Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Гриценко, Задача Хуа Ло-кена с простыми числами, представимыми заданными квадратичными формами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 3, 45–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/im1137>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 13:26:12

УДК 511

С. А. Гриценко

Задача Хуа Ло-кена с простыми числами, представимыми заданными квадратичными формами

Решена задача Хуа Ло-кена с простыми числами, представимыми заданными примитивными положительно определенными бинарными квадратичными формами, дискриминанты которых совпадают с дискриминантами мнимых квадратичных полей, в которых квадратичные формы распадаются на линейные множители.

Библиография: 10 наименований.

Введение

В монографии [1] излагается теория проблемы Варинга–Гольдбаха, в частности выводится асимптотическая формула для числа решений уравнения

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 = N \quad (1)$$

в простых числах $p_1, \dots, p_5$.

Задачу изучения уравнения (1) будем называть задачей Хуа Ло-кена.

В настоящей статье выводится асимптотическая формула для числа решений уравнения (1) в простых числах $p_1, \dots, p_5$, на которые наложены ограничения, состоящие в том, что каждое простое число p_j , $j = 1, \dots, 5$, представляется некоторой заданной бинарной квадратичной формой.

Заметим, что если эти квадратичные формы являются одноклассными, то задача сводится по существу к решению задачи Хуа Ло-кена с простыми числами, лежащими в определенных арифметических прогрессиях. В случае, когда разности этих арифметических прогрессий являются константами или растут с ростом N не слишком быстро, решение такой задачи мало чем отличается от решения классической задачи Хуа Ло-кена. То же относится и к задаче получения асимптотической формулы для числа решений уравнения (1) в простых числах, представимых всеми квадратичными формами заданных дискриминантов.

В случае, если квадратичные формы, представляющие простые числа, являются многоклассными, вопрос о представимости натуральных чисел такими формами не может быть сведен к вопросу о попадании этих чисел в какие-то классы вычетов по какому-либо модулю (в связи с этим см. [2, с. 271]).

Поэтому для решения задачи, помимо информации о распределении простых чисел, представимых квадратичными формами, в арифметических прогрессиях требуются оценки некоторых специальных тригонометрических сумм.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (грант РНП.2.1.1.3263) и Белгородского государственного университета (грант ВГК 007-04).

Далее под квадратичными формами мы будем понимать примитивные положительно определенные бинарные квадратичные формы, дискриминанты которых совпадают с дискриминантами мнимых квадратичных полей, в которых эти формы разлагаются на линейные множители.

Дискриминанты квадратичных форм везде предполагаются константами, хотя из доказательств основной теоремы и лемм видно, что имеется возможность некоторого их роста вместе с ростом параметра N .

В дальнейшем будут использоваться следующие обозначения: $p, p_1, p_2, \dots$ – простые числа; $\mathcal{K}$ – мнимое квадратичное поле с дискриминантом $\delta_{\mathcal{K}}$; $D = |\delta_{\mathcal{K}}|$; A, B, C – целые идеалы $\mathbb{Z}_{\mathcal{K}}$; P – простые идеалы $\mathbb{Z}_{\mathcal{K}}$; $N(A)$ – норма целого идеала A кольца $\mathbb{Z}_{\mathcal{K}}$; $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ – классы идеалов $\mathbb{Z}_{\mathcal{K}}$;

$$\chi(q; k, l) = \begin{cases} 1, & \text{если } q \equiv l \pmod{k}, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$S(m, q) = \sum_{l=1}^q \exp\left\{2\pi i \frac{ml^2}{q}\right\}, \quad S(m, n, q) = \sum_{l=1}^q \exp\left\{2\pi i \frac{ml^2 + nl}{q}\right\}$$

– суммы Гаусса; $\sum_{a=0}^{*b-1}$ обозначает суммирование по a , взаимно простым с b , в указанных пределах;

$$S'(a, q) = \sum_{l=1}^q \exp\left\{2\pi i \frac{a}{q} l^2\right\};$$

$$S''_j(a, q) = \sum_{l=1}^q \chi_j(l) \exp\left\{2\pi i \frac{a}{q} l^2\right\},$$

где $\chi_j(l)$, $j = 1, \dots, 5$, – характеры квадратичных полей, в которых квадратичные формы Q_j разлагаются на линейные множители; h_j – число классов эквивалентности квадратичных форм того же дискриминанта, что форма Q_j , $j = 1, \dots, 5$;

$$S_Q(\alpha) = \sum'_{p \leq \sqrt{N}} e^{2\pi i \alpha p^2},$$

где штрих означает, что суммирование идет по простым числам, представимым квадратичной формой Q ; $\pi_{\mathcal{C}}(x, q, l, \mathcal{C})$ – число простых идеалов $\mathbb{Z}_{\mathcal{K}}$ из класса $\mathcal{C}$, нормы которых не превосходят x и сравнимы с l по модулю q ; $\pi_Q(x, q, l)$ – число простых чисел, не превосходящих x , представимых квадратичной формой Q и сравнимых с l по модулю q .

§ 1. Лемма о квадратичных формах и формулировка основного результата

ЛЕММА 1. Пусть $Q(x, y)$ – бинарная положительно определенная примитивная квадратичная форма, разлагающаяся в поле $\mathcal{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ на линейные множители. Тогда в кольце целых алгебраических чисел поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ существует целый идеал A с целым базисом ω_1, ω_2 такой, что $Q(x, y) = \frac{N(x\omega_1 + y\omega_2)}{N(A)}$. Квадратичные формы эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им идеалы с указанным свойством эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [2, с. 160], [3, с. 215–216].

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия леммы 1 и идеал A принадлежит классу идеалов $\mathcal{A}$. Тогда квадратичная форма $Q(x, y)$ представляет те и только те простые числа p , которые являются нормами простых идеалов из класса $\mathcal{A}^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P \in \mathcal{A}^{-1}$ – простой идеал, $N(P) = p$. Тогда $PA = (\xi)$, где ξ – число из идеала A , $\xi = x\omega_1 + y\omega_2$.

Взяв норму от обеих частей равенства $PA = (\xi)$, получим

$$Q(x, y) = \frac{N(x\omega_1 + y\omega_2)}{N(A)} = p.$$

Обратно, пусть $Q(x_0, y_0) = p$, $\xi_0 = x_0\omega_1 + y_0\omega_2$. Разделим идеал (ξ_0) на A : $(\xi_0) = AB$, где B – целый идеал.

