Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Карацуба, М. А. Королёв, Теорема о приближении тригонометрической суммы более короткой, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 2, 123–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/im1136>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 14:59:53

УДК 511

А. А. Карацуба, М. А. Королёв

Теорема о приближении тригонометрической суммы более короткой

Доказана теорема о приближении тригонометрической суммы более короткой с конкретно вычисленными постоянными в остаточном члене.

Библиография: 8 наименований.

§ 1. Введение. Формулировка основного результата

Тригонометрической суммой называется конечная сумма S вида

$$S = \sum_{a < x \leq b} \varphi(x) \exp(2\pi i f(x)).$$

Здесь $\varphi(x)$ и $f(x)$ – вещественные функции, $i^2 = -1$. Число $b - a > 0$ будем называть *длиной* суммы S . Если a и b – целые числа, то длина суммы равна количеству слагаемых в ней. При определенных условиях, налагаемых на функции $\varphi(x)$ и $f(x)$, сумму S можно приблизить другой суммой S_1 , длина которой меньше, чем длина S (более короткой суммой).

Первые теоремы о приближениях указанного вида для специальных функций $\varphi(x)$ и $f(x)$ были доказаны Г. Харди и Д. Литтлвудом [1], И. М. Виноградовым [2] и Дж. Ван дер Корпутом [3]. В [4] доказана теорема о приближении при достаточно слабых ограничениях на $\varphi(x)$ и $f(x)$ с достаточно точным и удобным в приложениях остаточным членом.

В последние годы подобные формулы нашли применение в физике: квантовой оптике, волновых процессах (см., например, [5]–[7]). Как и следовало ожидать, в приложениях необходимо знать не только асимптотические равенства, но и конкретные константы в этих равенствах. Цель настоящей статьи состоит в доказательстве теоремы, подобной теореме из статьи [4], но с конкретно вычисленными константами. Мы не претендуем на то, что вычисленные нами константы являются наилучшими. В то же время мы отмечаем, что точность приближения S суммой S_1 в действительности может быть много лучше, чем это дает теорема, доказанная в настоящей статье.

Будем использовать следующие обозначения: $\theta, \theta_1, \dots$ – функции такие, что $|\theta| \leq 1$, $|\theta_1| \leq 1, \dots$ и в разных утверждениях, вообще говоря, разные; $\{x\}$ – дробная доля x , $[x]$ – целая часть x , $\|x\| = \min(\{x\}, 1 - \{x\})$; $n, m, r, \dots$ – целые числа; через $\sum'_n$ обозначена сумма, в которой отсутствует слагаемое с $n = 0$.

ТЕОРЕМА. Пусть вещественные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют на отрезке $[a, b]$ следующим условиям:

- 1) $f^{(4)}(x)$ и $\varphi''(x)$ непрерывны;

2) существуют неотрицательные числа $H, U, A, \lambda, \phi_0, \phi_1, \phi_2, c_1, c_2, c_3$ и c_4 такие, что выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} U &\geq 1, & 0 < b - a &\leq \lambda U, \\ |\varphi(x)| &\leq \phi_0 H, & |\varphi'(x)| &\leq \phi_1 H U^{-1}, & |\varphi''(x)| &\leq \phi_2 H U^{-2}, \\ c_1 A^{-1} &\leq f''(x) \leq c_2 A^{-1}, & |f^{(3)}(x)| &\leq c_3 A^{-1} U^{-1}, & |f^{(4)}(x)| &\leq c_4 A^{-1} U^{-2}. \end{aligned}$$

Тогда, определяя числа x_n из уравнения $f'(x_n) = n$, будем иметь

$$\begin{aligned} &\sum_{a < x \leq b} \varphi(x) \exp(2\pi i f(x)) \\ &= \sum_{\alpha \leq n \leq \beta} c(n) Z(n) + \theta H (K_1 \ln(\beta - \alpha + 2) + K_2 + K_3(T_a + T_b)), \end{aligned}$$

где $\alpha = f'(a), \beta = f'(b)$,

$$c(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha < n < \beta, \\ 0.5, & \text{если } n = \alpha \text{ или } n = \beta, \end{cases}$$

$$Z(n) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\varphi(x_n)}{\sqrt{f''(x_n)}} \exp(2\pi i (f(x_n) - n x_n)),$$

$$T_\mu = \begin{cases} 0, & \text{если } \|f'(\mu)\| = 0, \\ \min(\sqrt{A}, \|f'(\mu)\|^{-1}), & \text{если } \|f'(\mu)\| \neq 0, \end{cases}$$

$$K_1 = \pi^{-1}(\phi_0(6.5 + 2c_1^{-1}c_2) + 6.5\lambda\phi_1),$$

$$\begin{aligned} K_2 &= (\pi c_1^2)^{-1}((\lambda c_2 + 2AU^{-1})K + 2\phi_0 c_2(c_1 + A(b-a)^{-1})) \\ &+ (\phi_0 + \lambda\phi_1)(22.5 + 9c_2 A^{-1}), \end{aligned}$$

$$K_3 = 2(2 + \pi^{-1})\phi_0 + (\pi c_1)^{-1}((4 + 2.8\sqrt{c_1} + c_2 + 2c_1^{-1}c_2)\phi_0 + 2\lambda e^{-1}\phi_1),$$

$$\begin{aligned} K &= 5\phi_0 c_3 + 2\phi_1 c_1 + \frac{3}{4} \lambda \left(\phi_1 c_3 + \phi_2 c_2 + \frac{\lambda}{3} \phi_2 c_3 \right) \\ &+ \frac{\lambda}{2} \max \left(\frac{9}{8} c_4 + \left(\frac{13}{6} \right)^2 c_1^{-1} (c_3 + 0.5k c_4)^2, 2c_2 k^{-2} \right), \end{aligned}$$

$$k = \min \left(\frac{c_1}{4c_3}, \sqrt{\frac{c_1}{2c_4}} \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\varphi(x) = 1$, то $H = 1, \phi_0 = 1, \phi_1 = \phi_2 = 0$ и формула теоремы принимает более простой вид.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Значения постоянных K и K_2 в теореме могут быть уменьшены, если дополнительно предположить, что производные $f^{(3)}(x)$ и $f^{(4)}(x)$ неотрицательны при $a \leq x \leq b$.

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие вспомогательные утверждения – леммы.

§ 2. Простые леммы

ЛЕММА 1 (вторая теорема о среднем). Пусть на отрезке $[a, b]$ вещественная функция $f(x)$ непрерывна, а $G(x)$ непрерывно дифференцируема и монотонна. Тогда найдется точка ξ такая, что $a \leq \xi \leq b$ и

$$\int_a^b f(x) dG(x) = f(\xi)(G(b) - G(a)).$$

Утверждение леммы 1 известно из курса математического анализа.

ЛЕММА 2 (формула частного суммирования). Пусть на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема, $c(n)$ – произвольные комплексные числа,

$$\mathbb{C}(x) = \sum_{a < n \leq x} c(n).$$

Тогда справедливо равенство

$$\sum_{a < n \leq b} c(n)f(n) = \mathbb{C}(b)f(b) - \int_a^b \mathbb{C}(x)f'(x) dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см., например, в [8, с. 29].

ЛЕММА 3 (формула суммирования Эйлера). Пусть на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема, $\varrho(x) = 0.5 - \{x\}$. Тогда справедливо равенство

$$\sum_{a < x \leq b} f(x) = \int_a^b f(x) dx + \varrho(b)f(b) - \varrho(a)f(a) - \int_a^b \varrho(x)f'(x) dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см., например, в [8, с. 10].

ЛЕММА 4. Пусть $N \geq 2$. Тогда имеет место равенство

$$\varrho(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{0 < |n| \leq N} \frac{e^{2\pi i n x}}{n} + R_N(x),$$

где

$$R_N(x) = \begin{cases} 0.5, & \text{если } \|x\| = 0, \\ \theta \min((2\pi N\|x\|)^{-1}, \pi^{-1} \ln N + 1), & \text{если } \|x\| \neq 0. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\|x\| = 0$, то утверждение леммы очевидно. Пусть $\|x\| \neq 0$. Прежде всего находим, что

$$\begin{aligned} |R_N(x)| &= \left| \varrho(x) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{0 < |n| \leq N} \frac{e^{2\pi i n x}}{n} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_1^N \frac{du}{u} < \pi^{-1} \ln N + 1. \end{aligned}$$

Кроме того, при $\|x\| \neq 0$ для функции $\varrho(x)$ справедливо равенство (разложение в ряд Фурье)

$$\varrho(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{|n|>0} \frac{e^{2\pi i n x}}{n},$$

т. е.

$$|R_N(x)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{|n|>N} \frac{e^{2\pi i n x}}{n} \right| \leq \frac{1}{\pi} \left| \sum_{n>N} \frac{e^{2\pi i n x}}{n} \right|.$$

К сумме

$$W(M, N) = \sum_{N < n \leq M} \frac{e^{2\pi i n x}}{n}$$

применим лемму 2, полагая в ней $c(n) = e^{2\pi i n x}$, $f(n) = n^{-1}$. Поскольку для $|\mathbb{C}(u)|$ выполняется оценка

$$|\mathbb{C}(u)| = \left| \sum_{N < n \leq u} e^{2\pi i n x} \right| \leq \frac{1}{|\sin(\pi x)|} \leq \frac{1}{2\|x\|},$$

то

$$|W(M, N)| \leq \int_N^M \frac{u^{-2}}{2\|x\|} du + \frac{1}{2M\|x\|} = \frac{1}{2N\|x\|}.$$

При $M \rightarrow +\infty$ получаем

$$|R_N(x)| \leq \frac{1}{\pi} \lim_{M \rightarrow +\infty} |W(M, N)| \leq \frac{1}{2N\|x\|}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5. При любом положительном числе Y верна следующая оценка:

$$\left| \int_Y^{+\infty} \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du \right| < \min\left(\frac{5}{4}, \frac{\pi^{-1}}{\sqrt{Y}}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \left| \int_Y^{+\infty} \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du \right| &= \frac{1}{2\pi} \left| \frac{e^{2\pi i Y}}{\sqrt{Y}} + \int_Y^{+\infty} e^{2\pi i u} d\frac{1}{\sqrt{u}} \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{Y}} + \int_Y^{+\infty} \left| d\frac{1}{\sqrt{u}} \right| \right) \leq \frac{\pi^{-1}}{\sqrt{Y}}. \end{aligned}$$

С другой стороны, заменяя исходный интеграл разностью

$$\left(\int_0^{+\infty} - \int_0^Y \right) \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du = \frac{1+i}{2} - \int_0^Y \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du,$$

получим

$$\left| \int_Y^{+\infty} \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} + \int_0^Y \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{Y}.$$

Пусть a – положительный корень уравнения

$$\frac{\pi^{-1}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{a}, \quad \text{так что} \quad 2\sqrt{a} = \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{2}{\pi}} - \frac{1}{\sqrt{8}}.$$

Тогда нетрудно заметить, что при любом $Y \geq 0$ модуль исходного интеграла не превосходит величины $\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{a}$. Следовательно,

$$\left| \int_Y^{+\infty} \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du \right| \leq \min\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{a}, \frac{\pi^{-1}}{\sqrt{Y}}\right) < \min\left(\frac{5}{4}, \frac{\pi^{-1}}{\sqrt{Y}}\right).$$

Лемма доказана.

§ 3. Основные леммы

Будем следовать рассуждениям, приведенным в статье [4].

