказывается так же, как и в лемме 1, посредством естественного отображения, отождествляющего нижние подкубы со знаком $+$ и верхние подкубы со знаком $-$.

Рис. 18. Инвариантность относительно преобразования Ω_3

Случай упорядоченного тензорного произведения отличается от “обычного” лишь знаками на ребрах. Проверим, что все знаки согласуются. Необходимо показать, что $\tau_1 \circ d_{1*01} = d_{2*01}$ (второй случай полностью аналогичен).

Рассмотрим рис. 18. Здесь d_{1*01} представляет собой частичный дифференциал Δ типа $1 \rightarrow 2$, $\tau_1 = v \circ \Delta^{-1}$, где v – частичный дифференциал, а Δ^{-1} – операция, обратная к Δ (отметим, что подпространство пространства цепей, соответствующее верхнему углу куба, в котором стоит элемент β_1 , факторизовано по соотношению $1 = 0$, т.е. маленькой окружности C мы сопоставляем одномерное пространство с образующей X). При этом соответствующее отображение коумножения становится изоморфизмом.

На рис. 19 для каждого из отображений указан в скобках номер перекрестка, к которому оно применяется.

Отображения p и q – это обычные частичные дифференциалы; они либо оба являются умножениями, либо оба – коумножениями, либо оба – нулями.

В случае $p = q = 0$ доказательство очевидно.

Рассмотрим оставшиеся случаи. Мы имеем три фрагмента окружностей α , β , δ . В начальном состоянии они могут принадлежать одной, двум или трем различным окружностям. Рассмотрим сначала случай, когда все фрагменты, содержащие α , β , δ , принадлежат разным окружностям.

Для простоты будем обозначать далее элементы алгебры V (вида 1 или $\pm X$), стоящие на этих окружностях, теми же буквами, что и фрагменты α , β , δ . Тогда обе операции p и q являются умножениями.

Начиная с $\alpha \wedge \beta \wedge \delta$, на рис. 19 справа мы получаем

$$p: \alpha \wedge \beta \wedge \delta \rightarrow (\alpha \cdot \beta) \wedge \delta,$$

где $(\alpha \cdot \beta)$ – обычное умножение в алгебре V . На рис. 19 слева мы имеем

$$\alpha \wedge \beta \wedge \delta = \delta \wedge \alpha \wedge \beta \xrightarrow{\Delta} \delta \wedge X \wedge \alpha \wedge \beta.$$

Рис. 19. Проверка инвариантности относительно Ω_3

Здесь мы применили коумножение к δ , чтобы получить две окружности в перекрестке 1; получившиеся окружности обозначены через δ (верхняя) и X (нижняя).

Далее, $\delta \wedge X \wedge \alpha \wedge \beta = -\beta \wedge X \wedge \alpha \wedge \delta$. Применим теперь Δ^{-1} к перекрестку 3: это отображение объединяет две окружности, которым соответствуют β и X . В этом перекрестке образующая X относится к левой окружности, а β – к правой. Таким образом, мы имеем

$$-\beta \wedge X \wedge \alpha \wedge \delta = X \wedge \beta \wedge \alpha \wedge \delta \xrightarrow{\Delta^{-1}} \beta \wedge \alpha \wedge \delta.$$

Далее, операция q представляет собой коумножение в перекрестке 2, в котором окружность, помеченная через β , является первой (верхней), а окружность, помеченная α , – второй (нижней). Таким образом, мы получаем $(\alpha \cdot \beta) \wedge \delta$.

Предположим теперь, что α и β принадлежат одной окружности (в начальном положении), а δ образует отдельную окружность. Обозначим метку, соответствующую первой окружности, через A , а метку, соответствующую второй окружности, – через δ .

Для отображения p мы имеем

$$A \wedge \delta \xrightarrow{\Delta} \sum_i A_{i,1} \wedge A_{i,2} \wedge \delta,$$

где $A_{i,1}$ и $A_{i,2}$ такие, что $\sum_i A_{i,1} \otimes A_{i,2}$ является результатом применения коумножения к A в обычном смысле (см. рис. 20). Далее для сокращения записи знак $\sum_i$ мы не выписываем.

