Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Н. Герман, Е. Л. Лакштанов, О многомерном обобщении теоремы Лагранжа для цепных дробей, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 1, 51–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/im1135>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 10:46:51

УДК 511.6+511.9

О. Н. Герман, Е. Л. Лакштанов

О многомерном обобщении теоремы Лагранжа для цепных дробей

Доказан многомерный аналог классической теоремы Лагранжа о цепных дробях. В качестве многомерного обобщения цепных дробей использованы полиэдры Клейна.

Библиография: 15 наименований.

§ 1. Введение

Теорема Лагранжа о цепных дробях заключается в следующем: *число α является квадратичной иррациональностью тогда и только тогда, когда его разложение в цепную дробь периодически начиная с какого-то момента.*

Дадим геометрическую интерпретацию этого факта. Рассмотрим две прямые в $\mathbb{R}^2$, порожденные векторами $(1, \alpha)$ и $(1, \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\alpha \neq \beta$. Эти прямые разбивают плоскость на четыре угла (которые мы будем называть *конусами* согласно терминологии дальнейших многомерных обобщений). Во внутренности каждого конуса рассмотрим выпуклую оболочку целочисленных точек. Получившиеся четыре неограниченных выпуклых многоугольника называются *полигонами Клейна*. Имеет место замечательное соответствие между неполными частными чисел α и β и ребрами полигонов Клейна (см. [1], [2]), при котором целочисленные длины ребер полигонов Клейна и целочисленные углы между соседними ребрами равны соответствующим неполным частным чисел α и β . *Целочисленной длиной* отрезка с концами в $\mathbb{Z}^2$ называется величина, равная количеству точек решетки $\mathbb{Z}^2$, содержащихся во внутренности этого отрезка, плюс 1. *Целочисленным углом* между двумя такими отрезками с общей вершиной называется величина, равная отношению площади параллелограмма, натянутого на них, к произведению их целочисленных длин. В случае непараллельных отрезков целочисленный угол между ними, очевидно, равен индексу подрешетки, порожденной примитивными целочисленными векторами, параллельными этим отрезкам. Описанная конструкция позволяет сформулировать геометрический аналог теоремы Лагранжа (см. [2]).

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-01-00518), INTAS (грант № 03-51-5070) и Программы Президента РФ (грант № МК-6370.2006.1), работа второго автора – при поддержке Центра Centre for Research on Optimization and Control (CEOC) из средств фонда “Fundação para a Ciência e a Tecnologia” (FCT) и частично из средств фонда European Community Fund FEDER/POCTI.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Следующие два условия эквивалентны:

- 1) конус $\mathcal{C}$ инвариантен относительно действия некоторого оператора из $SL_2(\mathbb{Z})$ с различными действительными положительными собственными значениями;
- 2) комбинаторная структура границы полигона Клейна, соответствующего конусу $\mathcal{C}$, оснащенная целочисленными длинами ребер и целочисленными углами между соседними ребрами, периодична.

Несколько лет назад В. И. Арнольд предложил найти аналог этого утверждения для так называемых *полиэдров Клейна* – естественного многомерного обобщения полигонов Клейна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ – n -мерный симплицальный конус с вершиной в начале координат $\mathbf{0}$. Выпуклая оболочка K ненулевых точек решетки $\mathbb{Z}^n$, содержащихся в $\mathcal{C}$, называется *полиэдром Клейна*, соответствующим решетке $\mathbb{Z}^n$ и конусу $\mathcal{C}$.

Для обобщения утверждения 1 естественно рассматривать случай, когда конус $\mathcal{C}$ иррационален, т. е. когда в плоскостях граней конуса нет точек решетки, кроме $\mathbf{0}$. Тогда, как показано в [3], полиэдр Клейна является обобщенным многогранником, т. е. его пересечение с любым ограниченным многогранником также будет многогранником. Стало быть, граница K в этом случае является $(n-1)$ -мерной полиэдральной поверхностью, гомеоморфной $\mathbb{R}^{n-1}$ и состоящей из выпуклых $(n-1)$ -мерных (обобщенных) многогранников, среди которых, вообще говоря, могут встретиться неограниченные. Однако в любом случае каждая точка, лежащая на границе K , принадлежит лишь конечному числу граней K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Граница Π полиэдра Клейна K называется *парусом*.

Ввиду описанного выше соответствия можно рассматривать грани паруса и реберные звезды его вершин как многомерные аналоги неполных частных. В. И. Арнольд предположил, что существуют некоторые локальные аффинные инварианты паруса, периодичность которых влечет существование неединичного оператора из $SL_n(\mathbb{Z})$, оставляющего конус (а значит, и парус) на месте. Вскоре после постановки задачи стали появляться результаты в этом направлении (см. [4]–[8]). Особенно интересен результат работы [5], в которой предложен (без доказательства) многомерный аналог утверждения 1, имеющий, однако, неточность в формулировке. Настоящая работа посвящена точной формулировке и доказательству соответствующей теоремы из [5].

§ 2. Формулировка основного результата

Если $\mathbf{v}$ – вершина паруса Π , то ее реберную звезду, т. е. объединение всех ребер паруса, инцидентных этой вершине, мы будем обозначать $St_{\mathbf{v}}$.

Упорядоченный набор (конечный или бесконечный) вершин паруса Π такой, что любые две подряд идущие вершины соединены ребром, будем называть *цепочкой* вершин паруса Π . Рассмотрим множество $\mathcal{V}_k(\Pi)$ всех цепочек длины k вершин паруса Π . Рассмотрим граф $\mathcal{G}_k(\Pi)$, вершинами которого являются точки множества $\mathcal{V}_k(\Pi)$, а ребрами – такие пары $(V, W) \in \mathcal{V}_k(\Pi) \times \mathcal{V}_k(\Pi)$,

что $V \cup W \in \mathcal{V}_{k+1}(\Pi)$. Очевидно, граф $\mathcal{G}_{k+1}(\Pi)$ изоморфен реберному графу графа $\mathcal{G}_k(\Pi)$. Как и в случае с вершинами паруса, упорядоченный набор (конечный или бесконечный) вершин графа $\mathcal{G}_k(\Pi)$ такой, что любые две подряд идущие вершины соединены ребром, будем называть *цепочкой* вершин графа $\mathcal{G}_k(\Pi)$. Очевидно, что любой цепочке длиной $l \geq 2$ вершин графа $\mathcal{G}_k(\Pi)$ можно естественным образом поставить в соответствие цепочку длиной $l - 1$ вершин графа $\mathcal{G}_{k+1}(\Pi)$. В частности, любой цепочке длиной l вершин паруса Π при каждом $k \leq l$ соответствует цепочка длиной $l + 1 - k$ в $\mathcal{G}_k(\Pi)$.

Рассмотрим группу целочисленных аффинных операторов $\text{Aff}_n(\mathbb{Z})$ и некоторое ее подмножество $\mathfrak{A}$. Определим $\mathfrak{A}$ -раскраску графа $\mathcal{G}_k(\Pi)$ следующим образом. Две различные вершины V и W этого графа раскрашиваем в один и тот же цвет, если существует оператор из $\mathfrak{A}$, переводящий $\bigcup_{v \in V} \text{St}_v$ в $\bigcup_{v \in W} \text{St}_v$. Отметим, что при этом мы не требуем, чтобы этот оператор сохранял порядок вершин паруса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ – цепочка вершин паруса Π . Пусть любые $n - 1$ подряд идущие вершины аффинно независимы (т. е. не лежат ни в какой $(n - 3)$ -мерной плоскости) и принадлежат некоторой $(n - 1)$ -мерной грани паруса. Пусть образы этой цепочки в $\mathcal{G}_n(\Pi)$ и в $\mathcal{G}_{n+1}(\Pi)$ имеют периодичные $\mathfrak{A}$ -раскраски, причем для любых двух различных операторов $A, B \in \mathfrak{A}$, “осуществляющих” раскраску, оператор AB^{-1} также принадлежит $\mathfrak{A}$. Тогда цепочку $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ вершин паруса Π будем называть $\mathfrak{A}$ -периодической.