ЛЕММА 6. Пусть $f''(x)$ непрерывна на $[a, b]$, причем $0 < f''(x) < C$. Тогда для любого Δ при условии $0 < \Delta < 1$ имеет место равенство

$$\sum_{a < x \leq b} \exp(2\pi i f(x)) = \sum_{\alpha - \Delta \leq n \leq \beta + \Delta} \int_a^b \exp(2\pi i (f(x) - nx)) dx + \theta R,$$

в котором $\alpha = f'(a)$, $\beta = f'(b)$,

$$R = 9.42 + 9C + 12\Delta + \pi^{-1}(8.5\Delta^{-1} + 2\ln \Delta^{-1} + 3(1 + \Delta)^{-1} - 3\ln(1 + \Delta) + 5\ln(\beta - \alpha + 2)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $b - a \leq 3$. Тогда из теоремы Лагранжа о конечных приращениях следует, что $\beta - \alpha = f'(b) - f'(a) = f''(\xi)(b - a) \leq C(b - a) \leq 3C$, $a \leq \xi \leq b$. Полагая

$$R_0 = \sum_{a < x \leq b} \exp(2\pi i f(x)) - \sum_{\alpha - \Delta \leq n \leq \beta + \Delta} \int_a^b \exp(2\pi i (f(x) - nx)) dx,$$

находим

$$\begin{aligned} |R_0| &\leq b - a + 1 + (\beta - \alpha + 2\Delta + 1)(b - a) \leq 4 + 3(3C + 2\Delta + 1) \\ &< 9.42 + 9C + 12\Delta + \pi^{-1}(8.5\Delta^{-1} + 2\ln \Delta^{-1} + 3(1 + \Delta)^{-1} - 3\ln(1 + \Delta) + 5\ln(\beta - \alpha + 2)). \end{aligned}$$

Пусть теперь $b - a > 3$. Полагая в этом случае $a_1 = [a] + 1.5$, $b_1 = [b] - 0.5$, получим $b_1 - a_1 = b - a + \{a\} - \{b\} - 2 > 0$. Поскольку a_1, b_1 — полуцелые числа, то последнее неравенство означает, что $b_1 - a_1 \geq 1$. Таким образом,

$$\sum_{a < x \leq b} \exp(2\pi i f(x)) = \sum_{a_1 < x \leq b_1} \exp(2\pi i f(x)) + 3\theta_1.$$

Согласно формуле суммирования Эйлера имеем

$$\sum_{a_1 < x \leq b_1} \exp(2\pi i f(x)) = \int_{a_1}^{b_1} \exp(2\pi i f(x)) dx - \mathfrak{I},$$

где

$$\mathfrak{I} = 2\pi i \int_{a_1}^{b_1} \varrho(x) f'(x) \exp(2\pi i f(x)) dx.$$

Пользуясь леммой 2, представим $\varrho(x)$ в виде

$$\varrho(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{0 < |n| \leq N} \frac{e^{2\pi i n x}}{n} + R_N(x),$$

где N – достаточно большое целое число. Тогда интеграл $\mathfrak{I}$ выразится разностью $\mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_2$, где

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_1 &= 2\pi i \int_{a_1}^{b_1} R_N(x) f'(x) \exp(2\pi i f(x)) dx, \\ \mathfrak{I}_2 &= \sum_{0 < |n| \leq N} \frac{1}{n} j(n), \quad j(n) = \int_{a_1}^{b_1} f'(x) \exp(2\pi i (f(x) - nx)) dx. \end{aligned}$$

Оценка $\mathfrak{I}_1$. Пусть C_1 – максимум $|f'(x)|$ при $a \leq x \leq b$. Разбивая отрезок $[a_1, b_1]$ на промежутки единичной длины, будем иметь

$$\begin{aligned} |\mathfrak{I}_1| &\leq 2\pi C_1 \sum_{\nu=a_1+0.5}^{b_1-0.5} \int_{\nu-0.5}^{\nu+0.5} |R_N(x)| dx \\ &\leq 2\pi C_1 \sum_{\nu=a_1+0.5}^{b_1-0.5} 2 \left(\int_0^{1/\sqrt{N}} (\pi^{-1} \ln N + 1) dx + \int_{1/\sqrt{N}}^{0.5} \frac{dx}{2\pi N x} \right) \\ &= 4\pi C_1 \sum_{\nu=a_1+0.5}^{b_1-0.5} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{\ln N}{\pi} + 1 \right) + \frac{\ln N}{4\pi N} \right) < 5C_1(b-a) \frac{\ln N}{\sqrt{N}} < 0.1. \end{aligned}$$

Преобразование $\mathfrak{I}_2$. Прежде всего получим два выражения для $j(n)$. Предполагая n отличным от нуля, находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} j(n) &= \frac{1}{n} \int_{a_1}^{b_1} (n + f'(x) - n) \exp(2\pi i (f(x) - nx)) dx \\ &= j_0 + \frac{1}{2\pi i n} \int_{a_1}^{b_1} d \exp(2\pi i (f(x) - nx)) = j_0 + \frac{(-1)^n}{2\pi i n} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \end{aligned}$$

где

$$j_0 = j_0(n) = \int_{a_1}^{b_1} \exp(2\pi i (f(x) - nx)) dx, \quad \varepsilon_1 = e^{2\pi i f(b_1)}, \quad \varepsilon_2 = e^{2\pi i f(a_1)}$$

(мы воспользовались тем, что a_1, b_1 – полуцелые числа). Кроме того, для целых n , не попавших в промежуток $[\alpha - \Delta, \beta + \Delta]$, имеем

$$\begin{aligned} j(n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a_1}^{b_1} \frac{f'(x)}{f'(x) - n} d \exp(2\pi i (f(x) - nx)) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{f'(b_1)}{f'(b_1) - n} \exp(2\pi i (f(b_1) - nb_1)) \right. \\ &\quad - \frac{f'(a_1)}{f'(a_1) - n} \exp(2\pi i (f(a_1) - na_1)) \\ &\quad \left. - \int_{a_1}^{b_1} \exp(2\pi i (f(x) - nx)) d \frac{f'(x)}{f'(x) - n} \right). \end{aligned}$$

Дробь $\frac{f'(x)}{f'(x)-n}$ имеет своей производной функцию $(-\frac{nf''(x)}{(f'(x)-n)^2})$ и является, тем самым, монотонной функцией от x . Применяя к действительной и мнимой частям последнего интеграла лемму 1, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} j(n) &= \frac{(-1)^n}{2\pi i n} \left(\frac{\varepsilon_1 \beta_1}{\beta_1 - n} - \frac{\varepsilon_2 \alpha_1}{\alpha_1 - n} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i n} (\cos(2\pi v_1) + i \sin(2\pi v_2)) \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 - n} - \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - n} \right) \\ &= \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\pi i} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{\varepsilon_1}{2\pi i} \frac{(-1)^n}{\beta_1 - n} - \frac{\varepsilon_2}{2\pi i} \frac{(-1)^n}{\alpha_1 - n} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \frac{\beta_1 - \alpha_1}{(n - \alpha_1)(n - \beta_1)} (\cos(2\pi v_1) + i \sin(2\pi v_2)), \end{aligned}$$

где $\alpha_1 = f'(a_1)$, $\beta_1 = f'(b_1)$, $v_1 = f(\xi) - n\xi$, $v_2 = f(\eta) - n\eta$, $a_1 \leq \xi, \eta \leq b_1$.

Возвращаясь к интегралу $\mathcal{J}_2$ и пользуясь при $\alpha - \Delta \leq n \leq \beta + \Delta$ первым выражением для $j(n)$, а при $n < \alpha - \Delta$ и $n > \beta + \Delta$ – вторым, получим

$$\mathcal{J}_2 = \sum'_{\alpha - \Delta \leq n \leq \beta + \Delta} j_0(n) + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\pi i} \sum_{0 < |n| \leq N} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{2\pi i} (\varepsilon_1 X - \varepsilon_2 Y) + \frac{\theta}{\pi} Z,$$

где через X, Y обозначены суммы по $-N \leq n < \alpha - \Delta$, $\beta + \Delta < n \leq N$, $n \neq 0$, дробей $(-1)^n(\beta_1 - n)^{-1}$ и $(-1)^n(\alpha_1 - n)^{-1}$ соответственно, а

$$Z = \sum'_{\substack{-N \leq n < \alpha - \Delta \\ \beta + \Delta < n \leq N}} \frac{\beta_1 - \alpha_1}{(n - \alpha_1)(n - \beta_1)}.$$

Величины X, Y оцениваются одинаково. Оценим, например, сумму X , предварительно представив ее в виде

$$X = \left(\sum_{-N \leq n < \alpha - \Delta} + \sum_{\beta + \Delta < n \leq N} \right) \frac{(-1)^n}{\beta_1 - n} = X_1 + X_2.$$

Случай 1: $\alpha - \Delta \leq 0 \leq \beta + \Delta$. Имеем

$$X_1 = \sum_{-\alpha + \Delta < n \leq N} \frac{(-1)^n}{n + \beta_1}, \quad X_2 = \sum_{\beta + \Delta < n \leq N} \frac{(-1)^{n-1}}{n - \beta_1}.$$

Модули слагаемых в каждой из знакопеременных сумм X_1, X_2 образуют монотонно убывающую с ростом n последовательность. Так как в первой сумме $n + \beta_1 > \beta_1 - \alpha + \Delta > \Delta$, то $X_1 = \theta_1 \Delta^{-1}$. Для слагаемых второй суммы $n - \beta_1 > \beta - \beta_1 + \Delta > \Delta$ и, следовательно, $X_2 = \theta_2 \Delta^{-1}$. Таким образом, $X = 2\theta \Delta^{-1}$.

Случай 2: $\alpha - \Delta > 0$. Как и в предыдущем случае, находим

$$X_2 = \sum_{\beta + \Delta < n \leq N} \frac{(-1)^{n-1}}{n - \beta_1} = \theta_2 \Delta^{-1}.$$

Сумму X_1 разобьем на две знакопеременные суммы, модули слагаемых в каждой из которых монотонно убывают. Получим

$$X_1 = \sum_{-N \leq n \leq -1} \frac{(-1)^n}{\beta_1 - n} + \sum_{1 \leq n < \alpha - \Delta} \frac{(-1)^n}{\beta_1 - n} = \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{(-1)^n}{\beta_1 + n} + \sum_{1 \leq n < \alpha - \Delta} \frac{(-1)^n}{\beta_1 - n}.$$

Знаменатели слагаемых первой суммы не меньше единицы ($n + \beta_1 \geq 1 + \beta_1 > 1$), а знаменатели слагаемых второй суммы удовлетворяют неравенствам $\beta_1 - n > \Delta + \beta_1 - \alpha > \Delta$. Следовательно, $X_1 = \theta_1(1 + \Delta^{-1})$ и $X = \theta(1 + 2\Delta^{-1})$.

Случай 3: $\beta + \Delta < 0$. Этот случай аналогичен предыдущему: $X = \theta(1 + 2\Delta^{-1})$.

Итак, в каждом из случаев имеем оценку $X = \theta(1 + 2\Delta^{-1})$. Аналогично доказывается и соотношение $Y = \theta(1 + 2\Delta^{-1})$.

Нетрудно заметить, что все слагаемые суммы Z положительны. Добавляя к ним в случаях $\alpha - \Delta > 0$ и $\beta + \Delta < 0$ слагаемое $\frac{\beta_1 - \alpha_1}{\alpha_1 \beta_1}$, отвечающее $n = 0$, получим

$$\begin{aligned} Z &\leq \sum_{\substack{-N \leq n < \alpha - \Delta \\ \beta + \Delta < n \leq N}} \frac{\beta_1 - \alpha_1}{(\beta_1 - n)(\alpha_1 - n)} \\ &= \sum_{-\alpha + \Delta < n \leq N} \frac{\beta_1 - \alpha_1}{(n + \alpha_1)(n + \beta_1)} + \sum_{\beta + \Delta < n \leq N} \frac{\beta_1 - \alpha_1}{(n - \alpha_1)(n - \beta_1)} \\ &= \sum_{-\alpha + \Delta < n \leq N} \left(\frac{1}{n + \alpha_1} - \frac{1}{n + \beta_1} \right) + \sum_{\beta + \Delta < n \leq N} \left(\frac{1}{n - \beta_1} - \frac{1}{n - \alpha_1} \right). \end{aligned}$$

Слагаемые в каждой из этих сумм монотонно убывают с ростом n , что следует из соотношений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x + \alpha_1} - \frac{1}{x + \beta_1} \right) &= \frac{1}{(x + \beta_1)^2} - \frac{1}{(x + \alpha_1)^2} \\ &= -\frac{(\beta_1 - \alpha_1)(2x + \alpha_1 + \beta_1)}{(x + \alpha_1)^2(x + \beta_1)^2} < 0, \quad x > \Delta - \alpha, \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x - \beta_1} - \frac{1}{x - \alpha_1} \right) &= \frac{1}{(x - \alpha_1)^2} - \frac{1}{(x - \beta_1)^2} \\ &= -\frac{(\beta_1 - \alpha_1)(2x - \alpha_1 - \beta_1)}{(x - \alpha_1)^2(x - \beta_1)^2} < 0, \quad x > \beta + \Delta. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} Z &\leq \frac{1}{-\alpha + \Delta + \alpha_1} + \int_{-\alpha + \Delta}^N \left(\frac{1}{x + \alpha_1} - \frac{1}{x + \beta_1} \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{\beta + \Delta - \beta_1} + \int_{\beta + \Delta}^N \left(\frac{1}{x - \beta_1} - \frac{1}{x - \alpha_1} \right) dx \\ &\leq 2\Delta^{-1} + \ln \frac{N + \alpha_1}{N + \beta_1} + \ln \frac{N - \beta_1}{N - \alpha_1} - \ln(\Delta + \alpha_1 - \alpha) \\ &\quad - \ln(\Delta + \beta - \beta_1) + \ln(\beta_1 - \alpha + \Delta) + \ln(\beta - \alpha_1 + \Delta) \\ &\leq 2(\Delta^{-1} + \ln \Delta^{-1} + \ln(\beta - \alpha + 2)). \end{aligned}$$