На рис. 20 слева мы имеем

$$A \wedge \delta = -\delta \wedge A \rightarrow -\delta \wedge X \wedge A,$$

Рис. 20. Проверка инвариантности при движении Ω_3

в перекрестке 1 метка δ соответствует верхней окружности, а другая метка (всегда равная X) соответствует нижней окружности.

Тогда при отображении Δ^{-1} в перекрестке 3 мы имеем

$$-\delta \wedge X \wedge A = -X \wedge A \wedge \delta \rightarrow -A \wedge \delta$$

(здесь элемент X стоял на левой стороне, а A – на правой).

Наконец, коумножение q в перекрестке 2 дает

$$-A \wedge \delta \rightarrow -A_{i,1} \wedge A_{i,2} \wedge \delta;$$

здесь $A_{i,1}$ соответствует компоненте s , которая локально проходит сверху в перекрестке 2, а $A_{i,2}$ соответствует локально нижней компоненте t . Однако на рис. 20 справа эти же две окружности подходят друг к другу противоположным образом. Более точно, мы имеем

$$-A_{i,1,s} \wedge A_{i,2,t} \wedge \delta.$$

В первом случае (отображение p) мы имели

$$A_{i,1,t} \wedge A_{i,2,s} \wedge \delta = -A_{i,2,s} \wedge A_{i,1,t} \wedge \delta.$$

Эти два результата совпадают в силу кокоммутативности операции Δ в обычном случае. Аналогично можно рассмотреть все оставшиеся случаи.

Если α и δ принадлежат одной окружности (обозначим соответствующий ей элемент через α), а β – другой, мы получаем следующие отображения:

- а) в простейшем случае (отображение p) мы имеем $\alpha \wedge \beta \rightarrow (\alpha \cdot \beta)$;
- б) на рис. 20 слева мы получаем

$$\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha \wedge X \wedge \beta = X \wedge \beta \wedge \alpha \rightarrow (\beta \wedge \alpha) \rightarrow (\beta \cdot \alpha).$$

В случае умножения, когда β и δ образуют одну окружность (обозначим соответствующий ей элемент через β), мы получаем:

- а) справа на рис. 20 отображение $p: \alpha \wedge \beta \rightarrow (\alpha \cdot \beta)$;
- б) слева на рис. 20 имеет место

$$\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha \rightarrow -\beta \wedge X \wedge \alpha = X \wedge \beta \wedge \alpha \rightarrow \beta \wedge \alpha \rightarrow (\beta \cdot \alpha).$$

Наконец, в случае, когда мы имели в начале всего одну окружность (обозначим соответствующий ей элемент через A), получим два коумножения:

- 1) $A \rightarrow A_{i,1,t} \wedge A_{i,2,s}$ в простейшем случае (отображение p);
- 2) $A \rightarrow A \wedge X = -X \wedge A \rightarrow -A \rightarrow -A_{i,1,s} \wedge A_{i,2,t} = A_{i,2,t} \wedge A_{i,1,s}$.

Тем самым показано, что $\tau_1 \circ d_{1*01} = d_{2*01}$. Второе равенство доказывается полностью аналогично. Теорема 4 доказана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть K – диаграмма виртуального зацепления, которой соответствует ориентируемый атом. Тогда группы гомологий $\text{Kh}(K)$ совпадают с обычными группами гомологий Хованова, построенными в [10].

