Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Скалыга, Теоремы В.А. Маркова в нормированных пространствах, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 2, 193–222

DOI: <https://doi.org/10.4213/im1134>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 05:21:40

УДК 517.16

В. И. Скалыга

Теоремы В. А. Маркова в нормированных пространствах

Получены многомерные аналоги неравенств В. А. Маркова для алгебраических полиномов на центрально-симметричных выпуклых телах и аналог неравенства Шеффера–Даффина для полиномов на многомерном кубе. Установлены необходимые и достаточные условия выполнения равенства. Описаны множества экстремалей.

Библиография: 19 наименований.

§ 1. Введение

В. А. Марков [1] в 1892 г. доказал: если алгебраический полином P_n степени не выше n удовлетворяет условию

$$\max_{x \in [-1, 1]} |P_n(x)| = \|P_n\|_{[-1, 1]} \leq 1,$$

то выполняется неравенство

$$|P_n^{(k)}(x)| \leq T_n^{(k)}(1) = \frac{n^2(n^2 - 1^2) \dots (n^2 - (k-1)^2)}{(2k-1)!!}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (1)$$

где $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $|x| \leq 1$. Равенство в неравенстве (1) достигается только для полиномов $P_n(\cdot) = cT_n(\cdot)$, $|c| = 1$, в точках $x = \pm 1$. При $k = 1$ неравенство (1) А. А. Марков доказал в 1889 г. [2].

Из неравенства (1) следует неравенство

$$|P_n^{(k)}(x)| \leq |T_n^{(k)}(x)|, \quad |x| > 1, \quad \|P_n\|_{[-1, 1]} \leq 1, \quad 0 \leq k \leq n, \quad (2)$$

и равенство в (2) имеет место только для полиномов $P_n(\cdot) = cT_n(\cdot)$, $|c| = 1$.

А. Шеффер и Р. Даффин [3] получили при $\|P_n\|_{[-1, 1]} \leq 1$ оценку

$$|P_n^{(k)}(x)| \leq N_{n,k}(x) = \begin{cases} M_{n,k}(x) = |T_n^{(k)}(x) + iS_n^{(k)}(x)|, & |x| \leq \xi_1^{(k)}, \\ |T_n^{(k)}(x)|, & |x| \geq \xi_1^{(k)}, \end{cases} \quad (3)$$

где $S_n(x) = \sin(n \arccos x) = n^{-1}(1 - x^2)^{1/2}T_n'(x)$, $\xi_1^{(k)}$ – максимальный нуль функции $S_n^{(k)}(\cdot)$ на отрезке $[-1, 1]$, $i^2 = -1$. Функция $N_{n,k}(\cdot)$ возрастает на отрезке $[0, \infty]$. Равенство в оценке (3) достигается только для полиномов $\pm T_n(\cdot)$ в $n - k + 1$ нулях функции $S_n^{(k)}(\cdot)$ и при $|x| \geq \xi_1^{(k)}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 05-01-00275, 08-01-00450).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В работе [3] доказано, что если для полинома $P_{n-k}(\cdot)$ степени $n - k$ верно неравенство $|P_{n-k}(x)| \leq M_{n,k}(x)$, $|x| \leq \xi_1^{(k)}$, то справедливо неравенство

$$|P_{n-k}(x)| \leq |T_n^{(k)}(x)|, \quad |x| > \xi_1^{(k)},$$

и равенство в нем имеет место только для $P_{n-k}(\cdot) = \pm T_n^{(k)}(\cdot)$.

При $k = 1$ оценка (3) получена А. А. Марковым. Обобщению неравенства (1) в различных пространствах и для различных метрик полиномов посвящено много работ (см. обзоры [4] и [5]). Настоящая работа посвящена получению многомерных аналогов неравенства (1) с чебышевской нормой для полиномов.

Результаты экстремальных задач для производных полиномов применяются в теории приближений, например в задачах восстановления функционалов производных полиномов по неточной информации [6]. При этом значение точной оценки является погрешностью оптимального метода восстановления. Если определена сетка узлов в обобщенном равенстве Рисса, то определен и оптимальный метод восстановления.

Пусть X – нормированное векторное пространство над $\mathbb{R}$. Через $\mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$ обозначим пространство всех полиномов степени не выше n , отображающих X в $\mathbb{R}$, т. е. множество всех функционалов вида

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n u_j(x, \dots, x), \quad x \in X,$$

где $u_j: X^j \rightarrow \mathbb{R}$ – полилинейный непрерывный функционал порядка j .

Значение k -й производной Фреше полинома P_n в точке x на кортеже векторов $(h_1, \dots, h_k)$ будем обозначать через $P_n^{(k)}(x)[h_1, \dots, h_k]$. Если $h_1 = \dots = h_s = h$, то

$$P_n^{(k)}(x)[h^s, h_{s+1}, \dots, h_k] = P_n^{(k)}(x)[h_1, \dots, h_k].$$

Пусть $\mathcal{L}^k = \mathcal{L}^k(X, \mathbb{R})$ – пространство ограниченных симметрических полилинейных функционалов порядка k , отображающих X^k в $\mathbb{R}$, и выполнено равенство

$$\|P_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k} = \sup_{\|h_i\|=1, 1 \leq i \leq k} |P_n^{(k)}(x)[h_1, \dots, h_k]|.$$

В настоящей работе K – выпуклое ограниченное замкнутое тело, симметричное относительно θ_X – нуля пространства X , $B = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$. Для ограниченного множества $G \subset X$ положим

$$\|P_n\|_G = \sup_{x \in G} |P_n(x)|, \quad \|P_n^{(k)}\|_G = \sup_{x \in G} \|P_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k}.$$

Мы будем использовать следующие характеристики тела K : функцию Минковского $\rho(\cdot)$ для тела K , $r_h = \|h\|/\rho(h)$, $r(K) = \inf_{\|h\|=1} r_h$, $\rho_1(x, k) = \max\{\rho(x), \cos(\{k\}_2\pi/(2n))\}$, где $\{k\}_2$ – остаток от деления k на 2.

В работе [7] автором получены следующие неравенства для $K \subset X$, $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$, $\|P_n\|_K \leq 1$:

$$|P_n^{(k)}(x)[h^k]| \leq \frac{T_n^{(k)}(1)}{r_h^k}, \quad x \in K \subset X, \quad (4)$$

$$|P_n^{(k+s)}(x)[h^k, \bar{x}^s]| \leq \frac{T_n^{(k+s)}(\rho(x))}{r_h^k r_{\bar{x}}^s}, \quad \rho(x) \geq 1, \quad (5)$$

$$|P_n^{(k)}(x)[h_1, \dots, h_k]| \leq \frac{c_k T_n^{(k)}(\rho_1(x, 2))}{r^k(K)}, \quad x \in X, \quad (6)$$

где $\|h\| = \|h_i\| = 1$, $i = \overline{1, k}$, $\bar{x} = x/\|x\|$, $1 \leq c_k \leq k^k/k!$, и если X – предгильбертово пространство, то $c_k = 1$. В настоящей работе, в частности, будут доказаны необходимые и достаточные условия для выполнения равенства в (4), (5) и для m -мерного евклидова пространства E^m – в (6). В работах автора [8] и [9] для $K \subset X$, $\|P_n\|_K \leq 1$ установлено неравенство

$$|P_n^{(k+s)}(x)[h_1, \dots, h_k, \bar{x}^s]| \leq \frac{\alpha_k N_{n,k+s}(\rho(x))}{r_{h_1} \dots r_{h_k} r_{\bar{x}}^s}, \quad x \in X, \quad (7)$$

где $\alpha_k \leq k^{k/2}$, $\|h_i\| = 1$, $i = \overline{1, k}$. Если $k = 1$ и $\rho(x)$ является нулем функции $S_n^{(1+s)}(\cdot)$ либо $\rho(x) \geq \xi_1^{(1+s)}$, то существуют P_n и h_1 , для которых в (7) имеет место равенство. При $k = 1$ и $s = 0$ оценку (7) установил Я. Сарантопулос [10]. Для $K = B \subset E^m$, $k = 1$, $s = 0$ неравенство (7) доказал О. Д. Келлог [11]. Если $K \subset X$ и $h_1 = h_2 = \dots = h_k = h$, то $\alpha_2 \leq 1.0858$, $\alpha_3 \leq (1.726n^2 + 1.025)/(n^2 - 1)$, $\alpha_4 \leq 2.43(n^2 + 1)/(n^2 - 4)$ [9]. Если K – тело из E^m , ограниченное эллипсоидом, то $\alpha_k = 1$ [8], [9]. Позднее для евклидова шара это получили Г. А. Муньос и Я. Сарантопулос [12]. В работах [13] и [14] соответственно для $P_n \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ и $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$, $X \neq \mathbb{R}$, независимо и одновременно установлено равенство

$$\sup_{V \in W, \|P_n\|_V \leq 1} \|P_n^{(1)}\|_V \omega_V = 2n \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4n} \right),$$

где W – класс всех выпуклых ограниченных замкнутых тел в X , ω_V – ширина тела V .

§ 2. Оценки производных полиномов

Пусть $x, h \in X$, $K \subset X$, $\|h\| = 1$, $y \in \operatorname{span}\{h, x\}$ и $y = t_1 r_x \bar{x} + t_2 r_h h$, $A_0 = \{y: |t_1| + |t_2| \leq 1\}$, $A_1 = \{y: |t_1 + t_2| \leq 1\}$, $A_2 = \{y: |t_1 - t_2| \leq 1\}$, $K_{xh} = K \cap \operatorname{span}\{h, x\}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $K \subset X$, $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$ и $\|P_n\|_K \leq 1$, $\|h\| = 1$, $0 < k < n$, $0 \leq s \leq n - k$, $h \neq \lambda x$. Справедливы следующие неравенства:

$$|P_n^{(k)}(x)[h^k]| < \frac{T_n^{(k)}(\rho_1(x, k))}{r_h^k}, \quad \rho(x) < \rho_1(x, k), \quad (8)$$

$$|P_n^{(k+s)}(x)[h^k, \bar{x}^s]| \leq \frac{T_n^{(k+s)}(\rho_1(x, k))}{r_h^k r_{\bar{x}}^s}, \quad \rho(x) = \rho_1(x, k). \quad (9)$$

Равенство в (9) при $k+s > 1$ либо при $k=1, s=0$ и $\rho(x) > \cos(\pi/(2n))$ имеет место тогда и только тогда, когда для K, P_n, x, h выполнен один из трех наборов условий:

1) $K_{xh} = A_0, P_n(y) = \gamma((1-\alpha)T_n(t_1+t_2) + (-1)^k \alpha T_n(t_1-t_2)), 0 \leq \alpha \leq 1, |\gamma| = 1;$

2) $K_{xh} \setminus A_0 \neq \emptyset, K_{xh} \subset A_1, P_n(y) = \gamma T_n(t_1+t_2), |\gamma| = 1;$

3) $K_{xh} \setminus A_0 \neq \emptyset, K_{xh} \subset A_2, P_n(y) = \gamma T_n(t_1-t_2), |\gamma| = 1.$

Если $k=1, s=0$ и $\rho(x) = \cos(\pi/(2n))$, то равенство в (9) имеет место тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:

4) либо $K_{xh} \subset A_1$, либо $K_{xh} \subset A_2$, при этом выполнено тождество $P_n(x \cos \theta + \sin(\pi/(2n))r_h h \sin \theta) = \pm \sin(n\theta).$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $k=n$ неравенство (9) и при $k < n$ и $h = \bar{x}$ неравенства (8) и (9) вытекают из неравенства Шеффера и Даффина, и равенство в (9) будет иметь место только при $P_n(th) = \gamma T_n(t/r_h), |\gamma| = 1.$

Доказательству теоремы 1 предположим несколько лемм.

Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ квадрат $K_2 = \{(t_1, t_2): |t_1| + |t_2| \leq 1\}$. Пусть

$$\begin{aligned}\bar{T}_n(t_1, t_2) &= \frac{1}{2}(T_n(t_1+t_2) + T_n(t_1-t_2)), \\ \tilde{T}_n(t_1, t_2) &= \frac{1}{2}(T_n(t_1+t_2) - T_n(t_1-t_2)), \\ S_0 &= \{(t_1, t_2) \in K_2: |\bar{T}_n(t_1, t_2)| = 1\}, \\ S_1 &= \{(t_1, t_2) \in K_2: |\tilde{T}_n(t_1, t_2)| = 1\}, \quad S = S_0 \cup S_1.\end{aligned}$$

Множество S_0 состоит из точек пересечения прямых $t_1+t_2 = \cos(i\pi/n)$ с прямыми $t_1-t_2 = \cos(j\pi/n)$, $i, j = 0, n$, при $i-j \equiv 0 \pmod{2}$, а множество S_1 состоит из точек пересечения прямых того же вида, но при $i-j \equiv 1 \pmod{2}$. Множества S_0 и S_1 симметричны, каждое относительно прямых $t_2 = 0$ и $t_1 = 0$. Пусть $\bar{Q}_n$ и $\tilde{Q}_n$ – полиномы из $\mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, соответственно четный и нечетный по переменной t_2 , т. е. полиномы вида

$$\bar{Q}_n(t_1, t_2) = \sum_{0 \leq i+2j \leq n} \alpha_{ij} t_1^i t_2^{2j}, \quad \tilde{Q}_n(t_1, t_2) = \sum_{1 \leq i+2j+1 \leq n} \beta_{ij} t_1^i t_2^{2j+1}.$$

Обозначим через $\bar{\mathfrak{P}}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ и $\tilde{\mathfrak{P}}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ соответственно пространства четных и нечетных по переменной t_2 полиномов из $\mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Пусть $E(a)$ – множество всех точек эллипса

$$\frac{t_1^2}{a^2} + \frac{t_2^2}{1-a^2} = 1, \quad 0 < a^2 < 1.$$

ЛЕММА 1 [7]. Пусть точка $t = (t_1, t_2)$ принадлежит $E(a)$. Тогда выполнены равенства

$$\bar{T}_n(t_1, t_2) = \cos(n\theta) \cos(n\varphi), \quad (10)$$

$$\tilde{T}_n(t_1, t_2) = \sin(n\theta) \sin(n\varphi), \quad (11)$$

где $\cos \theta = t_1/a, \sin \theta = t_2/b, b = \sqrt{1-a^2}, \cos \varphi = a, \sin \varphi = b.$

Введем обозначения

$$a_i = \cos\left(\frac{i\pi}{n}\right), \quad b_i = \sin\left(\frac{i\pi}{n}\right), \quad 0 \leq i \leq \left[\frac{n}{2}\right],$$

$$d_i = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right), \quad e_i = \sin\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right), \quad 1 \leq i \leq \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

ЛЕММА 2 [7]. Точки множества $S_0^+ = \{t = (t_1, t_2) \in S_0 : t_2 \geq 0\}$ имеют представление $t = (\pm a_{i_0} a_{i_1}, b_{i_0} b_{i_1})$, $0 \leq i_0 \leq i_1 \leq [n/2]$. Количество точек множества S_0^+ равно размерности пространства $\mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Если $\bar{Q}_n(t) = 0$ для всех $t \in S_0^+$, то полином $\bar{Q}_n(\cdot)$ тождественно равен нулю. Соответственно, точки из множества $S_1^+ = \{t = (t_1, t_2) \in S_1 : t_2 > 0\}$ имеют представление $t = (\pm d_{i_0} d_{i_1}, e_{i_0} e_{i_1})$, $1 \leq i_0 \leq i_1 \leq [(n+1)/2]$, количество точек множества S_1^+ равно размерности пространства $\tilde{\mathfrak{P}}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Если $\tilde{Q}_n(t) = 0$ для всех $t \in S_1^+$, то полином $\tilde{Q}_n(\cdot)$ тождественно равен нулю.