Очевидно, $B \in \mathcal{A}^{-1}$. Кроме того, по предположению $N(B) = \frac{N(\xi_0)}{N(A)} = p$, следовательно, B – простой идеал.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполнены условия леммы 1, форме Q соответствует идеал A из класса $\mathcal{A}$, l и q – целые взаимно простые числа. Пусть

$$\alpha(Q) = \begin{cases} 2, & \text{если } A = A^{-1}, \\ 1, & \text{если } A \neq A^{-1}. \end{cases}$$

Тогда

$$\pi_Q(x, q, l) = \alpha(Q)^{-1} \pi(x, q, l, A^{-1}) + O(\sqrt{x}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть p – простое число, $p \nmid \delta_K$ и p представляется формой Q . Докажем, что $\alpha(Q)$ равно числу простых идеалов из класса $\mathcal{A}^{-1}$ с нормой p .

Хорошо известно (см., например, [4, с. 232]), что (p) представляется в виде произведения простых идеалов $(p) = PP_1$, $P \neq P_1$, $N(P) = p$, $N(P_1) = p$, причем такое представление единственно, и других идеалов с нормой p нет.

В силу следствия 1 по крайней мере один из идеалов P , P_1 (например, P) принадлежит $\mathcal{A}^{-1}$. Тогда, очевидно, $P_1 \in \mathcal{A}$.

Если $A \neq A^{-1}$, то $P_1 \notin \mathcal{A}^{-1}$ и существует ровно один простой идеал из $\mathcal{A}^{-1}$ с нормой p .

Если же $A = A^{-1}$, то классу $\mathcal{A}^{-1}$ принадлежат ровно два простых идеала с нормой p .

Теперь наше утверждение следует из того, что в классе $\mathcal{A}^{-1}$ не более $\sqrt{x}$ простых идеалов P таких, что $N(P) = p^2$, $p^2 \leq x$, а число простых чисел, делящих δ_K , конечно.

Сформулируем основной результат статьи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $N \equiv 5 \pmod{24}$, и пусть $b > 0$ – произвольная постоянная. Тогда для числа $I(N)$ решений уравнения

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 = N$$

в простых числах $p_1, \dots, p_5$, каждое из которых представимо заданной бинарной квадратичной формой $Q_j(x, y)$, $j = 1, \dots, 5$, справедлива формула

$$I(N) = \frac{1}{h_1 \dots h_5 \alpha(Q_1) \dots \alpha(Q_5)} \sigma(N, D_1, \dots, D_5) H(N) + O(N^{\frac{3}{2}} \ln^{-b} N),$$

где

$$H(N) = \int_{-\infty}^{+\infty} J^5(z) e^{-2\pi i z N} dz, \quad J(z) = \int_2^{\sqrt{N}} \frac{e^{-2\pi i z x^2}}{\ln x} dx,$$

$$\sigma(N, D_1, \dots, D_5) = \sum_{q=1}^{\infty} \gamma(q, N, D_1, \dots, D_5),$$

$$\gamma(q, N, D_1, \dots, D_5) = \sum_{a=0}^{q-1} \prod_{j=1}^5 \left(\frac{S'(a, q)}{\varphi(q)} + \frac{\chi(q; D_j, 0) S_j''(a, q)}{\varphi(q)} \right) \exp \left\{ -2\pi i \frac{a}{q} N \right\},$$

$$S'(a, q) = \sum_{l=0}^{q-1} \exp \left\{ 2\pi i \frac{a}{q} l^2 \right\}, \quad S_j''(a, q) = \sum_{l=0}^{q-1} \chi_j(l) \exp \left\{ 2\pi i \frac{a}{q} l^2 \right\},$$

$\chi_j(l)$, $j = 1, \dots, 5$, – характеры квадратичных полей, в которых квадратичные формы Q_j разлагаются на линейные множители. При этом $H(N) = \frac{\pi^2}{24} \frac{N^{\frac{3}{2}}}{\ln^5 \sqrt{N}} (1 + O(\frac{\ln \ln N}{\ln N}))$. Постоянная в знаке O зависит лишь от b .

Доказательство проводится круговым методом. Кроме того, существенную роль играет функциональное уравнение ряда Дирихле специального вида из [5], на котором основана асимптотическая формула из [6].

Для доказательства теоремы 1 нам потребуются следующие леммы.

§ 2. Леммы для вычисления интеграла по большим дугам

ЛЕММА 2. Справедливы следующие утверждения:

- 1) если $(q_1, q_2) = 1$, то $S(a, q_1 q_2) = S(a q_2, q_1) S(a q_1, q_2)$;
- 2) пусть $d = (m, q)$, тогда

$$S(m, n, q) = \begin{cases} d S(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}, \frac{q}{d}), & \text{если } d \mid n, \\ 0, & \text{если } d \nmid n; \end{cases}$$

- 3) если $(m, q) = 1$, то $|S(m, n, q)| \leq 2\sqrt{q}$;
- 4) пусть $(q, 2) = 1$, тогда

$$S(1, q) = \begin{cases} \sqrt{q}, & \text{если } q \equiv 1 \pmod{4}, \\ i\sqrt{q}, & \text{если } q \not\equiv 1 \pmod{4}; \end{cases}$$

- 5) пусть $(a, 2) = 1$, тогда

$$S(a, 2^l) = \begin{cases} 0, & \text{если } l = 1, \\ 2^{l/2} (1 + i^a), & \text{если } l \text{ четное}, \\ 2^{(l+1)/2} e^{\pi a/4}, & \text{если } l \text{ нечетное}. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см., например, в [7].

ЛЕММА 3. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) *если $(q_1, q_2) = 1$, то $S'(a, q_1 q_2) = S'(a q_2, q_1) S'(a q_1, q_2)$;*
- 2) *пусть $p > 2$ – простое число, $(a, p) = 1$, тогда*

$$S'(a, p^l) = \begin{cases} S(a, p) - 1, & \text{если } l = 1, \\ 0, & \text{если } l > 1; \end{cases}$$

- 3) *пусть $(a, 2) = 1$, тогда*

$$S'(a, 2^l) = \begin{cases} -1, & \text{если } l = 1, \\ 2i^a, & \text{если } l = 2, \\ 4e^{\pi i/4}, & \text{если } l = 3, \\ 0, & \text{если } l > 3. \end{cases}$$

Лемма 3 прямо следует из леммы 2.