При доказательстве этой теоремы мы будем обозначать наш новый комплекс и его группы гомологий через $\mathcal{C}(K)$ и $\text{Kh}(K)$ соответственно, а комплекс и гомологии, определенные в [10], – через $\mathcal{C}'(K)$ и $\text{Kh}'(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что диаграмма зацепления K выбрана таким образом, что все X согласованы (т.е. при переходе от перекрестка P к перекрестку Q всегда имеет место $X_P = X_Q$, а не $X_P = -X_Q$). Это возможно, так как атом, соответствующий зацеплению K , является ориентируемым. Действительно, для ориентируемого атома можно задать глобально ориентацию всех ребер, чтобы она соответствовала ориентации окружностей в каждом состоянии. Для заданной виртуальной диаграммы K в каждом перекрестке локальная ориентация ребер, задаваемая правилом, представленным на рис. 6, может совпадать с ориентацией, происходящей из атома, или отличаться от нее. Применим ко всем перекресткам диаграммы K , где ориентации отличаются, виртуализацию. По лемме 1 гомологии комплекса $\mathcal{C}(K)$ не изменятся, а ориентации будут совпадать.

После этого нам нужно лишь проследить знаки частичных дифференциалов и нумерацию окружностей во всех перекрестках.

Мы построим сохраняющее гомологии отображение между двумя кубами. Фиксируем некоторую нумерацию классических перекрестков диаграммы K . Сопоставим ей максимальное дерево для кубов $\mathcal{C}(K)$ и $\mathcal{C}'(K)$. Это дерево состоит из всех ребер типа $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, *, 0, \dots, 0)$, $\alpha_j \in \{0, 1\}$, т.е. ребро в направлении x_j принадлежит этому дереву, если все координаты $x_{j+1}, \dots, x_n$ равны нулю (рис. 21).

Далее, каждому состоянию s комплекса $\mathcal{C}(K)$ сопоставим упорядоченную тензорную степень $V^{\wedge k}$, а соответствующему состоянию для комплекса $\mathcal{C}'(K)$ сопоставим $V^{\otimes k}$, где k – количество окружностей. Перенумеруем окружности в состоянии A некоторым образом. Тогда упорядочение определяет отображение из пространства, соответствующего A -состоянию s в $\mathcal{C}(K)$, в пространство, соответствующее некоторому состоянию $g(s)$ комплекса $\mathcal{C}'(K)$. После этого мы

Рис. 21. Выбор затягивающего дерева

можем устроить последовательно перенумерацию окружностей во всех вершинах дерева, чтобы отождествления комплексов в соответствующих состояниях в $\mathcal{C}(K)$ и $\mathcal{C}'(K)$ согласовывались с частичными дифференциалами, идущими вдоль ребер затягивающего дерева. Тем самым мы построили отображение g всего пространства цепей куба $\mathcal{C}(K)$ в пространство цепей куба $\mathcal{C}'(K)$. Это отображение будет коммутировать со всеми частичными дифференциалами исходя из следующих соображений. Для частных дифференциалов ∂' , ∂'' , соответствующих одному и тому же ребру комплексов $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$, мы имеем

$$g \circ \partial' = \pm \partial'' \circ g.$$

Если согласованность имеет место для трех из четырех ребер некоторой двумерной грани куба, то она имеет место и для четвертого ребра, так как оба комплекса являются антикоммутативными.

Доказательство завершается рассуждением о том, что, начиная с максимального дерева и добавляя недостающие ребра на двумерных гранях (четвертое при наличии трех), можно последовательно исчерпать все ребра куба.

§ 6. Обобщения

6.1. Максимальное дерево для гомологий Хованова. Некоторые конструкции и результаты, относящиеся к гомологиям Хованова, обобщаются непосредственно на теорию гомологий для виртуальных узлов, построенную в настоящей работе.

К таким результатам относятся, например, теорема о максимальном дереве для гомологий Хованова, предложенная независимо Ш. Верли (см. [23]) и И. Кофманом и А. Чампанеркаром [24], а также результаты о минимальности диаграмм, описанные в работе [25].

Более точно, в работе [23] показано, что гомологии Хованова изоморфны гомологиям некоторого комплекса. Пусть $\mathcal{K}_1(L)$ – множество состояний диаграммы L , в которых количество окружностей равно единице. Имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 3. *Ненулевые гомологии Хованова $\text{Kh}(L)$ могут иметь биградуировки только вида $(C_1 + \beta - w, C_2 + \beta - 2w \pm 1)$, где w пробегает некоторое*

конечное множество целых чисел, β пробегает набор значений $\beta(s)$ для всех состояний $s \in \mathcal{K}_1(L)$, а C_1, C_2 – некоторые константы.