Обозначим через $\mathfrak{A}_0$ множество таких аффинных операторов $\mathbf{A}$, что $\mathbf{A}: \mathbf{x} \mapsto A(\mathbf{x}) + \mathbf{a}$, $A \in \text{SL}_n(\mathbb{Z})$, $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$, и A удовлетворяет следующим двум свойствам:

(P1) все собственные значения оператора A отличны от единицы;

(P2) если $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ – собственное значение оператора A , то все остальные собственные значения, кроме комплексно-сопряженного к α , отличны по модулю от α .

Следующие ниже теоремы (особенно теоремы 1, 4 и 5) уточняют результат работы [5].

ТЕОРЕМА 1. Пусть парус Π соответствует решетке $\mathbb{Z}^n$ и иррациональному конусу $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда следующие два условия эквивалентны:

1) существует неединичный оператор $A \in \text{SL}_n(\mathbb{Z})$ такой, что $A(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$;

2) существует неограниченная в обе стороны (как подмножество в $\mathbb{R}^n$)

$\mathfrak{A}_0$ -периодическая цепочка $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ вершин паруса Π .

Импликация $1) \Rightarrow 2)$ очевидна, поскольку если $A(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, то $A(\Pi) = \Pi$. Импликация $2) \Rightarrow 1)$ следует из теорем 2 и 3, которые и доказываются в настоящей работе.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathfrak{A}$ – произвольное подмножество группы $\text{Aff}_n(\mathbb{Z})$, и пусть $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ – $\mathfrak{A}$ -периодическая цепочка вершин паруса $\Pi \subset \mathbb{R}^n$. Тогда существует оператор из $\mathfrak{A}$, осуществляющий нетривиальный сдвиг множества $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \text{St}_{\mathbf{v}_i}$ вдоль себя.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Оператор $A \in \text{SL}_n(\mathbb{Z})$ называется *гиперболическим*, если его характеристический многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$ и все его корни суть положительные вещественные числа.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ – неограниченная в обе стороны (как подмножество в $\mathbb{R}^n$) последовательность (не обязательно являющаяся цепочкой) вершин паруса Π , соответствующего решетке $\mathbb{Z}^n$ и некоторому иррациональному конусу $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$. Пусть существует оператор $\mathbf{A} \in \mathfrak{A}_0$ такой, что $\mathbf{A}(\text{St}_{\mathbf{v}_i}) = \text{St}_{\mathbf{v}_{i+1}}$. Тогда $\mathbf{A} = A \in \text{SL}_n(\mathbb{Z})$ и $A(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. Кроме того, если собственные значения оператора A попарно различны, то A – гиперболический оператор.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из доказательства теоремы 3 видно, что если оператор, осуществляющий сдвиг цепочки, линеен, то можно ограничиться требованием выполнения для него свойства (P2), а выполнения свойства (P1) не требовать.

Если обозначить через $\mathfrak{A}_1$ множество таких операторов из $\mathfrak{A}_0$, что линейная компонента каждого из них имеет попарно различные собственные значения, то получим еще одну теорему, также являющуюся следствием теорем 2 и 3.

ТЕОРЕМА 4. Пусть парус Π соответствует решетке $\mathbb{Z}^n$ и иррациональному конусу $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда следующие два условия эквивалентны:

- 1) существует гиперболический оператор $A \in \text{SL}_n(\mathbb{Z})$ такой, что справедливо соотношение $A(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$;
- 2) существует неограниченная в обе стороны (как подмножество в $\mathbb{R}^n$) $\mathfrak{A}_1$ -периодическая цепочка $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ вершин паруса Π .

Отметим, что импликация 1) $\Rightarrow$ 2) в теореме 4 в силу гиперболичности оператора A следует, помимо прочего, из теоремы Дирихле об алгебраических единицах (см. [9] и [10]). Отметим также, что в теореме 1 нельзя оставить $\mathfrak{A}_0$ и при этом добавить требование гиперболичности в п. 1). Для четных n легко придумать такой оператор $A \in \text{SL}_n(\mathbb{Z})$, для которого существует иррациональный инвариантный (симплициальный) конус, но при этом его характеристический многочлен равен, например, квадрату неприводимого над $\mathbb{Q}$ многочлена с целыми коэффициентами и положительными вещественными корнями. Так, при $n = 4$ можно взять оператор с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Этот оператор имеет две инвариантные иррациональные двумерные плоскости, в которых можно выбрать по два вектора так, чтобы они задавали иррациональный конус $\mathcal{C}$, инвариантный для оператора A , но не инвариантный ни для какого гиперболического целочисленного оператора.

С другой стороны, нельзя добавить требование гиперболичности в условии 1) теоремы 1, заменив лишь свойство (P2) на свойство операторов иметь попарно различные собственные значения. Это видно из следующего примера, любезно предоставленного Е. И. Коркиной (Павловской).

ПРИМЕР. Рассмотрим квадратное уравнение $\lambda^2 - p\lambda + 1 = 0$ с целым $p \geq 3$. Оно имеет два различных действительных иррациональных положительных корня λ_1 и λ_2 . Заменив λ на μ^3 , получим уравнение 6-й степени:

$\mu^6 - p\mu^3 + 1 = 0$. Рассмотрим расширение поля $\mathbb{Q}$ корнем этого уравнения. Это будет 6-мерное векторное пространство M над $\mathbb{Q}$ с базисом $1, \mu, \dots, \mu^5$. Рассмотрим $\mathrm{SL}_6(\mathbb{Z})$ -оператор A , действующий на M умножением на μ . Вложим естественным образом M в $\mathbb{R}^6$ и расширим действие оператора A с образа пространства M на всё $\mathbb{R}^6$.

Оператор A имеет шесть собственных значений: $\sqrt[3]{\lambda_1}, \zeta \sqrt[3]{\lambda_1}, \zeta^2 \sqrt[3]{\lambda_1}$ и $\sqrt[3]{\lambda_2}, \zeta \sqrt[3]{\lambda_2}, \zeta^2 \sqrt[3]{\lambda_2}$, где $\zeta = e^{2\pi i/3}$. Для каждого $i = 1, 2$ обозначим через V_i трехмерное A -инвариантное подпространство пространства $\mathbb{R}^6$, соответствующее собственным значениям $\sqrt[3]{\lambda_i}, \zeta \sqrt[3]{\lambda_i}, \zeta^2 \sqrt[3]{\lambda_i}$, и рассмотрим произвольный вектор $\omega_i \in V_i$, не лежащий ни в каком одно- или двумерном инвариантном подпространстве оператора A . Положим $\omega_i^0 = \omega_i, \omega_i^1 = A\omega_i, \omega_i^2 = A^2\omega_i$. Векторы $\omega_1^0, \omega_1^1, \omega_1^2, \omega_2^0, \omega_2^1, \omega_2^2$, очевидно, линейно независимы. Рассмотрим натянутый на них конус $\mathcal{C}$. Его трехмерные грани, задаваемые первыми тремя и последними тремя векторами, инвариантны относительно действия оператора A , поскольку $A\omega_i^2 = A^3\omega_i^0 = \lambda_i\omega_i^0$ и $\lambda_i > 0$. Стало быть, и конус $\mathcal{C}$, и парус, ему соответствующий, инвариантны относительно действия оператора A , однако оператор A не гиперболический. Более того, мы можем выбрать векторы ω_1 и ω_2 таким образом, чтобы они задавали трансцендентные направления, и тогда конус $\mathcal{C}$ не будет инвариантным ни для какого гиперболического целочисленного оператора.