ЛЕММА 4. *Пусть $(a, q) = 1$, $(a, Dk) = 1$, D – модуль характера χ квадратичного поля, $\varepsilon > 0$ – произвольно малое число. Справедливы оценки*

$$S'(a, q) \ll q^{0.5+\varepsilon}, \quad S''(a, Dk) \ll (Dk)^{0.5+\varepsilon}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 2 и 3 следует, что

$$S'(a, q) \ll \sqrt{q} \prod_{p|q} 2 \ll q^{0.5+\varepsilon}.$$

Оценим $S''(a, Dk)$. Пусть $k = q_1 q_2$, где $(D, q_2) = 1$, а q_1 – либо 1, либо натуральное число, все простые делители которого делят D . Тогда

$$\begin{aligned} S''(a, Dq_1 q_2) &= \sum_{l=1}^{Dq_1 q_2} \chi(l) \exp \left\{ 2\pi i \frac{al^2}{Dq_1 q_2} \right\} \\ &= \chi(q_2) S'(a D q_1, q_2) \sum_{l=1}^{Dq_1} \chi(l) \exp \left\{ 2\pi i \frac{a q_2 l^2}{D q_1} \right\}. \end{aligned}$$

Пользуясь оценкой суммы $S'(a D q_1, q_2)$, приходим к неравенству

$$S''(a, Dq_1 q_2) \ll q_2^{0.5+\varepsilon} \left| \sum_{l=1}^{Dq_1} \chi(l) \exp \left\{ 2\pi i \frac{a q_2 l^2}{D q_1} \right\} \right|.$$

Далее,

$$\sum_{l=1}^{Dq_1} \chi(l) \exp \left\{ 2\pi i \frac{a q_2 l^2}{D q_1} \right\} = \sum_{l=1}^D \chi(l) \exp \left\{ 2\pi i \frac{a q_2 l^2}{D q_1} \right\} S(a q_2 D, 2 a q_2 l, q_1). \quad (2)$$

В силу леммы 2 имеем $S(a q_2 D, 2 a q_2 l, q_1) = 0$, если $(D, q_1) \nmid 2l$; в то же время $(D, l) = 1$, поэтому без ограничения общности можно предположить, что $(D, q_1) \mid 2$, т. е. либо $q_1 = 1$, либо $q_1 = 2$.

Пусть $D = 2^\alpha D_1$, $0 \leq \alpha \leq 3$, D_1 – нечетное бесквадратное число. Справедливо тождество

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{Dq_1} \chi(l) \exp\left\{2\pi i \frac{aq_2 l^2}{Dq_1}\right\} \\ &= \sum_{l=1}^{2^\alpha q_1} \chi(l; 2^\alpha) \exp\left\{2\pi i \frac{r_2 l^2}{2^\alpha q_1}\right\} \prod_{p|D_1} \sum_{l=1}^p \chi(l; p) \exp\left\{2\pi i \frac{r_p l^2}{p}\right\}, \end{aligned}$$

где $(r_2, 2) = 1$, $(r_p, p) = 1$, $\chi(l; m)$ – характер χ по модулю m .

Таким образом, мы получили неравенство

$$\left| \sum_{l=1}^{Dq_1} \chi(l) \exp\left\{2\pi i \frac{aq_2 l^2}{Dq_1}\right\} \right| \leq 16 \prod_{p|D_1} |S_p|,$$

где

$$S_p = \sum_{l=1}^p \chi(l; p) \exp\left\{2\pi i \frac{r_p l^2}{p}\right\}.$$

Оценим S_p . Имеем

$$\begin{aligned} S_p &= \frac{1}{p-1} \sum_{y=1}^{p-1} \sum_{l=1}^p \chi(l; p) \exp\left\{2\pi i \frac{r_p l^2 y^2}{p}\right\}, \\ |S_p|^2 &\leq \frac{1}{p-1} \sum_{y=1}^{p-1} \left| \sum_{l=1}^p \chi(l; p) \exp\left\{2\pi i \frac{r_p l^2 y^2}{p}\right\} \right|^2 \\ &\leq \frac{2}{p-1} \sum_{y=1}^p \left| \sum_{l=1}^p \chi(l; p) \exp\left\{2\pi i \frac{r_p l^2 y}{p}\right\} \right|^2 \\ &\leq \frac{2}{p-1} \sum_{l_1=1}^{p-1} \sum_{l_2=1}^{p-1} \sum_{y=1}^p \exp\left\{2\pi i \frac{r_p (l_1^2 - l_2^2) y}{p}\right\} \leq 4p, \end{aligned}$$

следовательно, $|S_p| \leq 2\sqrt{p}$.

Получено неравенство

$$S''(a, Dk) \ll 2^\sigma \sqrt{Dk} q_2^\varepsilon,$$

где σ – количество различных простых делителей числа D_1 .

Пользуясь известным неравенством $2^\sigma \ll (D_1)^\varepsilon$, получаем требуемую оценку для $S''(a, Dk)$.

ЛЕММА 5. Пусть l и q – целые взаимно простые числа, $1 \leq q \leq \ln^{c_1} x$, $c_1 > 1$, $\mathcal{C}$ – класс идеалов кольца $\mathbb{Z}_K$. Тогда справедлива асимптотическая формула

$$\pi_{\mathcal{C}}(x, q, l, \mathcal{C}) = \frac{1 + \chi(q; D, 0) \chi_1(l)}{h\varphi(q)} \operatorname{Li} x + O\left(x \exp\left\{-c_0 (\ln x)^{\frac{1}{20c_1}}\right\}\right),$$

где $c_0 = c_0(c_1) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [6].

§ 3. Леммы для оценки интеграла по малым дугам

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть A – идеал в $\mathbb{Z}_K$, тогда функция $\mu_K(A)$ определяется равенством

$$\mu_K(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } A = \mathbb{Z}_K, \\ (-1)^r, & \text{если } A = P_1 P_2 \cdots P_r, \\ 0, & \text{если } \exists P, P^2 \mid A. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть A – идеал в $\mathbb{Z}_K$, тогда функция $\Lambda_K(N(A))$ определяется равенством

$$\Lambda_K(N(A)) = \begin{cases} \ln N(P), & \text{если } A = P^k, k \geq 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ЛЕММА 6. При $\operatorname{Re} s > 1$, $u \geq 1$ справедливо тождество

$$\begin{aligned} & \sum_{u < N(A)} X(A) \Lambda_K(N(A)) N^{-s}(A) \\ &= \sum_{N(C) \leq u} X(C) \mu_K(C) N^{-s}(C) \sum_A X(A) (\ln N(A)) N^{-s}(A) \\ & \quad - \sum_{N(C) \leq u} X(C) \mu_K(C) N^{-s}(C) \\ & \quad \times \sum_{N(B) \leq u} X(B) \Lambda_K(N(B)) N^{-s}(B) \sum_A X(A) N^{-s}(A) \\ & \quad - \sum_{u < N(A)} X(A) \Lambda_K(N(A)) N^{-s}(A) \sum_{u < N(B)} X(B) \sum_{\substack{C \mid B \\ N(C) \leq u}} \mu_K(C) N^{-s}(B). \end{aligned} \tag{3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\operatorname{Re} s > 1$. Справедливо тождество

$$0 = \left(L'(s, X) - \frac{L'(s, X)}{L(s, X)} L(s, X) \right) \sum_{N(C) \leq u} X(C) \mu_K(C) N^{-s}(C),$$