Для полинома Лорана от одной переменной обозначим через span разность между показателями старшей и младшей степеней ненулевых мономов, в него входящих.

Скажем, что диаграмма L с n классическими перекрестками является 1-полной, если $\text{span}\langle L \rangle = 4n - 4g(L)$, где g – род атома, соответствующего диаграмме L . Назовем ориентированную диаграмму 1-полной, если соответствующая ей неориентированная диаграмма является 1-полной.

Доказательство леммы 3, приведенное в [23] для случая классических узлов, дословно продолжается на случай виртуальных узлов. Важным частным случаем этой леммы является утверждение о толщине гомологий Хованова.

Рассмотрим ориентированное зацепление L и его гомологии Хованова над некоторым не градуированным кольцом R . Обозначим через $t_{\max}$ и $t_{\min}$ максимальное и минимальное значения величины $2x - y$ по всем парам (x, y) таким, что группа гомологий Хованова зацепления L с биградуировкой (x, y) нетривиальна. Назовем *толщиной* (см. [26], [27]) комплекса Хованова $T_R(L)$ величину $(t_{\max} - t_{\min})/2 + 1$. Эта величина является целой в случае виртуальных зацеплений, которым соответствуют ориентируемые атомы, и может быть полуцелой в случае зацеплений, которым соответствуют неориентируемые атомы.

Назовем *толщиной* $T(L)$ ориентированной диаграммы L зацепления максимум значения толщины по всем кольцам коэффициентов.

Из леммы 3 и определения атома вытекает следующая

ЛЕММА 4. *Для каждой связной⁵ диаграммы виртуального зацепления L имеем $T(L) \leq g(L) + 2$.*

Скажем, что виртуальная диаграмма L является 2-полной, если величина $g(L) + 2$ равна $T(L)$.

Имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 5. *Для каждой связной виртуальной диаграммы L с n перекрестками имеет место неравенство $\text{span}\langle L \rangle \leq 4n - 4g(L)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см., например, в [2].

Из лемм 5 и 4 вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть связная диаграмма L виртуального зацепления является 1-полной и 2-полной. Тогда она минимальна по количеству классических перекрестков в классе связных диаграмм.*

6.2. Гомологии зацеплений и фробениусовы расширения. Теория Хованова классических узлов допускает некоторые естественные обобщения, начала которых были положены Ховановым. Оказывается, некоторые из них переносятся и на случай виртуальных узлов. Основные результаты настоящего пункта, относящиеся к случаю ориентируемых атомов, опубликованы в [10].

⁵Диаграмма называется *несвязной*, если после применения нескольких движений объезда соответствующий ей граф будет несвязен.

Пусть $\mathcal{R}, \mathcal{A}$ – коммутативные кольца, и пусть $\iota: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{A}$ – вложение коммутативных колец, причем $\iota(1) = 1$. Функтор ограничения, переводящий $\mathcal{A}$ -модули в $\mathcal{R}$ -модули, имеет правый и левый сопряженные функторы: функтор индукции $\text{Ind}(M) = \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{R}} M$ и функтор коиндукции $\text{CoInd}(M) = \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}, M)$. Говорят, что ι является фробениусовым вложением, если функторы индукции и коиндукции изоморфны. Эквивалентно, вложение ι является фробениусовым, если функтор ограничения имеет двухсторонне двойственный функтор. В этом случае говорят также, что кольцо $\mathcal{A}$ представляет собой *фробениусово расширение* над $\mathcal{R}$ посредством ι .