Для $n = 3$ можно доказать несколько более сильное утверждение, чем теоремы 1 и 4, а именно можно $\mathfrak{A}_0$ заменить на $\mathrm{Aff}_3(\mathbb{Z})$ и при этом оставить условие гиперболичности. При этом ясно, что для $n = 3$ и $\mathfrak{A} = \mathrm{Aff}_3(\mathbb{Z})$ технические условия определения 3 автоматически выполняются и $\mathrm{Aff}_3(\mathbb{Z})$ -периодичность цепочки вершин означает в точности периодичность $\mathrm{Aff}_3(\mathbb{Z})$ -раскраски образов этой цепочки в $\mathcal{G}_n(\Pi)$ и в $\mathcal{G}_{n+1}(\Pi)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть парус Π соответствует решетке $\mathbb{Z}^3$ и иррациональному конусу $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$. Тогда следующие два условия эквивалентны:

- 1) существует гиперболический оператор $A \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ такой, что справедливо соотношение $A(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$;
- 2) существует неограниченная в обе стороны (как подмножество в $\mathbb{R}^3$) $\mathrm{Aff}_3(\mathbb{Z})$ -периодическая цепочка $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ вершин паруса Π .

§ 3. Доказательство теоремы 2

Обозначим через $\{V_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ и $\{W_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ образы цепочки $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ в $\mathcal{G}_n(\Pi)$ и $\mathcal{G}_{n+1}(\Pi)$ соответственно. Будем считать, что $V_0 \setminus V_1 = W_0 \setminus W_1 = \{\mathbf{v}_0\}$. Пусть

$$\tilde{V}_i = \bigcup_{\mathbf{v} \in V_i} \mathrm{St}_{\mathbf{v}}, \quad \tilde{W}_i = \bigcup_{\mathbf{v} \in W_i} \mathrm{St}_{\mathbf{v}}.$$

Положив t равным наименьшему общему кратному периодов раскрасок графов $\mathcal{G}_n(\Pi)$ и $\mathcal{G}_{n+1}(\Pi)$, получаем, что существуют операторы $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathfrak{A}$ такие, что

$$\mathbf{A}(\tilde{V}_0) = \tilde{V}_t, \quad \mathbf{B}(\tilde{V}_1) = \tilde{V}_{t+1}, \quad \mathbf{C}(\tilde{W}_0) = \tilde{W}_t.$$

Предположим, что оператор $\mathbf{A}$ меняет порядок вершин, т. е. $\mathbf{A}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_{t+n-1-i}$ для всех $i = 0, 1, \dots, n-1$. Тогда либо оператор $\mathbf{A}'$, такой что $\mathbf{A}'(\tilde{V}_t) = \tilde{V}_{2t}$,

либо оператор $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ (для которого, очевидно, $\mathbf{A}'\mathbf{A}(\tilde{V}_0) = \tilde{V}_{2t}$) сохраняет порядок вершин. Поэтому мы можем считать, что оператор $\mathbf{A}$ сохраняет порядок вершин, удвоив, если необходимо, t или сдвинув все индексы на t .

Предположим теперь, что оператор $\mathbf{B}$ меняет порядок вершин. Тогда, как легко видеть, либо оператор $\mathbf{C}$, либо оператор $\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}$ переводит $\tilde{V}_1$ в $\tilde{V}_{t+1}$, не меняя при этом порядок вершин. Поэтому мы можем считать, что оператор $\mathbf{B}$ также сохраняет порядок вершин.

В предположении, что операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ сохраняют порядок вершин, рассмотрим оператор $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$. Очевидно, $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_i$ и $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}(\text{St}_{\mathbf{v}_i}) = \text{St}_{\mathbf{v}_i}$ для каждого $i = 1, 2, \dots, n-1$. Обозначим через $\mathbf{r}_0$ сумму векторов, задающих ребра звезды $\text{St}_{\mathbf{v}_1}$, и положим $\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i$ для $i = 1, 2, \dots, n-2$. Ясно, что $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_i) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_i$ для каждого $i = 0, 1, \dots, n-2$. Из условия следует, что векторы $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n-2}$ линейно независимы и параллельны некоторой $(n-1)$ -мерной грани, инцидентной вершине $\mathbf{v}_1$. Стало быть, векторы $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n-2}$ также линейно независимы. Следовательно, аффинная оболочка точек $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_{n-2}$ является $(n-1)$ -мерной инвариантной плоскостью оператора $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$. Эта плоскость делит ребра звезды $\text{St}_{\mathbf{v}_1}$ на два инвариантных подмножества, так как $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ сохраняет ориентацию. Обозначим через $\mathbf{r}'_0$ и $\mathbf{r}''_0$ суммы векторов, задающих ребра этих двух подмножеств. Тогда точки $\mathbf{v}_1 + \mathbf{r}'_0$ и $\mathbf{v}_1 + \mathbf{r}''_0$ остаются на месте при действии оператора $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ и хотя бы одна из них не лежит в аффинной оболочке точек $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_{n-2}$. Получаем $n+1$ точек, не лежащих ни в какой n -мерной плоскости и инвариантных относительно действия оператора $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$. Следовательно, $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ – тождественный оператор, и $\mathbf{B} = \mathbf{A}$.

Продолжая это рассуждение в обе стороны цепочки $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, получаем, что оператор $\mathbf{A}$ сдвигает цепочку звезд $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \text{St}_{\mathbf{v}_i}$ вдоль себя.

§ 4. Теорема о звезде и целочисленном расстоянии

Настоящий параграф посвящен формулировке и доказательству теоремы 6, утверждающей, что точка решетки $\mathbb{Z}^n$, из которой “виден” некоторый выпуклый целочисленный многогранник, не может находиться слишком “далеко” от него, причем оценка сверху “расстояния” полностью определяется комбинаторно-целочисленной структурой реберных звезд многогранника. Мы воспользуемся этой теоремой для доказательства теоремы 3, а также в конце работы – для переформулировки гипотезы Оппенгейма.

Будем через $\text{conv}(M)$ и $\text{aff}(M)$ обозначать соответственно выпуклую и аффинную оболочки множества $M \subset \mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Многогранник (обобщенный), все вершины которого принадлежат решетке $\mathbb{Z}^n$, называется *целочисленным*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть в вершине $\mathbf{v}$ целочисленного выпуклого n -мерного (обобщенного) многогранника P сходятся m ребер. Обозначим через $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m$ примитивные векторы решетки $\mathbb{Z}^n$, параллельные этим ребрам. Тогда *детерминантом* реберной звезды $\text{St}_{\mathbf{v}}$ вершины $\mathbf{v}$ будем называть величину

$$\det \text{St}_{\mathbf{v}} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} |\det(\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_n})|.$$