ЛЕММА 3 [12]. Пусть H – гильбертово пространство, и пусть $Q_n \in \mathfrak{P}_n(H, \mathbb{R})$, $n \geq 2$, и $Q_n(x) = 0$ при $\|x\| = 1$. Тогда существует полином $U_{n-2} \in \mathfrak{P}_{n-2}(H, \mathbb{R})$ такой, что

$$Q_n(x) = (1 - \|x\|^2)U_{n-2}(x), \quad x \in H.$$

Определим множества $F = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : t_1 \geq 0, 1 - \varepsilon \leq t_1 + |t_2| \leq 1\}$, $\varepsilon > 0$, $M_1 = \{(t_1, 0) \in S_0\}$.

ЛЕММА 4. Пусть $Q_n \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $\|Q_n\|_{S \cup F} \leq 1$, $Q_n(\cdot, \cdot) = \bar{Q}_n(\cdot, \cdot) + \tilde{Q}_n(\cdot, \cdot)$. Если $|\bar{Q}_n(t_1, t_2)| \equiv 1$ на множестве $S_0 \setminus M_1$, то $\tilde{Q}_n(\cdot, \cdot) = c_1 \tilde{T}_n(\cdot, \cdot)$, $|c_1| \leq 1$. Если $|\tilde{Q}_n(t_1, t_2)| \equiv 1$ на множестве S_1 , то $\bar{Q}_n(\cdot, \cdot) = c_2 \bar{T}_n(\cdot, \cdot)$, $|c_2| \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения полиномов $\bar{Q}_n$ и $\tilde{Q}_n$ имеем неравенство

$$|\bar{Q}_n(t_1, t_2)| + |\tilde{Q}_n(t_1, t_2)| \leq \|Q_n\|_{S \cup F}, \quad (t_1, t_2) \in S \cup F. \quad (12)$$

Пусть $|\bar{Q}_n(t_1, t_2)| \equiv 1$ на множестве $S_0 \setminus M_1$. Тогда из (12) следует, что $\tilde{Q}_n(t_1, t_2) \equiv 0$ на S_0 . Определим тригонометрический полином

$$R_n(\theta) = \tilde{Q}_n(a_i \cos \theta, b_i \sin \theta),$$

где точки $(a_i \cos \theta, b_i \sin \theta)$ принадлежат $E(a_i)$, $1 \leq i \leq [(n+1)/2] - 1$ (см. обозначения перед леммой 1 и леммой 2). В силу леммы 1 полином $R_n(\theta)$ имеет $2n$ нулей в точках $\theta = j\pi/n$, $j = \overline{0, 2n-1}$. Следовательно, $R_n(\theta) = c \sin(n\theta)$. Пусть $U_n(\theta) = \bar{Q}_n(a_i \cos \theta, b_i \sin \theta)$. Точка $(a_i^2, 1 - a_i^2)$ принадлежит S_0 , $E(a_i)$ и прямой $t_1 + t_2 = 1$, поэтому из условий леммы для тригонометрических полиномов $R_n(\theta)$ и $U_n(\theta)$ имеем равенства

$$U'_n\left(\frac{i\pi}{n}\right) = 0, \quad U'_n\left(\frac{i\pi}{n}\right) + R'_n\left(\frac{i\pi}{n}\right) = cn \cos(i\pi) = 0.$$

Отсюда получаем, что $c = 0$. Если $(t_1, t_2) \in E(a_i)$, то из леммы 1 следует

$$\tilde{T}_n(t_1, t_2) = \sin(n\theta) \sin(n\varphi) = 0,$$

поскольку $\varphi = i\pi/n$. Поэтому при $(t_1, t_2) \in E(a_i)$, $1 \leq i \leq [(n+1)/2] - 1$, имеем

$$\tilde{Q}_n(t_1, t_2) = \tilde{T}_n(t_1, t_2) = 0. \quad (13)$$

Пусть $n \equiv 0 \pmod{2}$; тогда точки $(0, \cos(j\pi/n))$, $j = \overline{0, n}$, принадлежат S_0 . Отсюда $\tilde{Q}_n(\cdot, \cdot)$ и $\tilde{T}_n(\cdot, \cdot)$ имеют вид

$$\tilde{Q}_n(t_1, t_2) = t_1 t_2 \bar{U}_{n-2}(t_1, t_2), \quad \tilde{T}_n(t_1, t_2) = t_1 t_2 \bar{V}_{n-2}(t_1, t_2). \quad (14)$$

Из (13), (14) и леммы 3 получаем

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_n(t_1, t_2) &= \lambda_1 t_1 t_2 \prod_{1 \leq i \leq n/2-1} \left(\frac{t_1^2}{a_i^2} + \frac{t_2^2}{b_i^2} \right), \\ \tilde{T}_n(t_1, t_2) &= \lambda_2 t_1 t_2 \prod_{1 \leq i \leq n/2-1} \left(\frac{t_1^2}{a_i^2} + \frac{t_2^2}{b_i^2} \right). \end{aligned}$$

Поэтому $\tilde{Q}_n = c_1 \tilde{T}_n$ и неравенство $|c_1| \leq 1$ вытекает из (12).

Для $n \equiv 1 \pmod{2}$ доказательство аналогично. В этом случае число эллипсов $E(a_i)$ равно $(n-1)/2$ и полиномы $\tilde{Q}_n$ и $\tilde{T}_n$ имеют вид

$$\tilde{Q}_n(t_1, t_2) = t_2 \bar{Q}_{n-1}(t_1, t_2), \quad \tilde{T}_n(t_1, t_2) = t_2 \bar{V}_{n-1}(t_1, t_2).$$

Если $|\tilde{Q}_n(t_1, t_2)| \equiv 1$ на S_1 , то доказательство леммы также аналогично. Вначале показывается, что полиномы $\bar{Q}_n(t_1, t_2)$ и $\bar{T}_n(t_1, t_2)$ равны нулю на эллипсах $E(d_i)$, $1 \leq i \leq [n/2]$, затем применяется лемма 3. При $n \equiv 0 \pmod{2}$ число эллипсов $E(d_i)$ равно $n/2$, а при $n \equiv 1 \pmod{2}$ точки $(0, \cos(j\pi/n))$, $j = \overline{0, n}$, принадлежат S_1 , и поэтому полиномы $\bar{Q}_n(\cdot, \cdot)$ и $\bar{T}_n(\cdot, \cdot)$ имеют вид

$$\bar{Q}_n(t_1, t_2) = t_1 \bar{Q}_{n-1}(t_1, t_2), \quad \bar{T}_n(t_1, t_2) = t_1 \bar{V}_{n-1}(t_1, t_2).$$

Лемма доказана.

Пусть множество G равно либо S_0^+ , либо S_1^+ и пространство $\mathcal{P}_n(G)$ обозначает соответственно либо $\bar{\mathfrak{P}}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, либо $\mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Назовем элементарным полиномом на G с носителем в точке $t_* = (t_{1,*}, t_{2,*}) \in G$ полином $Q_{n,t_*}(\cdot, \cdot) \in \mathcal{P}_n(G)$ такой, что $Q_{n,t_*}(t_1, t_2) = 0$ для точек $(t_1, t_2) \in G \setminus t_*$, и в точке t_* равный либо $\bar{T}_n(t_{1,*}, t_{2,*})$, либо $\tilde{T}_n(t_{1,*}, t_{2,*})$ в зависимости от того, каким пространством является $\mathcal{P}_n(G)$.

ЛЕММА 5 [7]. Для элементарных полиномов Q_{n,t_*} имеют место неравенства

$$Q_{n,t_*}^{(s+k)}(t_1, t_2) [(1, 0)^s, (0, 1)^k] \geq 0, \quad t_1 \geq 1, \quad t_2 \geq 0, \quad t_* \in G, \quad (15)$$

и представления

$$\bar{Q}_{n,t_*}(t_1, t_2) = c_{i_0, i_1} R_{i_0, i_1}(t_1, t_2) (t_1 + t_{1,*})^\alpha \prod_{\substack{0 \leq i \leq [n/2] \\ i \neq i_0, i_1}} U_i(t_1, t_2), \quad (16)$$

где $t_* = (\pm a_{i_0} a_{i_1}, b_{i_0} b_{i_1})$, $0 \leq i_0 \leq i_1 \leq [n/2]$, $\alpha = \text{sign}(|t_{1,*}|)$,

$$U_0(t_1, t_2) = t_2^2, \quad U_i(t_1, t_2) = \frac{t_1^2}{a_i^2} + \frac{t_2^2}{b_i^2} - 1, \quad 1 \leq i \leq \left[\frac{n+1}{2} \right] - 1,$$

$$U_{n/2}(t_1, t_2) = t_1 \quad \text{при } n \equiv 0 \pmod{2}, \quad R_{i_0, i_0}(t_1, t_2) \equiv 1,$$

и при $i_0 < i_1$

$$R_{i_0, i_1}(t_1, t_2) = \frac{t_1^2}{a^2} + \frac{t_2^2}{b^2} - 1, \quad a^2 = \frac{d - 2a_{i_0}^2 a_{i_1}^2}{2 - d},$$

$$b^2 = \frac{d - 2a_{i_0}^2 a_{i_1}^2}{d}, \quad d = a_{i_0}^2 + a_{i_1}^2, \quad a^2 \leq 1, \quad b^2 \leq 1,$$

$a = 1$ только при $i_0 = 0$ и $b = 1$ только при $i_1 = n/2$. Эллипс $R_{i_0, i_1}(t_1, t_2) = 0$ пересекает прямую $t_1 + t_2 = 1$ в точках $(a_{i_0}^2, 1 - a_{i_0}^2)$ и $(a_{i_1}^2, 1 - a_{i_1}^2)$. Аналогично,

$$\tilde{Q}_{n, t_*}(t_1, t_2) = \lambda_{i_0, i_1} R_{i_0, i_1}^*(t_1, t_2) t_2 (t_1 + t_{1,*})^\alpha \prod_{\substack{1 \leq i \leq [(n+1)/2] \\ i \neq i_0, i_1}} V_i(t_1, t_2), \quad (17)$$

где $t_* = (\pm d_{i_0} d_{i_1}, e_{i_0} e_{i_1})$, $1 \leq i_0 \leq i_1 \leq [(n+1)/2]$, $\lambda_{i_0, i_1} > 0$, $\alpha = \text{sign}(|t_{1,*}|)$,

$$V_i(t_1, t_2) = \frac{t_1^2}{d_i^2} + \frac{t_2^2}{e_i^2} - 1, \quad 1 \leq i \leq \left[\frac{n}{2} \right],$$

$$V_{(n+1)/2}(t_1, t_2) = t_1 \quad \text{при } n \equiv 1 \pmod{2}, \quad R_{i_0, i_0}^*(t_1, t_2) \equiv 1,$$

и при $i_0 < i_1$

$$R_{i_0, i_1}^*(t_1, t_2) = \frac{t_1^2}{a^2} + \frac{t_2^2}{b^2} - 1, \quad a^2 = \frac{d - 2d_{i_0}^2 d_{i_1}^2}{2 - d},$$

$$b^2 = \frac{d - 2d_{i_0}^2 d_{i_1}^2}{d}, \quad d = d_{i_0}^2 + d_{i_1}^2, \quad a^2 < d_1^2, \quad b^2 \leq 1,$$

$b = 1$ только при $i_1 = (n+1)/2$. Эллипс $R_{i_0, i_1}^*(t_1, t_2) = 0$ пересекает прямую $t_1 + t_2 = 1$ в точках $(d_{i_0}^2, 1 - d_{i_0}^2)$ и $(d_{i_1}^2, 1 - d_{i_1}^2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Неравенство (15) для элементарных полиномов $\tilde{Q}_{n, t_*} \in \tilde{\mathfrak{P}}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ справедливо и для точек более широкой области $\Omega_1 = \{(t_1, t_2) : t_2 \geq f(t_1), t_1 \geq d_1^2\}$, где $d_1 = \cos(\pi/(2n))$ и

$$f(t_1) = \begin{cases} (1 - t_1^2/d_1^2)^{1/2} e_1, & d_1^2 \leq t_1 \leq d_1, \\ 0, & t_1 \geq d_1. \end{cases}$$

Все сомножители в разложении (17) полинома $\tilde{Q}_{n, t_*}$ и их производные любого порядка по координатам t_1 и t_2 неотрицательны при $(t_1, t_2) \in \Omega_1$. Поэтому из формулы для производных произведения функций $F(u, v) = \prod_{i=1}^m \varphi_i(u, v)$:

$$F_{u^s v^k}^{(s+k)}(u, v) = \sum_{s_1 + \dots + s_m = s} \sum_{k_1 + \dots + k_m = k} C(s, s_1, \dots, s_m) \times C(k, k_1, \dots, k_m) \varphi_{1_{u^{s_1} v^{k_1}}}^{(s_1+k_1)}(u, v) \dots \varphi_{m_{u^{s_m} v^{k_m}}}^{(s_m+k_m)}(u, v), \quad (18)$$

где $C(k, k_1, \dots, k_m) = \frac{k!}{k_1! \dots k_m!}$, получаем неравенство (15) для $\tilde{Q}_{n,t_*}$, $t_* = (\pm d_{i_0} d_{i_1}, e_{i_0} e_{i_1})$, $1 \leq i_0 \leq i_1 \leq [(n+1)/2]$, $(t_1, t_2) \in \Omega_1$.