В работе [21] М. Хованов поставил вопрос: какой может быть пара колец $\mathcal{A}, \mathcal{R}$, чтобы, взяв $\mathcal{R}$ в качестве основного кольца коэффициентов и взяв $\mathcal{A}$ – некоторую алгебру Фробениуса над кольцом $\mathcal{R}$ – в качестве кольца гомологий тривиального узла (основного строительного элемента), мы могли “точно так же” построить инвариантную теорию гомологий для классических зацеплений. Под “точно так же” понимается, что мы рассматриваем куб состояний, в каждую вершину которого ставим тензорную степень пространства $\mathcal{A}$ (над $\mathcal{R}$), соответствующую количеству окружностей в данном состоянии, определяем частичные дифференциалы с помощью отображений умножения и коумножения, а затем ставим знаки на ребрах куба и нормируем всю конструкцию сдвигами.

Хованов показал, что инвариантность относительно первого движения Рейдемейстера требует двумерности пространства $\mathcal{A}$ как $\mathcal{R}$ -модуля, и привел необходимые и достаточные условия для того, чтобы существовала такая теория гомологий.

В той же работе [21] показано, что каждое такое решение получается с помощью некоторых операций (замена базиса, скручивание и двойственность) из *универсального* решения $(\mathcal{R}, \mathcal{A})$, определяемого следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \mathbb{Z}[h, t], & \mathcal{A} &= \mathcal{R}[X]/(X^2 - hX - t), \\ \deg X &= 2, & \deg h &= 2, & \deg t &= 4, \\ \Delta(1) &= 1 \otimes X + X \otimes 1 - h \cdot 1 \otimes 1, \\ \Delta(X) &= X \otimes X + t \cdot 1 \otimes 1.\end{aligned}$$

Как мы видим, умножение в алгебре $\mathcal{A}$ сохраняет градуировку, а коумножение повышает ее на два. Мы не выписываем нормировки, регулирующие градуировки.

Назовем эту конструкцию *универсальной $(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ -конструкцией*. Соответствующие гомологии (классического ориентированного) зацепления L будем обозначать через $\text{Kh}_U(L)$.

Основная идея Хованова, используемая в работе [21], состоит в следующем. Сначала он исследует структуру расширений Фробениуса на инвариантность получающейся теории гомологий относительно первого классического движения Рейдемейстера Ω_1 . Это приводит его к двумерности $\mathcal{A}$ как $\mathcal{R}$ -модуля.

Далее Хованов рассматривает универсальную топологическую конструкцию Бар-Натана, предложенную в [13], и строит функтор из топологической категории Бар-Натана в категорию фробениусовых расширений ранга два. Построенный им функтор не является ни инъективным, ни сюръективным, но он устроен

таким образом, что сохраняет все свойства, необходимые для инвариантности гомологий относительно движений Рейдемейстера.

Таким образом, Хованов показывает, что любая теория гомологий зацеплений, происходящая из расширения Фробениуса ранга два, без потери информации сводится к описанной выше универсальной теории с помощью некоторых алгебраических операций.

Мы не будем разбирать подробно описания конструкций Хованова и Бар-Натана, а возьмем универсальную $(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ -конструкцию и структурные положения теории Хованова за основу для построения теории гомологий виртуальных зацеплений.

Отметим, что Хованов также исследовал функториальность его новой теории гомологий – ее “хорошее поведение” при кобордизмах (проективную функториальность). Для этого, помимо операций умножения и коумножения, были определены также отображения единицы и коединицы и рассмотрены их преобразования; этот аспект мы затрагивать не будем.

Мы также не будем описывать подробно смысл алгебраических операций для расширений Фробениуса ($\mathcal{A}$ над $\mathcal{R}$): скручивания, замены базиса и сопряжения. Отметим лишь, что каждая из них приводит к теории, в которой гомологии зацепления восстанавливаются по гомологиям зацепления, подсчитанным в изначальном виде.