Итак, вклад сумм X , Y и Z в интеграл $\mathfrak{I}_2$ не превосходит

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} 2(1 + 2\Delta^{-1}) + \frac{1}{\pi} 2(\Delta^{-1} + \ln \Delta^{-1} + \ln(\beta - \alpha + 2)) \\ &= \frac{2}{\pi} (0.5 + 2\Delta^{-1} + \ln \Delta^{-1} + \ln(\beta - \alpha + 2)) = R_1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_2 &= \sum'_{\alpha - \Delta \leq n \leq \beta + \Delta} j_0(n) + \theta(R_1 + 0.1), \\ \sum_{a < x \leq b} \exp(2\pi i f(x)) &= \int_{a_1}^{b_1} \exp(2\pi i f(x)) dx \\ &+ \sum'_{\alpha - \Delta \leq n \leq \beta + \Delta} \int_{a_1}^{b_1} \exp(2\pi i (f(x) - nx)) dx + \theta(R_1 + 3.1). \end{aligned}$$

Если $\alpha - \Delta \leq 0 \leq \beta + \Delta$, то первый интеграл включается в сумму по n . В противном случае этот интеграл оценивается сверху и включается в остаточный член. Предположим, например, что $\alpha - \Delta > 0$ (случай $\beta + \Delta < 0$ аналогичен). Интегрируя по частям и пользуясь леммой 1, находим

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{b_1} \exp(2\pi i f(x)) dx &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{f'(x)} d \exp(2\pi i f(x)) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\varepsilon_1}{\beta_1} - \frac{\varepsilon_2}{\alpha_1} \right) - \frac{1}{2\pi i} \int_{a_1}^{b_1} \exp(2\pi i f(x)) d \frac{1}{f'(x)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\varepsilon_1}{\beta_1} - \frac{\varepsilon_2}{\alpha_1} \right) - \frac{1}{2\pi i} (\cos(2\pi u_1) + i \sin(2\pi u_2)) \left(\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\alpha_1} \right). \end{aligned}$$

Переходя к оценкам и замечая, что $\beta_1 > \alpha_1 > \alpha > \Delta$, убеждаемся в том, что вклад этого интеграла по абсолютной величине не превосходит

$$\frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} \right) + \frac{2}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\beta_1} \right) = \frac{3}{2\pi\alpha_1} - \frac{1}{2\pi\beta_1} < \frac{3}{2\pi\alpha_1} < \frac{3}{2\pi} \Delta^{-1}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{a < x \leq b} \exp(2\pi i f(x)) &= \sum_{\alpha - \Delta \leq n \leq \beta + \Delta} \int_{a_1}^{b_1} \exp(2\pi i (f(x) - nx)) dx + \theta R_2, \\ R_2 &= 3.1 + 1.5\pi^{-1} \Delta^{-1} + R_1 = 3.1 + \pi^{-1} \\ &+ \pi^{-1} (5.5\Delta^{-1} + 2 \ln \Delta^{-1} + 2 \ln(\beta - \alpha + 2)). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства леммы интегралы в правой части равенства следует заменить интегралами в пределах от a до b . Прибавим и вычтем из правой части сумму

$$W = \sum_{\alpha - \Delta \leq n \leq \beta + \Delta} (I_a + I_b),$$

где

$$I_a = \int_a^{a_1} \exp(2\pi i(f(x) - nx)) dx, \quad I_b = \int_{b_1}^b \exp(2\pi i(f(x) - nx)) dx.$$

Вклад интегралов I_a, I_b , отвечающих числам n из промежутков $\alpha - \Delta \leq n \leq \alpha_1 + \Delta$ и $\beta_1 - \Delta \leq n \leq \beta + \Delta$, не превосходит по модулю

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 + \Delta - (\alpha - \Delta) + 1)(a_1 - a + b - b_1) \\ & + (\beta + \Delta - (\beta_1 - \Delta) + 1)(a_1 - a + b - b_1) \\ & \leq (\alpha_1 - \alpha + \beta - \beta_1 + 2 + 4\Delta)(1.5 + 1.5) \\ & \leq 3(1.5C + 1.5C + 2 + 4\Delta) = 6 + 9C + 12\Delta. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям и применяя лемму 1, при $\alpha_1 + \Delta < n < \beta_1 - \Delta$ находим

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{e^{2\pi i(f(a_1) - na_1)}}{\alpha_1 - n} - \frac{e^{2\pi i(f(a) - na)}}{\alpha - n} \right. \\ & \quad \left. - (\cos(2\pi w_1) + i \sin(2\pi w_2)) \left(\frac{1}{\alpha_1 - n} - \frac{1}{\alpha - n} \right) \right), \\ |I_a| &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{n - \alpha_1} + \frac{1}{n - \alpha} \right) + \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n - \alpha_1} - \frac{1}{n - \alpha} \right) \\ &= \frac{3}{2\pi} \frac{1}{n - \alpha_1} - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n - \alpha} < \frac{3}{2\pi} \frac{1}{n - \alpha_1}. \end{aligned}$$

Пусть n_1 – наименьшее целое при условии $n_1 > \alpha_1 + \Delta$, а n_2 – наибольшее целое при условии $n_2 < \beta_1 - \Delta$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha_1 + \Delta \leq n \leq \beta_1 - \Delta} |I_a| &< \frac{3}{2\pi} \sum_{\alpha_1 + \Delta \leq n \leq \beta_1 - \Delta} \frac{1}{n - \alpha_1} \leq \frac{3}{2\pi} \left(\Delta^{-1} + \sum_{n_1 + 1 \leq n \leq n_2} \frac{1}{n - \alpha_1} \right) \\ &= \frac{3}{2\pi} \left(\Delta^{-1} + \sum_{1 \leq r \leq n_2 - n_1} \frac{1}{r + n_1 - \alpha_1} \right) \\ &\leq \frac{3}{2\pi} \left(\Delta^{-1} + \sum_{1 \leq r \leq n_2 - n_1} \frac{1}{r + \Delta} \right) \\ &\leq \frac{3}{2\pi} \left(\Delta^{-1} + \frac{1}{1 + \Delta} + \int_1^{n_2 - n_1} \frac{du}{u + \Delta} \right) \\ &= \frac{3}{2\pi} \left(\Delta^{-1} + \frac{1}{1 + \Delta} - \ln(1 + \Delta) + \ln(n_2 - n_1 + \Delta) \right) \\ &\leq \frac{3}{2\pi} \left(\Delta^{-1} + \frac{1}{1 + \Delta} - \ln(1 + \Delta) + \ln(\beta - \alpha + 2) \right). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается и неравенство

$$\sum_{\alpha_1 + \Delta \leq n \leq \beta_1 - \Delta} |I_b| < \frac{3}{2\pi} \left(\Delta^{-1} + \frac{1}{1 + \Delta} - \ln(1 + \Delta) + \ln(\beta - \alpha + 2) \right).$$

Таким образом,

$$|W| < 6 + 9C + 12\Delta + \frac{3}{\pi} \left(\Delta^{-1} + \frac{1}{1+\Delta} - \ln(1+\Delta) + \ln(\beta - \alpha + 2) \right).$$

Окончательно находим

$$\sum_{a < x \leq b} \exp(2\pi i f(x)) = \sum_{\alpha - \Delta \leq n \leq \beta + \Delta} \int_a^b \exp(2\pi i (f(x) - nx)) dx + \theta R,$$

где

$$\begin{aligned} R = R_2 + |W| &< 3.1 + \pi^{-1} (1 + 5.5\Delta^{-1} + 2 \ln \Delta^{-1} + 2 \ln(\beta - \alpha + 2)) \\ &+ 6 + 9C + 12\Delta + 3\pi^{-1} \left(\Delta^{-1} + \frac{1}{1+\Delta} - \ln(1+\Delta) + \ln(\beta - \alpha + 2) \right) \\ &< 9.42 + 9C + 12\Delta + \pi^{-1} (8.5\Delta^{-1} + 2 \ln \Delta^{-1} + 3(1+\Delta)^{-1} \\ &- 3 \ln(1+\Delta) + 5 \ln(\beta - \alpha + 2)). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ – вещественные функции, удовлетворяющие на отрезке $[a, b]$ следующим условиям:

- 1) $f''(x)$ и $\varphi'(x)$ непрерывны;
- 2) $0 < f''(x) \leq C$;
- 3) существуют положительные числа $H, U, \phi_0, \phi_1, \lambda$ такие, что $U \geq 1$, $0 < b - a \leq \lambda U$ и

$$|\varphi(x)| \leq \phi_0 H, \quad |\varphi'(x)| \leq \phi_1 H U^{-1}.$$

Тогда при любом Δ , $0 < \Delta < 1$, справедливо равенство

$$\sum_{a < x \leq b} \varphi(x) \exp(2\pi i f(x)) = \sum_{\alpha - \Delta \leq n \leq \beta + \Delta} \int_a^b \varphi(x) \exp(2\pi i (f(x) - nx)) dx + \theta R,$$

где $\alpha = f'(a)$, $\beta = f'(b)$,

$$\begin{aligned} R = (\phi_0 + \lambda \phi_1) H &(9.42 + 9C + 12\Delta + \pi^{-1} (10\Delta^{-1} + 2 \ln \Delta^{-1} \\ &+ 4.5(1+\Delta)^{-1} - 4.5 \ln(1+\Delta) + 6.5 \ln(\beta - \alpha + 2))). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя к сумме из условия леммы формулу частного суммирования, получим

$$\begin{aligned} \sum_{a < x \leq b} \varphi(x) \exp(2\pi i f(x)) &= \mathbb{C}(b) \varphi(b) - \int_a^b \mathbb{C}(u) \varphi'(u) du, \\ \mathbb{C}(u) &= \sum_{a < x \leq u} \exp(2\pi i f(x)). \end{aligned}$$

Полагая $f'(u) = \gamma$ и пользуясь утверждением леммы 6, находим

$$\mathbb{C}(u) = \sum_{\alpha - \Delta \leq n \leq \gamma + \Delta} \int_a^u \exp(2\pi i (f(x) - nx)) dx + \theta_1 R_1,$$

$$R_1 = 9.42 + 9C + 12\Delta$$

$$+ \pi^{-1} (8.5\Delta^{-1} + 2 \ln \Delta^{-1} + 3(1+\Delta)^{-1} - 3 \ln(1+\Delta) + 5 \ln(\beta - \alpha + 2)).$$

Обозначая через I_a интеграл $\int_a^u \exp(2\pi i(f(x) - nx)) dx$ и производя интегрирование по частям, при $n > \gamma + \Delta$ получим

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{e^{2\pi i(f(u) - nu)}}{f'(u) - n} - \frac{e^{2\pi i(f(a) - na)}}{f'(a) - n} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_a^u \exp(2\pi i(f(x) - nx)) d \frac{1}{f'(x) - n}, \\ |I_a| &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{n - \gamma} + \frac{1}{n - \alpha} \right) + \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n - \gamma} - \frac{1}{n - \alpha} \right) < \frac{3}{2\pi} \frac{1}{n - \gamma}. \end{aligned}$$

Пусть n_1 – наименьшее целое число при условии $n_1 > \gamma + \Delta$, n_2 – наибольшее целое число при условии $n_2 \leq \beta + \Delta$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(u) &= \sum_{\alpha - \Delta \leq n \leq \beta + \Delta} I_a + \theta R_1 - \sum_{n_1 \leq n \leq n_2} I_a \\ &= \sum_{\alpha - \Delta \leq n \leq \beta + \Delta} \int_a^u \exp(2\pi i(f(x) - nx)) dx + \theta R_2, \\ R_2 &\leq R_1 + \frac{3}{2\pi} \sum_{n_1 \leq n \leq n_2} \frac{1}{n - \gamma} \\ &\leq R_1 + \frac{3}{2\pi} \left(\Delta^{-1} + \frac{1}{1 + \Delta} - \ln(1 + \Delta) + \ln(\beta - \alpha + 2) \right) \\ &= 9.42 + 9C + 12\Delta + \pi^{-1} (10\Delta^{-1} + 2 \ln \Delta^{-1} \\ &\quad + 4.5(1 + \Delta)^{-1} - 4.5 \ln(1 + \Delta) + 6.5 \ln(\beta - \alpha + 2)). \end{aligned}$$