Иными словами, величину $\det \text{St}_{\mathbf{v}}$ можно определять как объем суммы Минковского отрезков $[\mathbf{0}, \mathbf{r}_1], \dots, [\mathbf{0}, \mathbf{r}_m]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ — $(n-1)$ -мерный целочисленный многогранник и $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$. Индекс минимальной (по включению) подрешетки $\mathbb{Z}^n$, содержащей множество $\mathbb{Z}^n \cap \text{aff}(F) - \mathbf{a}$, называется *целочисленным расстоянием* от F до $\mathbf{a}$ и обозначается $\rho_{\text{int}}(F, \mathbf{a})$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $P \subset \mathbb{R}^n$ — n -мерный целочисленный выпуклый многогранник, не содержащий $\mathbf{0}$. Пусть $\mathbf{v}$ — вершина P , содержащаяся во внутренней множестве $\text{conv}(P \cup \{\mathbf{0}\})$, пусть $\mathbf{v}$ инцидентна m ребрам P , и пусть F — $(n-1)$ -мерная грань P , инцидентная вершине $\mathbf{v}$. Пусть также

$$\mathbb{Z}^n \cap \text{conv}(P \cup \{\mathbf{0}\}) \setminus P = \{\mathbf{0}\}.$$

Тогда

$$\rho_{\text{int}}(F, \mathbf{0}) < (nm)^{4n!} \det \text{St}_{\mathbf{v}}.$$

На самом деле в доказательстве теоремы 3 мы воспользуемся не самой теоремой 6, а ее следствием.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\mathbf{v}$ — вершина паруса Π и F — $(n-1)$ -мерная грань Π , инцидентная вершине $\mathbf{v}$. Тогда

$$\rho_{\text{int}}(F, \mathbf{0}) < (n \det \text{St}_{\mathbf{v}})^{8n!}.$$

Отметим еще одно следствие теоремы 6, полезное для явного описания граней полиэдров Клейна, хотя в настоящей работе мы им пользоваться не будем.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $P \subset \Delta \subset \mathbb{R}^n$ — n -мерный целочисленный выпуклый многогранник, содержащийся в произвольном многограннике Δ (например, симплексе), и

$$P = \bigcap_{i=1}^k \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{f}_i \rangle \geq D_i\},$$

где $\mathbf{f}_i$ — примитивные векторы решетки $\mathbb{Z}^n$. Пусть в каждой вершине P сходится не более чем m ребер, пусть D — константа, ограничивающая детерминанты всех реберных звезд P , и

$$\mathbb{Z}^n \cap \bigcap_{i=1}^k \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{f}_i \rangle > D_i - D(nm)^{4n!}\} = \mathbb{Z}^n \cap P.$$

Тогда $\mathbb{Z}^n \cap \Delta = \mathbb{Z}^n \cap P$.

Для доказательства теоремы 6 нам понадобится несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1. Пусть n — натуральное и V, A, B — действительные числа такие, что $V > 0$, $A > V/n$, $0 < B < 1$. Пусть $f(x) = A(B-x)^{n-1}(1-x) - x$. Тогда $f(x) > 0$ при любом x таком, что $0 \leq x \leq B^{n-1}n^{-1}(1+V^{-1})^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Корень уравнения касательной к $f(x)$ в нуле равен

$$\frac{AB^{n-1}}{1 + AB^{n-2}(n-1+B)} > \frac{B^{n-1}}{n(1+V^{-1})}$$

и дает оценку снизу минимального положительного корня многочлена $f(x)$.

ЛЕММА 2. Пусть Λ – n -мерная решетка в $\mathbb{R}^n$ с определителем, равным 1. Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ – n -мерный симплекс с вершинами $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{Q}\Lambda$. Пусть точка $\mathbf{v} \in \Lambda$ лежит в его внутренности. Обозначим через Δ_0 симплекс с вершинами $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Пусть константа V такова, что отношение k -мерного объема любой k -мерной грани симплекса Δ_0 к определителю k -мерной (аффинной) решетки, состоящей из точек решетки Λ , содержащихся в аффинной оболочке этой грани, не меньше чем V при любом $k \in \{1, \dots, n\}$. Пусть также

$$\mathbb{Z}^n \cap \left(\mathbf{v}_0 + \left(1 - \frac{\text{vol}_n(\Delta_0)}{\text{vol}_n(\Delta)} \right) (\Delta - \mathbf{v}_0) \right) \setminus \{\mathbf{v}, \mathbf{v}_0\} = \emptyset$$

(т. е. гиперплоскость, проходящая через точку $\mathbf{v}$ и параллельная плоскости $\text{aff}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, отсекает от Δ симплекс, в котором нет точек решетки, за исключением $\mathbf{v}$ и, быть может, $\mathbf{v}_0$). Тогда

$$\text{vol}_n(\Delta) \leq \text{vol}_n(\Delta_0) \prod_{k=1}^n k^{\frac{n!}{k!}} (1 + V^{-1})^{\frac{(n-1)!}{(k-1)!}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$c_n(V) = \prod_{k=1}^n k^{\frac{n!}{k!}} (1 + V^{-1})^{\frac{(n-1)!}{(k-1)!}}$$

и применим индукцию по n . При $n = 1$ утверждение леммы очевидно. Пусть в размерности $n - 1$ утверждение леммы выполнено. Докажем его для размерности n . При этом ввиду аффинности задачи достаточно доказать утверждение леммы для случая, когда векторы $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_0$ попарно ортогональны и равны по абсолютной величине некоторому числу l .

Не ограничивая общности, считаем, что среди точек $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ точка $\mathbf{v}_n$ является самой далекой от $\mathbf{v}$. Это значит, что среди граней $\text{conv}(\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \setminus \{\mathbf{v}_i\})$ грань $\text{conv}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ является ближайшей к $\mathbf{v}$. Пусть $\mathbf{u} \in \text{conv}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ – ближайшая к $\mathbf{v}$ точка такая, что вектор $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ параллелен плоскости $\pi = \text{aff}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. Тогда во множестве

$$\Omega = \text{conv}(\{\mathbf{v}_0\} \cup (\pi \cap B_{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|}(\mathbf{v}))),$$

где $B_{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|}(\mathbf{v})$ – шар радиуса $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$ с центром в $\mathbf{v}$, нет точек решетки Λ , за исключением $\mathbf{v}$ и, быть может, $\mathbf{v}_0$. Следовательно, объем Ω по теореме Минковского о выпуклом теле обязан быть не больше чем 2^{n-1} , т. е.

$$\frac{|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^{n-1}}{n} \left(1 - \frac{\text{vol}_n(\Delta_0)}{\text{vol}_n(\Delta)} \right) \frac{l}{\sqrt{n}} \leq 2^{n-1} \frac{\text{vol}_n(\Delta_0)}{V}. \quad (1)$$

Положим

$$\begin{aligned}\Delta'_0 &= \text{conv}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}), \\ \Delta' &= \text{aff}(\Delta'_0) \cap \Delta.\end{aligned}$$

Вершинами симплекса Δ' будут точки $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ и некоторая точка $\mathbf{v}'_0$ из отрезка $[\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_n]$. По предположению индукции имеем $\text{vol}_{n-1}(\Delta') \leq c_{n-1}(V) \times \text{vol}_{n-1}(\Delta'_0)$, откуда, пользуясь элементарными геометрическими соображениями, получаем

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}| \geq \sqrt{n} \left(c_{n-1}^{-1}(V) \frac{l}{\sqrt{n-1}} - \frac{\text{vol}_n(\Delta_0)}{\text{vol}_n(\Delta)} \frac{l}{\sqrt{n-1}} \right). \quad (2)$$

Комбинируя неравенства (1), (2) и тот факт, что $\text{vol}_n(\Delta) = l^n/n!$, получаем

$$\frac{V(n-1)!(\sqrt{n-1})^{n-1}}{2^{n-1}\sqrt{n}(\sqrt{n-1})^{n-1}} \left(c_{n-1}^{-1}(V) - \frac{\text{vol}_n(\Delta_0)}{\text{vol}_n(\Delta)} \right)^{n-1} \left(1 - \frac{\text{vol}_n(\Delta_0)}{\text{vol}_n(\Delta)} \right) - \frac{\text{vol}_n(\Delta_0)}{\text{vol}_n(\Delta)} \leq 0.$$

Стало быть, в силу леммы 1 имеем

$$\frac{\text{vol}_n(\Delta_0)}{\text{vol}_n(\Delta)} > \frac{c_{n-1}^{1-n}(V)}{n(1+V^{-1})} = c_n^{-1}(V).$$

Лемма доказана.