ЛЕММА 6. Пусть $k, s \geq 0$, $t^1 = (t_1^1, t_2^1) \in \mathbb{R}^2$, $\|\bar{Q}_n\|_{S_0} \leq 1$, $\|\tilde{Q}_n\|_{S_1} \leq 1$. Справедливы неравенства

$$|(\bar{Q}_n)^{(s+k)}_{t_1^s t_2^k}(t_1^1, t_2^1)| \leq |(\bar{T}_n)^{(s+k)}_{t_1^s t_2^k}(t_1^1, t_2^1)| = (\bar{T}_n)^{(s+k)}_{t_1^s t_2^k}(|t_1^1|, |t_2^1|), \quad |t_1^1| \geq 1, \quad (19)$$

$$|(\tilde{Q}_n)^{(s+k)}_{t_1^s t_2^k}(t_1^1, t_2^1)| \leq |(\tilde{T}_n)^{(s+k)}_{t_1^s t_2^k}(t_1^1, t_2^1)| = (\tilde{T}_n)^{(s+k)}_{t_1^s t_2^k}(|t_1^1|, |t_2^1|), \quad (|t_1^1|, |t_2^1|) \in \Omega_1. \quad (20)$$

Равенство в (19) имеет место только в двух случаях:

а) $(\bar{Q}_n)^{(s+k)}_{t_1^s t_2^k}(t_1^1, t_2^1) = 0$ для любого $\bar{Q}_n \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$;

б) выполнено равенство $\bar{Q}_n(t_{1,i}, t_{2,i}) = \gamma \bar{T}_n(t_{1,i}, t_{2,i})$ ($|\gamma| = 1$ и $\gamma = \text{const}$) во всех точках $(t_{1,i}, t_{2,i}) \in S_0^+$ таких, что для элементарных полиномов $\bar{Q}_{n,(t_{1,i}, t_{2,i})}$ справедливо неравенство

$$\bar{Q}_{n,(t_{1,i}, t_{2,i})}^{(s+k)}(|t_1^1|, |t_2^1|) [(1, 0)^s, (0, 1)^k] > 0.$$

Равенство в (20) имеет место только при аналогичных соотношениях для полиномов $\tilde{Q}_n$, $\tilde{T}_n$ и $\tilde{Q}_{n,(t_{1,i}, t_{2,i})}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G = S_1^+$. Из определения элементарного полинома $Q_{n,t} \in \mathcal{P}_n(G)$ и леммы 2 имеем равенства для любого $Q_n \in \mathcal{P}_n(G)$:

$$Q_n(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^r Q_n(t_{1,i}, t_{2,i}) T_n(t_{1,i} + t_{2,i}) Q_{n,(t_{1,i}, t_{2,i})}(t_1, t_2), \quad (21)$$

$$(Q_n)^{(s+k)}_{t_1^s t_2^k}(t_1^1, t_2^1) = \sum_{i=1}^r Q_n(t_{1,i}, t_{2,i}) T_n(t_{1,i} + t_{2,i}) (Q_{n,(t_{1,i}, t_{2,i})})^{(s+k)}_{t_1^s t_2^k}(t_1^1, t_2^1),$$

где $(t_{1,i}, t_{2,i}) \in G$ и r — число точек множества G . Из (21) и замечания 3 следует, что неравенство (20) верно при $(t_1^1, t_2^1) \in \Omega_1$ и, следовательно, при $(|t_1^1|, |t_2^1|) \in \Omega_1$. Неравенство (19) доказывается аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из (21) и леммы 2 следует, что в неравенствах (19) и (20) равенство имеет место только для полиномов $\pm \bar{T}_n$ и $\pm \tilde{T}_n$ соответственно при выполнении следующего неравенства для всех элементарных полиномов $Q_{n,t_*} \in \mathcal{P}_n(G)$:

$$Q_{n,t_*}^{(s+k)}(|t_1^1|, |t_2^1|) [(1, 0)^s, (0, 1)^k] > 0 \quad \forall t_* \in G. \quad (22)$$

Условия, налагаемые на параметры k, s , и точки (t_1^1, t_2^1) из допустимых множеств, при которых неравенство (22) имеет место, легко определяются из формул (16)–(18). Для полиномов $\bar{Q}_{n,t_*}$, $t_* \in S_0^+$, приведем условия, при которых выполняется неравенство (22):

- 1) $k + s = n$, $2 \leq k \leq n - 1$, $k \equiv 0 \pmod{2}$;
- 2) $|t_1^1| > 1$, $t_2^1 \neq 0$, $k + s < n$, $s \leq n - 2$ и $k \leq n - 1$, если $n \equiv 1 \pmod{2}$, и $k \leq n - 2$, если $n \equiv 0 \pmod{2}$;

- 3) $|t_1^1| = 1, t_2^1 \neq 0, k + s < n, 1 \leq s \leq n - 2$ и $k \leq n - 2$;
 4) $|t_1^1| > 1, t_2^1 = 0, k + s < n, 2 \leq k, k \equiv 0 \pmod{2}$;
 5) $|t_1^1| = 1, t_2^1 = 0, k + s \leq n, 1 \leq s \leq n - 2, 2 \leq k < n, k \equiv 0 \pmod{2}$.

Ограничение $1 \leq s$ в пп. 3) и 5) при $t_1^1 = 1$ обусловлено тем, что в представлении элементарного полинома $\overline{Q}_{n,(-1,0)}$ есть сомножитель $(t_1 - 1)$, а для $t_1^1 = -1$ — сомножитель $(t_1 + 1)$.

Пусть $\Gamma_1 = \{(t_1, t_2): t_2 = f(t_1), d_1^2 \leq t_1 \leq d_1\} \cup \{(d_1^2, t_2): t_2 \geq f(d_1^2)\}$.

В неравенстве (20) условия, налагаемые на t_1^1, t_2^1, k и s , для единственности экстремального полинома следующие:

- 6) $k + s = n > 1, k \leq n - 1, k \equiv 1 \pmod{2}$;
 7) $(|t_1^1|, |t_2^1|) \in \Omega_1 \setminus \Gamma_1, t_2^1 \neq 0, k + s < n$ и $k \leq n - 1$, если $n \equiv 0 \pmod{2}$, и $k \leq n - 2$, если $n \equiv 1 \pmod{2}$;
 8) $(|t_1^1|, |t_2^1|) \in \Gamma_1, t_2^1 \neq 0, k + s < n, 1 \leq s$ и $k \leq n - 1$, если $n \equiv 0 \pmod{2}$, и $k \leq n - 2$, если $n \equiv 1 \pmod{2}$;
 9) $|t_1^1| > d_1, t_2^1 = 0, k + s < n, k \equiv 1 \pmod{2}$;
 10) $(|t_1^1|, |t_2^1|) = (d_1, 0), 1 < k + s < n, k \equiv 1 \pmod{2}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $P_n, Q_n \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|P_n\|_{[a,b]} = \|Q_n\|_{[a,b]} = 1, c(n) = n/2 + 1, c_1(n) = n/2$, если $n \equiv 0 \pmod{2}$, $c(n) = c_1(n) = (n + 1)/2$, если $n \equiv 1 \pmod{2}$, $P_n(t_i) = Q_n(t_i), i = \overline{1, c(n)}$, где t_i — различные точки и $|Q_n(t_i)| = 1, t_i \in (a, b), i = \overline{1, c_1(n)}$. Тогда $P_n(t) \equiv Q_n(t)$. Пусть $R_n(\cdot), V_n(\cdot)$ — тригонометрические полиномы порядка n с действительными коэффициентами. Пусть $\|R_n\|_{C([0, 2\pi])} = \|V_n\|_{C([0, 2\pi])} = 1, R_n(\theta_i) = V_n(\theta_i), i = \overline{1, n+1}$, где θ_i — различные точки из интервала $[0, 2\pi]$ и $|R_n(\theta_i)| = 1, i = \overline{1, n}$. Тогда $R_n(\theta) \equiv V_n(\theta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в первом случае полином $P_n(\cdot) - Q_n(\cdot)$ имеет $n + 1$ нулей с учетом кратности. Во втором случае полином $R_n(\cdot) - V_n(\cdot)$ имеет $2n + 1$ нулей с учетом кратности на интервале $[0, 2\pi]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Пусть $t_1^1 \geq 1, t_2^1 \geq 0$. Рассмотрим экстремальные задачи

$$(\overline{Q}_n)^{(s+k)}_{t_1^s t_2^k}(t_1^1, t_2^1) \rightarrow \max, \quad \|\overline{Q}_n\|_{S_0} \leq 1, \quad (23)$$

$$(\overline{Q}_n)^{(s+k)}_{t_1^s t_2^k}(t_1^1, t_2^1) \rightarrow \max, \quad \|\overline{Q}_n\|_{K_2} \leq 1. \quad (24)$$

Это задачи выпуклого программирования, и поскольку экстремальные значения производных полиномов в задачах (24) и (23) равны, то множество экстремалей задачи (24) содержится во множестве экстремалей задачи (23). Отсюда и из предложения 1 вытекает, что условия единственности экстремали $\overline{T}_n$ в задаче (24) при $t_1^1 = 1, t_2^1 \geq 0$ будут следующие:

- а) $t_1^1 = 1, t_2^1 > 0, k + s < n, 0 \leq s \leq n - 2$ и $k \leq n - 1$, если $n \equiv 1 \pmod{2}$, и $k \leq n - 2$, если $n \equiv 0 \pmod{2}$;
 б) $t_1^1 = 1, t_2^1 = 0, k + s \leq n, 0 \leq s \leq n - 2, 2 \leq k < n, k \equiv 0 \pmod{2}$.

Пусть

$$W_k = \begin{cases} \Omega_0 = \{(t_1, t_2): t_1 \geq 1, t_2 \geq 0\}, & \text{если } k \equiv 0 \pmod{2}, \\ \{(t_1, t_2): t_1 \geq d_1, t_2 = 0\} \cup \Omega_0, & \text{если } k \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

ЛЕММА 7. Пусть $Q_n \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ и $\|Q_n\|_{K_2} \leq 1$. Тогда справедливо неравенство

$$|(Q_n)_{t_1^s t_2^k}^{(s+k)}(t_1^1, t_2^1)| \leq T_n^{(s+k)}(|t_1^1| + |t_2^1|), \quad (|t_1^1|, |t_2^1|) \in W_k, \quad (25)$$

и множество экстремальных полиномов $\widehat{Q}_n$, для которых имеет место равенство в (25) в зависимости от значений параметров k, s, t_1^1, t_2^1 , описывается следующими соотношениями:

а) если $k + s = n > 1, k \leq n - 1, s \leq n - 1$, то $\widehat{Q}_n = \pm(\widetilde{T}_n + c\overline{T}_n)$, $|c| \leq 1$, при $k \equiv 1 \pmod{2}$, и $\widehat{Q}_n = \pm(\overline{T}_n + c\widetilde{T}_n)$, $|c| \leq 1$, при $k \equiv 0 \pmod{2}$ и $k \geq 2$;

б) если $t_1^1 \geq 1, t_2^1 > 0, k + s < n$, то $\widehat{Q}_n(t_1, t_2) = \pm T_n(t_1 + t_2)$;

в) если $k \equiv 0 \pmod{2}, t_1^1 \geq 1, t_2^1 = 0, 2 \leq k, k + s < n$, то $\widehat{Q}_n = \pm(\overline{T}_n + c\widetilde{T}_n)$, где $|c| \leq 1$;

г) если $k \equiv 1 \pmod{2}, t_1^1 \geq d_1, t_2^1 = 0, k + s < n$ и либо $k + s > 1$, либо $k = 1, s = 0$ и $t_1 > d_1$, то $\widehat{Q}_n = \pm(\widetilde{T}_n + c\overline{T}_n)$, где $|c| \leq 1$;

д) если $k = 1, s = 0, t_1^1 = d_1, t_2^1 = 0$, то $\widehat{Q}_n(d_1 \cos \theta, e_1 \sin \theta) \equiv \pm \sin(n\theta)$;

е) если $s = n, k = 0$, то $\widehat{Q}_n(t_1, 0) \equiv \pm T_n(t_1)$;

ж) если $t_1^1 \geq 1, t_2^1 = 0, k = 0, s \geq 1$, то $\widehat{Q}_n(t_1, 0) \equiv \pm T_n(t_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\|Q_n\|_{K_2} \leq 1$ и $Q_n = \overline{Q}_n + \widetilde{Q}_n$. Тогда

$$|\overline{Q}_n(t_1, t_2)| + |\widetilde{Q}_n(t_1, t_2)| \leq 1, \quad (t_1, t_2) \in K_2. \quad (26)$$

Если $|t_1^1| \geq 1$, то неравенство (25) следует из неравенства (26) и суммы неравенств (19) и (20). Если $|t_1^1| \geq d_1, t_2^1 = 0$ и $k \equiv 1 \pmod{2}$, то $(\overline{Q}_n)_{t_1^s t_2^k}^{(s+k)}(t_1^1, 0) = 0$ и неравенство (25) вытекает из неравенств (26) и (20).

Пусть на полиноме $\widehat{Q}_n$ при определенных значениях параметров $k, s, (t_1^1, t_2^1) \in W_k$ имеет место равенство в (25). Если при этих параметрах в неравенстве (19) равенство выполняется только на полиномах $\pm \overline{T}_n$, то из (26) и леммы 4 следует, что $\widehat{Q}_n = \pm(\overline{T}_n + c\widetilde{T}_n)$, $|c| \leq 1$, и если $(\widetilde{T}_n)_{t_1^s t_2^k}^{(s+k)}(t_1^1, t_2^1) > 0$, то $\widehat{Q}_n(t_1, t_2) = \pm T_n(t_1 + t_2)$. Аналогичное свойство верно для полинома $\widetilde{T}_n$ и неравенства (20), поэтому п. а) утверждений леммы вытекает из пп. 1) и 6) замечания 4.

Аналогично, п. в) следует из пп. 4), 5) замечания 4 и замечания 5; п. г) вытекает из пп. 9) и 10) замечания 4.

Докажем п. б). Пусть $t_1^1 \geq 1, t_2^1 > 0$. Если $n \equiv 0 \pmod{2}$, то при $k + s < n$ из п. 7) замечания 4 следует, что только на полиномах $\pm \widetilde{T}_n$ выполняется равенство в (20), а $(\overline{T}_n)_{t_1^s t_2^k}^{(s+k)}(t_1^1, t_2^1) > 0$, поскольку для некоторых элементарных полиномов $\overline{Q}_{n, t_*}$ выполнено неравенство

$$\overline{Q}_{n, t_*}^{(s+k)}(t_1^1, t_2^1)[(1, 0)^s, (0, 1)^k] > 0$$

при этих значениях параметров k, s, t_1^1, t_2^1 . Из пп. 2) и 3) замечания 4 и замечания 5 следует, что при $n \equiv 1 \pmod{2}, 0 \leq k \leq n - 1, s \leq n - 2, k + s < n$, равенство в (19) при ограничении $\|\overline{Q}_n\|_{K_2} \leq 1$ выполнено только для полиномов $\pm \overline{T}_n$, а $(\widetilde{T}_n)_{t_1^s t_2^k}^{(s+k)}(t_1^1, t_2^1) > 0$ при этих параметрах. И наконец, из п. 7) замечания 4 вытекает, что при $n \equiv 1 \pmod{2}$ и $k = 0, s = n - 1$ равенство в (20)

выполняется только на полиномах $\pm \tilde{T}_n$ и $(\bar{T}_n)_{t_1^{n-1}}(t_1^1, t_2^1) > 0$; п. д) следует из неравенства С. Н. Бернштейна, а пп. е) и ж) – из неравенства В. А. Маркова.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $\|P_n\|_K \leq 1$, $\rho(x) = \rho_1(x, k)$, $\|h\| = 1$, $0 < k < n$, $k + s \leq n$, $x_0 = x/\rho(x)$. Ясно, что $x_0 = r_x \bar{x}$. Произведем замену

$$Q_n(t_1, t_2) = P_n(t_1 r_x \bar{x} + t_2 r_h h).$$

Тогда имеют место соотношения

$$|Q_n(t_1, t_2)| \leq 1, \quad |t_1| + |t_2| \leq 1, \quad (27)$$

$$(Q_n)_{t_1^s t_2^k}^{(s+k)}(\rho(x), 0) = r_x^s r_h^k P_n^{(s+k)}(x) [\bar{x}^s, h^k]. \quad (28)$$

Из (27), (28) и леммы 7 следует неравенство (9). Пусть $k + s > 1$ или $k = 1$, $s = 0$ и $\rho(x) > \cos(\pi/(2n))$. Достаточность каждого из трех наборов условий 1)–3) теоремы для выполнения равенства в (9) очевидна.

Докажем необходимость выполнения одного из наборов этих условий, если в неравенстве (9) имеет место равенство. Пусть для P_n , h и x выполнено равенство в (9). Тогда из (27), (28) и леммы 7 следует, что

$$Q_n = \pm(\bar{T}_n + c\tilde{T}_n), \quad |c| \leq 1, \quad \text{если } k \equiv 0 \pmod{2}$$

или

$$Q_n = \pm(\tilde{T}_n + c\bar{T}_n), \quad |c| \leq 1, \quad \text{если } k \equiv 1 \pmod{2}.$$

Пусть $k \equiv 0 \pmod{2}$ и $Q_n = \bar{T}_n + c\tilde{T}_n$. Если $k \equiv 1 \pmod{2}$, доказательство аналогично. Имеем равенство

$$Q_n(t_1, t_2) = \bar{T}_n(t_1, t_2) + c\tilde{T}_n(t_1, t_2) = (1 - \alpha)T_n(t_1 + t_2) + \alpha T_n(t_1 - t_2), \quad (29)$$

где $\alpha = (1 - c)/2$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Пусть $K_{xh} \setminus A_0 \neq \emptyset$ (см. определения перед теоремой 1). Тогда из (29) следует, что $\|P_n\|_{K_{xh}} > 1$ при $0 < \alpha < 1$. При $\alpha = 0$ имеем $\|P_n\|_{K_{xh}} = 1$ только в случае $K_{xh} \subset A_1$. При $\alpha = 1$ имеем $\|P_n\|_{K_{xh}} = 1$ только в случае $K_{xh} \subset A_2$.