Возвращаясь к исходной сумме, приходим к следующей цепочке равенств:

$$\begin{aligned} &\sum_{a < x \leq b} \varphi(x) \exp(2\pi i f(x)) \\ &= \varphi(b) \left(\sum_{\alpha - \Delta \leq n \leq \beta + \Delta} \int_a^b \exp(2\pi i(f(x) - nx)) dx + \theta R_2 \right) \\ &\quad - \int_a^b \left(\sum_{\alpha - \Delta \leq n \leq \beta + \Delta} \int_a^u \exp(2\pi i(f(x) - nx)) dx + \theta R_2 \right) \varphi'(u) du \\ &= \int_a^b \varphi(u) \frac{d}{du} \left(\sum_{\alpha - \Delta \leq n \leq \beta + \Delta} \int_a^u \exp(2\pi i(f(x) - nx)) dx \right) du + \theta R_3 \\ &= \sum_{\alpha - \Delta \leq n \leq \beta + \Delta} \int_a^b \varphi(u) \exp(2\pi i(f(u) - nu)) du + \theta R_3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} |R_3| &\leq |\varphi(b)| R_2 + \int_a^b |\varphi'(u)| R_2 du \leq \left(\phi_0 H + \int_a^b \phi_1 H U^{-1} du \right) R_2 \\ &\leq (\phi_0 + \lambda \phi_1) H R_2 \leq (\phi_0 + \lambda \phi_1) H (9.42 + 9C + 12\Delta \\ &\quad + \pi^{-1} (10\Delta^{-1} + 2 \ln \Delta^{-1} + 4.5(1 + \Delta)^{-1} \\ &\quad - 4.5 \ln(1 + \Delta) + 6.5 \ln(\beta - \alpha + 2))). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть вещественные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют на отрезке $[a, b]$ следующим условиям:

- 1) $f^{(4)}(x)$, $\varphi''(x)$ непрерывны;
- 2) существуют положительные числа $H, U, A, c_1, c_2, c_3, c_4, \phi_0, \phi_1, \phi_2, \lambda$ такие, что

$$\begin{aligned} U &\geq 1, & 0 < b - a &\leq \lambda U, \\ c_1 A^{-1} &\leq f''(x) \leq c_2 A^{-1}, & |f^{(3)}(x)| &\leq c_3 A^{-1} U^{-1}, & |f^{(4)}(x)| &\leq c_4 A^{-1} U^{-2}, \\ |\varphi(x)| &\leq \phi_0 H, & |\varphi'(x)| &\leq \phi_1 H U^{-1}, & |\varphi''(x)| &\leq \phi_2 H U^{-2}; \end{aligned}$$

- 3) $f'(c) = 0$ при некотором c , $a < c < b$.

Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x) \exp(2\pi i f(x)) dx &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\varphi(c) e^{2\pi i f(c)}}{\sqrt{f''(c)}} \\ &+ \theta_1 H (\pi c_1)^{-1} \phi_0 c_2 (\min(\kappa_1 \sqrt{A}, |f'(a)|^{-1}) + \min(\kappa_1 \sqrt{A}, |f'(b)|^{-1})) \\ &+ \theta_2 (\pi c_1^2)^{-1} (2\kappa_2 + \kappa_3) H A U^{-1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{5\pi}{4\sqrt{2}} \frac{\sqrt{c_1}}{c_2}, & \kappa_2 &= \frac{5}{2} \phi_0 c_3 + \phi_1 c_1, \\ \kappa_3 &= \frac{3}{4} \lambda \left(\phi_2 c_2 + \phi_1 c_3 + \frac{\lambda}{3} \phi_2 c_3 \right) \\ &+ \frac{\lambda}{2} \max \left(\frac{9}{8} c_4 + \left(\frac{13}{6} \right)^2 c_1^{-1} (c_3 + 0.5 \kappa c_4)^2, 2c_2 k^{-2} \right), \\ k &= \min \left(\frac{c_1}{4c_3}, \sqrt{\frac{c_1}{2c_4}} \right). \end{aligned}$$

Если точка c совпадает с одной из точек a и b , то

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x) \exp(2\pi i f(x)) dx &= \frac{1+i}{2\sqrt{2}} \frac{\varphi(c) e^{2\pi i f(c)}}{\sqrt{f''(c)}} \\ &+ \theta_1 H (\pi c_1)^{-1} \phi_0 c_2 \min(\kappa_1 \sqrt{A}, |f'(\mu)|^{-1}) + \theta_2 (\pi c_1^2)^{-1} (\kappa_2 + \kappa_3) H A U^{-1}, \end{aligned}$$

причем μ обозначает тот конец отрезка $[a, b]$, который отличен от точки c .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем промежуток интегрирования точкой c на две части и рассмотрим интеграл

$$I_1 = \int_c^b \varphi(x) \exp(2\pi i f(x)) dx = \int_0^{b-c} \varphi(x+c) \exp(2\pi i f(x+c)) dx.$$

Представляя $\varphi(x+c)$ суммой $\varphi(x+c) - \varphi(c) + \varphi(c)$ и полагая $\Phi(x) = (\varphi(x+c) - \varphi(c)) (f'(x+c))^{-1}$, получим

$$I_1 = j_1 + j_2,$$

где

$$\begin{aligned} j_1 &= \int_0^{b-c} (\varphi(x+c) - \varphi(c)) \exp(2\pi i f(x+c)) dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{b-c} \frac{\varphi(x+c) - \varphi(c)}{f'(x+c)} de^{2\pi i f(x+c)} = \int_0^{b-c} \Phi(x) de^{2\pi i f(x+c)}, \\ j_2 &= \varphi(c) \int_0^{b-c} e^{2\pi i f(x+c)} dx. \end{aligned}$$

Обозначим через Φ и Φ' величины $\max_{0 \leq x \leq b-c} |\Phi(x)|$ и $\int_0^{b-c} |\Phi'(x)| dx$ соответственно. Тогда

$$|j_1| = \frac{1}{2\pi} \left| \Phi(b-c)e^{2\pi i f(b)} - \Phi(0)e^{2\pi i f(c)} - \int_0^{b-c} \Phi'(x)e^{2\pi i f(x+c)} dx \right| \leq \pi^{-1}(\Phi + 0.5\Phi').$$

Далее, приблизим j_2 специальным интегралом j_3 ,

$$j_3 = \varphi(c) \int_0^{b-c} \frac{f'(x+c)e^{2\pi i f(x+c)}}{\sqrt{2f''(c)}\sqrt{f(x+c)-f(c)}} dx.$$

Для этого положим

$$\Psi(x) = \frac{1}{f'(x+c)} - \frac{1}{\sqrt{2f''(c)}\sqrt{f(x+c)-f(c)}}$$

и возьмем Ψ , Ψ' равными максимумам модулей функций $\Psi(x)$ и $\Psi'(x)$ на отрезке $[0, b-c]$. Полагая $j_4 = j_2 - j_3$, приходим к равенству

$$\begin{aligned} j_4 &= \frac{\varphi(c)}{2\pi i} \int_0^{b-c} \Psi(x) de^{2\pi i f(x+c)} \\ &= \frac{\varphi(c)}{2\pi i} \left(\Psi(b-c)e^{2\pi i f(b)} - \Psi(0)e^{2\pi i f(c)} - \int_0^{b-c} \Psi'(x)e^{2\pi i f(x+c)} dx \right), \end{aligned}$$

следствием которого является оценка $|j_4| \leq \pi^{-1}(\Psi + 0.5(b-c)\Psi')\phi_0 H$. Наконец, делая в интеграле j_3 замену переменной интегрирования вида $u = f(x+c) - f(c)$ и обозначая через Y разность $f(b) - f(c)$, получим

$$\begin{aligned} j_3 &= \frac{\varphi(c)e^{2\pi i f(c)}}{\sqrt{2f''(c)}} \int_0^Y \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du \\ &= \frac{\varphi(c)e^{2\pi i f(c)}}{\sqrt{2f''(c)}} \left(\int_0^{+\infty} - \int_Y^{+\infty} \right) \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du = \frac{1+i}{2} \frac{\varphi(c)e^{2\pi i f(c)}}{\sqrt{2f''(c)}} - j_5. \end{aligned}$$

Для оценки несобственного интеграла j_5 воспользуемся леммой 5, согласно которой

$$|j_5| \leq \frac{|\varphi(c)|}{\sqrt{2f''(c)}} \min\left(\frac{5}{4}, \frac{\pi^{-1}}{\sqrt{Y}}\right) \leq \frac{\phi_0}{\sqrt{c_1}} H\sqrt{A} \min\left(\frac{5}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{\pi\sqrt{2Y}}\right).$$

Заметим теперь, что при некоторых ξ и η , $c \leq \xi, \eta \leq b$, справедливы соотношения

$$Y = f(b) - f(c) = 0.5(b-c)^2 f''(\xi), \quad f'(b) - f'(c) = (b-c)f''(\eta),$$

из которых следуют неравенства

$$\begin{aligned} 2Y &= f''(\xi) \left(\frac{f'(b)}{f''(\eta)} \right)^2 \geq c_1 c_2^{-2} A (f'(b))^2, \\ |j_5| &\leq \frac{\phi_0}{\sqrt{c_1}} H \sqrt{A} \min \left(\frac{5}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{\pi} \frac{c_2}{\sqrt{c_1}} \frac{|f'(b)|^{-1}}{\sqrt{A}} \right) \\ &\leq (\pi c_1)^{-1} \phi_0 c_2 H \min(k_1 \sqrt{A}, |f'(b)|^{-1}), \end{aligned}$$

где

$$k_1 = \frac{5\pi}{4\sqrt{2}} \frac{\sqrt{c_1}}{c_2}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1+i}{2} \frac{\varphi(c) e^{2\pi i f(c)}}{\sqrt{2f''(c)}} + \theta R_1, \\ R_1 &= \pi^{-1} (\Phi + 0.5\Phi' + \phi_0 H (\Psi + 0.5(b-c)\Psi')) \\ &\quad + (\pi c_1)^{-1} \phi_0 c_2 H \min(k_1 \sqrt{A}, |f'(b)|^{-1}). \end{aligned}$$

Оценка величин Φ, Φ' . По теореме Лагранжа о конечных приращениях при любом x , $0 \leq x \leq b-c$, и некоторых ξ, η , $c \leq \xi, \eta \leq b$, имеет место равенство

$$|\Phi(x)| = \left| \frac{\varphi(x+c) - \varphi(c)}{f'(x+c)} \right| = \left| \frac{\varphi'(\xi)x}{f''(\eta)x} \right| \leq c_1^{-1} \phi_1 H A U^{-1},$$

из которого следует, что $\Phi \leq c_1^{-1} \phi_1 H A U^{-1}$. Далее, при тех же x и некоторых $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1$ и η_2 , зависящих от x , справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} |\Phi'(x)| &= \left| \frac{\varphi'(x+c)f'(x+c) - (\varphi(x+c) - \varphi(c))f''(x+c)}{(f'(x+c))^2} \right| \\ &= \left| \frac{(\varphi'(c) + \varphi''(\xi_1)x)(f''(c)x + 0.5f^{(3)}(\eta_1)x^2)}{(f''(\xi_3))^2 x^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\varphi'(c)x + 0.5\varphi''(\xi_2)x^2)(f''(c) + f^{(3)}(\eta_2)x)}{(f''(\xi_3))^2 x^2} \right| \\ &= (f''(\xi_3))^{-2} |\varphi''(\xi_1)f''(c) + 0.5\varphi'(c)f^{(3)}(\eta_1) + 0.5\varphi''(\xi_1)f^{(3)}(\eta_1)x \\ &\quad - \varphi'(c)f^{(3)}(\eta_2) - 0.5\varphi''(\xi_2)f''(c) - 0.5\varphi''(\xi_2)f^{(3)}(\eta_2)x| \\ &\leq c_1^{-2} A^2 \left(\frac{\phi_2 H}{U^2} \frac{c_2}{A} + \frac{\phi_1 H}{2U} \frac{c_3}{AU} + \frac{\phi_2 H}{2U^2} \frac{c_3 x}{AU} + \frac{\phi_1 H}{U} \frac{c_3}{AU} + \frac{\phi_2 H}{2U^2} \frac{c_2}{A} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\phi_2 H}{2U^2} \frac{c_3 x}{AU} \right) = c_1^{-2} (1.5\phi_2 c_2 + 1.5\phi_1 c_3 + \phi_2 c_3 x U^{-1}) H A U^{-2}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \Phi' &\leq \int_0^{b-c} c_1^{-2} (1.5\phi_2 c_2 + 1.5\phi_1 c_3 + \phi_2 c_3 x U^{-1}) H A U^{-2} dx \leq c_1^{-2} k_2 (b-c) H A U^{-2}, \\ k_2 &= \frac{3}{2} \left(\phi_2 c_2 + \phi_1 c_3 + \frac{\lambda}{3} \phi_2 c_3 \right). \end{aligned}$$