из которого следует, что

$$\begin{aligned} 0 &= - \sum_{N(C) \leq u} X(C) N^{-s}(C) \mu_K(C) \sum_A X(A) (\ln N(A)) N^{-s}(A) \\ & \quad + \sum_B X(B) \Lambda_K(N(B)) N^{-s}(B) L(s, X) \sum_{N(C) \leq u} X(C) \mu_K(C) N^{-s}(C). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} & \sum_B X(B) \Lambda_K(N(B)) N^{-s}(B) L(s, X) \sum_{N(C) \leq u} X(C) \mu_K(C) N^{-s}(C) \\ &= \sum_{N(C) \leq u} X(C) \mu_K(C) N^{-s}(C) \sum_{N(B) \leq u} X(B) \Lambda_K(N(B)) N^{-s}(B) \sum_A X(A) N^{-s}(A) \\ & \quad + \sum_{N(B) \leq u} X(B) \Lambda_K(N(B)) N^{-s}(B) L(s, X) \sum_{N(C) \leq u} X(C) \mu_K(C) N^{-s}(C). \end{aligned}$$

Теперь утверждение леммы следует из тождества

$$L(s, X) \sum_{N(C) \leq u} X(C) \mu_{\mathcal{K}}(C) N^{-s}(C) = 1 + \sum_{u < N(A)} X(A) N^{-s}(A) \sum_{\substack{C|A \\ N(C) \leq u}} \mu_{\mathcal{K}}(C).$$

Лемма доказана.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, и пусть

$$\begin{aligned} a_X(n) &= \sum_{N(A)=n} X(A), & b_X(n) &= \sum_{N(A)=n} X(A) \sum_{\substack{C|A \\ N(C) \leq u}} \mu_{\mathcal{K}}(C), \\ c_X(n) &= \sum_{N(A)=n} X(A) \mu_{\mathcal{K}}(A). \end{aligned}$$

Заметим, что из известных свойств идеалов $\mathbb{Z}_{\mathcal{K}}$ (см., например, [4, с. 232]) прямо следует, что

$$|a_X(n)| \ll \tau(n), \quad |b_X(n)| \ll \tau^2(n), \quad |c_X(n)| \ll \tau(n).$$

Перепишем тождество (3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{u < n} a_X(n) \Lambda_{\mathcal{K}}(n) n^{-s} &= \sum_{x \leq u} c_X(x) x^{-s} \sum_l (\ln l) a_X(l) l^{-s} \\ &\quad - \sum_{x \leq u} c_X(x) x^{-s} \sum_{y \leq u} a_X(y) \Lambda_{\mathcal{K}}(y) y^{-s} \sum_n a_X(n) n^{-s} \\ &\quad - \sum_{u < m} a_X(m) \Lambda_{\mathcal{K}}(m) m^{-s} \sum_{u < n} b_X(n) n^{-s}. \end{aligned} \quad (4)$$

ЛЕММА 7. Пусть $1 \leq u \leq N$, где $N \in \mathbb{N}$. Тогда для любой комплекснозначной функции $f(x)$ справедливо тождество

$$\sum_{u < n \leq N} a_X(n) \Lambda_{\mathcal{K}}(n) f(n) = W_1 - W_2 - W_3,$$

где

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_{x \leq u} c_X(x) \sum_{l \leq Nx^{-1}} (\ln l) a_X(l) f(xl), \\ W_2 &= \sum_{x \leq u} c_X(x) \sum_{y \leq u} a_X(y) \Lambda_{\mathcal{K}}(y) \sum_{n \leq N(xy)^{-1}} a_X(n) f(xyn), \\ W_3 &= \sum_{u < m \leq Nu^{-1}} a_X(m) \Lambda_{\mathcal{K}}(m) \sum_{u < n \leq Nm^{-1}} b_X(n) f(mn). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма выводится из тождества (3) тем же рассуждением, которым доказывается теорема 1 в монографии [8, с. 62].

ЛЕММА 8. Пусть $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, $(a, q) = 1$, $q \geq 1$, $|\theta| \leq 1$. Тогда при любом β , $U > 0$, $Z \geq 1$ имеем

$$\sum_{x=1}^Z \min \left(U^2, \frac{1}{\|\alpha x + \beta\|^2} \right) \leq 10 \left(\frac{Z}{q} + 1 \right) U^2 \left(1 + \frac{q}{U} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что при любом β_1

$$\sum_{x=1}^q \min\left(U^2, \frac{1}{\|\alpha x + \beta_1\|^2}\right) \leq 10U^2 \left(1 + \frac{q}{U}\right).$$

По условию имеем

$$\alpha x + \beta_1 = \frac{ax + [\beta_1 q] + \theta_1(x)}{q},$$

где $\theta_1(x) = \frac{\theta x}{q} + \{\beta_1 q\}$, $|\theta_1(x)| < 2$.