Пусть $k = 1$, $s = 0$, $\rho(x) = \cos(\pi/(2n))$ и в (9) для полинома P_n имеет место равенство. Эллипс $x \cos \theta + \sin(\pi/(2n)) r_h h \sin \theta$ содержится в A_0 и касается прямых $y = t_1 r_x \bar{x} + (1 - t_1) r_h h$ и $y = t_1 r_x \bar{x} + (t_1 - 1) r_h h$ при $\cos \theta = \rho(x)$. Если множество K_{xh} содержит точки вне полосы A_1 и вне полосы A_2 , то в K_{xh} содержится эллипс $x \cos \theta + b r_h h \sin \theta$, где $b > \sin(\pi/(2n))$. Пусть $R_n(\theta) = P_n(x \cos \theta + b r_h h \sin \theta)$. Тогда из неравенства Бернштейна вытекает, что в (9) будет строгое неравенство. Отсюда следует п. 4) теоремы.

Докажем неравенство (8). Пусть $\|P_n\|_K \leq 1$, $x \in K$, $\rho(x) < \rho_1(x, k)$, $x_0 = x/\rho_1(x, k)$ и

$$Q_n(t_1, t_2) = P_n(t_1 x_0 + t_2 r_h h). \quad (30)$$

Из (30) и леммы 7 следует нестрогое неравенство в (8). Пусть в (8) имеет место равенство. Построим множества B_0, B_1, B_2 аналогично множествам A_0, A_1, A_2 , но по базису $x_0, r_h h$. Пусть $y = t_1 x_0 + t_2 r_h h$, $B_0 = \{y: |t_1| + |t_2| \leq 1\}$, $B_1 = \{y: |t_1 + t_2| \leq 1\}$, $B_2 = \{y: |t_1 - t_2| \leq 1\}$. Заменяем в формулировке теоремы множества A_0, A_1, A_2 на B_0, B_1, B_2 . Тогда для x, h, P_n, K должны быть выполнены условия одного из пунктов 1)–4) теоремы. Но это невозможно, поскольку x_0 – внутренняя точка тела K .

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Пусть $\rho(x) = \rho_1(x, k)$, $x_0 = x/\rho(x)$ и множество $B(x_0, \varepsilon) \cap \partial K$ не содержит прямолинейных отрезков. Тогда для любого нормированного $h \neq \lambda x$ и точки x будет выполнено строгое неравенство в (9). Аналогичное утверждение справедливо для фиксированного вектора h и любой точки $x \neq \lambda h$, $\rho(x) = \rho_1(x, k)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Из леммы 1 и леммы 3 следуют представления для $\bar{T}_n(\cdot, \cdot)$ и $\tilde{T}_n(\cdot, \cdot)$.

Для $n \equiv 0 \pmod{2}$

$$\bar{T}_n(t_1, t_2) = c_1 \prod_{1 \leq i \leq n/2} \left(\frac{t_1^2}{d_i^2} + \frac{t_2^2}{e_i^2} - 1 \right) = c_1 \bar{Q}_n(t_1, t_2).$$

Имеем $\bar{T}_n(0, 0) = T_n(0) = (-1)^{n/2}$, $\bar{Q}_n(0, 0) = (-1)^{n/2}$. Отсюда $c_1 = 1$. Для полинома $\tilde{T}_n$ получаем

$$\begin{aligned} \tilde{T}_n(t_1, t_2) &= c_2 t_1 t_2 \prod_{1 \leq i \leq n/2-1} \left(\frac{t_1^2}{a_i^2} + \frac{t_2^2}{b_i^2} - 1 \right) = c_2 \tilde{Q}_n(t_1, t_2), \\ (\tilde{T}_n)_{t_1 t_2}^{(2)}(0, 0) &= T_n^{(2)}(0) = (-1)^{(n-2)/2} n^2, \\ (\tilde{Q}_n)_{t_1 t_2}^{(2)}(0, 0) &= \lim_{\substack{t_1 \rightarrow 0 \\ t_2 \rightarrow 0}} \frac{\tilde{Q}_n(t_1, t_2)}{t_1 t_2} = (-1)^{(n-2)/2}, \end{aligned}$$

поэтому $c_2 = n^2$.

Для $n \equiv 1 \pmod{2}$

$$\begin{aligned} \bar{T}_n(t_1, t_2) &= c_3 t_1 \prod_{1 \leq i \leq (n-1)/2} \left(\frac{t_1^2}{d_i^2} + \frac{t_2^2}{e_i^2} - 1 \right) = c_3 \bar{Q}_n(t_1, t_2), \\ (\bar{T}_n)'_{t_1}(0, 0) &= T'_n(0) = (-1)^{(n-1)/2} n, \\ (\bar{Q}_n)'_{t_1}(0, 0) &= \lim_{t_1 \rightarrow 0} \frac{\bar{Q}_n(t_1, 0)}{t_1} = (-1)^{(n-1)/2}. \end{aligned}$$

Следовательно, $c_3 = n$. Для полинома $\tilde{T}_n$ получаем

$$\begin{aligned} \tilde{T}_n(t_1, t_2) &= c_4 t_2 \prod_{1 \leq i \leq (n-1)/2} \left(\frac{t_1^2}{a_i^2} + \frac{t_2^2}{b_i^2} - 1 \right) = c_4 \tilde{Q}_n(t_1, t_2), \\ (\tilde{T}_n)'_{t_2}(0, 0) &= T'_n(0) = (-1)^{(n-1)/2} n, \\ (\tilde{Q}_n)'_{t_2}(0, 0) &= \lim_{t_2 \rightarrow 0} \frac{\tilde{Q}_n(0, t_2)}{t_2} = (-1)^{(n-1)/2}. \end{aligned}$$

Отсюда $c_4 = n$.

В работе [1] В. А. Марков доказал точные оценки коэффициентов полиномов от одной переменной, нормированных на отрезке $[-1, 1]$. Это равносильно точным оценкам производных полиномов в нуле.

ТЕОРЕМА 2 [1]. Пусть $P_n \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $\|P_n\|_{[-1,1]} \leq 1$. Тогда:

а) справедливы неравенства

$$|P_n^{(k)}(0)| \leq |T_n^{(k)}(0)|, \quad \text{если } n - k \equiv 0 \pmod{2}, \quad (31)$$

$$|P_n^{(k)}(0)| \leq |T_{n-1}^{(k)}(0)|, \quad \text{если } n - k \equiv 1 \pmod{2}, \quad (32)$$

где $T_n^{(n-2i)}(0) = (-1)^i 2^{n-2i-1} \frac{n(n-1)!}{i!}$;

б) равенство в (31) при $n \geq k > 0$ имеет место только для полиномов $P_n(t) = \pm T_n(t)$;

с) равенство в (32) при $n > k > 0$, $n \neq 2$, будет только для полиномов $P_n(t) = \pm T_{n-1}(t)$, и при $n = 2$ и $k = 1$ равенство в (32) будет только для полиномов $P_2(t) = \pm \{t + c(t^2 - 1)\}$, $|c| \leq 1/2$.

Следующая теорема является обобщением теоремы 2 для полиномов от двух переменных.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $K_2 = \{t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : |t_1| + |t_2| \leq 1\}$, $P_n \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $\|P_n\|_{K_2} \leq 1$, $1 \leq s + k \leq n$. Тогда:

а) справедливы неравенства

$$|(P_n)_{t_1^s t_2^k}^{(s+k)}(0, 0)| \leq |T_n^{(s+k)}(0)|, \quad \text{если } n - s - k \equiv 0 \pmod{2}, \quad (33)$$

$$|(P_n)_{t_1^s t_2^k}^{(s+k)}(0, 0)| \leq |T_{n-1}^{(s+k)}(0)|, \quad \text{если } n - s - k \equiv 1 \pmod{2}; \quad (34)$$

б) в (33) при $k \geq 1$, $s \geq 1$ экстремальными будут только полиномы

$$\gamma \{ \alpha T_n(t_1 + t_2) + (-1)^k (1 - \alpha) T_n(t_1 - t_2) \}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad |\gamma| = 1; \quad (35)$$

если $s = 0$ ($k = 0$), то в (33) экстремальными будут только полиномы, для которых $P_n(0, t_2) = \pm T_n(t_2)$ ($P_n(t_1, 0) = \pm T_n(t_1)$);

с) в (34) при $k \geq 1$, $s \geq 1$ экстремальными будут только полиномы вида

$$P_n(t_1, t_2) = \gamma \{ \beta(t_1, t_2) T_{n-1}(t_1 + t_2) + (-1)^k (1 - \beta(t_1, t_2)) T_{n-1}(t_1 - t_2) \}, \quad (36)$$

где $\beta(t_1, t_2) = (1 + c_0 + c_1 t_1 + c_2 t_2)/2$, $|\gamma| = 1$, $\|P_n\|_{K_2} = 1$ (см. замечание 8);

д) в (34) при $s = 0$ ($k = 0$) экстремальными являются только полиномы, для которых $P_n(0, t_2)$ ($P_n(t_1, 0)$) – такие, как описаны в п. с) теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $k = 0$ или $s = 0$ утверждения теоремы вытекают из теоремы 2. Полином P_n имеет представление

$$P_n = \bar{P}_{n,1} + \bar{P}_{n,2} + \tilde{P}_{n,1} + \tilde{P}_{n,2},$$

где индекс 1 обозначает нечетный по t_1 полином, а индекс 2 – четный по t_1 полином. Если $\|P_n\|_{K_2} \leq 1$, то при $(t_1, t_2) \in K_2$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |\bar{P}_{n,1}(t_1, t_2) + \bar{P}_{n,2}(t_1, t_2)| + |\tilde{P}_{n,1}(t_1, t_2) + \tilde{P}_{n,2}(t_1, t_2)| &\leq 1, \\ |\bar{P}_{n,1}(t_1, t_2) + \tilde{P}_{n,1}(t_1, t_2)| + |\bar{P}_{n,2}(t_1, t_2) + \tilde{P}_{n,2}(t_1, t_2)| &\leq 1, \\ |\bar{P}_{n,2}(t_1, t_2) + \tilde{P}_{n,1}(t_1, t_2)| + |\bar{P}_{n,1}(t_1, t_2) + \tilde{P}_{n,2}(t_1, t_2)| &\leq 1. \end{aligned} \quad (37)$$

Пусть $n \equiv 0 \pmod{2}$. Для $n \equiv 1 \pmod{2}$ доказательство аналогично. Пусть $k + s \equiv n \pmod{2}$, $k \equiv 0 \pmod{2}$, $k \geq 2$, $s \geq 2$. Тогда

$$(\overline{P}_{n,1})_{t_1^s t_2^k}^{(s+k)}(0,0) = (\tilde{P}_{n,1})_{t_1^s t_2^k}^{(s+k)}(0,0) = (\tilde{P}_{n,2})_{t_1^s t_2^k}^{(s+k)}(0,0) = 0. \quad (38)$$

Если полином P_n^* является экстремальным, т. е. на нем реализуется максимум $|(P_n)_{t_1^s t_2^k}^{(s+k)}(0,0)|$ при $\|P_n\|_{K_2} \leq 1$, то из (37) и (38) вытекает, что экстремальными будут также полиномы $\overline{P}_{n,1}^* + \overline{P}_{n,2}^*$ и $\overline{P}_{n,2}^*$. Из формул (16), (18) и (38) вытекает следующее равенство для элементарных полиномов из пространства $\mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \overline{P}_{n,t_*}^{(s+k)}(0,0)[(1,0)^s, (0,1)^k] &= \lambda_{i_0, i_1} (-1)^{(n-k-s)/2}, \quad \lambda_{i_0, i_1} > 0, \\ t_* &= (\pm a_{i_0} a_{i_1}, b_{i_0} b_{i_1}), \quad 0 \leq i_0 \leq i_1 \leq \frac{n}{2}. \end{aligned} \quad (39)$$

Из равенств (39), (21) и леммы 2 следует неравенство (33) и равенства

$$\overline{P}_{n,1}^* + \overline{P}_{n,2}^* = \pm \overline{T}_n, \quad \overline{P}_{n,1}^* = 0. \quad (40)$$

Теперь из (40) и леммы 4 вытекает п. б) теоремы. Для $k + s \equiv n \pmod{2}$ и $k \equiv 1 \pmod{2}$ доказательство аналогично. Пусть $k + s \equiv 1 \pmod{2}$, $k \equiv 1 \pmod{2}$. Тогда $s \equiv 0 \pmod{2}$. Если на полиноме P_n^* реализуется максимум $|(P_n)_{t_1^s t_2^k}^{(s+k)}(0,0)|$, то этот максимум в силу (37) реализуется также на полиноме $\tilde{P}_{n,2}^*$. Поскольку $n \equiv 0 \pmod{2}$, то полином $\tilde{P}_{n,2}^*$ имеет степень не выше $n - 1$ и аналогично предыдущему доказывается неравенство (34) и равенство

$$\tilde{P}_{n,2}^* = \pm \tilde{T}_{n-1}. \quad (41)$$

Докажем п. с). Из (41), (37) и леммы 4 следует, что

$$\overline{P}_{n,1}^* = c_0 \overline{T}_{n-1}, \quad |c_0| \leq 1.$$

Из (37) вытекает неравенство

$$|\overline{P}_{n,2}^*(t_1, t_2)| + |\tilde{P}_{n,2}^*(t_1, t_2)| \leq 1, \quad (t_1, t_2) \in K_2. \quad (42)$$

Пусть $\alpha_i = \cos((2i - 1)\pi/(2(n - 1)))$, $i = \overline{1, (n - 2)/2}$. Из (41), (42) и леммы 1 следуют равенства при $(t_1, t_2) \in E(\alpha_i)$:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{n,2}^*(t_1, t_2) &= \lambda_i \sin((n - 1)\theta), \quad |\lambda_i| = 1, \\ \overline{P}_{n,2}^*(t_1, t_2) &= \gamma_i R_1(\theta) \cos((n - 1)\theta), \end{aligned} \quad (43)$$

где $R_1(\theta)$ – тригонометрический полином первого порядка. Поскольку $2n - 2 \geq n + 1$ при $n \geq 3$, то из (43) и предложения 1 вытекает $\gamma_i = 0$. Из равенства $\tilde{T}_{n-1}(0, t_2) = T_{n-1}(t_2)$ (при $n \equiv 0 \pmod{2}$), леммы 1 и леммы 3 следуют равенства

$$\begin{aligned} \overline{T}_{n-1}(t_1, t_2) &= \mu t_1 F_{n-2}(t_1, t_2), \\ \overline{P}_{n,2}^*(t_1, t_2) &= \overline{Q}_{2,2}(t_1, t_2) F_{n-2}(t_1, t_2), \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$F_{n-2}(t_1, t_2) = \prod_{1 \leq i \leq (n-2)/2} \left(\frac{t_1^2}{\alpha_i^2} + \frac{t_2^2}{\beta_i^2} - 1 \right), \quad \alpha_i = \cos \varphi_i, \quad \beta_i = \sin \varphi_i, \\ \varphi_i = \frac{(2i-1)\pi}{2(n-1)}.$$

Заметим, что $\beta_i = \cos((n/2 - i)\pi/(n-1))$. Пусть

$$Q_n(t_2) = \bar{P}_{n,2}^*(0, t_2) + \tilde{T}_{n-1}(0, t_2) = \bar{Q}_{2,2}(0, t_2)F_{n-2}(0, t_2) + T_{n-1}(t_2). \quad (45)$$

Из (45) вытекает, что $\bar{Q}_{2,2}(0, 1) = \bar{Q}_{2,2}(0, -1) = 0$, и из предложения 1 следуют равенства $\bar{Q}_{2,2}(0, t_2) \equiv 0$, $\bar{Q}_{2,2}(t_1, t_2) = ct_1^2$. Поэтому из (44) следует $\bar{P}_{n,2}^*(t_1, t_2) \equiv c_1 t_1 \bar{T}_{n-1}(t_1, t_2)$.