Будем обозначать через $\text{int } P$ и $\text{ext } P$ соответственно относительную внутренность и множество вершин многогранника P . Если $M \subset \mathbb{R}^n$ – конечное множество и каждой точке $\mathbf{x} \in M$ соответствует положительная масса $\nu_{\mathbf{x}}$, то для любого подмножества $M' \subseteq M$ мощностью $\sharp(M')$ будем обозначать через $c(M')$ точку $(\sum_{\mathbf{x} \in M'} \nu_{\mathbf{x}} \mathbf{x})/\sharp(M')$, т. е. центр масс точек множества M' .

ЛЕММА 3. Пусть P – произвольный $(n-1)$ -мерный многогранник с произвольными положительными массами в вершинах. Пусть $\mathfrak{T}$ – произвольное разбиение (относительной) границы P на (замкнутые) симплексы с вершинами из $\text{ext } P$. Тогда

$$\text{int } P = \bigcup_{\Delta \in \mathfrak{T}} \text{int}(\text{conv}(\Delta \cup \{c(\text{ext } P \setminus \text{ext } \Delta)\})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{x} \in \text{int } P$. Тогда, очевидно, существует такой симплекс $\Delta \in \mathfrak{T}$, что $\mathbf{x} \in \text{conv}(\Delta \cup \{c(P)\})$. Остается заметить, что множество $\text{conv}(\Delta \cup \{c(P)\}) \cap \text{int } P$ содержится во внутренней части множества $\text{conv}(\Delta \cup \{c(\text{ext } P \setminus \text{ext } \Delta)\})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Пусть $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m$ – примитивные векторы решетки $\mathbb{Z}^n$, параллельные ребрам, инцидентным вершине $\mathbf{v}$. Возьмем произвольные положительные числа $k_1, \dots, k_m$ такие, что точки $\mathbf{r}'_i = k_i \mathbf{r}_i$ лежат на одной гиперплоскости, и положим $P = \text{conv}(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_m)$. Рассмотрим такое λ , что $\lambda \mathbf{v} \in P$.

Припишем точкам $\mathbf{r}'_i$ массы k_i^{-1} . Тогда по лемме 3 мы можем перенумеровать векторы $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m$ (перенумеровывая соответственно числа $k_1, \dots, k_m$

и векторы $\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_m$ таким образом, чтобы выполнялись равенства $\lambda \mathbf{v} = \lambda'_0 \mathbf{r}'_0 + \dots + \lambda'_{n-1} \mathbf{r}'_{n-1}$ с $\mathbf{r}'_0 = (\mathbf{r}_n + \dots + \mathbf{r}_m)/(m - n + 1)$ и строго положительными λ'_i . Положив $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}'_0$, $\lambda_0 = \lambda'_0$ и $\lambda_i = k_i \lambda'_i$ для $i = 1, \dots, n - 1$, получаем, что $\lambda \mathbf{v} = \lambda_0 \mathbf{r}_0 + \dots + \lambda_{n-1} \mathbf{r}_{n-1}$ со строго положительными λ_i . Следовательно, $\mathbf{v}$ содержится во внутренности симплекса Δ с вершинами $\mathbf{0}, \mathbf{v} + \mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{v} + \mathbf{r}_{n-1}$. Из определения $\mathbf{r}_0$ следует, что отношение k -мерного объема любой k -мерной грани симплекса $\Delta_0 = \text{conv}(\mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{v} + \mathbf{r}_{n-1})$ к определителю k -мерной решетки точек из $\mathbb{Z}^n$, содержащихся в аффинной оболочке этой грани, не меньше чем $n^{-1}(m - n + 1)^{-1}$ при любом $k \in \{1, \dots, n\}$. Кроме того, легко видеть, что гиперплоскость, проходящая через точку $\mathbf{v}$ и параллельная плоскости $\text{aff}(\mathbf{v} + \mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{v} + \mathbf{r}_{n-1})$, является опорной для многогранника P и, следовательно, отсекает от Δ симплекс, в котором нет целых точек, кроме $\mathbf{0}$ и $\mathbf{v}$. Стало быть, условие леммы 2 для симплексов Δ и Δ_0 выполнено, откуда следует, что имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \text{vol}_n(\Delta) &\leq \text{vol}_n(\Delta_0) \prod_{k=1}^n k^{\frac{n!}{k!}} (mn - n^2 + n + 1)^{\frac{(n-1)!}{(k-1)!}} \\ &< \text{vol}_n(\Delta_0) \prod_{k=1}^n (nmk)^{\frac{n!}{k!}} < (nm)^{4n!} \text{vol}_n(\Delta_0). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\rho_{\text{int}}(F, \mathbf{0}) \leq n \text{vol}_n(\text{conv}(F \cup \{\mathbf{0}\})) < n \text{vol}_n(\Delta) < (nm)^{4n!} \det \text{St}_{\mathbf{v}}.$$

Теорема доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 3

Для доказательства теоремы 3 нам также понадобится следующий факт, который ввиду его простоты мы оставим без доказательства.

ЛЕММА 4. Пусть $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ — n -мерная жорданова клетка с собственным значением λ . Пусть $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ — вектор, i -я координата которого равна 1, а все остальные — нулю. Пусть $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ — вектор с ненулевыми координатами. Тогда $\langle A^m \mathbf{h}, \mathbf{e} \rangle \asymp \lambda^m m^{n-i}$ при $m \rightarrow +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. В силу условия (P1) оператор $E - A$ обратим. Положим $\mathbf{b} = (E - A)^{-1} \mathbf{a}$. Тогда $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n$ и $\mathbf{A}(\mathbf{b} + \mathbf{x}) = \mathbf{b} + A(\mathbf{x})$, т. е. мы можем считать, что вместо аффинного оператора $\mathbf{A}$ действует линейный оператор A , но вершина конуса $\mathcal{C}$ находится в точке $-\mathbf{b}$.

Если F — произвольная $(n - 1)$ -мерная грань паруса Π , инцидентная $\mathbf{v}_0$, то в силу следствия 1 целочисленное расстояние от $A^m(F)$ до $-\mathbf{b}$ при любом $m \in \mathbb{Z}$ ограничено некоторой константой, не зависящей от m . Следовательно, если $\langle \mathbf{h}_F, \cdot \rangle$ — такая линейная форма, что $\text{aff}(F) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{h}_F, \mathbf{x} \rangle = 1\}$, то

$$\max_{m \in \mathbb{Z}} |\langle (A^*)^m \mathbf{h}_F, -\mathbf{b} \rangle| < \infty. \quad (3)$$

Рассмотрим жорданов базис $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ оператора A и линейную форму $\langle \mathbf{h}, \cdot \rangle$ такую, что ни одна из компонент вектора $\mathbf{h}$ в базисе $\mathcal{E}^*$, двойственном

базису $\mathcal{E}$, не равна нулю, и такую, что плоскость $\pi_{\mathbf{h}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{h}, \mathbf{x} \rangle = 1\}$ пересекает ребра звезды $\text{St}_{\mathbf{v}_0}$ во внутренних точках. Из (3) следует, что

$$\max_{m \in \mathbb{Z}} |\langle (A^*)^m \mathbf{h}, -\mathbf{b} \rangle| < \infty.$$