Поскольку a и q – взаимно простые числа, то числа $ax + [\beta_1 q]$ пробегает вместе с x полную систему вычетов по модулю q , следовательно,

$$\sum_{x=1}^q \min\left(U^2, \frac{1}{\|\alpha x + \beta_1\|^2}\right) \leq 5U^2 + \sum_{3 \leq y \leq \frac{q}{2}} \min\left(U^2, \frac{2q^2}{(y-2)^2}\right).$$

Теперь если $q \leq U$, то

$$\sum_{x=1}^q \min\left(U^2, \frac{1}{\|\alpha x + \beta_1\|^2}\right) \leq 5U^2 + 4q^2 < 10U^2 \left(1 + \frac{q}{U}\right).$$

Если же $U < q$, то

$$\sum_{x=1}^q \min\left(U^2, \frac{1}{\|\alpha x + \beta_1\|^2}\right) \leq 5U^2 + Uq + 2q^2 \sum_{\frac{q}{U} < y \leq \frac{q}{2}} \frac{1}{(y-2)^2} < 10U^2 \left(1 + \frac{q}{U}\right).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Пусть $f(x)$ – действительная функция на $[a, b]$, $q_1 \leq b - a$, q_1 – натуральное число. Тогда

$$\left| \sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i f(n)} \right| \ll \frac{b-a}{\sqrt{q_1}} + \sqrt{\frac{b-a}{q_1} \sum_{r=1}^{q_1-1} \left| \sum_{a < n \leq b-r} e^{2\pi i g(n)} \right|},$$

где $g(n) = f(n+r) - f(n)$, а постоянная в знаке $\ll$ является абсолютной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [9, с. 26].

ЛЕММА 10. Пусть $c > 0$ – произвольная постоянная, и пусть

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad q \geq 1, \quad |\theta| \leq 1.$$

Тогда существуют положительные постоянные c_1 и c_2 такие, что при $\ln^{c_1} N < q \leq N \ln^{-c_2} N$ справедлива оценка

$$|S_Q(\alpha)| \ll \sqrt{N} \ln^{-c} N.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 2 имеем

$$\begin{aligned} S_Q(\alpha) &= \frac{1}{\alpha(Q)} \sum_{\substack{P \in \mathcal{A}^{-1} \\ N(P) \leq \sqrt{N}}} e^{2\pi i \alpha N^2(P)} + O(\sqrt[4]{N}) \\ &= \frac{1}{\alpha(Q)} \sum_X \bar{X}(\mathcal{A}) \sum_{N(P) \leq \sqrt{N}} X(P) e^{2\pi i \alpha N^2(P)} + O(\sqrt[4]{N}), \end{aligned}$$

где $\mathcal{A}$ – класс идеалов $\mathbb{Z}_K$, соответствующий квадратичной форме Q .

Применим формулу частного суммирования и лемму 6:

$$\begin{aligned} |S_Q(\alpha)| &\ll \sum_X \left| \sum_{u < n \leq \sqrt{N_1}} a_X(n) \Lambda_K(n) e^{2\pi i \alpha n^2} \right| + \sqrt[4]{N} + u \\ &\ll \sum_X (W_1(X) + W_2(X) + W_3(X)) + \sqrt[4]{N} + u, \end{aligned}$$

где N_1 – то число из промежутка $(1, N]$, при котором модуль суммы максимален,

$$\begin{aligned} W_1(X) &= \sum_{x \leq u} \tau(x) \left| \sum_{l \leq \sqrt{N_1} x^{-1}} (\ln l) a_X(l) e^{2\pi i \alpha x^2 l^2} \right|, \\ W_2(X) &= \sum_{x \leq u} \tau(x) \sum_{y \leq u} \tau(y) \Lambda(y) \left| \sum_{n \leq \sqrt{N_1} (xy)^{-1}} a_X(n) e^{2\pi i \alpha x^2 l^2} \right|, \\ W_3(X) &= \sum_{u < m \leq \sqrt{N_1} u^{-1}} \tau(m) \Lambda(m) \left| \sum_{u < n \leq \sqrt{N_1} m^{-1}} b_X(n) e^{2\pi i \alpha m^2 n^2} \right|. \end{aligned}$$

Пусть $u = \ln^{c_3} N$, где c_3 – положительная постоянная, точное значение которой мы выберем позже.

Сначала получим оценку суммы $W_3(X)$. Промежутки суммирования по m и n разобьем по геометрическим прогрессиям так, что

$$W_3(X) \ll W_3(X, M, K) \ln^2 N,$$

где

$$W_3(X, M, K) = \sum_{M < m \leq 2M} \tau(m) \Lambda(m) \left| \sum_{\substack{K < n \leq K_1 \\ n \leq \sqrt{N_1} m^{-1}}} b_X(n) e^{2\pi i \alpha m^2 n^2} \right|,$$

а M, K, K_1 – числа, удовлетворяющие условиям $u < M \leq \sqrt{N_1} u^{-1}$, $u < K \leq \sqrt{N_1} u^{-1}$, $K < K_1 \leq 2K$ и такие, что сумма $W_3(X, M, K)$ максимальна.

Если $MK \leq \sqrt{N} \ln^{-7-c} N$, то тривиальная оценка $W_3(X, M, K)$ приводит к неравенству

$$W_3(X) \ll \sqrt{N} \ln^{-c} N,$$

поэтому в дальнейшем считаем, что выполняется неравенство $MK > \sqrt{N} \times \ln^{-7-c} N$.

Применяя неравенство Коши, получаем

$$(W_3(X, M, K))^2 \ll M^2 K \ln^{20} N + M \ln^5 N \sum_{j=1}^K \sum_{K < n \leq K_1} \tau^2(n) \tau^2(n+j) \left| \sum_{\substack{M < m \leq 2M \\ m \leq \sqrt{N_1} (n+j)^{-1}}} e^{2\pi i j (2n+j) m^2} \right|.$$

Возведем обе части неравенства в квадрат и еще раз воспользуемся неравенством Коши:

$$\begin{aligned} (W_3(X, M, K))^4 &\ll (MK)^4 (K^{-2} + M^{-1}) \ln^{40} N \\ &\quad + M^2 K^2 \sum_{j=1}^K \sum_{n \leq 5K} \sum_{r \leq 2M} \min\left(M, \frac{1}{\|\alpha j n r\|}\right) \ln^{40} N \\ &\ll (MK)^4 (K^{-2} + M^{-1}) \ln^{40} N \\ &\quad + M^2 K^2 \sum_{n \leq 10MK^2} \tau_3(n) \min\left(M, \frac{1}{\|\alpha n\|}\right) \ln^{40} N. \end{aligned}$$

Далее,

$$\left(\sum_{n \leq 10MK^2} \tau_3(n) \min\left(M, \frac{1}{\|\alpha n\|}\right) \right)^2 \ll V \sum_{n \leq 10MK^2} \tau_3^2(n),$$

где $V = \sum_{n \leq 10MK^2} \min(M^2, \frac{1}{\|\alpha n\|^2})$. В силу леммы 8 имеем

$$W_3(X, M, K) \ll MK \left(\frac{1}{K^2} + \frac{1}{\sqrt{M}} + \frac{1}{\sqrt{q}} + \frac{\sqrt{q}}{MK} \right) \ln^{11} N.$$