Тождество $\tilde{P}_{n,1}^*(t_1, t_2) \equiv c_2 t_2 \bar{T}_{n-1}(t_1, t_2)$ доказывается аналогично.

При $k + s \equiv 1 \pmod{2}$, $s \equiv 1 \pmod{2}$ доказательство п. с) аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Для того чтобы полином P_n вида (36) был экстремальным, т. е. $\|P_n\|_{K_2} = 1$, достаточно, чтобы выполнялись неравенства $0 \leq \beta(t_1, t_2) \leq 1$ при $(t_1, t_2) \in K_2$.

Это равносильно неравенству

$$|c_0 + c_1 t_1 + c_2 t_2| \leq 1, \quad (t_1, t_2) \in K_2,$$

или неравенству

$$|c_0| + \max\{|c_1|, |c_2|\} \leq 1. \quad (46)$$

Рассмотрим необходимые условия, налагаемые на c_0, c_1, c_2 , если $\|P_n\|_{K_2} = 1$. Пусть $\alpha_1 = (1 + \cos(\pi/(n-1)))/2$, $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$. Если $k \equiv 0 \pmod{2}$, то из (36) следует

$$P_n(t_1, t_2) = \pm \{ \bar{T}_{n-1}(t_1, t_2) + (c_0 + c_1 t_1 + c_2 t_2) \tilde{T}_{n-1}(t_1, t_2) \}.$$

При $n-1 \equiv 0 \pmod{2}$ для $\|P_n\|_{K_2} \leq 1$ необходимо выполнение неравенств

$$|c_0| + \alpha_1 |c_1| + \alpha_2 |c_2| \leq 1, \quad |c_0| + \alpha_2 |c_1| + \alpha_1 |c_2| \leq 1,$$

а при $n-1 \equiv 1 \pmod{2}$ требуется выполнение неравенств

$$|c_0| + |c_2| \leq 1, \quad |c_0| + \alpha_1 |c_1| + \alpha_2 |c_2| \leq 1.$$

Если $k \equiv 1 \pmod{2}$, то из (36) следует

$$P_n(t_1, t_2) = \pm \{ \tilde{T}_{n-1}(t_1, t_2) + (c_0 + c_1 t_1 + c_2 t_2) \bar{T}_{n-1}(t_1, t_2) \}.$$

При $n-1 \equiv 0 \pmod{2}$ для $\|P_n\|_{K_2} \leq 1$ необходимо выполнение неравенства (46), т. е. в этом случае необходимые и достаточные условия совпадают, а при $n-1 \equiv 1 \pmod{2}$ необходимо выполнение неравенств

$$|c_0| + |c_1| \leq 1, \quad |c_0| + \alpha_2 |c_1| + \alpha_1 |c_2| \leq 1.$$

В дополнение к лемме 7 приведем оценки производных полиномов при $s+k = n-1$.

ЛЕММА 8. Пусть $P_n \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $\|P_n\|_{K_2} \leq 1$, $s+k = n-1$. Справедливо неравенство

$$|(P_n)_{t_1^s t_2^k}^{(s+k)}(t_1^1, t_2^1)| \leq T_n^{(n-1)}(|t_1^1| + |t_2^1|) + T_{n-1}^{(n-1)}(0)\varphi(t_1^1, t_2^1), \quad (t_1^1, t_2^1) \in \mathbb{R}^2, \quad (47)$$

где $\varphi(t_1, t_2) = \max\{0, 1 - c_1(s+1)|t_1| - c_2(k+1)|t_2|\}$, $c_1 = 1$, если $k \equiv 0 \pmod{2}$, $c_1 = d_1^{-2}$, если $k \equiv 1 \pmod{2}$, $c_2 = 1$, если $s \equiv 0 \pmod{2}$, $c_2 = d_1^{-2}$, если $s \equiv 1 \pmod{2}$, $d_1 = \cos(\pi/(2n))$. В точках (t_1^1, t_2^1) , где $\varphi(t_1^1, t_2^1) = 0$, и в точке $(0, 0)$ оценка (47) точная. Экстремальные полиномы для точки $(0, 0)$ описаны в пп. с) и d) теоремы 3. Для точек, в которых $\varphi(t_1^1, t_2^1) = 0$, причем $|t_1^1| > 0$, $|t_2^1| > 0$, экстремальными будут только полиномы $\pm T_n(\gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2)$, $|\gamma_i| = 1$, $\gamma_1 t_1^1 + \gamma_2 t_2^1 = |t_1^1| + |t_2^1|$.

Пусть $t_1^1 = 0$, $|t_2^1| \geq (c_2(k+1))^{-1}$. Если $s \geq 1$, то экстремальными являются только полиномы $\pm \{\alpha T_n(t_1 + t_2) + (-1)^s(1 - \alpha)T_n(t_2 - t_1)\}$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Если $s = 0$, то экстремальными будут только те полиномы, для которых $P_n(0, t_2) = \pm T_n(t_2)$.

Пусть $t_2^1 = 0$, $|t_1^1| \geq (c_1(s+1))^{-1}$. Если $k \geq 1$, то экстремальными будут только полиномы

$$\pm \{\alpha T_n(t_1 + t_2) + (-1)^k(1 - \alpha)T_n(t_1 - t_2)\}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (48)$$

Если $k = 0$, то экстремальными будут только те полиномы, для которых $P_n(t_1, 0) = \pm T_n(t_1)$.

Пусть $|t_1^1| < (c_1(s+1))^{-1}$. Тогда

$$\max_{\|P_n\|_{K_2} \leq 1} |(P_n)_{t_1^s t_2^k}^{(s+k)}(t_1^1, 0)| > 2^{n-1}n!|t_1^1| = |T_n^{(n-1)}(t_1^1)|. \quad (49)$$

При $|t_2^1| < (c_2(k+1))^{-1}$ для точки $(0, t_2^1)$ справедливо аналогичное неравенство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (47) в точке $(0, 0)$ доказана в теореме 3. Пусть $n \equiv 0 \pmod{2}$. Пусть $k+s = n-1$ и $k \equiv 0 \pmod{2}$. Для элементарных полиномов $\tilde{P}_{n, t_*}$ из пространства $\mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ в силу формул (17) и (18) имеем равенства

$$(\tilde{P}_{n, t_*})_{t_1^s t_2^k}^{(s+k)}(t_1^1, t_2^1) = \mu_{i_0, i_1} t_2^1, \quad \mu_{i_0, i_1} > 0, \quad (50)$$

где $t_* = (\pm d_{i_0} d_{i_1}, e_{i_0}, e_{i_1})$, $1 \leq i_0 \leq i_1 \leq n/2$. Из (50) и (21) вытекает неравенство

$$|(\tilde{P}_n)_{t_1^s t_2^k}^{(s+k)}(t_1^1, t_2^1)| \leq |(\tilde{T}_n)_{t_1^s t_2^k}^{(s+k)}(t_1^1, t_2^1)|, \quad \|\tilde{P}_n\|_{K_2} \leq 1, \quad (51)$$

и экстремальными в (51) при $|t_2^1| \neq 0$ будут только полиномы $\pm \tilde{T}_n$.

Рассмотрим полиномы $\bar{P}_n$. Для элементарных полиномов $\bar{P}_{n, t_*}$ из формул (16) и (18) следуют равенства

$$(\bar{P}_{n, t_*})_{t_1^s t_2^k}^{(s+k)}(t_1^1, t_2^1) = \gamma_{i_0, i_1}((s+1)t_1^1 + t_{1,*}), \quad \gamma_{i_0, i_1} \geq 0, \quad (52)$$

где $t_* = (t_{1,*}, t_{2,*}) = (\pm a_{i_0} a_{i_1}, b_{i_0} b_{i_1})$, $0 \leq i_0 \leq i_1 \leq n/2$, и $\gamma_{i_0, i_1} = 0$ только при $k = 0$ и $0 < i_0 \leq i_1 \leq n/2$, что соответствует точкам t_* , у которых $t_{2,*} > 0$.

Равенства (52) легко получить из (18), суммируя сначала члены с одинаковыми наборами $k_1, \dots, k_m$. Из (52) и (21) следует неравенство

$$(\overline{P}_n)^{(s+k)}_{t_1^s t_2^k}(t_1^1, t_2^1) \leq (\overline{T}_n)^{(s+k)}_{t_1^s t_2^k}(t_1^1, t_2^1), \quad t_1^1 \geq \frac{1}{s+1}, \quad \|\overline{P}_n\|_{K_2} \leq 1. \quad (53)$$

При $k \neq 0$ и $t_1^1 > 1/(s+1)$ из (21) вытекает, что равенство в (53) возможно только для полинома $\overline{T}_n$. Если $t_1^1 = 1/(s+1)$, то множество экстремалей задачи

$$\begin{aligned} (\overline{P}_n)^{(s+k)}_{t_1^s t_2^k}(t_1^1, t_2^1) &\rightarrow \max, & \|\overline{P}_n\|_{K_2} &\leq 1, \\ s+k &= n-1 \equiv 1 \pmod{2}, & k &\equiv 0 \pmod{2}, \end{aligned}$$

содержится во множестве экстремалей такой же задачи, но при ограничении $\|\overline{P}_n\|_{S_0} \leq 1$. Отсюда и из предложения 1 следует, что при $k \neq 0$, $t_1^1 = 1/(s+1)$ равенство в (53) возможно только для $\overline{T}_n$. Аналогичные рассуждения применимы и в случае $k = 0$, $s = n-1$, $t_1^1 \geq 1/(s+1)$, $t_2^1 = 0$. Здесь равенство в (53) будет только при $\overline{P}_n(t_1, 0) = T_n(t_1)$. Из (50), (51), (53) и (26) при $\|P_n\|_{K_2} \leq 1$, $t_1^1 \geq 1/(s+1)$ и $t_2^1 \geq 0$ следуют соотношения

$$\begin{aligned} (P_n)^{(s+k)}_{t_1^s t_2^k}(t_1^1, t_2^1) &= (\overline{P}_n)^{(s+k)}_{t_1^s t_2^k}(t_1^1, t_2^1) + (\tilde{P}_n)^{(s+k)}_{t_1^s t_2^k}(t_1^1, t_2^1) \\ &\leq (\overline{T}_n)^{(s+k)}_{t_1^s t_2^k}(t_1^1, t_2^1) + (\tilde{T}_n)^{(s+k)}_{t_1^s t_2^k}(t_1^1, t_2^1) = T_n^{(s+k)}(t_1^1 + t_2^1). \end{aligned} \quad (54)$$

Из полученных результатов и леммы 4 вытекают все утверждения леммы при $|t_1^1| \geq 1/(s+1)$, $s+k = n-1 \equiv 1 \pmod{2}$, $k \equiv 0 \pmod{2}$.

Докажем неравенство (49). Если в (49) будет равенство при $k \equiv 0 \pmod{2}$ для точки $(t_1^1, 0)$, где $|t_1^1| < 1/(s+1)$, то выполнены равенства

$$\max_{\|\overline{P}_n\|_{S_0} \leq 1} |(\overline{P}_n)^{(s+k)}_{t_1^s t_2^k}(t_1^1, 0)| = 2^{n-1} n! |t_1^1| = |(\overline{T}_n)^{(s+k)}_{t_1^s t_2^k}(t_1^1, 0)|. \quad (55)$$

Из (52) следует, что для $s+k = n-1$, $k \equiv 0 \pmod{2}$, производные элементарных полиномов с носителями в точках $(1, 0)$ и $(-1, 0)$ имеют в точке $(t_1^1, 0)$ разные знаки и это противоречит равенствам (55). При других значениях k , s , n и соотношении $k+s = n-1$ доказательство неравенства (49) аналогично.

Для $k \equiv 1 \pmod{2}$ и $k+s = n-1 \equiv 1 \pmod{2}$, $|t_1^1| \geq d_1^2/(s+1)$ доказательство утверждений леммы аналогично. Если $n \equiv 1 \pmod{2}$, $k+s = n-1$, $|t_1^1| \geq (c_1(s+1))^{-1}$, то доказательство также аналогично предыдущему.

Из симметрии тела K_2 следуют доказательство утверждений леммы при $|t_2| \geq (c_2(k+1))^{-1}$ и аналог неравенства (49) для переменной t_2 .

Производная $(P_n)^{(s+k)}_{t_1^s t_2^k}(\cdot, \cdot)$ при $s+k = n-1$ является аффинной функцией от переменных t_1 и t_2 . Поэтому оценка (47) справедлива для точек, в которых $\varphi(t_1, t_2) = 0$, и, учитывая оценку в точке $(0, 0)$, — для любой точки из $\mathbb{R}^2$. Осталось доказать единственность экстремального полинома $T_n(t_1 + t_2)$ при $\varphi(t_1, t_2) = 0$, $0 < t_1 < (c_1(s+1))^{-1}$, $0 < t_2 < (c_2(k+1))^{-1}$.

Пусть точка (t_1^1, t_2^1) принадлежит указанной области, $k \geq 1$ и для полинома P_n выполнены равенства

$$(P_n)^{(s+k)}_{t_1^s t_2^k}(t_1^1, t_2^1) = 2^{n-1} n! (t_1^1 + t_2^1), \quad \|P_n\|_{K_2} = 1. \quad (56)$$

Пусть точка $(t_1^0, 0)$ принадлежит прямой, параллельной прямой $c_1(s+1)t_1 + c_2(k+1)t_2 = 1$ и содержащей точку (t_1^1, t_2^1) . Из равенства (56) и аффинности производной полинома по координатам t_1, t_2 следует, что

$$(P_n)^{(s+k)}_{t_1^s t_2^k}(t_1^0, 0) = 2^{n-1} n! t_1^0.$$

Тогда полином P_n принадлежит множеству, описанному в (48). Но из этого множества только полином $T_n(t_1 + t_2)$ удовлетворяет равенству (56). При $s \geq 1$ доказательство аналогично. Лемма доказана.

В работе [9] автор сформулировал следующую гипотезу. Пусть $K \subset X$, $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$, $\|P_n\|_K \leq 1$, $\|h\| = 1$. Тогда

$$|P_n^{(k)}(x)[h^k]| \leq \frac{N_{n,k}(\rho(x))}{r_h^k}, \quad (57)$$

где функция $N_{n,k}(\cdot)$ определена во введении.

Мы покажем, что для шара $B \subset l_1^{(2)}$ и $2 \leq k \leq n-1$ эта гипотеза не верна.