Оценка Ψ . По теореме Лагранжа для любого x с условием $0 \leq x \leq c_1 c_3^{-1} U$ и некоторых ξ_1, ξ_2

$$\begin{aligned} f'(x+c) &= f''(c)x + 0.5f^{(3)}(\xi_1)x^2 = xf''(c)(1+q), \\ q &= \frac{x}{2} \frac{f^{(3)}(\xi_1)}{f''(c)}, \quad |q| \leq \frac{1}{2}, \\ f(x+c) - f(c) &= f''(c) \frac{x^2}{2} + f^{(3)}(\xi_2) \frac{x^3}{6} = \frac{x^2}{2} f''(c)(1+q_1), \\ q_1 &= \frac{x}{3} \frac{f^{(3)}(\xi_2)}{f''(c)}, \quad |q_1| \leq \frac{1}{3} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пользуясь равенствами

$$(1+q)^{-1} = 1 - 4\theta_1 q, \quad (1+q_1)^{-1/2} = 1 - \sqrt{2}\theta_2 q_1,$$

которые справедливы при $|q| \leq 0.5$, $|q_1| \leq 0.5$, находим

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \frac{1}{f'(x+c)} - \frac{1}{\sqrt{2f''(c)} \sqrt{f(x+c) - f(c)}} \\ &= \frac{1}{xf''(c)}(1+q)^{-1} - \frac{1}{xf''(c)}(1+q_1)^{-1/2} \\ &= \frac{4\theta_1 q}{xf''(c)} + \frac{\sqrt{2}\theta_2 q_1}{2xf''(c)} = 2\theta_1 \frac{f^{(3)}(\xi_1)}{(f''(c))^2} + \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{f^{(3)}(\xi_2)}{(f''(c))^2} = 2.5\theta c_1^{-2} c_3 AU^{-1}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $c_1 c_3^{-1} U < x \leq b - c$. Тогда

$$\begin{aligned} f'(x+c) &= xf''(\xi) \geq c_1^2 c_3 UA^{-1}, \\ 2f''(c)(f(x+c) - f(c)) &= x^2 f''(c)f''(\eta) \geq (c_1^2 c_3^{-1} UA^{-1})^2 \end{aligned}$$

и, следовательно, $|\Psi(x)| \leq 2c_1^2 c_3^{-1} UA^{-1}$. Таким образом, $\Psi \leq 2.5c_1^{-2} c_3 AU^{-1}$.

Оценка Ψ' . Предположим сначала, что $b - c \leq kU$, где k – наименьшее из чисел $c_1(4c_3)^{-1}$ и $\sqrt{c_1(2c_4)^{-1}}$. Из формулы конечных приращений получаем следующие разложения:

$$\begin{aligned} f'(x+c) &= xf''(c) + \frac{x^2}{2} f^{(3)}(c) + \frac{x^3}{6} f^{(4)}(\xi_1) = xf''(c)(1+q_1), \\ q_1 &= \frac{x}{2} \frac{f^{(3)}(c)}{f''(c)} + \frac{x^2}{6} \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{f''(c)}, \\ f''(x+c) &= f''(c) + xf^{(3)}(c) + \frac{x^2}{2} f^{(4)}(\xi_2) = f''(c)(1+q_2), \\ q_2 &= x \frac{f^{(3)}(c)}{f''(c)} + \frac{x^2}{2} \frac{f^{(4)}(\xi_2)}{f''(c)}, \\ f(x+c) - f(c) &= \frac{x^2}{2} f''(c) + \frac{x^3}{6} f^{(3)}(c) + \frac{x^4}{24} f^{(4)}(\xi) = \frac{x^2}{2} f''(c)(1+q), \\ q &= \frac{x}{3} \frac{f^{(3)}(c)}{f''(c)} + \frac{x^2}{12} \frac{f^{(4)}(\xi)}{f''(c)}. \end{aligned}$$

Определенные таким образом параметры q_1 , q_2 , q при $0 \leq x \leq b - c \leq kU$ удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} |q_1| &\leq \frac{x}{2f''(c)} \left| f^{(3)}(c) + \frac{x}{3} f^{(4)}(\xi_1) \right| \leq (2c_1)^{-1} c_0 \frac{x}{U}, \\ |q_2| &\leq \frac{x}{f''(c)} \left| f^{(3)}(c) + \frac{x}{2} f^{(4)}(\xi_2) \right| \leq c_1^{-1} c_0 \frac{x}{U}, \\ |q| &\leq \frac{x}{3f''(c)} \left| f^{(3)}(c) + \frac{x}{4} f^{(4)}(\xi) \right| \leq (3c_1)^{-1} c_0 \frac{x}{U}, \quad c_0 = c_3 + 0.5kc_4, \end{aligned}$$

а также неравенствам

$$\begin{aligned} |q_1| &\leq \frac{c_3}{2c_1} \frac{x}{U} + \frac{c_4}{6c_1} \left(\frac{x}{U} \right)^2 \leq \frac{c_3}{2c_1} k + \frac{c_4}{6c_1} k^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{24}, \\ |q_2| &\leq \frac{c_3}{c_1} \frac{x}{U} + \frac{c_4}{2c_1} \left(\frac{x}{U} \right)^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \\ |q| &\leq \frac{c_3}{3c_1} \frac{x}{U} + \frac{c_4}{12c_1} \left(\frac{x}{U} \right)^2 \leq \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Для таких q_1 , q_2 , q справедливы разложения

$$\begin{aligned} (1+q)^{-3/2} &= 1 - \frac{3}{2}q + \frac{15}{8} \frac{q^2}{(1+\theta_1 q)^{7/2}} \\ &= 1 - \frac{3}{2}q + \frac{15}{8} \theta q^2 \left(1 - \frac{1}{8} \right)^{-7/2} = 1 - \frac{3}{2}q + 3\theta q^2, \\ (1+q_1)^{-2} &= 1 - 2q_1 + \frac{3q_1^2}{(1+\theta_1 q_1)^4} \\ &= 1 - 2q_1 + 3\theta q_1^2 \left(1 - \frac{5}{24} \right)^{-4} = 1 - 2q_1 + 8\theta q_1^2 \end{aligned}$$

и, как следствие, равенства

$$\begin{aligned} \frac{f'(x+c)}{\sqrt{8f''(c)} (f(x+c) - f(c))^{3/2}} &= \frac{1}{x^2 f''(c)} (1+q_1)(1+q)^{-3/2} \\ &= \frac{1}{x^2 f''(c)} (1+q_1) \left(1 - \frac{3}{2}q + 3\theta q^2 \right) \\ &= \frac{1}{x^2 f''(c)} \left(1 + \left(q_1 - \frac{3}{2}q \right) - \frac{3}{2}qq_1 + 3\theta q^2 + 3\theta q^2 q_1 \right), \\ \frac{f''(x+c)}{(f'(x+c))^2} &= \frac{1}{x^2 f''(c)} (1+q_2)(1+q_1)^{-2} = \frac{1}{x^2 f''(c)} (1+q_2)(1-2q_1+8\theta q_1^2) \\ &= \frac{1}{x^2 f''(c)} (1 - (2q_1 - q_2) - 2q_1 q_2 + 8\theta q_1^2 + 8\theta q_1^2 q_2). \end{aligned}$$

Вычтем одно равенство из другого; получим

$$\begin{aligned}\Psi'(x) &= \frac{f'(x+c)}{\sqrt{8f''(c)}(f(x+c)-f(c))^{3/2}} - \frac{f''(x+c)}{(f'(x+c))^2} \\ &= \frac{1}{x^2 f''(c)} \left(\left(q_1 - \frac{3}{2} q \right) + (2q_1 - q_2) \right. \\ &\quad \left. + \theta \left(\frac{3}{2} |qq_1| + 2|q_1 q_2| + 3q^2 + 8q_1^2 + 3q^2 |q_1| + 8q_1^2 |q_2| \right) \right).\end{aligned}$$

Оценим по отдельности каждое из слагаемых, стоящих в скобках. Прежде всего, находим

$$\begin{aligned}\left| q_1 - \frac{3}{2} q \right| + |2q_1 - q_2| &= \left| \frac{x^2}{6} \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{f''(c)} - \frac{x^2}{8} \frac{f^{(4)}(\xi)}{f''(c)} \right| + \left| \frac{x^2}{3} \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{f''(c)} - \frac{x^2}{2} \frac{f^{(4)}(\xi_2)}{f''(c)} \right| \\ &\leq \left(\frac{7}{24} + \frac{5}{6} \right) c_1^{-1} c_4 \frac{x^2}{U^2} = \frac{9}{8} c_1^{-1} c_4 \frac{x^2}{U^2}, \\ \frac{3}{2} |qq_1| &\leq \frac{3}{2} (3c_1)^{-1} c_0 \frac{x}{U} (2c_1)^{-1} c_0 \frac{x}{U} = \frac{1}{4} c_1^{-2} c_0^2 \frac{x^2}{U^2}, \\ 2|q_1 q_2| &\leq c_1^{-2} c_0^2 \frac{x^2}{U^2}, \quad 3q^2 \leq \frac{1}{3} c_1^{-2} c_0^2 \frac{x^2}{U^2}, \quad 8q_1^2 \leq 2c_1^{-2} c_0^2 \frac{x^2}{U^2}, \\ 3q^2 |q_1| &< 3q^2 \cdot \frac{1}{3} = q^2 \leq \frac{1}{9} c_1^{-2} c_0^2 \frac{x^2}{U^2}, \\ 8q_1^2 |q_2| &\leq 8q_1^2 \cdot \frac{1}{2} = 4q_1^2 \leq c_1^{-2} c_0^2 \frac{x^2}{U^2}.\end{aligned}$$

Сложив эти неравенства, получим

$$\begin{aligned}|\Psi'(x)| &\leq c_1^{-1} \frac{A}{x^2} \left(\frac{9}{8} c_1^{-1} c_4 + \left(\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{3} + 2 + \frac{1}{9} + 1 \right) c_1^{-2} c_0^2 \right) \frac{x^2}{U^2} \\ &= c_1^{-2} \left(\frac{9}{8} c_4 + c_1^{-1} \left(\frac{13}{6} c_0 \right)^2 \right) AU^{-2}.\end{aligned}$$

Далее, если $kU \leq x \leq b - c$, то

$$c_1 x A^{-1} \leq f'(x+c) \leq c_2 x A^{-1}, \quad f(x+c) - f(c) = 0.5x^2 f''(\xi) \geq 0.5x^2 c_1 A^{-1},$$

$$\begin{aligned}|\Psi'(x)| &\leq \frac{|f'(x+c)|}{\sqrt{8f''(c)}(f(x+c)-f(c))^{3/2}} + \frac{f''(x+c)}{(f'(x+c))^2} \\ &\leq 2c_1^{-2} c_2 x^{-2} AU^{-2} \leq 2c_1^{-2} c_2 k^{-2} AU^{-2}.\end{aligned}$$

Таким образом, при $0 \leq x \leq b - c$

$$\begin{aligned}\Psi'(x) &\leq c_1^{-2} k_3 AU^{-2}, \quad k_3 = \max \left(\frac{9}{8} c_4 + c_1^{-1} \left(\frac{13}{6} (c_3 + 0.5k c_4) \right)^2, 2c_2 k^{-2} \right), \\ k &= \min \left(\frac{c_1}{4c_3}, \sqrt{\frac{c_1}{2c_4}} \right).\end{aligned}$$