Отсюда и из неравенств $\ln^{c_1} N < q \leq N \ln^{-c_2} N$, $K > u = \ln^{c_3} N$, $M > u = \ln^{c_3} N$, $\sqrt{N} \ln^{-7-c} < MK \leq \sqrt{N}$ следует, что

$$W_3(X, M, K) \ll \sqrt{N} \left((\ln N)^{\frac{22-c_1}{2}} + (\ln N)^{11-\frac{c_3}{2}} + (\ln N)^{\frac{36+2c-c_2}{2}} \right).$$

Пусть выполняются неравенства

$$c_1 \geq 2c + 26, \quad c_2 \geq 4c + 40, \quad c_3 \geq 2c + 26. \quad (5)$$

Тогда справедливы оценки

$$W_3(X, M, K) \ll \sqrt{N} \ln^{-c-2} N, \quad W_3(X) \ll \sqrt{N} \ln^{-c} N. \quad (6)$$

Переходим к оценке сумм $W_1(X)$ и $W_2(X)$. Они оцениваются одинаково. Оценим $W_2(X)$.

Рассмотрим внутреннюю сумму

$$S_2(\beta) = \sum_{n \leq N_2} a_X(n) e^{2\pi i \beta n^2} = \sum_{N(A) \leq N_2} X(A) e^{2\pi i \beta N^2(A)},$$

где $N_2 = \sqrt{N_1} (xy)^{-1}$, $1 \leq x, y \leq u$, $\beta = \alpha x^2 y^2$.

Имеем

$$S_2(\beta) = \sum_{\mathcal{B}} X(\mathcal{B}) \sum_{\substack{A \in \mathcal{B} \\ N(A) \leq N_2}} e^{2\pi i \beta N^2(A)} = \sum_{\mathcal{B}} X(\mathcal{B}) \sum_{\substack{t, v \\ Q_{\mathcal{B}}(t, v) \leq N_2}} e^{2\pi i \beta Q_{\mathcal{B}}^2(t, v)},$$

где $Q_{\mathcal{B}}(t, v)$ – квадратичная форма, отвечающая классу идеалов $\mathcal{B}$ (см. [3, с.215, теорема 154]).

Разобьем промежутки суммирования по t и v на интервалы $T < t \leq 2T$ и $V < v \leq 2V$. Тогда

$$\left| \sum_{\substack{t, v \\ Q_{\mathcal{B}}(t, v) \leq N_2}} e^{2\pi i \beta Q_{\mathcal{B}}^2(t, v)} \right| \ll \left| \sum_{\substack{T < t \leq 2T \\ V < v \leq 2V \\ Q_{\mathcal{B}}(t, v) \leq N_2}} e^{2\pi i \beta Q_{\mathcal{B}}^2(t, v)} \right| \ln^2 N, \quad (7)$$

где T и V – такие числа, что $T \ll \sqrt{N_2}$, $V \ll \sqrt{N_2}$, а модуль суммы в правой части (7) максимален.

Пусть $T \geq V$, тогда

$$\left| \sum_{\substack{T < t \leq 2T \\ V < v \leq 2V \\ Q_{\mathcal{B}}(t, v) \leq N_2}} e^{2\pi i \beta Q_{\mathcal{B}}^2(t, v)} \right| \leq \sum_{V < v \leq 2V} \left| \sum_{\substack{T < t \leq 2T \\ Q_{\mathcal{B}}(t, v) \leq N_2}} e^{2\pi i \beta Q_{\mathcal{B}}^2(t, v)} \right|.$$

Если промежуток изменения t , заданный неравенствами $T < t \leq 2T$, $Q_{\mathcal{B}}(t, v) \leq N_2$, имеет длину, не превосходящую $\sqrt[4]{N} u^{-2} \ln^{-5-c} N$, то тривиально получаем, что

$$|W_2(X)| \ll \sqrt{N} \ln^{-c} N.$$

Поэтому в дальнейшем считаем, что промежуток изменения t , который мы обозначим через $(t_1, t_2]$, имеет длину, большую, чем $\sqrt[4]{N} u^{-2} \ln^{-5-c} N$.

К сумме

$$S_3(\beta) = \sum_{t_1 < t \leq t_2} e^{2\pi i \beta Q_{\mathcal{B}}^2(t, v)}$$

применим лемму 9:

$$|S_3(\beta)|^2 \ll \frac{(t_2 - t_1)^2}{q_1} + \frac{t_2 - t_1}{q_1} \sum_{r_1=1}^{q_1-1} \left| \sum_{t_1 < t \leq t_2 - r_1} e^{2\pi i \beta g_1(t)} \right|, \quad (8)$$

где $g_1(t)$ – многочлен степени 3 от t с коэффициентами, зависящими от v , со старшим коэффициентом $4a^2 r_1$, $q_1 = (t_2 - t_1)/10$, a – коэффициент при t^2 формы $Q_{\mathcal{B}}(t, v)$ (здесь $a \neq 0$, так как квадратичная форма $Q_{\mathcal{B}}(t, v)$ положительно определена).

Возведем обе части (8) в квадрат, пользуясь неравенством Коши:

$$|S_3(\beta)|^4 \ll \frac{(t_2 - t_1)^4}{q_1^2} + \frac{(t_2 - t_1)^2}{q_1} \sum_{r_1=1}^{q_1-1} \left| \sum_{t_1 < t \leq t_2 - r_1} e^{2\pi i \beta g_1(t)} \right|^2,$$

и применим лемму 9:

$$|S_3(\beta)|^4 \ll \frac{(t_2 - t_1)^4}{q_1} + \frac{(t_2 - t_1)^3}{q_1^2} \sum_{r_1=1}^{q_1-1} \sum_{r_2=1}^{q_1-1} \left| \sum_{t_1 < t \leq t_2 - r_1 - r_2} e^{2\pi i \beta g_2(t)} \right|,$$

где $g_2(t)$ – многочлен степени 2 от переменной t со старшим коэффициентом $12a^2r_1r_2$.