ЛЕММА 9. Пусть $K = B \subset l_1^{(2)}$, $P_n \in \mathfrak{P}_n(l_1^{(2)}, \mathbb{R})$, $\|P_n\|_K \leq 1$, $\|h\| = 1$. Пусть $1 \leq k \leq n-1$, $c_1 = 1$, если $k \equiv 0 \pmod{2}$, и $c_1 = d_1^2$, если $k \equiv 1 \pmod{2}$. Тогда равенство

$$\max_{\|P_n\|_K \leq 1} |(P_n)^{(k)}_{t_2^k}(t_1, 0)| = |T_n^{(k)}(t_1)| \quad (58)$$

имеет место не более чем в $n-k-1$ точках интервала $|t_1| < c_1$, $t_2 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k \equiv 0 \pmod{2}$. Если в точке $(t_1^1, 0)$ выполнено равенство (58), то выполнено равенство

$$\max_{\|\bar{P}_n\|_{S_0} \leq 1} |(\bar{P}_n)^{(k)}_{t_2^k}(t_1^1, 0)| = |T_n^{(k)}(t_1^1)|. \quad (59)$$

Пусть $|t_1^1| < 1$. Из (16) следует, что производные по t_2 порядка k элементарных полиномов из пространства $\bar{\mathfrak{P}}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ с носителями в точках $(1, 0)$ и $(-1, 0)$ или имеют разные знаки в точке $(t_1^1, 0)$, или равны нулю. Из замечания 4 вытекает, что эти производные не равны тождественно нулю на прямой $t_2 = 0$ и первая из них равна нулю в точке $(-1, 0)$, а вторая – в точке $(1, 0)$. Поэтому они равны нулю одновременно не более чем в $n-k-1$ точках интервала $|t_1| < 1$, $t_2 = 0$. Заметим, что при $\cos(\pi/n) < |t_1| < 1$ они не равны нулю. Из (21) следует, что равенство (59) имеет место тогда и только тогда, когда для производных элементарных полиномов из $\bar{\mathfrak{P}}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ выполнено одно из двух неравенств

$$(\bar{P}_{n,t_*})^{(k)}_{t_2^k}(t_1^1, 0) \geq 0 \quad \forall t_* \in S_0^+, \quad (\bar{P}_{n,t_*})^{(k)}_{t_2^k}(t_1^1, 0) \leq 0 \quad \forall t_* \in S_0^+.$$

Следовательно, при $k \equiv 0 \pmod{2}$ лемма доказана. При $k \equiv 1 \pmod{2}$ доказательство аналогично.

В [3] установлено, что функция $S_n^{(k)}(\cdot)$ на отрезке $[-1, 1]$ имеет $n - k + 1$ простых нулей, $0 \leq k \leq n$. Пусть $\xi_1^{(k)}$ – максимальный нуль функции $S_n^{(k)}(\cdot)$ на $[-1, 1]$. В [9] получено неравенство

$$\xi_1^{(2)} < \cos(c_0\pi/n), \quad c_0 = 0.890753, \quad n \geq 2.$$

Следовательно, $\xi_1^{(3)} < \xi_1^{(2)} < \cos(c_0\pi/n) < \cos^2(\pi/(2n))$ при $n \geq 3$. Поскольку $N_{n,k}(t_1) = |T_n^{(k)}(t_1)|$ при $|t_1| \geq \xi_1^{(k)}$, то из леммы 9 вытекает, что гипотеза автора не верна для шара $B \subset l_1^{(2)}$ при $2 \leq k \leq n - 1$.

Приведем пример пространства и тела K , для которых неравенство (6) не верно при $c_k = 1$.

ПРИМЕР 1. Пусть $X = l_1^{(m)}$, $m > 2$, $K = B$, $P_m(x) = m^m x_1 x_2 \dots x_m$. Тогда $\|P_m\|_B = 1$ и выполнено неравенство

$$(P_m)_{x_2 \dots x_m}^{(m-1)}(1, 0, \dots, 0) = m^m > 2^{m-1} m! = T_m^{(m-1)}(1).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Для симметрических непрерывных k -линейных функционалов $F: X^k \rightarrow \mathbb{R}$ известны [16] неравенства

$$\sup_{\|x_i\| \leq 1, i=1, \dots, k} |F(x_1, x_2, \dots, x_k)| \leq c_k \sup_{\|x\| \leq 1} |F(x, x, \dots, x)|, \quad c_k \leq \frac{k^k}{k!}.$$

Если X – предгильбертово пространство, то (см. [15], [17]) $c_k = 1$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $X = E^m$ – m -мерное евклидово пространство, $K \subset E^m$, $P_n \in \mathfrak{P}_n(E^m, \mathbb{R})$, $\|P_n\|_K \leq 1$, $\|h_i\| = 1$, $i = \overline{1, k}$, $n \geq k > 0$. Тогда

$$|P_n^{(k)}(x_0)[h_1, \dots, h_k]| \leq \frac{T_n^{(k)}(\rho_1(x_0, k))}{r^k(K)}, \quad x_0 \in E^m, \quad (60)$$

и равенство в (60) имеет место, если и только если выполнены следующие условия:

- а) $h_i = \varepsilon_i h$, $r_h = r(K)$, $|\varepsilon_i| = 1$, $i = \overline{1, k}$, и если $k = n$, то $P_n(th) = \pm T_n(t/r(K))$, а если $k < n$, то $\rho(x_0) = \rho_1(x_0, k)$;
- б) если $k < n$ и $r_{x_0} = r(K)$, то $h = \pm \bar{x}_0$, $P_n(th) = \pm T_n(t/r(K))$;
- в) если $r_{x_0} > r(K)$, $n > k > 1$ или $n > k = 1$ и $\rho(x_0) > \cos(\pi/(2n))$, то K , P_n , x_0 , h удовлетворяют условиям п. 2) или п. 3) теоремы 1;
- г) если $n > k = 1$, $r_{x_0} > r(K)$ и $\rho(x_0) = \cos(\pi/(2n))$, то K , P_n , x_0 , h удовлетворяют условиям п. 4) теоремы 1 и $K_{x_0 h} \neq A_0$.

Доказательству теоремы 4 предположим следующую лемму. Пусть $X = E^m$, $F: X^k \rightarrow \mathbb{R}$ – полилинейный симметрический непрерывный функционал порядка k . Если $x_1 = x_2 = \dots = x_s = x$, $s \leq k$, то введем обозначение $F(x^s, x_{s+1}, \dots, x_k) = F(x_1, x_2, \dots, x_s, \dots, x_k)$.

ЛЕММА 10. Пусть $|F(x^k)| \leq 1$ при $\|x\| = 1$, $\|x_1\| = \|v\| = \|y\| = 1$, $(x_1, y) = 0$, $v = x_1 \cos \theta_0 + y \sin \theta_0$, $\theta_0 \in [0, 2\pi)$. Тогда справедливо неравенство

$$|F(x_1^{k-1}, v)| \leq 1, \quad (61)$$

и для выполнения равенства в (61) необходимо выполнение одного из двух условий:

- i) $F((x_1 \cos \theta + y \sin \theta)^k) = \cos(k\theta + \varphi)$ для каждого $\theta \in [0, 2\pi)$;
- ii) $v = \pm x_1$ и $|F(x_1^k)| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для получения необходимых условий равенства в (61) используем схему доказательства неравенства (61), предложенную в работе [15]. Справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |F(x_1^{k-1}, x_1 \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)|^2 &= |F(x_1^k) \cos \theta_0 + F(x_1^{k-1}, y) \sin \theta_0|^2 \\ &\leq |F(x_1^k)|^2 + |F(x_1^{k-1}, y)|^2. \end{aligned} \quad (62)$$

Заметим, что

$$kF(x_1^{k-1}, y) = Q_k^{(1)}(x_1)[y] = R'_k(0),$$

где $Q_k(x) = F(x^k)$, $R_k(\theta) = Q_k(x_1 \cos \theta + y \sin \theta)$.

Из неравенства Сеге $k^2(R_k(\theta))^2 + (R'_k(\theta))^2 \leq k^2$ при $\|R_k\|_{C[0, 2\pi]} \leq 1$ следует неравенство

$$|F(x_1^k)|^2 + |F(x_1^{k-1}, y)|^2 \leq 1, \quad (63)$$

и равенство в (63) возможно только либо при $F((x_1 \cos \theta + y \sin \theta)^k) \equiv \cos(k\theta + \varphi)$, либо при $|F(x_1^k)| = 1$ (см., например, [18]). Но если $|F(x_1^k)| = 1$, то $kF(x_1^{k-1}, y) = R'_k(0) = 0$ и равенство в (62) возможно только при $|\cos \theta_0| = 1$, т. е. $v = \pm x_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Неравенство (60) следует из теоремы 1 и замечания 9. Достаточность условий равенства очевидна. Покажем необходимость этих условий. Пусть $0 < k \leq n$ и для полинома P_n , точки x_0 и набора векторов $\hat{h}_i$, $i = \overline{1, k}$, удовлетворяющих условиям теоремы, имеет место равенство в (60). Тогда из неравенств

$$\begin{aligned} |P_n^{(k)}(x_0)[\hat{h}_1, \dots, \hat{h}_k]| &\leq \max_{\|h\|=1} |P_n^{(k)}(x_0)[h^k]|, \\ |P_n^{(k)}(x_0)[h^k]| &\leq \frac{T_n^{(k)}(\rho_1(x_0, k))}{r_h^k}, \quad \|h\| = 1, \end{aligned} \quad (64)$$

вытекает, что существует h_0 , для которого $r_{h_0} = r(K)$, $\|h_0\| = 1$ и выполнено равенство

$$|P_n^{(k)}(x_0)[h_0^k]| = \frac{T_n^{(k)}(\rho_1(x_0, k))}{r^k(K)}. \quad (65)$$

Если $k = n$, то из (65) следует, что $P_n(th_0) = \pm T_n(t/r(K))$. Пусть $0 < k < n$. Если $r_{x_0} > r(K)$, то $x_0 \neq \lambda h_0$ и из теоремы 1 следует, что $\rho(x_0) = \rho_1(x_0, k)$ и для K , P_n , x_0 , h_0 выполнены условия одного из пп. 2), 3) или 4) теоремы 1. При этом $K_{x_0 h} \neq A_0$, потому что $r_{h_0} = r(K)$ и вектор h_0 перпендикулярен либо прямой $y = t_1 r_{x_0} \bar{x}_0 + (1 - t_1) r_{h_0} h_0$, либо прямой $y = t_1 r_{x_0} \bar{x}_0 + (t_1 - 1) r_{h_0} h_0$. Условия $\bar{x}_0 \neq \pm h_0$, $r_{x_0} = r(K)$ невозможны, потому что иначе из теоремы 1 следуют перпендикулярность вектора x_0 какой либо из двух указанных выше прямых и равенство $\bar{x}_0 = \pm h_0$.

Докажем равенство $\hat{h}_i = \varepsilon_i h_0$, $|\varepsilon_i| = 1$, $i = \overline{1, k}$. Пусть $n > k > 1$ и $\rho(x_0) = \rho_1(x_0, k)$. Обозначим $F_k(x_1, \dots, x_k) = P_n^{(k)}(x_0)[x_1, \dots, x_k]$. Тогда F_k – полилинейный симметрический непрерывный функционал порядка k и выполнено неравенство

$$|F_k(h^k)| \leq |F_k(h_0^k)| = \frac{T_n^{(k)}(\rho(x_0))}{r^k(K)} = C_k, \quad \|h\| = 1. \quad (66)$$

Обозначим через Γ окружность с радиусом 1 и центром в нуле. Покажем, что на любой окружности Γ равенство

$$|F_k(h^k)| = C_k \quad (67)$$

может иметь место не более чем на одном векторе h с точностью до знака.

Пусть на некоторой окружности Γ равенство (67) выполнено для векторов $\pm h_1$ и $\pm h_2$. Тогда векторы h_1 и h_2 обладают всеми свойствами вектора h_0 , т. е. для K , P_n , x_0 , h_i , $i = 1, 2$, выполнены условия п. 2) или п. 3) теоремы 1. При этом для векторов h_i равенство (67) справедливо при любом k . Отсюда следует, что равенства

$$|F_1(h)| = |F_1(h_0)| = \frac{T_n^{(1)}(\rho(x_0))}{r(K)}$$

выполнены для векторов $\pm h_i$, $i = 1, 2$. Но тогда тригонометрический полином первого порядка $R_1(\theta) = F_1(h_1 \cos \theta + y \sin \theta)$, где $y \in \Gamma$ и $(h_1, y) = 0$, имеет на периоде четыре точки максимума модуля, что невозможно, так как F_1 – линейный функционал. Отсюда следует, что равенство (67) выполняется только на векторах $\pm h_0$. Мы показали, что для каждой окружности Γ

$$F_k((h_1 \cos \theta + y \sin \theta)^k) \neq C_k \cos(k\theta + \varphi), \quad h_1, y \in \Gamma, \quad (h_1, y) = 0.$$

Пусть $\hat{h}_1 \neq \pm h_0$, $\|\hat{h}_1\| = 1$. Тогда в силу леммы 10 получаем, что $|F_k(\hat{h}_1, h^{k-1})| < C_k$ для каждого нормированного h . Отсюда и из неравенства

$$|P_n^{(k)}(x_0)[\hat{h}_1, \hat{h}_2, \dots, \hat{h}_k]| \leq \max_{\|h\|=1} |P_n^{(k)}(x_0)[\hat{h}_1, h^{k-1}]| < C_k$$

получаем необходимость условия $\hat{h}_i = \varepsilon_i h_0$, $|\varepsilon_i| = 1$, $i = \overline{1, k}$.

Пусть $k = n \equiv 1 \pmod{2}$. Значение n -й производной полинома P_n на семействе направлений не зависит от точки x_0 . Пусть

$$F_s(x_1, \dots, x_s) = P_n^{(s)}(0)[x_1, \dots, x_s], \quad (68)$$

и пусть на некоторой окружности Γ равенства

$$|F_n(h^n)| = |P_n^{(n)}(0)[h_0^n]| = \frac{T_n^{(n)}(0)}{r^n(K)} = C_n \quad (69)$$

выполняются для векторов $\pm h_1$ и $\pm h_2$. Тогда $P_n(th_i) = \pm T_n(th_i/r(K))$, $r_{h_i} = r(K)$, $i = 1, 2$, и полином первого порядка $R_1(\theta) = F_1(h_1 \cos \theta + y \sin \theta)$, $h_1, y \in \Gamma$,

$(h_1, y) = 0$, имеет четыре точки максимума модуля на периоде, что невозможно. Отсюда следует, что равенство (69) справедливо только для векторов $\pm h_0$ и на любой окружности Γ имеет место $F_n((h_1 \cos \theta + y \sin \theta)^n) \neq C_n \cos(n\theta + \varphi)$. Тогда из леммы 10 вытекает, что $\hat{h}_i = \varepsilon_i h_0$, $i = \overline{1, n}$.

Пусть $k = n \equiv 0 \pmod{2}$ и функционал F_s определен равенством (68). Пусть на некоторой единичной окружности Γ равенство (69) выполняется для векторов $\pm h_1$ и $\pm h_2$. Тогда $P_n(th_i) = \pm T_n(th_i/r(K))$, $r_{h_i} = r(K)$, $i = 1, 2$. Случай, когда $P_n(th_1) = T_n(th_1/r(K))$, а $P_n(th_2) = -T_n(th_2/r(K))$, невозможен, потому что из первого равенства следует $P_n(0) = (-1)^{n/2}$, а из второго равенства следует $P_n(0) = (-1)^{n/2+1}$. Отсюда вытекает, что полином второго порядка $R_2(\theta) = F_2(h_1 \cos \theta + y \sin \theta)$, $h_1, y \in \Gamma$, $(h_1, y) = 0$, либо равен константе, либо на периоде имеет четыре точки максимума или четыре точки минимума. Последний случай невозможен. Следовательно, на любой единичной окружности Γ имеет место $F_n((h_1 \cos \theta + y \sin \theta)^n) \neq C_n \cos(n\theta + \varphi)$.