Отсюда, применяя лемму 4 для $m \rightarrow +\infty$ и $m \rightarrow -\infty$, получаем

$$|A(\mathbf{b})| = |\mathbf{b}|. \quad (4)$$

С другой стороны, из того, что плоскость $\pi_{\mathbf{h}}$ пересекает ребра звезды $\text{St}_{\mathbf{v}_0}$ во внутренних точках, следует, что

$$\inf_{m \in \mathbb{Z}} \text{vol}_n(\text{conv}(-\mathbf{b}, \mathcal{E} \cap A^m(\pi_{\mathbf{h}}))) > 0. \quad (5)$$

Обозначим через $\boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_n$ единичные векторы, задающие направления ребер конуса $\mathcal{E}$. Тогда

$$\begin{aligned} A^m(\pi_{\mathbf{h}} \cap \text{aff}(-\mathbf{b}, -\mathbf{b} + \boldsymbol{\omega}_i)) &= \{-\mathbf{b} + \lambda \boldsymbol{\omega}_i \mid \langle (A^*)^{-m} \mathbf{h}, -\mathbf{b} + \lambda \boldsymbol{\omega}_i \rangle = 1\} \\ &= \left\{ \boldsymbol{\omega}_i \frac{1 + \langle (A^*)^{-m} \mathbf{h}, \mathbf{b} \rangle}{\langle (A^*)^{-m} \mathbf{h}, \boldsymbol{\omega}_i \rangle} \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Значит, неравенство (5) равносильно неравенству

$$\inf_{m \in \mathbb{Z}} \prod_{i=1}^n \frac{1 + \langle (A^*)^{-m} \mathbf{h}, \mathbf{b} \rangle}{\langle (A^*)^{-m} \mathbf{h}, \boldsymbol{\omega}_i \rangle} > 0,$$

из которого в силу (4) следует, что

$$\sup_{m \in \mathbb{Z}} \prod_{i=1}^n \langle (A^*)^m \mathbf{h}, \boldsymbol{\omega}_i \rangle < \infty. \quad (7)$$

Будем считать, что $\mathbf{e}_i$ соответствует собственному значению λ_i и что $|\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_n|$. Обозначим через $\mu_1 < \dots < \mu_k$, $k \leq n$, набор модулей этих собственных значений и для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ обозначим через M_i собственное подпространство оператора A , соответствующее μ_i . Получаем градуировку: $\mathbb{R}^n = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$.

Докажем следующие два утверждения:

- (i) M_i содержит ровно $\dim M_i$ ребер конуса $\mathcal{E}$;
- (ii) матрица оператора A не имеет нетривиальных жордановых клеток.

Для этого положим

$$L_i = \bigoplus_{j=1}^i M_j, \quad L'_i = \bigoplus_{j=i}^k M_j.$$

Получаем фильтрации $\mathbb{R}^n = L_k \supset L_{k-1} \supset \dots \supset L_1 = M_1$ и $\mathbb{R}^n = L'_1 \supset L'_2 \supset \dots \supset L'_k = M_k$. Положим также $r_i = \min\{r : \boldsymbol{\omega}_i \in L_r\}$. Тогда по лемме 4 для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ существует такое $l_i \in \mathbb{Z}$, $l_i \geq 0$, что

$$\langle (A^*)^m \mathbf{h}, \boldsymbol{\omega}_i \rangle \asymp \mu_{r_i}^m m^{l_i}, \quad m \rightarrow +\infty. \quad (8)$$

Стало быть,

$$\prod_{i=1}^n \langle (A^*)^m \mathbf{h}, \omega_i \rangle \asymp \left(\prod_{i=1}^n \mu_{r_i}^m \right) \left(\prod_{i=1}^n m^{l_i} \right) = \left(\prod_{i=1}^n \frac{\mu_{r_i}}{|\lambda_i|} \right)^m \left(\prod_{i=1}^n m^{l_i} \right), \quad m \rightarrow +\infty. \quad (9)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n$. Тогда $i \leq \dim L_{r_i}$ и, следовательно, $\mu_{r_i} \geq |\lambda_i|$, причем равенство достигается лишь в том случае, когда $i > \dim L_{r_i-1}$. Таким образом, из (7) и (9) следует, что для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\dim L_{r_i-1} < i \leq \dim L_{r_i}.$$

Отсюда получаем, что для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ и любого $i \leq \dim L_j$

$$\dim L_{r_i-1} < i \leq \dim L_j,$$

т.е. $r_i \leq j$. Следовательно, если $i \leq \dim L_j$, то $\omega_i \in L_j$. Это значит, что L_j содержит ровно $\dim L_j$ векторов ω_i . Значит, если A^* имеет нетривиальную жорданову клетку, то найдется такое i , что в (8) будет $l_i > 0$, что в силу (9) противоречит (7). Значит, нетривиальных жордановых клеток ни A , ни A^* не имеют, и утверждение (ii) доказано.

Положим теперь $r'_i = \min\{r : \omega_i \in L'_r\}$. Тогда

$$\langle (A^*)^{-m} \mathbf{h}, \omega_i \rangle \asymp \mu_{r'_i}^{-m}, \quad m \rightarrow +\infty.$$

Переупорядочив, если нужно, ω_i , будем считать, что $r'_1 \leq r'_2 \leq \dots \leq r'_n$. Рассуждая так же, как в случае с L_j , получим, что каждое L'_j содержит ровно $\dim L'_j$ векторов ω_i . Но $L_j \cap L'_j = M_j$ и $\dim L_j + \dim L'_j = n + \dim M_j$, стало быть, M_j содержит ровно $\dim M_j$ векторов ω_i . Утверждение (i) доказано.

Если $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, то в силу свойств (P1), (P2) и соотношения (4) точка $\mathbf{b}$ содержится в некотором M_{j_0} , соответствующем ровно двум комплексно-сопряженным собственным значениям, равным по модулю 1. При этом из (i) следует, что M_{j_0} содержит также некоторые ω_{i_1} и ω_{i_2} , т.е. M_{j_0} содержит некоторую двумерную грань $\mathcal{F}$ конуса $\mathcal{C}$. Но поскольку $\langle (A^*)^m \mathbf{h}, \mathbf{v}_{-m} \rangle = \langle \mathbf{h}, \mathbf{v}_0 \rangle$ для всех $m \in \mathbb{Z}$, то либо $\langle (A^*)^m \mathbf{h}, \mathbf{x} \rangle \geq \langle \mathbf{h}, \mathbf{v}_0 \rangle$ для всех $\mathbf{x} \in K$, $m \in \mathbb{Z}$ и $i \in \{1, \dots, n\}$, либо $\langle (A^*)^m \mathbf{h}, \mathbf{x} \rangle \leq \langle \mathbf{h}, \mathbf{v}_0 \rangle$ для всех $\mathbf{x} \in K$, $m \in \mathbb{Z}$ и $i \in \{1, \dots, n\}$. Следовательно, все величины $\langle (A^*)^m \mathbf{h}, \omega_i \rangle$ при $m \in \mathbb{Z}$ и $i \in \{1, \dots, n\}$ должны иметь одинаковые знаки. Но это не выполняется, поскольку ограничение оператора A на M_{j_0} есть оператор вращения, отличный от единичного. Следовательно, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

В силу утверждения (ii) и свойства (P2) каждому пространству M_j соответствует либо чисто вещественное λ , и тогда все векторы, содержащиеся в M_j , суть собственные, либо пара комплексно-сопряженных λ и $\bar{\lambda}$. Если λ не является положительным вещественным числом, то, рассуждая так же, как и в случае с M_{j_0} , приходим к противоречию с тем, что все величины $\langle (A^*)^m \mathbf{h}, \omega_i \rangle$ при $m \in \mathbb{Z}$ и $i \in \{1, \dots, n\}$ имеют одинаковые знаки. Стало быть, все собственные значения оператора A суть положительные вещественные числа, а векторы ω_i суть собственные, т.е. $A(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. Если характеристический многочлен оператора A приводим, то оператор A имеет нетривиальное инвариантное целочисленное подпространство. В случае, когда собственные значения оператора A

попарно различны, это противоречит иррациональности конуса $\mathcal{C}$. Значит, если собственные значения оператора A попарно различны, то A – гиперболический оператор.