Теперь выражение для интеграла I_1 принимает следующий вид:

$$I_1 = \frac{1+i}{2\sqrt{2}} \frac{\varphi(c) e^{2\pi i f(c)}}{\sqrt{f''(c)}} + \theta_1 R_1,$$

$$\begin{aligned}
R_1 &= (\pi c_1)^{-1} \phi_0 c_2 H \min(k_1 \sqrt{A}, |f'(b)|^{-1}) \\
&\quad + \pi^{-1} (\Phi + 0.5\Phi' + \phi_0 H (\Psi + 0.5(b-c)\Psi')) \\
&\leq (\pi c_1)^{-1} \phi_0 c_2 H \min(k_1 \sqrt{A}, |f'(b)|^{-1}) \\
&\quad + (\pi c_1^2)^{-1} (\phi_1 c_1 + 2.5\phi_0 c_3 + 0.5(k_2 + k_3)(b-c)U^{-1}).
\end{aligned}$$

Вывод формулы для интеграла

$$I_2 = \int_a^c \varphi(x) \exp(2\pi i f(x)) dx$$

практически дословно повторяет вывод формулы для интеграла I_1 и приводит к равенству

$$I_2 = \frac{1+i}{2\sqrt{2}} \frac{\varphi(c) e^{2\pi i f(c)}}{\sqrt{f''(c)}} + \theta_2 R_2,$$

где

$$\begin{aligned}
R_2 &\leq (\pi c_1)^{-1} \phi_0 c_2 H \min(k_1 \sqrt{A}, |f'(a)|^{-1}) \\
&\quad + (\pi c_1^2)^{-1} (\phi_1 c_1 + 2.5\phi_0 c_3 + 0.5(k_2 + k_3)(c-a)U^{-1}).
\end{aligned}$$

Сложив выражения для I_1 и I_2 , убеждаемся в том, что

$$I = \int_a^b \varphi(x) \exp(2\pi i f(x)) dx = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\varphi(c) e^{2\pi i f(c)}}{\sqrt{f''(c)}} + \theta R,$$

где величина R ограничена сверху суммой

$$\begin{aligned}
&(\pi c_1)^{-1} \phi_0 c_2 H (\min(\kappa_1 \sqrt{A}, |f'(a)|^{-1}) + \min(\kappa_1 \sqrt{A}, |f'(b)|^{-1})) \\
&\quad + (\pi c_1^2) (2\kappa_2 + \kappa_3) H A U^{-1}, \\
&\kappa_1 = k_1 = \frac{5\pi}{4\sqrt{2}} \frac{\sqrt{c_1}}{c_2}, \quad \kappa_2 = 2.5\phi_0 c_3 + \phi_1 c_1, \\
&\kappa_3 = \frac{\lambda}{2} (k_2 + k_3) = \frac{3\lambda}{4} \left(\phi_1 c_3 + \phi_2 c_2 + \frac{\lambda}{3} \phi_2 c_3 \right) \\
&\quad + \frac{\lambda}{2} \max \left(\frac{9}{8} c_4 + c_1^{-1} \left(\frac{13}{6} \right)^2 (c_3 + 0.5k c_4)^2, 2c_2 k^{-2} \right), \\
&\quad k = \min \left(\frac{c_1}{4c_3}, \sqrt{\frac{c_1}{2c_4}} \right).
\end{aligned}$$

Если точка c совпадает с одним из концов отрезка $[a, b]$, то исходный интеграл I совпадает с одним из интегралов I_1, I_2 , а величина R будет удовлетворять одному из соотношений, которым удовлетворяют R_1 и R_2 :

$$R \leq (\pi c_1)^{-1} \phi_0 c_2 H \min(\kappa_1 \sqrt{A}, |f'(\mu)|^{-1}) + (\pi c_1^2)^{-1} (\kappa_2 + \kappa_3) H A U^{-1}$$

(через μ обозначен конец отрезка интегрирования, отличный от точки c). Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Пусть вещественные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют на отрезке $[a, b]$ следующим условиям:

- 1) $f''(x), \varphi'(x)$ непрерывны;
- 2) существуют положительные числа $H, U, A, c_1, c_2, \phi_0, \phi_1, \lambda$ такие, что $U \geq 1, 0 < b - a \leq \lambda U$, и при $a \leq x \leq b$ выполняются неравенства

$$c_1 A^{-1} \leq f''(x) \leq c_2 A^{-1}, \quad |\varphi(x)| \leq \phi_0 H, \quad |\varphi'(x)| \leq \phi_1 H U^{-1}.$$

Тогда справедлива следующая оценка:

$$\left| \int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} dx \right| \leq \kappa H \sqrt{A},$$

где $\kappa = 2\phi_0 + (\pi c_1)^{-1}(2\phi_0 + \phi_0 c_1^{-1} c_2 + \lambda e^{-1} \phi_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $b - a \leq 2\sqrt{A}$, то интеграл из условия леммы по абсолютной величине не превосходит $\phi_0 H(b - a) \leq 2\phi_0 H \sqrt{A}$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $b - a > 2\sqrt{A}$. Предположим вначале, что на отрезке $[a, b]$ существует точка c , в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль: $f'(c) = 0$. Допустим, что $a + \sqrt{A} < c < b - \sqrt{A}$. Обозначая исходный интеграл через I , представим его суммой $j_1 + j_2 + j_3$, где

$$j_1 = \int_a^{c-\sqrt{A}} \dots, \quad j_2 = \int_{c-\sqrt{A}}^{c+\sqrt{A}} \dots, \quad j_3 = \int_{c+\sqrt{A}}^b \dots$$

Оценивая j_2 тривиально, получим $|j_2| \leq 2\phi_0 H \sqrt{A}$. Величины j_1, j_3 оцениваются одинаково. Интегрируя по частям, будем иметь

$$\begin{aligned} j_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^{c-\sqrt{A}} \frac{\varphi(x)}{f'(x)} de^{2\pi i f(x)} = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\varphi(c-\sqrt{A})}{f'(c-\sqrt{A})} e^{2\pi i f(c-\sqrt{A})} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\varphi(a)}{f'(a)} e^{2\pi i f(a)} - \int_a^{c-\sqrt{A}} \frac{\varphi'(x)f'(x) - \varphi(x)f''(x)}{(f'(x))^2} e^{2\pi i f(x)} dx \right). \end{aligned}$$

Из соотношений, которым удовлетворяет $f(x)$, и теоремы Лагранжа о конечных приращениях получаем

$$|f'(a)| \geq |f'(c-\sqrt{A})| = |f'(c) - \sqrt{A} f''(\xi)| \geq \sqrt{A} c_1 A^{-1} = c_1 / \sqrt{A},$$

и при $a \leq x \leq c - \sqrt{A}$ имеем

$$|f'(x)| = |f'(c+x-c)| = (c-x)f''(\eta) \geq c_1(c-x)A^{-1}.$$

Таким образом, интеграл j_1 по абсолютной величине не превосходит суммы

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \left(2\phi_0 c_1^{-1} H \sqrt{A} + \phi_1 c_1^{-1} H U^{-1} A \int_a^{c-\sqrt{A}} \frac{dx}{c-x} + \phi_0 c_1^{-2} c_2 H A \int_a^{c-\sqrt{A}} \frac{dx}{(c-x)^2} \right) \\ &= (2\pi c_1)^{-1} \left(2\phi_0 + \phi_1 \frac{\sqrt{A}}{U} \ln \frac{c-a}{\sqrt{A}} + \phi_0 c_1^{-1} c_2 \right) H \sqrt{A}. \end{aligned}$$

Поскольку $\sqrt{A} < c - a \leq b - a \leq \lambda U$, то второе слагаемое, стоящее в скобках, не превосходит максимума функции $z^{-1} \ln z$, умноженного на $\lambda \phi_1$. Следовательно,

$$|j_1|, |j_3| \leq (2\pi c_1)^{-1} (2\phi_0 + \lambda e^{-1} \phi_1 + \phi_0 c_1^{-1} c_2).$$

Сложив полученные оценки, находим

$$|I| \leq (2\phi_0 + (\pi c_1)^{-1} (2\phi_0 + \phi_0 c_1^{-1} c_2 + \lambda e^{-1} \phi_1)) H \sqrt{A} = \kappa H \sqrt{A}.$$

Рассуждая подобным образом в случае, когда $a \leq c \leq a + \sqrt{A}$, получим соотношения

$$I = \int_a^{c+\sqrt{A}} \cdots + \int_{c+\sqrt{A}}^b \cdots = j_1 + j_2,$$

где

$$|j_1| \leq 2\phi_0 H \sqrt{A}, \quad |j_2| \leq (2\pi c_1)^{-1} (2\phi_0 + \phi_0 c_1^{-1} c_2 + \lambda e^{-1} \phi_1) H \sqrt{A},$$

а в случае $b - \sqrt{A} \leq c \leq b$ — соотношения

$$I = \int_a^{c-\sqrt{A}} \cdots + \int_{c-\sqrt{A}}^b \cdots = j_1 + j_2,$$

$$|j_1| \leq (2\pi c_1)^{-1} (2\phi_0 + \phi_0 c_1^{-1} c_2 + \lambda e^{-1} \phi_1) H \sqrt{A}, \quad |j_2| \leq 2\phi_0 H \sqrt{A}.$$

Сложив полученные неравенства, будем иметь $|I| \leq \kappa H \sqrt{A}$.

Предположим, наконец, что производная $f'(x)$ на отрезке $[a, b]$ в нуль не обращается. Представляя исходный интеграл суммой

$$\int_a^{a+\sqrt{A}} \cdots + \int_{a+\sqrt{A}}^{b-\sqrt{A}} \cdots + \int_{b-\sqrt{A}}^b \cdots = j_1 + j_2 + j_3,$$

нетрудно убедиться в том, что

$$|j_1 + j_3| \leq 2\phi_0 H \sqrt{A}, \quad |j_2| \leq (2\pi c_1)^{-1} (2\phi_0 + \phi_0 c_1^{-1} c_2 + \lambda e^{-1} \phi_1) H \sqrt{A}.$$

Таким образом, и в этом случае модуль интеграла из условия леммы не превосходит $\kappa H \sqrt{A}$. Лемма доказана.

§ 4. Доказательство теоремы

Положим, что в лемме 7 величина Δ равна 0.58; получим

$$\sum_{a < x \leq b} \varphi(x) \exp(2\pi i f(x)) = \sum_{\alpha - \Delta \leq n \leq \beta + \Delta} j(n) + \theta H (\lambda_1 \ln(\beta - \alpha + 2) + \mu_1),$$

где

$$j(n) = \int_a^b \varphi(x) \exp(2\pi i (f(x) - nx)) dx, \quad \lambda_1 = 6.5\pi^{-1}(\phi_0 + \lambda \phi_1),$$

$$\mu_1 = (\phi_0 + \lambda \phi_1)(22.5 + 9c_2 A^{-1}).$$

Далее рассмотрим несколько случаев.