Рассмотрим функционал $Q_{n-1}(h_2, \dots, h_n) = F_n(\hat{h}_1, h_2, \dots, h_n)$. Из леммы 10 следует неравенство

$$|Q_{n-1}(h^{n-1})| = |F_n(\hat{h}_1, h^{n-1})| < C_n, \quad h \neq \pm \hat{h}_1, \quad \|h\| = \|\hat{h}_1\| = 1. \quad (70)$$

Из (70) вытекает, что на любой единичной окружности Γ имеет место

$$R_{n-1}(\theta) = Q_{n-1}(h_* \cos \theta + y \sin \theta) \neq C_n \cos((n-1)\theta + \varphi), \quad h_*, y \in \Gamma, \quad (h_*, y) = 0.$$

Пусть $\hat{h}_2 \neq \pm \hat{h}_1$, $\|\hat{h}_2\| = 1$. Из леммы 10 следует неравенство

$$|F_n(\hat{h}_1, \hat{h}_2, h^{n-2})| < C_n, \quad \|h\| = 1. \quad (71)$$

Из (71) вытекает неравенство

$$|F_n(\hat{h}_1, \hat{h}_2, \hat{h}_3, \dots, \hat{h}_n)| \leq \max_{\|h\|=1} |F_n(\hat{h}_1, \hat{h}_2, h^{n-2})| < C_n,$$

поэтому существует h_0 такой, что $\hat{h}_i = \pm h_0$, $i = \overline{1, n}$, $r_{h_0} = r(K)$, $P_n(th_0) = \pm T_n(th_0/r(K))$. Теорема доказана.

В [8] и [9] автором получены представление для квадрата мажоранты Шеффера–Даффина

$$M_{n,k}^2(t) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j^{(k)}(n) (1-t^2)^{-(k+j)}, \quad a_j^{(k)}(n) > 0, \quad j = \overline{0, k-1}, \quad (72)$$

и рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} a_j^{(k+1)}(n) &= \frac{k+j}{k-j} (n^2 - k^2) a_j^{(k)}(n), \quad j = \overline{0, k-1}, \\ a_k^{(k+1)}(n) &= M_{n,k+1}^2(0) - \sum_{j=0}^{k-1} a_j^{(k+1)}(n), \end{aligned} \quad (73)$$

где

$$M_{n,2p+1}(0) = n \prod_{i=1}^p (n^2 - (2i-1)^2), \quad M_{n,2p}(0) = \prod_{i=0}^{p-1} (n^2 - (2i)^2).$$

Позднее, в [12], также установлены соотношения (72), (73) и получено равенство

$$a_k^{(k+1)}(n) = (2k-1)^2 a_{k-1}^{(k)}(n), \quad (74)$$

которое следует и из [9, предложение 3.2].

Из равенства $a_0^{(1)} = n^2$ и равенств (73), (74) методом математической индукции легко получаются равенства [12]

$$\begin{aligned} a_j^{(k)}(n) &= n^2 C_{k-1+j}^{2j} \prod_{i=1}^j (2i-1)^2 \prod_{\alpha=j+1}^{k-1} (n^2 - \alpha^2) \\ &= n^2 C_{k-1+j}^{2j} \left(\frac{(2j)!}{2^j j!} \right)^2 \prod_{\alpha=j+1}^{k-1} (n^2 - \alpha^2), \quad j = \overline{0, k-1}. \end{aligned} \quad (75)$$

ЛЕММА 11. Пусть $k, s > 0, k + s \leq n$. Справедливо неравенство

$$M_{n,k}(t) M_{n-k,s}(t) < M_{n,k+s}(t), \quad t \in (-1, 1). \quad (76)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Автором в [9] неравенство (76) доказано при следующих ограничениях: $s = 1$ или $k + s \leq 6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 11. Из (72) и (75) имеем равенства

$$\begin{aligned} M_{n,k}^2(t) M_{n-k,s}^2(t) &= \sum_{\ell=0}^{k+s-2} c_\ell (1-t^2)^{-(k+s+\ell)}, \\ c_\ell &= \sum_{i=0}^{\ell} a_{\ell-i}^{(k)}(n) a_i^{(s)}(n-k) = n^2 (n-k)^2 \sum_{i=0}^{\ell} \left(\frac{(2(\ell-i))!}{(\ell-i)!} \right)^2 \left(\frac{(2i)!}{i!} \right)^2 2^{-2\ell} \\ &\quad \times C_{k-1+\ell-i}^{2(\ell-i)} C_{s-1+i}^{2i} \prod_{\beta=\ell-i+1}^{k-1} (n^2 - \beta^2) \prod_{\alpha=i+1}^{s-1} ((n-k)^2 - \alpha^2). \end{aligned}$$

Вместо неравенства (76) докажем, что имеет место более сильное неравенство

$$c_\ell \leq a_\ell^{(k+s)}(n) = n^2 \left(\frac{(2\ell)!}{\ell!} \right)^2 2^{-2\ell} C_{k+s-1+\ell}^{2\ell} \prod_{\gamma=\ell+1}^{k+s-1} (n^2 - \gamma^2), \quad 0 \leq \ell \leq k+s-2. \quad (77)$$

Учитывая равенства [19]

$$C_{s-1+i}^{2i} = \frac{(i!)^2}{(2i)!} C_{s-1}^i C_{s-1+i}^i, \quad \sum_{i=0}^{\ell} C_{k-1+\ell-i}^{\ell-i} C_{s-1+i}^i = C_{k+s-1+\ell}^{\ell},$$

для доказательства (77) достаточно показать, что справедливо неравенство

$$(n-k)^2 C_{k-1}^{\ell-i} C_{s-1}^i \prod_{\beta=\ell-i+1}^{k-1} (n^2 - \beta^2) \prod_{\alpha=i+1}^{s-1} ((n-k)^2 - \alpha^2) \leq C_{2\ell}^{2i} C_{k+s-1}^{\ell} \prod_{\gamma=\ell+1}^{k+s-1} (n^2 - \gamma^2) \quad (78)$$

для $0 \leq i \leq s-1$.

Из равенства $n^2 - \gamma^2 = (n - \gamma)(n + \gamma)$ следует неравенство

$$\prod_{\alpha=i+1}^{s-1} ((n-k)^2 - \alpha^2) \leq \prod_{\gamma=k+i+1}^{k+s-1} (n^2 - \gamma^2). \quad (79)$$

Неравенство (78) вытекает из (79) и неравенства

$$(n-k)^2 C_{k-1}^{\ell-i} C_{s-1}^i \prod_{\beta=\ell-i+1}^{k-1} (n^2 - \beta^2) \leq C_{2\ell}^{2i} C_{k+s-1}^{\ell} \prod_{\gamma=\ell+1}^{k+i} (n^2 - \gamma^2). \quad (80)$$

Докажем неравенство (80) методом математической индукции по параметру ℓ при остальных фиксированных параметрах. Базой индукции является условие $\ell = i$. В этом случае неравенство (80) имеет вид

$$(n-k)^2 C_{s-1}^i \prod_{\beta=1}^{k-1} (n^2 - \beta^2) \leq C_{k+s-1}^i \prod_{\gamma=i+1}^{k+i} (n^2 - \gamma^2). \quad (81)$$

Неравенство (81) будем также доказывать методом математической индукции по параметру i при остальных фиксированных параметрах. При $i = 0$ неравенство (81) следует из неравенства

$$(n-k)^2 < n^2 - k^2.$$

Если $s = 1$, то $i = 0$ и неравенство (81) доказано. Пусть $s \geq 2$, и пусть неравенство (81) верно при $i \leq i_0 < s-1$. Покажем, что тогда оно справедливо для $i = i_0 + 1$. Пусть

$$D(i) = \frac{C_{k+s-1}^i}{C_{s-1}^i}, \quad I(i) = \prod_{\gamma=i+1}^{k+i} (n^2 - \gamma^2).$$

Для доказательства неравенства (81) достаточно показать, что

$$A = \frac{D(i_0+1)I(i_0+1)}{D(i_0)I(i_0)} \geq 1.$$

Имеем

$$A = \frac{(k+s-1-i_0)(n^2 - (k+i_0+1)^2)}{(s-1-i_0)(n^2 - (i_0+1)^2)}.$$

Пусть

$$\begin{aligned} C &= (A-1)(s-1-i_0)(n^2 - (i_0+1)^2) \\ &= k(n^2 - k^2 - sk + (i_0+1)^2 - (i_0+1)(2s+k)). \end{aligned} \quad (82)$$

Поскольку $n \geq k+s$ и $i_0 < s-1$, то из (82) следует, что достаточно доказать неравенство $C \geq 0$ при $n = k+s$. В этом случае имеем

$$C = (s^2 + sk + (i_0+1)^2 - (i_0+1)(2s+k))k = (s-i_0-1)(s+k-i_0-1)k \geq 0.$$

Неравенство (81) доказано.

При $k = 1$ имеем $\ell = i$, и неравенство (80) доказано. Пусть $k \geq 2$. Неравенство (80) достаточно доказать для $\ell \leq i + k - 1$.

Пусть неравенство (80) верно для $i \leq \ell \leq \ell_0 < i + k - 1$; докажем, что тогда оно верно для $\ell = \ell_0 + 1$ при остальных фиксированных параметрах. Обозначим левую часть неравенства (80) через $J(\ell)$, а правую часть (80) через $U(\ell)$ и покажем, что имеет место неравенство

$$C_1 = \frac{U(\ell_0 + 1)J(\ell_0)}{U(\ell_0)J(\ell_0 + 1)} \geq 1.$$

Имеем

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{n^2 - (\ell_0 - i + 1)^2}{n^2 - (\ell_0 + 1)^2} \frac{2(\ell_0 + 1)(2\ell_0 + 1)}{2(\ell_0 - i + 1)(2(\ell_0 - i) + 1)} \frac{k + s - 1 - \ell_0}{\ell_0 + 1} \frac{\ell_0 - i + 1}{k - 1 - \ell_0 + i} \\ &= \frac{n^2 - (\ell_0 - i + 1)^2}{n^2 - (\ell_0 + 1)^2} \frac{2\ell_0 + 1}{2(\ell_0 - i) + 1} \frac{k + s - 1 - \ell_0}{k - 1 - \ell_0 + i} \geq 1, \end{aligned}$$

поскольку $i \leq \min(\ell_0, s - 1)$ и $\ell_0 < i + k - 1$. Лемма доказана.

Следующая теорема является точным аналогом неравенства Шеффера–Даффина для полиномов, нормированных на кубе в пространстве $l_1^{(m)}$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $X = l_1^{(m)}$, $K = \{x \in X : |x_i| \leq 1, i = \overline{1, m}\}$, $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$, $\|P_n\|_K \leq 1$. Справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \|P_n^{(k)}(x^1)\|_{\mathcal{L}^k} &= \max_{\substack{s, k_i > 0, \sum_{i=1}^s k_i = k \\ 1 \leq j_i \leq m}} \left| \frac{\partial^k P_n(x^1)}{\partial x_{j_1}^{k_1} \dots \partial x_{j_s}^{k_s}} \right| \\ &\leq \max_{s, k_i > 0, \sum_{i=1}^s k_i = k} N_{n, k_1}(\rho) N_{n - k_1, k_2}(\rho) \dots N_{n - \sum_{i=1}^{s-1} k_i, k_s}(\rho), \quad x^1 \in K, \end{aligned} \quad (83)$$

$$\|P_n^{(k)}(x^1)\|_{\mathcal{L}^k} \leq N_{n, k}(\rho(x^1)), \quad x^1 \in X, \quad (84)$$

где $\rho = \rho(x^1)$. Пусть $|x_{j_1}^1| = \max_{1 \leq j \leq m} |x_j^1| = \rho(x^1)$. Тогда равенство в неравенстве (84) имеет место, только если $k_1 = k$, $P_n(x) = \pm T_n(x_{j_1})$, и если $|x_{j_1}^1| \leq \xi_1^{(k)}$, то $x_{j_1}^1$ является нулем функции $S_n^{(k)}(\cdot)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства Шеффера–Даффина следует неравенство

$$\left| \frac{\partial^k P_n(x^1)}{\partial x_{j_1}^{k_1} \dots \partial x_{j_s}^{k_s}} \right| \leq N_{n, k_1}(x_{j_1}^1) N_{n - k_1, k_2}(x_{j_2}^1) \dots N_{n - \sum_{i=1}^{s-1} k_i, k_s}(x_{j_s}^1), \quad x^1 \in K. \quad (85)$$

Поскольку функция $N_{n, k}(\cdot)$ возрастает на $[0, \infty)$, то из (85) вытекает неравенство (83). Отсюда и из леммы 11 следует неравенство

$$\left| \frac{\partial^k P_n(x^1)}{\partial x_{j_1}^{k_1} \dots \partial x_{j_s}^{k_s}} \right| \leq M_{n, k}(\rho(x^1)), \quad x^1 \in K. \quad (86)$$

Пусть $x^1 \in X$ и

$$Q_{n-k}(t) = \frac{\partial^k P_n(tx^1/\rho(x^1))}{\partial x_{j_1}^{k_1} \dots \partial x_{j_s}^{k_s}}.$$

Тогда из (86) следует, что $|Q_{n-k}(t)| \leq M_{n,k}(t)$, $t \in (-1, 1)$, и из замечания 1 вытекает неравенство

$$\left| \frac{\partial^k P_n(x^1)}{\partial x_{j_1}^{k_1} \dots \partial x_{j_s}^{k_s}} \right| = Q_{n-k}(\rho(x^1)) \leq N_{n,k}(\rho(x^1)).$$

Если $|x_{j_1}^1| = \max_{1 \leq j \leq m} |x_j^1| = \rho(x^1) \leq \xi_1^{(k)}$ и для точки x^1 имеет место равенство в (84), то из (85), леммы 11 и неравенства Шеффера–Даффина следует, что $k_1 = k$, $x_{j_1}^1$ является нулем функции $S_n^{(k)}(\cdot)$ и $P_n(x_1^1, x_2^1, \dots, x_{j_1}^1, \dots, x_m^1) = \pm T_n(x_{j_1})$. Тождество $P_n(x) \equiv \pm T_n(x_{j_1})$ вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 12. Пусть $X = \{\mathbb{R}^m, \|\cdot\|\}$, $K = \{x \in X: |x_i| \leq 1, i = \overline{1, m}\}$. Пусть $x^* \notin K$ и прямая tx^* пересекает ∂K в точке, не принадлежащей грани куба размерностью, меньшей, чем $m - 1$. Пусть $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$, $\|P_n\|_K \leq 1$ и $|P_n(x^*)| = T_n(\rho(x^*))$. Тогда $P_n(x) = \pm T_n(x_{i_0})$, где $|x_{i_0}^*| > \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq i_0}} |x_i^*|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай $m = 2$. Пусть $x^* = (x_1^*, x_2^*)$, $x_1^* > x_2^* > 0$, $P_n(x^*) = T_n(\rho(x^*))$, $x^0 = (x_1^0, x_2^0) = x^*/\rho(x^*)$. Тогда из теоремы Чебышева следует равенство на прямой tx^0 :

$$P_n(tx^0) = T_n(t). \quad (87)$$

Пусть точка $x^1 = (x_1^1, \alpha)$, где $x_2^0 < \alpha \leq 1$, принадлежит прямой tx^0 . Из соотношения (87) вытекает

$$P_n(x^1) = T_n(\rho(x^1)) = T_n(x_1^1).$$

Отсюда следует

$$P_n(x_1, \alpha) = T_n(x_1), \quad (88)$$

и так как $\alpha \in (x_2^0, 1]$, то равенство (88) выполнено на множестве точек положительной лебеговой меры.