Вновь возводя обе части полученного неравенства в квадрат и пользуясь леммой 9, имеем

$$|S_3(\beta)|^8 \ll \frac{(t_2 - t_1)^8}{q_1} + \frac{(t_2 - t_1)^7}{q_1^3} \sum_{r_1=1}^{q_1-1} \sum_{r_2=1}^{q_1-1} \sum_{r_3=1}^{q_1-1} \left| \sum_{t_1 < t \leq t_2 - r_1 - r_2 - r_3} e^{2\pi i \beta 24a^2 r_1 r_2 r_3 t} \right|.$$

Отсюда и из леммы 8 получаем

$$|S_3(\beta)|^8 \ll \frac{(t_2 - t_1)^8}{q_1} + \frac{(t_2 - t_1)^7}{q_1^3} \sum_{n \leq 24a^2 u^2 q_1^3} \tau_4(n) \min\left(t_2 - t_1, \frac{1}{\|\alpha n\|}\right).$$

Далее, из известного неравенства $\sum_{n \leq K} \tau_4^2(n) \ll K \ln^{15} K$ (см. [9, с. 59]) и леммы 8 получаем

$$\begin{aligned} |S_3(\beta)|^8 &\ll \frac{(t_2 - t_1)^8}{q_1} \\ &+ \frac{(t_2 - t_1)^7}{q_1^3} \sqrt{\sum_{n \leq 24a^2 u^2 q_1^3} \tau_4^2(n) \sum_{n \leq 24a^2 u^2 q_1^3} \min\left((t_2 - t_1)^2, \frac{1}{\|\alpha n\|^2}\right)} \\ &\ll (t_2 - t_1)^8 \left(\frac{u^2}{\sqrt{q}} + \frac{u^2}{\sqrt{q_1}} + \frac{u\sqrt{q}}{q_1^2} \right) \ln^8 N. \end{aligned}$$

Параметры определены так, что

$$\ln^{c_1} N < q \leq N \ln^{-c_2} N, \quad \sqrt[4]{N} u^{-2} \ln^{-5-c} N < q_1 \leq \sqrt[4]{N} (xy)^{-1},$$

откуда имеем оценки

$$\begin{aligned} |S_3(\beta)| &\ll \sqrt[4]{N} (xy)^{-1} \left((\ln N)^{\frac{16+4c_3-c_1}{16}} + (\ln N)^{\frac{36+10c_3+4c-c_2}{16}} \right), \\ |S_2(\beta)| &\ll \sqrt[4]{N} (xy)^{-1} \left((\ln N)^{\frac{48+4c_3-c_1}{16}} + (\ln N)^{\frac{68+10c_3+4c-c_2}{16}} \right), \\ |W_2(X)| &\ll \sqrt{N} \left((\ln N)^{\frac{80+4c_3-c_1}{16}} + (\ln N)^{\frac{100+10c_3+4c-c_2}{16}} \right). \end{aligned}$$

Выберем $c_3 = 2c + 26$. Пусть

$$c_1 \geq 184 + 24c, \quad c_2 \geq 360 + 40c. \quad (9)$$

Тогда имеем

$$|W_2(X)| \ll \sqrt{N} \ln^{-c} N.$$

Кроме того, из (9) следует, что справедливы неравенства (5), а следовательно, и (6). Лемма доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 1

1. Пусть c_1 и c_2 удовлетворяют неравенствам (9). Представим $I(N)$ в виде интеграла

$$I(N) = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} S_{Q_1}(\alpha) \cdots S_{Q_5}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha,$$

где $\tau = N \ln^{-c_2} N$.

Определим множества E_1 и E_2 :

$$E_1 = \left\{ \alpha \in \left(-\frac{1}{\tau}, 1 - \frac{1}{\tau} \right], \alpha = \frac{a}{q} + z, (a, q) = 1, 1 \leq q \leq \ln^{c_1} N, |z| \leq \frac{1}{q\tau} \right\},$$

$$E_2 = \left(-\frac{1}{\tau}, 1 - \frac{1}{\tau} \right] \setminus E_1.$$

Тогда

$$I(N) = \int_{E_1} S_{Q_1}(\alpha) \cdots S_{Q_5}(\alpha) e^{2\pi i \alpha N} d\alpha$$

$$+ \int_{E_2} S_{Q_1}(\alpha) \cdots S_{Q_5}(\alpha) e^{2\pi i \alpha N} d\alpha = I_1(N) + I_2(N).$$

2. Вычислим $I_1(N)$. Пусть Q – одна из квадратичных форм $Q_1, \dots, Q_5$, h – число классов эквивалентных форм того же дискриминанта, что и Q , а χ – один из характеров $\chi_1, \dots, \chi_5$. Сначала докажем, что

$$S_Q\left(\frac{a}{q} + z\right) = \frac{S'(a, q) + \chi(q; D, 0)S''(a, q)}{\varphi(q)h\alpha(Q)} J(z) + O\left(\sqrt{N} \exp\left\{-\frac{c_0}{3}(\ln N)^\gamma\right\}\right), \quad (10)$$

где $c_0 > 0$ – константа из леммы 5, $\gamma = \frac{1}{20c_1}$. Преобразуем $S_Q\left(\frac{a}{q} + z\right)$:

$$S_Q\left(\frac{a}{q} + z\right) = \sum_{\sqrt[4]{N} < p \leq \sqrt{N}} \exp\left\{2\pi i \left(\frac{a}{q} + z\right)p^2\right\} + O(\sqrt[4]{N})$$

$$= \sum_{l=1}^q \exp\left\{2\pi i \frac{al^2}{q}\right\} T(l) + O(\sqrt[4]{N}), \quad (11)$$

где

$$T(l) = \sum'_{\substack{\sqrt[4]{N} < p \leq \sqrt{N} \\ p \equiv l \pmod{q}}} e^{2\pi i z p^2}.$$

Применим формулу частного суммирования:

$$T(l) = \sum_{\sqrt[4]{N} < n \leq \sqrt{N}} e^{2\pi i z n^2} (\pi_Q(n, q, l) - \pi_Q(n-1, q, l))$$

$$= - \int_{\sqrt[4]{N}}^{\sqrt{N}} (\pi_Q(x, q, l) - \pi_Q(\sqrt[4]{N}, q, l)) de^{2\pi i z x^2}$$

$$+ (\pi_Q(\sqrt{N}, q, l) - \pi_Q(\sqrt[4]{N}, q, l)) e^{2\pi i z N}.$$

Воспользуемся следствием 2 и леммой 5 и проинтегрируем по частям:

$$T(l) = \frac{1 + \chi(q; D, 0)\chi(l)}{\varphi(q)h\alpha(Q)} J(z) + O\left(\sqrt{N} \exp\left\{-\frac{c_0}{2}(\ln N)^\gamma\right\}\right).$$

Подставим эту формулу в (11) и получим (10).