Непосредственно проверяется

ТЕОРЕМА 7. *Ограничение универсальной теории Хованова на случай $h = 0$ (без ограничений на t) обобщается на виртуальные узлы методом, предложенным в настоящей статье.*

Основная идея доказательства теоремы 7 состоит в том, что при инволюции $I: 1 \rightarrow 1, X \rightarrow -X$, происходящей при замене ориентации окружности, отображение m не меняется, а Δ меняет знак. Отметим, что это имеет место только при $h = 0$ без ограничений на t и что для коэффициентов из поля $\mathbb{Z}_2$ аналогичная теория была построена в [10] без ограничений, налагаемых на h и t . Данная теория обобщается на случай, когда $h = 0$ (при этом все дифференциалы типа $1 \rightarrow 1$ предполагаются равными нулю). Как частный случай, это приводит к аналогу теории Ле [28].

§ 7. Обсуждение и открытые вопросы

Из работ [7], [8], в которых все доказательства являются *локальными*, следует, что все построенные ими теории обобщаются на случай произвольных виртуальных узлов (посредством матричных факторизаций). Однако описания этих теорий явно без использования матричных факторизаций и их тензорных произведений пока не получено даже для классических узлов.

В связи с этим важно следующее.

1. Гомологии Хованова–Розанского в общем случае инвариантны относительно виртуализаций. Это является еще одним подтверждением гипотезы о виртуализации. Неявно это следует из работы [29].

2. Проективная функториальность (т.е. функториальность с точностью до знака) различных теорий гомологий Хованова (и Хованова–Розанского) доказана в [7], [12], [13]. Вопрос о проективной функториальности теории, построенной в настоящей работе, будет рассмотрен в дальнейших публикациях.

3. Важной проблемой является построение “топологической теории Хованова” для неориентированных кобордизмов, аналогичной [13], для которой предложенная в настоящей работе конструкция являлась бы реализацией. Иными словами, речь идет о построении комплекса *неориентируемых кобордизмов упорядоченных ориентированных окружностей*. Частично (например, в случае поля $\mathbb{Z}_2$) эта теория была построена В. Г. Тураевым и П. Тернером в [30].

Точное доказательство функториальности и построение топологической теории кобордизмов будут приведены в последующей публикации.

Автор благодарен О. Я. Виро за плодотворную критику и многочисленные полезные обсуждения, а также благодарен В. А. Васильеву, Л. Х. Кауфману и М. Хованову.

Список литературы

1. L. H. Kauffman, “Virtual knot theory”, *European J. Combin.*, **20**:7 (1999), 663–690.
2. В. О. Мантуров, *Теория узлов*, РХД, Москва–Ижевск, 2005; англ. изд.: V. O. Manturov, *Knot theory*, Chapman & Hall, Boca Raton, FL, 2004.
3. F. Jaeger, L. H. Kauffman, H. Saleur, “The Conway polynomial in S^3 and thickened surfaces: a new determinant formulation”, *J. Combin. Theory Ser. B*, **61**:2 (1994), 237–259.
4. N. Kamada, S. Kamada, “Abstract link diagrams and virtual knots”, *J. Knot Theory Ramifications*, **9**:1 (2000), 93–109.
5. G. Kuperberg, “What is a virtual link?”, *Algebr. Geom. Topol.*, **3** (2003), 587–591.
6. M. Khovanov, “A categorification of the Jones polynomial”, *Duke Math. J.*, **101**:3 (2000), 359–426.
7. M. Khovanov, L. Rozansky, *Matrix factorizations and link homology*, [arXiv:math.QA/0401268](#).
8. M. Khovanov, L. Rozansky, *Matrix factorizations and link homology*, II, [arXiv:math.QA/0505056](#).
9. В. О. Мантуров, “Полином Хованова для виртуальных узлов”, *Докл. РАН*, **398**:1 (2004), 15–18; англ. пер.: V. O. Manturov, “The Khovanov polynomial for virtual knots”, *Dokl. Math.*, **69**:2 (2004), 164–167.
10. В. О. Мантуров, “Комплекс Хованова для виртуальных узлов”, *Фундам. и прикл. матем.*, **11**:4 (2005), 127–152.
11. D. Bar-Natan, “On Khovanov’s categorification of the Jones polynomial”, *Algebr. Geom. Topol.*, **2** (2002), 337–370.
12. M. Jacobsson, *An invariant of link cobordisms from Khovanov homology*, [arXiv:math.GT/0206303](#).
13. D. Bar-Natan, *Khovanov’s homology for tangles and cobordisms*, [arXiv:math.GT/0410495](#).
14. O. Viro, “Virtual links, orientations and chord diagrams and Khovanov homology”, *Proceedings of Gökova geometry-topology conference* (Gökova, Turkey, 2005), International Press, Cambridge, MA, 2006, 187–212.
15. Ю. В. Дроботухина, “Аналог полинома Джоунса–Кауфмана для зацеплений в $\mathbb{RP}^3$ и обобщение теоремы Кауфмана–Мурасуги”, *Алгебра и анализ*, **2**:3 (1990),