Если $x_2^* = 0$, то, сделав замену $Q_n(x_1, x_2) = P_n(x_1, (x_2 - 1/2)/2)$, мы придем к рассмотренному случаю ($x_2^* > 0$).

Пусть $\rho(x^1) > \xi_1^{(k)}$ и

$$\left| \frac{\partial^k P_n(x^1)}{\partial x_{j_1}^{k_1} \dots \partial x_{j_s}^{k_s}} \right| = N_{n,k}(\rho(x^1)), \quad \|P_n\|_K \leq 1. \quad (89)$$

Пусть

$$Q_{n-k}(t) = \frac{\partial^k P_n(tx^1/\rho(x^1))}{\partial x_{j_1}^{k_1} \dots \partial x_{j_s}^{k_s}}.$$

Из (89) и замечания 1 следует, что $Q_{n-k}(t) = \pm T_n^{(k)}(t)$, и мы приходим к рассмотренному случаю ($\rho(x^1) \leq \xi^1$).

ТЕОРЕМА 6. Пусть $X = l_\infty^{(2)}$ или $X = l_1^{(2)}$ и $K = B \subset X$. Для фиксированного m справедливо асимптотическое равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\max_{\|P_n\|_K \leq 1} \|P_n^{(m)}\|_K \right) / T_n^{(m)}(1) = 1. \quad (90)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X = l_\infty^{(2)}$. Для $X = l_1^{(2)}$ доказательство аналогично. Пусть $\|P_n\|_K \leq 1$, $x \in K$, $\bar{x} = x/\|x\|$, $\|h\| = 1$. Докажем неравенство

$$|P_n^{(k+s)}(x)[h^k, \bar{x}^s]| \leq \frac{T_n^{(k+s)}(1)}{(\rho(x))^s}. \quad (91)$$

В теле K содержится параллелограмм $t_1x + t_2h = t_1\rho(x)\bar{x} + t_2h$, $|t_1| + |t_2| \leq 1$. Произведем замену $Q_n(t_1, t_2) = P_n(t_1x + t_2h)$. Тогда

$$(Q_n)_{t_2^k t_1^s}^{(k+s)}(1, 0) = P_n^{(k+s)}(x)[h^k, x^s] = P_n^{(k+s)}(x)[h^k, \bar{x}^s](\rho(x))^s. \quad (92)$$

Из неравенства (9) и равенства (92) следует неравенство (91).

Пусть $u = (1, 1)$, $z = (1, -1)$, $x = (x_1, x_2)$. Справедливо равенство

$$\|P_n^{(m)}(x)\|_{\mathcal{L}^m} = \max_{k+s=m} |P_n^{(k+s)}(x)[u^k, z^s]|.$$

Ввиду симметрии для доказательства достаточно рассмотреть случай $1 \geq x_1 \geq x_2 \geq 0$. Пусть $b = \cos(\pi/\sqrt{n})$. Пусть $1 \geq x_1 \geq x_2 \geq b$, отрезок $[O_1, D_1]$ параллелен вектору u и $x \in [O_1, D_1]$, $O_1 \in [-z, z]$, $D_1 \in [z, u]$. Точка O_1 является центром квадрата со стороной $[z, D_1]$, который содержится в K . Из построения следуют неравенства

$$\frac{\|O_1 - D_1\|}{\|u\|} \geq \frac{1+b}{2}, \quad \frac{\|O_1 - z\|}{\|z\|} \geq \frac{1+b}{2}, \quad \frac{\|O_1 - x\|}{\|O_1 - D_1\|} \geq b. \quad (93)$$

Из (91) и (93) вытекает неравенство

$$|P_n^{(k+s)}(x)[u^k, z^s]| \leq T_n^{(k+s)}(1) \frac{2^{k+s}}{(1+b)^{k+s} b^k}. \quad (94)$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} & \frac{2^{k+s}}{(1 + \cos(\pi/\sqrt{n}))^{k+s} \cos^k(\pi/\sqrt{n})} \\ &= \left(1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)\right)^{k+s} \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)\right)^{-k} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \quad (95)$$

Пусть $\Omega = \{x : 1 \geq x_1 \geq x_2 \geq 0, x_2 \leq b\}$. Имеем равенства

$$\begin{aligned} P_n^{(k+s)}(x)[u^k, z^s] &= P_n^{(k+s)}(x)[((1, 0) + (0, 1))^k, ((1, 0) - (0, 1))^s] \\ &= \sum_{0 \leq i \leq k+s} \beta_i P_n^{(k+s)}(x)[(1, 0)^{k+s-i}, (0, 1)^i], \quad \beta_0 = 1. \end{aligned} \quad (96)$$

При $0 < i \leq k+s$ из неравенства В. А. Маркова и неравенства Шеффера–Даффина следует неравенство

$$|\beta_i P_n^{(k+s)}(x)[(1, 0)^{k+s-i}, (0, 1)^i]| \leq |\beta_i| M_{n,i}(b) T_{n-i}^{(k+s-i)}(1). \quad (97)$$

Отсюда и из (72) и (75) имеем представления

$$M_{n,i}^2(b) = \sum_{j=0}^{i-1} a_j^{(i)}(n)(1-b^2)^{-(i+j)},$$

$$a_j^{(i)} = C_{i-1+j}^{2j} \left(\frac{(2j)!}{2^j j!} \right)^2 n^2 \prod_{\alpha=j+1}^{i-1} (n^2 - \alpha^2), \quad j = \overline{0, i-1}.$$

Имеют место соотношения

$$1 - \cos^2 \left(\frac{\pi}{\sqrt{n}} \right) = \sin^2 \left(\frac{\pi}{\sqrt{n}} \right) > \frac{4\pi^2}{n\pi^2} = \frac{4}{n},$$

$$a_j^{(i)}(n)(1-b^2)^{-(i+j)} = O(n^{2(i-j)+i+j}) = O(n^{3i-j}),$$

$$M_{n,i}(b) = O(n^{3i/2}). \quad (98)$$

Из соотношений (96)–(98) получаем

$$|\beta_i| M_{n,i}(b) T_{n-i}^{(k+s-i)}(1) = O(n^{2(k+s)-i/2}),$$

$$\max_{x \in \Omega, \|P_n\|_K \leq 1} |P_n^{(k+s)}(x)[u^k, z^s]| = T_n^{(k+s)}(1)(1 + O(n^{-1/2})). \quad (99)$$

Из соотношений (99), (95) и (94) следует равенство (90).

ТЕОРЕМА 7. Пусть $X = l_p^{(m)}$, $K = B_{l_q^{(m)}}$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $\|P_n\|_K \leq 1$. Тогда

$$\|P_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k} \leq \min \left(c^k, \frac{k^k}{k!} \right) \frac{T_n^{(k)}(\rho_1(x, k))}{r^k(K)}, \quad x \in X, \quad (100)$$

где $c = m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{s}}$ при $s = \min(p, q) \geq 2$, $c = m^{\frac{1}{u}-\frac{1}{2}}$ при $u = \max(p, q) \leq 2$, $c = 1$ при $1 \leq q \leq 2 \leq p$ или при $1 \leq p \leq 2 \leq q$. В двух последних случаях при $k = n$ оценка (100) точная для любого x . Если $1 \leq p \leq 2 < q = \infty$ либо $1 = q < 2 \leq p$, то оценка (100) точная только при $\rho(x) = \rho_1(x, k)$. Если $1 \leq p \leq 2 \leq q < \infty$ или $1 < q \leq 2 \leq p$, то оценка (100) точная только при $r_x = r(K)$ и $\rho(x) = \rho_1(x, k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\|\cdot\|_p$ – норма пространства $l_p^{(m)}$ и $r_2(K)$ – радиус шара из пространства $l_2^{(m)}$, вписанного в тело K . Из теоремы 1 и замечания 9 при $\|P_n\|_K \leq 1$ получаем неравенство

$$|P_n^{(k)}(x)[h_1, h_2, \dots, h_k]| \leq \left(\prod_{i=1}^k \|h_i\|_2 \right) \frac{T_n^{(k)}(\rho_1(x, k))}{r_2^k(K)}. \quad (101)$$

Пусть $y = (1, 1, \dots, 1)$, $y_p = y/\|y\|_p$. Из неравенства Гёльдера имеем

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p \|y_p\|_q \quad \text{при} \quad 1 \leq q \leq p. \quad (102)$$

Равенство в (102) имеет место только при $|x_i| = \text{const}$, $i = \overline{1, m}$. Если $1 \leq q \leq p$ и $\|x\|_p = 1$, то из (102) следуют неравенства $\rho(x) \leq \rho(y_p)$,

$$r_x \geq r_{y_p} = \frac{1}{\|y_p\|_q} = r(K). \quad (103)$$

Пусть $2 \leq q \leq p$, а $\|h\|_p = 1$. Тогда из неравенств (102) и (103) получим

$$\|h\|_2 \leq \frac{\|y_p\|_2}{\|y_2\|_2} = \frac{\|y_p\|_q}{\|y_2\|_q} = \frac{m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}}{r(K)}. \quad (104)$$

Поскольку $r_2(K) = 1$, то из неравенств (104) и (101) следует неравенство (100).

Пусть $2 \leq p \leq q$. Тогда $r_2(K) = 1$ и $\|h\|_2 \leq \|y_p\|_2 = m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$ при $\|h\|_p = 1$. Поэтому из неравенства (101) вытекает неравенство (100).

Пусть $1 \leq q \leq p \leq 2$. Если $\|h\|_p \leq 1$, то $\|h\|_2 \leq 1$.

Из неравенства (103) имеем $r_2(K) = 1/\|y_2\|_q = m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}$, $r(K) = 1/\|y_p\|_q = m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$. Отсюда

$$\frac{\|h\|_2 r(K)}{r_2(K) r(K)} \leq \frac{m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}{r(K)}. \quad (105)$$

Из неравенств (105) и (101) следует неравенство (100).

Пусть $1 \leq p \leq q \leq 2$. Если $\|h\|_p \leq 1$, то $\|h\|_2 \leq 1$. Имеем $r(K) = 1$ и $r_2(K) = 1/\|y_2\|_q = m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}$. Отсюда и из неравенства (101) получаем неравенство (100).

Пусть $1 \leq q \leq 2 \leq p$. Если $\|h\|_p \leq 1$, то из неравенств (102) и (103) следует неравенство

$$\|h\|_2 \leq \frac{\|y_p\|_2}{\|y_2\|_2} = \frac{\|y_p\|_q}{\|y_2\|_q} = \frac{r_2(K)}{r(K)}. \quad (106)$$

Из неравенств (106) и (101) вытекает неравенство (100).

Пусть $1 \leq p \leq 2 \leq q$. Если $\|h\|_p \leq 1$, то $\|h\|_2 \leq 1$. Имеем $r(K) = r_2(K) = 1$. Отсюда и из неравенства (101) следует неравенство (100). Условия точности оценки (100) следуют из теоремы 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Из доказательства теоремы 7 следует: если $X = l_p^{(m)}$, $p \geq 2$, $K \subset X$, $\|P_n\|_K \leq 1$ и величина $r_2(K)$ достигается на векторе h , где $|h_i| = \text{const}$, $i = \overline{1, m}$, то справедливо неравенство (100), где $c = 1$.

Список литературы

1. В. А. Марков, *О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке*, Изд-во Имп. АН, СПб., 1892.
2. А. А. Марков, *Об одном вопросе Д. И. Менделеева. Избранные труды*, ГИТЛ, М.-Л., 1948.
3. A. C. Schaeffer, R. J. Duffin, "On some inequalities of S. Bernstein and W. Markoff for derivatives of polynomials", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44**:4 (1938), 289–297.
4. С. А. Теляковский, "О работах по теории приближения функций, выполненных в МИАН", *Тр. МИАН СССР*, **182** (1988), 128–179; англ. пер.: S. A. Telyakovskii, "Work on the theory of approximation of functions carried out at the V. A. Steklov Institute of Mathematics", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **182**:1 (1990), 141–197.
5. A. V. Andrianov, "On some open problems for algebraic polynomials on bounded convex bodies", *East J. Approx.*, **5**:1 (1999), 117–123.
6. Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Выпуклый анализ и его приложения*, Эдиториал УРСС, М., 2000.

7. В. И. Скалыга, “Границы производных от полиномов на центрально-симметричных выпуклых телах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:3 (2005), 179–192; англ. пер.: V. I. Skalyga, “Bounds for the derivatives of polynomials on centrally symmetric convex bodies”, *Izv. Math.*, **69**:3 (2005), 607–621.
8. В. И. Скалыга, “Аналоги неравенств В. Маркова, А. Шеффера и Р. Даффина на выпуклых телах”, *Матем. заметки*, **68**:1 (2000), 146–150; англ. пер.: V. I. Skalyga, “Analogues of the Markov and Schaeffer–Duffin inequalities for convex bodies”, *Math. Notes*, **68**:1 (2000), 130–134.
9. В. И. Скалыга, “Многомерные аналоги неравенств В. А. Маркова и С. Н. Бернштейна”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:6 (2001), 129–172; англ. пер.: V. I. Skalyga, “Multidimensional analogues of the Markov and Bernstein inequalities”, *Izv. Math.*, **65**:6 (2001), 1197–1241.
10. Y. Sarantopoulos, “Bounds on derivatives of polynomials on Banach spaces”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **110**:2 (1991), 307–312.
11. O. D. Kellogg, “On bounded polynomials in several variables”, *Math. Z.*, **27**:1 (1928), 55–64.
12. G. A. Muñoz, Y. Sarantopoulos, “Bernstein and Markov-type inequalities for polynomials on a real Banach spaces”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **133**:3 (2002), 515–530.
13. Ю. Н. Субботин, Ю. С. Васильев, “Неравенства Маркова в $\mathbb{R}^m$, неулучшаемые на классе всех выпуклых компактных тел”, *Докл. РАН*, **360**:6 (1998), 734–735.
14. В. И. Скалыга, “Оценки производных полиномов на выпуклых телах”, *Тр. МИАН*, **218** (1997), 374–384; англ. пер.: V. I. Skalyga, “Estimates for the derivatives of polynomials on convex bodies”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **3**:218 (1997), 372–383.
15. L. A. Harris, “Bounds on the derivatives of holomorphic functions of vectors”, *Analyse Fonctionnelle et Applications*, Comptes Rendus Colloq. Analyse (Rio de Janeiro, 1972), Hermann, Paris, 1975, 145–163.
16. A. E. Taylor, “Additions to the theory of polynomials in normed linear spaces”, *Tohoku Math. J.*, **44** (1938), 302–318.
17. S. Banach, “Über homogene Polynome in (L^2) ”, *Studia Math.*, **7** (1938), 36–44.
18. В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*, Наука, М., 1977.
19. М. В. Меньшиков, А. М. Ревякин, А. М. Копылова, Ю. Н. Макаров, Б. С. Стечкин, *Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения*, Наука, М., 1982.

В. И. СКАЛЫГА

Конструкторское бюро “Аметист”

E-mail: kb_ametist@mail.ru

Поступило в редакцию

14.03.2006