Далее, применяя неравенство $J(z) \ll \frac{1}{\sqrt{|z|}}$ (см., например, [10, с. 30]), получаем

$$\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} J^5(z) e^{-2\pi izN} dz = H(N) + O((q\tau)^{\frac{3}{2}}) = H(N) + O(N^{\frac{3}{2}} (\ln N)^{\frac{3}{2}(c_1 - c_2)}).$$

Из последнего равенства следует, что

$$I_1(N) = \frac{1}{h_1 \dots h_5 \alpha(Q_1) \dots \alpha(Q_5)} \times \sum_{q \leq \ln^{c_1} N} \gamma(q, D_1, \dots, D_5, N) (H(N) + O(N^{\frac{3}{2}} (\ln N)^{\frac{3}{2}(c_1 - c_2)})).$$

Теперь пользуясь леммой 4, получаем равенство

$$I_1(N) = \frac{1}{h_1 \dots h_5 \alpha(Q_1) \dots \alpha(Q_5)} \sigma(N, D_1, \dots, D_5) H(N) + O(N^{\frac{3}{2}} (\ln N)^{\frac{3}{2}(c_1 - c_2)}) + O(N^{\frac{3}{2}} (\ln N)^{-\frac{1}{2}c_1 + 5\varepsilon}). \quad (12)$$

3. Оценим $I_2(N)$. Пользуясь леммой 10 и неравенством Коши, имеем

$$|I_2(N)| \leq \max_{\alpha \in E_2} |S_{Q_5}(\alpha)| \prod_{j=1}^4 \left(\int_0^1 |S_{Q_j}(\alpha)|^4 d\alpha \right)^{\frac{1}{4}} \ll \sqrt{N} \sum_{n \leq N} r^2(n) \ln^{-c} N,$$

где $r(n)$ – количество представлений числа n суммой двух квадратов.

Поскольку $\sum_{n \leq N} r^2(n) \ll \sum_{n \leq N} \tau^2(n) \ll N \ln^3 N$, получено неравенство

$$I_2(N) \ll N^{\frac{3}{2}} \ln^{3-c} N. \quad (13)$$

Пусть $c = b + 3$, $c_1 = 24b + 256$, $c_2 = 40b + 480$. Теперь утверждение теоремы следует из (12) и (13).

Асимптотическая формула для $H(N)$ выведена в монографии [10, с. 142].

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть выполнены условия теоремы 1 и модули дискриминантов квадратичных форм $D_1, \dots, D_5$ больше некоторой абсолютной постоянной D_0 . Тогда существует абсолютная постоянная $\Delta > 0$ такая, что

$$\gamma(q, N, D_1, \dots, D_5) > \Delta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Раскроем скобки в произведении

$$\prod_{j=1}^5 \left(\frac{S'(a, q)}{\varphi(q)} + \frac{\chi(q; D_j, 0) S_j''(a, q)}{\varphi(q)} \right) \exp \left\{ -2\pi i \frac{a}{q} N \right\};$$

получим тридцать два слагаемых, которым соответствует тридцать два сингулярных ряда.

Один из этих рядов является сингулярным рядом классической задачи Хуа Ло-кена. В монографии [1] эта сумма оценена снизу абсолютной постоянной, которую мы обозначим через 2Δ .

Суммы остальных рядов оценим сверху. Для них рассуждения аналогичны, поэтому ограничимся верхней оценкой суммы ряда

$$\sigma_5(N, D_5) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{a=0}^{q-1} \left(\frac{S'(a, q)}{\varphi(q)} \right)^4 \chi(q; D_5, 0) \frac{S''_5(a, q)}{\varphi(q)} \exp \left\{ -2\pi i \frac{a}{q} N \right\}.$$

Имеем

$$\sigma_5(N, D_5) \ll \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{a=0}^{D_5 k - 1} \frac{|S'(a, D_5 k)|^4 |S''_5(a, D_5 k)|}{\varphi^5(D_5 k)}.$$

Пользуясь леммой 4, получаем

$$\sigma_5(N, D_5) \ll \frac{D_5^{\frac{5}{2} + \varepsilon}}{\varphi^4(D_5)}.$$

Однако по условию $D_5 \geq D_0$. Параметр D_0 выбираем столь большим, чтобы суммы тридцати одного сингулярного ряда не превосходили по модулю Δ .

Список литературы

1. Ло-кен Хуа, *Аддитивная теория простых чисел*, Тр. МИАН, **22**, 1947; англ. пер.: Loo-keng Hua, *Additive theory of prime numbers*, Transl. Math. Monogr., **13**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1965.
2. З. И. Борович, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*, Наука, М., 1985; англ. пер. 1-го изд.: Z. I. Borevich, I. R. Shafarevich, *Number theory*, Pure Appl. Math., **20**, Academic Press, New York–London, 1966.
3. Э. Гекке, *Лекции по теории алгебраических чисел*, ГИТТЛ, М.–Л., 1940; пер. с нем.: E. Hecke, *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen*, Akad. Verlagsges, Leipzig, 1923.
4. К. Ф. Айерленд, М. И. Роузен, *Классическое введение в современную теорию чисел*, Мир, М., 1987; пер. с англ.: K. F. Ireland, M. I. Rosen, *A classical introduction to modern number theory*, Grad. Texts in Math., **84**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1982.
5. С. А. Гриценко, “О функциональном уравнении одного арифметического ряда Дирихле”, Тр. V Международной конференции “Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения” (Россия, Тула, 2003), *Чебышевский сб.*, **4:2(6)** (2003), 55–67.
6. С. А. Гриценко, “О распределении норм простых идеалов из заданного класса в арифметических прогрессиях”, *Записки науч. сем. ПОМИ*, **322** (2005), 45–62.
7. Loo Keng Hua, *Introduction to number theory*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1982.
8. С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994; S. M. Voronin, A. A. Karatsuba, *The Riemann zeta-function*, de Gruyter Exp. Math., **5**, Walter de Gruyter and Co., Berlin, 1992.
9. А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Наука, М., 1983; англ. пер.: A. A. Karatsuba, *Basic analytic number theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
10. И. М. Виноградов, *Метод тригонометрических сумм в теории чисел*, Наука, М., 1980; I. M. Vinogradov, *The method of trigonometrical sums in the theory of numbers*, Dover Publ., Inc., Mineola, NY, 2004.

С. А. ГРИЦЕНКО (S. A. GRITSENKO)
Белгородский государственный университет
E-mail: gritsenko@bsu.edu.ru

Поступило в редакцию
10.05.2006