§ 6. Трехмерный случай

В настоящем параграфе поясняется, как из теорем 2 и 3 в случае $n = 3$ получить теорему 5.

Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) в теореме 5 так же, как и в теоремах 1 и 4, очевидна.

Пусть выполнено условие 2) теоремы 5. Тогда по теореме 2 существует оператор $\mathbf{A} \in \text{Aff}_n(\mathbb{Z})$, осуществляющий нетривиальный сдвиг множества $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \text{St}_{\mathbf{v}_i}$ вдоль себя. Для доказательства выполнения условия 1) достаточно показать, что $\mathbf{A} \in \mathfrak{A}_0$ и что собственные значения линейной составляющей оператора $\mathbf{A}$ попарно различны, а затем применить теорему 3.

Пусть $\mathbf{A}: \mathbf{x} \mapsto A(\mathbf{x}) + \mathbf{a}$, $A \in \text{SL}_n(\mathbb{Z})$, $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$, и A либо не удовлетворяет свойству (P1), либо не удовлетворяет свойству (P2), либо имеет два одинаковых собственных значения. Тогда, как легко видеть, все собственные значения оператора A должны быть равны по модулю 1, т. е. в жордановом базисе матрица оператора A записывается одним из следующих способов:

$$\begin{aligned} 1) \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; & 5) \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}; \\ 2) \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; & 6) \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}; \\ 3) \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; & 7) \quad A &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \\ 4) \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

Очевидно, что $\mathbf{v}_m = \mathbf{A}^m(\mathbf{v}_0) = A^m(\mathbf{v}_0) + (A^{m-1} + \dots + A + E)\mathbf{a}$. Пользуясь этим соотношением, для каждого случая несложно выписать асимптотику координат точек $\mathbf{v}_m$ и прийти к противоречию либо с иррациональностью конуса $\mathcal{C}$, либо с тем фактом, что точки $\mathbf{v}_i$ лежат во внутренности конуса $\mathcal{C}$ и при $i \rightarrow \pm\infty$ стремятся к его границе. Единственная сложность данного рассуждения – перебор, поэтому это рассуждение мы здесь приводить не будем.

§ 7. Связь с гипотезами Оппенгейма и Литтлвуда

Следующие две гипотезы являются классическими.

ГИПОТЕЗА ЛИТТЛВУДА. Если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\inf_{m \in \mathbb{N}} m \|m\alpha\| \|m\beta\| = 0$, где через $\| \cdot \|$ обозначено расстояние до ближайшего целого.

ГИПОТЕЗА ОППЕНГЕЙМА. Если $n \geq 3$ и $\langle \mathbf{L}_1, \cdot \rangle, \dots, \langle \mathbf{L}_n, \cdot \rangle$ – n линейно независимых линейных форм на $\mathbb{R}^n$ таких, что

$$\inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} |\langle \mathbf{L}_1, \mathbf{x} \rangle \dots \langle \mathbf{L}_n, \mathbf{x} \rangle| > 0,$$

то решетка $\{(\langle \mathbf{L}_1, \mathbf{x} \rangle, \dots, \langle \mathbf{L}_n, \mathbf{x} \rangle) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n\}$ алгебраическая (т.е. подобна по модулю действия диагональных $(n \times n)$ -матриц решетке полного модуля чисто вещественного алгебраического расширения $\mathbb{Q}$ степени n).

Известно (см. [11]), что из трехмерной гипотезы Оппенгейма следует гипотеза Литтлвуда. В работах [12] и [13] была предпринята попытка доказать гипотезу Оппенгейма, однако в доказательстве имеется весьма существенный пробел. По этой причине обе гипотезы остаются недоказанными.

Результаты, полученные в настоящей работе, вместе с результатами из работ [14] и [15] позволяют переформулировать гипотезу Оппенгейма в терминах полиэдров Клейна. В работах [14] и [15] наряду с понятием детерминанта реберной звезды (см. определение 6) рассматривается понятие детерминанта грани.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть F – произвольная $(n-1)$ -мерная грань паруса $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, и пусть $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ – вершины F . Тогда *детерминантом грани F* будем называть величину

$$\det F = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} |\det(\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_n})|.$$

В тех же работах доказывается следующая

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\langle \mathbf{L}_1, \cdot \rangle, \dots, \langle \mathbf{L}_n, \cdot \rangle$ – n линейно независимых иррациональных линейных форм на $\mathbb{R}^n$ и

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{L}_i, \mathbf{x} \rangle \geq 0, i = 1, \dots, n\}.$$

Тогда следующие два условия эквивалентны:

- 1) $\inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} |\langle \mathbf{L}_1, \mathbf{x} \rangle \dots \langle \mathbf{L}_n, \mathbf{x} \rangle| > 0$;
- 2) детерминанты граней и детерминанты реберных звезд вершин паруса Π , соответствующего решетке $\mathbb{Z}^n$ и конусу $\mathcal{C}$, равномерно ограничены.

В силу следствия 1 условие 2) теоремы 7 равносильно тому, что парус Π имеет не более чем конечное число различных аффинных типов полных звезд вершин (полной звездой вершины называется объединение всех граней, инцидентных этой вершине).

Пользуясь теоремой 4, получаем следующую переформулировку гипотезы Оппенгейма.

ПЕРЕФОРМУЛИРОВКА ГИПОТЕЗЫ ОППЕНГЕЙМА. Пусть $\langle \mathbf{L}_1, \cdot \rangle, \dots, \langle \mathbf{L}_n, \cdot \rangle$ – n линейно независимых иррациональных линейных форм на $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, и

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{L}_i, \mathbf{x} \rangle \geq 0, i = 1, \dots, n\}.$$

Пусть парус Π , соответствующий решетке $\mathbb{Z}^n$ и конусу $\mathcal{C}$, имеет не более чем конечное число различных аффинных типов полных звезд вершин. Тогда существует неограниченная в обе стороны (как подмножество в $\mathbb{R}^n$) $\mathfrak{A}_1$ -периодическая цепочка $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ вершин паруса Π .

Напомним, что для $n = 3$ (а это самый интересный случай, поскольку из трехмерной гипотезы Оппенгейма следует гипотеза Литтлвуда) множество $\mathfrak{A}_1$ можно заменить на $\text{Aff}_3(\mathbb{Z})$. Это позволяет переформулировать гипотезу Оппенгейма в случае $n = 3$ следующим образом.

Сначала определим граф $\mathcal{G}(\Pi)$: в качестве вершин возьмем множество пар $(F, \mathbf{v})$, где F – грань паруса Π и $\mathbf{v}$ – вершина F ; две различные вершины $(F, \mathbf{v})$ и $(G, \mathbf{w})$ графа $\mathcal{G}(\Pi)$ соединяем ребром, если, во-первых, отрезок $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ является общим ребром граней F и G и, во-вторых, обход грани F от $\mathbf{v}$ к $\mathbf{w}$ является положительным (относительно внешней нормали к полиэдру Клейна). Очевидно, что граф $\mathcal{G}(\Pi)$ планарный и в любой его вершине сходятся ровно три ребра.