Случай 1: числа $\alpha = f'(a)$ и $\beta = f'(b)$ нецелые. Пусть $\alpha_1 = [\alpha] + 1$, $\beta_1 = [\beta]$. Заменяя в лемме 5 функцию $f(x)$ на $f(x) - nx$ и полагая с равным корню x_n уравнения $f'(x) = n$, будем иметь

$$\begin{aligned} j(n) &= Z(n) + \theta_1 H(\pi c_1)^{-1} \phi_0 c_2 (\min(\kappa_1 \sqrt{A}, (n - \alpha)^{-1}) \\ &\quad + \min(\kappa_1 \sqrt{A}, (\beta - n)^{-1})) + \theta_2 H(\pi c_1^2)^{-1} K A U^{-1}, \\ K &= 2\kappa_2 + \kappa_3 = 5\phi_0 c_3 + 2\phi_1 c_1 + \frac{3}{4} \lambda \left(\phi_1 c_3 + \phi_2 c_2 + \frac{\lambda}{3} \phi_2 c_3 \right) \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \max \left(\frac{9}{8} c_4 + c_1^{-1} \left(\frac{13}{6} \right)^2 (c_3 + 0.5 k c_4)^2, 2c_2 k^{-2} \right), \\ k &= \min \left(\frac{c_1}{4c_3}, \sqrt{\frac{c_1}{2c_4}} \right). \end{aligned}$$

Складывая эти равенства, отвечающие $\alpha_1 \leq n \leq \beta_1$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha_1 \leq n \leq \beta_1} j(n) &= \sum_{\alpha_1 \leq n \leq \beta_1} Z(n) + \theta_1 H(\pi c_1)^{-1} \phi_0 c_2 (V_\alpha + V_\beta) \\ &\quad + \theta_2 H(\pi c_1^2)^{-1} K (\beta_1 - \alpha_1 + 1) A U^{-1}, \\ V_\delta &= \sum_{\alpha_1 \leq n \leq \beta_1} \min(\kappa_1 \sqrt{A}, |n - \delta|^{-1}), \quad \delta = \alpha, \beta. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\beta_1 - \alpha_1 \leq \beta - \alpha = (b - a) f''(\xi) \leq c_2 (b - a) A^{-1} \leq \lambda c_2 U A^{-1},$$

то

$$K(\beta_1 - \alpha_1 + 1) A U^{-1} \leq K(\lambda c_2 + A U^{-1}).$$

Далее, для любого целого n с условием $\alpha_1 \leq n \leq \beta_1$ справедливы следующие неравенства:

$$n - \alpha \geq \alpha_1 - \alpha = 1 - \{\alpha\} \geq \|\alpha\|, \quad \beta - n \geq \beta - \beta_1 = \{\beta\} \geq \|\beta\|.$$

Пользуясь определением величин T_a, T_b , находим

$$\begin{aligned} V_\alpha &\leq \min(\kappa_1 \sqrt{A}, \|\alpha\|^{-1}) + \sum_{\alpha_1 < n \leq \beta_1} \frac{1}{n - \alpha} \leq (\kappa_1 + 1) \min(\sqrt{A}, \|\alpha\|^{-1}) \\ &\quad + \sum_{1 \leq r \leq \beta_1 - \alpha_1} r^{-1} \leq (\kappa_1 + 1) T_a + 1 + \ln(\beta - \alpha + 2), \\ V_\beta &\leq (\kappa_1 + 1) T_b + 1 + \ln(\beta - \alpha + 2). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{\alpha_1 \leq n \leq \beta_1} j(n) = \sum_{\alpha_1 \leq n \leq \beta_1} Z(n) + \theta H(\lambda_2 \ln(\beta - \alpha + 2) + \mu_2 + \nu_1 (T_a + T_b)),$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= 2(\pi c_1)^{-1} \phi_0 c_2, \quad \mu_2 = (\pi c_1^2)^{-1} (K(\lambda c_2 + A U^{-1}) + 2\phi_0 c_1 c_2), \\ \nu_1 &= (\pi c_1)^{-1} (\kappa_1 + 1) \phi_0 c_2. \end{aligned}$$

Каждый из интервалов $[\alpha - \Delta, \alpha)$, $(\beta, \beta + \Delta]$ может содержать не более одного целого числа. Это могут быть значения $n_1 = [\alpha]$ и $n_2 = [\beta] + 1$. Так как α, β нецелые, то $n_1 < \alpha < \beta < n_2$ и для $n = n_1, n_2$ производная $\frac{d}{dx}(f(x) - nx)$ не обращается в нуль на отрезке $[a, b]$. Интегрируя по частям, для таких n получим

$$\begin{aligned} j(n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(x)}{f'(x) - n} de^{2\pi i(f(x) - nx)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\varphi(b)}{\beta - n} e^{2\pi i(f(b) - nb)} - \frac{\varphi(a)}{\alpha - n} e^{2\pi i(f(a) - na)} \right) - \frac{1}{2\pi i} (j_1 - j_2), \\ j_1 &= \int_a^b \frac{\varphi'(x)}{f'(x) - n} e^{2\pi i(f(x) - nx)} dx, \quad j_2 = \int_a^b \frac{\varphi(x)f''(x)}{(f'(x) - n)^2} e^{2\pi i(f(x) - nx)} dx. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что $|\beta - n| \geq \|\beta\|$, $|\alpha - n| \geq \|\alpha\|$ и при $a \leq x \leq b$ имеет место неравенство

$$|f'(x) - n| \leq |\alpha - n|^{-1} + |\beta - n|^{-1} \leq \|\alpha\|^{-1} + \|\beta\|^{-1}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |j_1| &\leq \phi_1 H U^{-1} \int_a^b |f'(x) - n|^{-1} dx \\ &\leq \phi_1 H U^{-1} (\|\alpha\|^{-1} + \|\beta\|^{-1}) \lambda U = \lambda \phi_1 (\|\alpha\|^{-1} + \|\beta\|^{-1}) H, \\ |j_2| &\leq \phi_0 H \int_a^b \frac{f''(x) dx}{(f'(x) - n)^2}. \end{aligned}$$

Если $n = n_1 = [\alpha]$, то последний интеграл имеет вид

$$\int_a^b \frac{d(f'(x) - n)}{(f'(x) - n)^2} = \frac{1}{\alpha - n} - \frac{1}{\beta - n}$$

и, следовательно, не превосходит $(\alpha - n)^{-1} \leq \|\alpha\|^{-1}$, а если $n = n_2 = [\beta] + 1$, то

$$\int_a^b \frac{f''(x) dx}{(f'(x) - n)^2} = - \int_a^b \frac{d(n - f'(x))}{(n - f'(x))^2} = \frac{1}{n - \beta} - \frac{1}{n - \alpha} \leq \|\beta\|^{-1}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} |j(n)| &\leq \frac{\phi_0 H}{2\pi} (\|\alpha\|^{-1} + \|\beta\|^{-1}) + \frac{\lambda \phi_1 H}{2\pi} (\|\alpha\|^{-1} + \|\beta\|^{-1}) + \frac{\phi_0 H}{2\pi} (\|\alpha\|^{-1} + \|\beta\|^{-1}) \\ &= \pi^{-1} (\phi_0 + 0.5\lambda\phi_1) (\|\alpha\|^{-1} + \|\beta\|^{-1}) H. \end{aligned}$$

Вместе с тем, по лемме 9 имеет место оценка

$$|j(n)| \leq \kappa H \sqrt{A}, \quad \kappa = 2\phi_0 + (\pi c_1)^{-1} (2\phi_0 + \phi_0 c_1^{-1} c_2 + \lambda e^{-1} \phi_1).$$

Поскольку одновременное выполнение оценок вида $|j(n)| \leq X + Y$, $|j(n)| \leq W$ ($X, Y, W \geq 0$) влечет неравенство $|j(n)| \leq \min(X, W) + \min(Y, W)$, то

$$\begin{aligned} |j(n)| &\leq \min(\pi^{-1} (\phi_0 + 0.5\lambda\phi_1) \|\alpha\|^{-1} H, \kappa H \sqrt{A}) \\ &\quad + \min(\pi^{-1} (\phi_0 + 0.5\lambda\phi_1) \|\beta\|^{-1} H, \kappa H \sqrt{A}) \leq \nu_2 H (T_a + T_b), \\ \nu_2 &= \kappa + \pi^{-1} (\phi_0 + 0.5\lambda\phi_1), \end{aligned}$$

откуда заключаем, что

$$\begin{aligned}
 \sum_{\alpha-\Delta \leq n \leq \beta+\Delta} j(n) &= \\
 &= \sum_{\alpha_1 \leq n \leq \beta_1} Z(n) + \theta H(\lambda_2 \ln(\beta - \alpha + 2) + \mu_2 + (\nu_1 + 2\nu_2)(T_a + T_b)), \\
 \sum_{a < x \leq b} \varphi(x) \exp(2\pi i f(x)) &= \\
 &= \sum_{\alpha \leq n \leq \beta} Z(n) + \theta H(\varkappa_1 \ln(\beta - \alpha + 2) + \varkappa_2 + \varkappa_3(T_a + T_b)).
 \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned}
 \varkappa_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 = 6.5\pi^{-1}(\phi_0 + \lambda\phi_1) + 2(\pi c_1)^{-1}\phi_0 c_2 \\
 &= \pi^{-1}((6.5 + 2c_1^{-1}c_2)\phi_0 + 6.5\lambda\phi_1) = K_1.
 \end{aligned}$$

Далее, имеем

$$\varkappa_2 = \mu_1 + \mu_2 = (\pi c_1^2)^{-1}((\lambda c_2 + AU^{-1})K + 2\phi_0 c_1 c_2) + (\phi_0 + \lambda\phi_1)(22.5 + 9c_2 A^{-1}) < K_2.$$

Наконец, замечая, что

$$(\kappa_1 + 1)c_2 = \frac{5\pi}{4\sqrt{2}} \sqrt{c_1} + c_2 < 2.8\sqrt{c_1} + c_2,$$

получим

$$\begin{aligned}
 \varkappa_3 &= \nu_1 + 2\nu_2 = 2\kappa + (\pi c_1)^{-1}(\kappa_1 + 1)\phi_0 c_2 + \pi^{-1}(2\phi_0 + \lambda\phi_1) \\
 &= 4\phi_0 + 2\pi^{-1}\phi_0 + (\pi c_1)^{-1}(4\phi_0 + 2\phi_0 c_1^{-1}c_2 + 2\lambda e^{-1}\phi_1 + (\kappa_1 + 1)c_2\phi_0 + \lambda\phi_1 c_1) \\
 &< 2(2 + \pi^{-1})\phi_0 + (\pi c_1)^{-1}((4 + c_2 + 2c_1^{-1}c_2 + 2.8\sqrt{c_1})\phi_0 \\
 &\quad + (2e^{-1} + c_1)\lambda\phi_1) = K_3.
 \end{aligned}$$

Случай 2: α целое, β не целое. Суммируя интегралы $j(n)$ по $\alpha < n \leq \beta_1$, находим

$$\begin{aligned}
 \sum_{\alpha < n \leq \beta_1} j(n) &= \sum_{\alpha < n \leq \beta_1} Z(n) + \theta_1 H(\pi c_1)^{-1}\phi_0 c_2(V_\alpha + V_\beta) \\
 &\quad + \theta_2 H(\pi c_1^2)^{-1}K(\beta - \alpha)AU^{-1}, \\
 V_\alpha &= \sum_{\alpha < n \leq \beta_1} \min(\kappa_1 \sqrt{A}, (n - \alpha)^{-1}) \leq \sum_{\alpha < n \leq \beta_1} (n - \alpha)^{-1} \leq 1 + \ln(\beta - \alpha + 2), \\
 V_\beta &= \sum_{\alpha < n \leq \beta_1} \min(\kappa_1 \sqrt{A}, (\beta - n)^{-1}) \leq (\kappa_1 + 1)T_b + 1 + \ln(\beta - \alpha + 2).
 \end{aligned}$$

Поскольку $T_a = 0$, то

$$\sum_{\alpha < n \leq \beta_1} j(n) = \sum_{\alpha < n \leq \beta_1} Z(n) + \theta H(\lambda_2 \ln(\beta - \alpha + 2) + \mu_2 + \nu_1(T_a + T_b)),$$

где

$$\begin{aligned}
 \lambda_2 &= 2(\pi c_1)^{-1}\phi_0 c_2, \\
 \mu_2 &= (\pi c_1^2)^{-1}(\lambda c_2 K + 2\phi_0 c_1 c_2) = (\pi c_1^2)^{-1}(\lambda c_2 K + 2\phi_0 c_1 c_2), \\
 \nu_1 &= (\pi c_1)^{-1}(\kappa_1 + 1)c_2\phi_0.
 \end{aligned}$$

Предположим, что промежуток $(\beta, \beta + \Delta]$ содержит целое число $n_2 = [\beta] + 1$. Оценивая сверху интеграл $j(n_2)$ подобно тому, как это делалось в случае 1, будем иметь

$$|j(n_2)| \leq (2\pi)^{-1} \phi_0 H ((n_2 - \beta)^{-1} + (n_2 - \alpha)^{-1}) + (2\pi)^{-1} (j_1 + j_2),$$

где

$$j_1 = \int_a^b \frac{|\varphi'(x)| dx}{|f'(x) - n_2|}, \quad j_2 = \int_a^b \frac{|\varphi(x)| f''(x) dx}{(f'(x) - n_2)^2}.$$

Так как α – целое число и $\alpha < \beta < n_2$, то $n_2 - \alpha \geq 1$, $|\beta - n_2| \geq \|\beta\|$; кроме того, при $a \leq x \leq b$ модуль разности $f'(x) - n_2$ ограничен снизу величиной $\|\beta\|$. Следовательно,

$$j_1 \leq \phi_1 H U^{-1} (b - a) \|\beta\|^{-1} \leq \lambda \phi_1 H \|\beta\|^{-1},$$

$$j_2 \leq -\phi_0 H \int_a^b \frac{d(n_2 - f'(x))}{(n_2 - f'(x))^2} = \phi_0 H \left(\frac{1}{n_2 - \beta} - \frac{1}{n_2 - \alpha} \right),$$