- 171–191; англ. пер.: Yu. V. Drobotukhina, “An analogue of the Jones polynomial for links in $\mathbb{R}P^3$ and a generalization of the Kauffman–Murasugi theorem”, *Leningrad Math. J.*, **2**:3 (1991), 613–630.
16. A. T. Fomenko, “The theory of invariants of multidimensional integrable Hamiltonian systems (with arbitrary many degrees of freedom). Molecular table of all integrable systems with two degrees of freedom”, *Topological classification of integrable systems*, Adv. Soviet Math., **6**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, 1–35.
 17. R. A. Fenn, L. H. Kauffman, V. O. Manturov, “Virtual knot theory – unsolved problems”, *Fund. Math.*, **188** (2005), 293–323.
 18. M. O. Bourgoın, *Twisted link theory*, [arXiv:math.GT/0608233](#).
 19. M. Asaeda, J. Przytycki, A. Sikora, “Categorification of the Kauffman bracket skein module of I -bundles over surfaces”, *Algebr. Geom. Topol.*, **4** (2004), 1177–1210.
 20. M. Goussarov, M. Polyak, O. Viro, “Finite-type invariants of classical and virtual knots”, *Topology*, **39**:5 (2000), 1045–1068.
 21. M. Khovanov, “Link homology and Frobenius extensions”, *Fund. Math.*, **190** (2006), 179–190.
 22. T. Ohtsuki, *Quantum invariants. A study of knots, 3-manifolds, and their sets*, Ser. Knots Everything, **29**, World Sci. Publ., Singapore, 2002.
 23. S. Wehrli, *A spanning tree model for Khovanov homology*, [arXiv:math.GT/0409328](#).
 24. A. Champanerkar, I. Kofman, *Spanning trees and Khovanov homology*, [arXiv:math.GT/0607510](#).
 25. B. O. Мантуров, “Комплекс Хованова и минимальные диаграммы узлов”, *Докл. РАН*, **406**:3 (2006), 308–311; англ. пер.: V. O. Manturov, “The Khovanov complex and minimal knot diagrams”, *Dokl. Math.*, **73**:1 (2006), 46–48.
 26. M. M. Asaeda, J. H. Przytycki, “Khovanov homology: torsion and thickness”, *Advances in topological quantum field theory*, Proc. of the NATO Advanced Research Workshop on new techniques in topological quantum field theory (Kananaskis Village, Canada, August 22–26, 2001), NATO Sci. Ser. II. Math. Phys. Chem., **179**, ed. J. M. Bryden, Kluwer, Dordrecht, 2004, 135–166; [arXiv:math.GT/0405474](#).
 27. A. Shumakovitch, *Torsion of the Khovanov homology*, [arXiv:math.GT/0405474](#).
 28. E. S. Lee, *An endomorphism of the Khovanov invariant*, [arXiv:math.GT/0210213](#).
 29. J. Rasmussen, *Some differentials on Khovanov–Rozansky homology*, [arXiv:math.GT/0607544](#).
 30. V. G. Turaev, P. Turner, *Unoriented topological quantum field theory and link homology*, [arXiv:math.GT/0506229](#).

В. О. МАНТУРОВ (V. O. MANTUROV)
 Московский государственный областной университет
 физико-математический факультет

Поступило в редакцию
 12.07.2006