Теперь определим раскраску графа $\mathcal{G}(\Pi)$. Окрашиваются, в отличие от рассматриваемых выше раскрасок графов $\mathcal{G}_k(\Pi)$, и вершины, и ребра. Пусть $(F, \mathbf{v})$ и $(G, \mathbf{w})$ – произвольные вершины графа $\mathcal{G}(\Pi)$. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – соседние с $\mathbf{v}$ вершины грани F , а $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ – соседние с $\mathbf{w}$ вершины грани G . Пусть существует оператор из $\text{Aff}_3(\mathbb{Z})$, отображающий объединение граней паруса Π , инцидентных хотя бы одной из вершин $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{b}$, на объединение граней паруса Π , инцидентных хотя бы одной из вершин $\mathbf{c}$, $\mathbf{w}$ и $\mathbf{d}$. Тогда $(F, \mathbf{v})$ и $(G, \mathbf{w})$ окрашиваем в один и тот же цвет. Аналогично поступаем и с ребрами. Пусть $((F_1, \mathbf{v}_1), (F_2, \mathbf{v}_2))$ и $((G_1, \mathbf{w}_1), (G_2, \mathbf{w}_2))$ – произвольные ребра графа $\mathcal{G}(\Pi)$. Пусть $\mathbf{a}_1$ – соседняя с $\mathbf{v}_1$ и отличная от $\mathbf{v}_2$ вершина грани F_1 , $\mathbf{a}_2$ – соседняя с $\mathbf{v}_2$ и отличная от $\mathbf{v}_1$ вершина грани F_2 , $\mathbf{b}_1$ – соседняя с $\mathbf{w}_1$ и отличная от $\mathbf{w}_2$ вершина грани G_1 , $\mathbf{b}_2$ – соседняя с $\mathbf{w}_2$ и отличная от $\mathbf{w}_1$ вершина грани G_2 . Пусть существует оператор из $\text{Aff}_3(\mathbb{Z})$, отображающий объединение граней паруса Π , инцидентных хотя бы одной из вершин $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{a}_2$, на объединение граней паруса Π , инцидентных хотя бы одной из вершин $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{b}_2$. Тогда $((F_1, \mathbf{v}_1), (F_2, \mathbf{v}_2))$ и $((G_1, \mathbf{w}_1), (G_2, \mathbf{w}_2))$ окрашиваем в один и тот же цвет.

Из теоремы 5 следует, что существование цепочки вершин паруса Π , образы которой в $\mathcal{G}_2(\Pi)$ и $\mathcal{G}_3(\Pi)$ имеют периодичные $\text{Aff}_3(\mathbb{Z})$ -раскраски, равносильно существованию цепочки вершин графа $\mathcal{G}(\Pi)$, имеющей периодическую “вершинно-реберную” раскраску. Поэтому для $n = 3$ гипотезу Оппенгейма можно переформулировать следующим образом.

ПЕРЕФОРМУЛИРОВКА ТРЕХМЕРНОЙ ГИПОТЕЗЫ ОППЕНГЕЙМА. Пусть заданы линейно независимые иррациональные линейные формы $\langle \mathbf{L}_1, \cdot \rangle$, $\langle \mathbf{L}_2, \cdot \rangle$, $\langle \mathbf{L}_3, \cdot \rangle$ на пространстве $\mathbb{R}^3$ и

$$\mathcal{C} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{L}_i, \mathbf{x} \rangle \geq 0, i = 1, 2, 3 \}.$$

Пусть раскраска графа $\mathcal{G}(\Pi)$ паруса Π , соответствующего решетке $\mathbb{Z}^3$ и конусу $\mathcal{C}$, имеет лишь конечное число цветов. Тогда существует неограниченная в обе стороны (в естественной метрике графа $\mathcal{G}(\Pi)$) периодически раскрашенная цепочка вершин графа $\mathcal{G}(\Pi)$.

Список литературы

1. P. Erdős, P.M. Gruber, J. Hammer, *Lattice points*, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., **39**, Longman Scientific & Technical, Harlow; Wiley, New York, 1989.

2. Е. И. Коркина, “Двумерные цепные дроби. Самые простые примеры”, Тр. МИАН, **209**, Наука, М., 1995, 143–166; англ. пер.: E. I. Korkina, “Two-dimensional continued fractions. The simplest examples”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **209** (1995), 124–144.
3. J.-O. Moussaïf, “Convex hulls of integral points”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы*, 5, Записки науч. сем. ПОМИ, **266**, ред. А. М. Вершик, ПОМИ, СПб., 2000, 188–217; J.-O. Moussaïf, “Convex hulls of integral points”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **113**:5 (2003), 647–665.
4. G. Lachaud, “Polyèdre d’Arnol’d et voile d’un cône simplicial: analogues du théorème de Lagrange [The Arnold polyhedron and the sail of a simplicial cone: analogues of the Lagrange theorem]”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **317**:8 (1993), 711–716.
5. Е. Коркина, “La périodicité des fractions continues multidimensionnelles [The periodicity of multidimensional continued fractions]”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **319**:8 (1994), 777–780.
6. G. Lachaud, “Sails and Klein polyhedra”, *Number theory*, Proceedings of the international conference on discrete mathematics and number theory (Tiruchirapalli, 1996), *Contemp. Math.*, **210**, ed. V. K. Murty, 1998, 373–385.
7. V. I. Arnold, “Higher dimensional continued fractions”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **3**:3 (1998), 10–17.
8. G. Lachaud, *Voiles et Polyèdres de Klein*, Act. Sci. Ind., Hermann, Paris, 2002.
9. З. И. Борович, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*, Наука, М., 1964; англ. пер.: Z. I. Borevich, I. R. Shafarevich, *Number theory*, Pure Appl. Math., **20**, Academic Press, New York–London.
10. Н. Tsuchihashi, “Higher-dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities”, *Tohoku Math. J. (2)*, **35**:4 (1983), 607–639.
11. J. W. S. Cassels, H. P. F. Swinnerton-Dyer, “On the product of three homogeneous linear forms and indefinite ternary quadratic forms”, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, **248**:940 (1955), 73–96.
12. Б. Ф. Скубенко, “Минимумы разложимой кубической формы от трех переменных”, *Записки научн. сем. ЛОМИ*, **168** (1988), 125–139; англ. пер.: B. F. Skubenko, “Minimum of a decomposable cubic form of three variables”, *J. Soviet Math.*, **53**:3 (1991), 302–310.
13. Б. Ф. Скубенко, “Минимумы разложимых форм степени n от n переменных при $n \geq 3$ ”, *Модулярные функции и квадратичные формы*, 1, Записки науч. сем. ЛОМИ, **183**, ред. А. Н. Андрианов, В. А. Гриценко, Наука, Л., 1990, 142–154; англ. пер.: B. F. Skubenko, “Minima of decomposable forms of degree n in n variables for $n \geq 3$ ”, *J. Soviet Math.*, **62**:4 (1992), 2928–2935.
14. О. Н. Герман, “Паруса и норменные минимумы решеток”, *Матем. сб.*, **196**:3 (2005), 31–60; англ. пер.: O. N. German, “Sails and norm minima of lattices”, *Sb. Math.*, **196**:3 (2005), 337–365.
15. O. N. German, “Klein polyhedra and lattices with positive norm minima”, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **19** (2007), 175–190.

О. Н. ГЕРМАН (O. N. GERMAN)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: german@mech.math.msu.su

Поступило в редакцию

12.07.2006

Е. Л. ЛАКШТАНОВ (E. L. LAKSHANOV)

University of Aveiro, Portugal
E-mail: lakshtanov@rambler.ru