так что

$$|j(n_2)| \leq \pi^{-1} H (\phi_0 (n_2 - \beta)^{-1} + 0.5 \lambda \phi_1 \|\beta\|^{-1}) \leq \pi^{-1} (\phi_0 + 0.5 \lambda \phi_1) H \|\beta\|^{-1}.$$

Пользуясь оценкой $|j(n_2)| \leq \kappa H \sqrt{A}$, заключаем, что

$$|j(n_2)| \leq H \min(\pi^{-1} (\phi_0 + 0.5 \lambda \phi_1) \|\beta\|^{-1}, \kappa \sqrt{A}) \leq \nu_2 T_b H = \nu_2 (T_a + T_b) H,$$

$$\nu_2 = \kappa + \pi^{-1} (\phi_0 + 0.5 \lambda \phi_1).$$

Чтобы вычислить интеграл $j(n)$ при $n = \alpha$, снова воспользуемся леммой 8; получим

$$j(\alpha) = 0.5 Z(\alpha) + \theta H (\pi c_1^2)^{-1} (\phi_0 c_1 c_2 \min(\kappa_1 \sqrt{A}, (\beta - \alpha)^{-1}) + (\kappa_2 + \kappa_3) A U^{-1}).$$

Поскольку $\beta - \alpha = f'(b) - f'(a) = (b - a) f''(\xi) \geq c_1 (b - a) A^{-1}$, то минимум в последнем выражении для $j(\alpha)$ не превосходит $c_1 A (b - a)^{-1}$ и

$$j(\alpha) = 0.5 Z(\alpha) + \theta H \mu_3, \quad \mu_3 = (\pi c_1^2)^{-1} (\phi_0 c_2 A (b - a)^{-1} + (\kappa_2 + \kappa_3) A U^{-1}).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \leq n \leq \beta + \Delta} j(n) &= \\ &= \sum_{\alpha \leq n \leq \beta} Z(n) + \theta H (\lambda_2 \ln(\beta - \alpha + 2) + \mu_2 + \mu_3 + (\nu_1 + \nu_2)(T_a + T_b)), \\ \sum_{a < x \leq b} \varphi(x) \exp(2\pi i f(x)) &= \\ &= \sum_{\alpha \leq n \leq \beta} Z(n) + \theta H (\varkappa_1 \ln(\beta - \alpha + 2) + \varkappa_2 + \varkappa_3 (T_a + T_b)), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\varkappa_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 = K_1, \\ \varkappa_2 &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = (\phi_0 + \lambda\phi_1)(22.5 + 9c_2A^{-1}) \\ &\quad + (\pi c_1^2)^{-1}((\lambda c_2 + AU^{-1})K + 2\phi_0c_2(c_1 + A(b-a)^{-1})) + (2\pi)^{-1}\phi_0 \\ &\quad < (\phi_0 + \lambda\phi_1)(22.7 + 9c_2A^{-1}) + (\pi c_1^2)^{-1}((\lambda c_2 + 2AU^{-1})K \\ &\quad + \phi_0c_2(2c_1 + A(b-a)^{-1})) = K_2, \\ \varkappa_3 &= \nu_1 + \nu_2 < K_3.\end{aligned}$$

Эти же неравенства будут выполнены и в случае, когда α не целое, а β – целое число.

Случай 3: оба числа α и β целые. В этом случае имеем

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha < n < \beta} j(n) &= \sum_{\alpha < n < \beta} Z(n) + \theta_1 H(\pi c_1)^{-1} \phi_0 c_2 (V_\alpha + V_\beta) \\ &\quad + \theta_2 H(\pi c_1^2)^{-1} K(\beta - \alpha) AU^{-1}, \\ V_\alpha &= \sum_{\alpha < n < \beta} \min(\kappa_1 \sqrt{A}, (n - \alpha)^{-1}) \leq \sum_{\alpha < n < \beta} (n - \alpha)^{-1} \leq 1 + \ln(\beta - \alpha + 2), \\ V_\beta &= \sum_{\alpha < n < \beta} \min(\kappa_1 \sqrt{A}, (\beta - n)^{-1}) \leq 1 + \ln(\beta - \alpha + 2),\end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha < n < \beta} j(n) &= \sum_{\alpha < n < \beta} Z(n) + \theta H(\lambda_2 \ln(\beta - \alpha + 2) + \mu_2), \\ \lambda_2 &= 2(\pi c_1)^{-1} \phi_0 c_2, \quad \mu_2 = (\pi c_1^2)^{-1} (\lambda c_2 K + 2\phi_0 c_1 c_2).\end{aligned}$$

Так как числа α и β целые, то

$$j(\alpha) = 0.5Z(\alpha) + \theta_1 H\mu_3, \quad j(\beta) = 0.5Z(\beta) + \theta_2 H\mu_3,$$

где $\mu_3 = (\pi c_1^2)^{-1}(\phi_0 c_2 A(b-a)^{-1} + (\kappa_2 + \kappa_3)AU^{-1})$. Сложив полученные выражения, будем иметь

$$\begin{aligned}\sum_{a < x \leq b} \varphi(x) \exp(2\pi i f(x)) &= \sum_{\alpha \leq n \leq \beta} Z(n) + \theta H(\varkappa_1 \ln(\beta - \alpha + 2) + \varkappa_2), \\ \varkappa_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 = K_1, \\ \varkappa_2 &= \mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3 = (\phi_0 + \lambda\phi_1)(22.5 + 9c_2A^{-1}) \\ &\quad + (\pi c_1^2)^{-1}(\lambda c_2 K + 2(\kappa_2 + \kappa_3)AU^{-1} + 2\phi_0 c_2(c_1 + A(b-a)^{-1})) < K_2.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

§ 5. Пример

В задаче об определении числа целых точек в круге

$$x^2 + y^2 \leq R, \quad R \rightarrow +\infty,$$

возникают тригонометрические суммы

$$U(m) = \sum_{0 < x \leq \sqrt{R/2}} \exp(-2\pi i m \sqrt{R - x^2}),$$

где m – натуральное число, $m \leq R^{1/6+1/246} \ln R$ (см. [8, с. 30]). Чтобы приблизить $U(m)$ более короткой суммой, положим в доказанной теореме $\varphi(x) = 1$, $f(x) = -m\sqrt{R-x^2}$, $a = 0$, $b = \sqrt{R/2}$. Поскольку при $a \leq x \leq b$ производные

$$f''(x) = \frac{mR}{(R-x^2)^{3/2}}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{3mRx}{(R-x^2)^{5/2}}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{3mR(R+4x^2)}{(R-x^2)^{7/2}}$$

удовлетворяют неравенствам

$$\frac{m}{\sqrt{R}} \leq f''(x) \leq 2\sqrt{2} \frac{m}{\sqrt{R}}, \quad |f^{(3)}(x)| \leq \frac{12m}{R}, \quad |f^{(4)}(x)| \leq 72\sqrt{2} \frac{m}{R\sqrt{R}},$$

то условия теоремы будут выполнены, если положить $A = \sqrt{R}m^{-1}$, $U = \sqrt{R}$, $H = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2\sqrt{2}$, $c_3 = 12$, $c_4 = 72\sqrt{2}$, $\phi_0 = 1$, $\phi_1 = \phi_2 = 0$. Определяя числа x_n из уравнения

$$\frac{mx_n}{\sqrt{R-x_n^2}} = n,$$

получим

$$x_n = \frac{n\sqrt{R}}{\sqrt{m^2+n^2}}, \quad f(x_n) - nx_n = -\sqrt{R(m^2+n^2)},$$

$$Z(n) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{mR^{1/4}}{(m^2+n^2)^{3/4}} e^{-2\pi i \sqrt{R(m^2+n^2)}}.$$

Так как числа $\alpha = f'(a) = 0$ и $\beta = f'(b) = m$ целые, то $T_a = T_b = 0$ и нам остается вычислить величины K_1 и K_2 . Прежде всего,

$$K_1 = \pi^{-1}\phi_0(6.5 + 2c_1^{-1}c_2) = \pi^{-1}(6.5 + 4\sqrt{2}) < 3.9.$$

Далее, вычислим постоянные k , K и K_2 . Имеем

$$k = \min\left(\frac{c_1}{4c_3}, \sqrt{\frac{c_1}{2c_4}}\right) = \min\left(\frac{1}{48}, \frac{1}{12\sqrt[4]{2}}\right) = \frac{1}{48},$$

$$(c_3 + 0.5kc_4)^2 = \left(12 + \frac{3}{4}\sqrt{2}\right)^2 = 145.125 + 18\sqrt{2},$$

$$\frac{9}{8}c_4 + c_1^{-1}\left(\frac{13}{6}\right)^2 (c_3 + 0.5kc_4)^2 = 81\sqrt{2} + \frac{169}{36}(145.125 + 18\sqrt{2}) = 915.333\dots,$$

$$2c_2k^{-2} = 2^{10} \cdot 3^2 \sqrt{2} > \frac{9}{8}c_4 + c_1^{-1}\left(\frac{13}{6}\right)^2 (c_3 + 0.5kc_4)^2,$$

$$K = 5\phi_0c_3 + \frac{1}{2}\lambda \cdot 2c_2k^{-2} = 60 + 2^{11} \cdot 3^2 \sqrt{2} = 26126.784\dots$$

Считая R достаточно большим (таким, что $9c_2A^{-1} = 18m\sqrt{2/R} < 0.1$), находим

$$K_2 \leq \frac{1}{\pi} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} 2\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{R}}{m} \frac{1}{\sqrt{R}} \right) K + 4\sqrt{2} \left(1 + \frac{\sqrt{R}}{m} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{R}} \right) \right) + 22.6$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1}{m} \right) K + \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{m} \right) + 22.6.$$

При $m \geq 1$ из последней оценки следует

$$K_2 < \frac{4}{\pi} K + \frac{4\sqrt{2}}{\pi} (\sqrt{2} + 1) + 22.6 = 33292.60 \dots < 3.33 \cdot 10^4,$$

$$U(m) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} m R^{1/4} \sum_{0 \leq n \leq m} \frac{c(n) e^{-2\pi i \sqrt{R(m^2+n^2)}}}{(m^2+n^2)^{3/4}} + \theta(3.9 \ln(m+2) + 3.33 \cdot 10^4).$$

Если m достаточно велико (например, если m растёт вместе с R), то

$$K_2 < \frac{2}{\pi} K + \frac{4\sqrt{2}}{\pi} + 22.7 = 16658.501 \dots < 1.67 \cdot 10^4 < 0.1 \ln(m+2),$$

$$U(m) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} m R^{1/4} \sum_{0 \leq n \leq m} \frac{c(n) e^{-2\pi i \sqrt{R(m^2+n^2)}}}{(m^2+n^2)^{3/4}} + 4\theta \ln(m+2).$$

При этом в каждом из случаев $c(0) = c(m) = 0.5$ и $c(n) = 1$ для $1 \leq n \leq m-1$.

Список литературы

1. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, "Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes", *Acta Math.*, **41**:1 (1917), 119–196.
2. И. М. Виноградов, "О среднем значении числа классов чисто коренных форм отрицательного определителя", *Сообщения Харьк. матем. об-ва*, **16** (1918), 10–38.
3. J. G. van der Corput, "Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem", *Math. Ann.*, **87**:1–2 (1922), 39–65.
4. A. A. Karatsuba, "Approximation of exponential sums by shorter ones", *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, **97**:1–3 (1987), 167–178.
5. M. Fleischhauer, W. P. Schleich, "Revivals made simple: Poisson summation formula as a key to the revivals in the Jaynes–Cummings model", *Phys. Rev. A*, **47**:5 (1993), 4258–4269.
6. E. A. Karatsuba, "Approximation of sums of oscillating summands in certain physical problems", *J. Math. Phys.*, **45**:11 (2004), 4310–4321.
7. É. Chassande-Mottin, A. Pai, "Best chirplet chain: Near-optimal detection of gravitational wave chirps", *Phys. Rev. D*, **73** (2006), 042003 (23 pages).
8. А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, 2-е изд., Наука, М., 1983; англ. пер.: A. Karatsuba, *Basic analytic number theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

А. А. КАРАЦУБА (А. А. KARATSUBA)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: karatsuba@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
31.05.2006

М. А. КОРОЛЁВ (М. А. KOROLEV)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: hardy_ramanujan@mail.ru