Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Нестеренко, Алгебраическая независимость p -адических чисел, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 3, 159–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/im1138>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 15:49:55

УДК 511.464

Ю. В. Нестеренко

Алгебраическая независимость p -адических чисел

Доказаны оценки снизу степени трансцендентности полей, порожденных значениями p -адической экспоненциальной функции. В частности, получена оценка степени трансцендентности поля $\mathbb{Q}(e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_d})$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ — алгебраические над полем рациональных чисел p -адические числа, составляющие базис некоторого конечного расширения $\mathbb{Q}$.

Библиография: 26 наименований.

§ 1. Введение

Пусть p — простое число, $\mathbb{Q}_p$ — поле p -адических чисел и $\mathbb{C}_p$ — пополнение алгебраического замыкания $\mathbb{Q}_p$ относительно p -адической нормы $|\cdot|_p$. Поле $\mathbb{C}_p$ полно и алгебраически замкнуто, а его роль аналогична роли поля комплексных чисел $\mathbb{C}$. В частности, на $\mathbb{C}_p$ с помощью классических степенных рядов могут быть определены экспоненциальная e^x и логарифмическая $\log_p(1+x)$ функции (см. [1]). Ряды в обоих случаях имеют конечный радиус сходимости. В области $|x|_p < p^{-1/(p-1)}$ справедливы равенства $\log_p(e^x) = x$ и $e^{\log_p(1+x)} = 1+x$, а для любых двух p -адических чисел x, y из той же области имеем $e^{x+y} = e^x e^y$.

Арифметические свойства значений экспоненциальной и логарифмической функций в комплексном случае исследовались в классических работах Ш. Эрмита, Ф. Линдемана, А. О. Гельфонда, Т. Шнейдера и К. Малера. В 1932 г. К. Малер (см. [2], [3]) доказал p -адический аналог теоремы Линдемана: для алгебраического над $\mathbb{Q}$ числа $\alpha \in \mathbb{C}_p$ с условием $0 < |\alpha|_p < p^{-1/(p-1)}$ значение экспоненциальной функции e^α трансцендентно. Он же в 1935 г. доказал и p -адический аналог теоремы Гельфонда–Шнейдера (7-я проблема Гильберта): для алгебраических над $\mathbb{Q}$ чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{C}_p$ с условиями $0 < |\alpha - 1| < p^{-1/(p-1)}$, $0 < |\beta - 1| < p^{-1/(p-1)}$ отношение $\frac{\log_p \alpha}{\log_p \beta}$ либо рационально, либо трансцендентно. Доказательство эквивалентного утверждения о трансцендентности чисел $\alpha^\beta = e^{\beta \log_p \alpha}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}_p$ — алгебраические числа, опубликовал в 1940 г. Г. Фельдкамп [4]. Оценку меры аппроксимации p -адического числа $\frac{\log_p \alpha}{\log_p \beta}$ рациональными числами дал А. О. Гельфонд [5] в 1940 г. Мера трансцендентности чисел α^β в p -адической области впервые была доказана В. Адамсом [6] в 1966 г. В этой же статье он установил, что при некоторых условиях на алгебраические числа $\alpha, \beta \in \mathbb{C}_p$ степень трансцендентности поля $\mathbb{Q}(\alpha^\beta, \dots, \alpha^{\beta^{d-1}})$, где $d = \deg \beta \geq 4$, не меньше 2. В комплексном случае справедливость этого утверждения была доказана Гельфондом [7] в 1949 г. для более широкой

Работа выполнена при частичной поддержке Фонда Александра фон Гумбольдта и РФФИ (грант № 03-01-00359).

области значений d , а именно при $d \geq 3$. В частности, он доказал, что для кубической иррациональности $\beta \in \mathbb{C}$ и алгебраического $\alpha \in \mathbb{C}$, отличного от 0 и 1, числа α^β и α^{β^2} алгебраически независимы. Адамс анонсировал p -адический аналог утверждения при $d = 3$, но доказательство так и не опубликовал. Этот факт остается не доказанным и по сей день.

В последовавшие затем годы был опубликован ряд статей, обобщавших и видоизменявших результат Гельфонда об алгебраической независимости чисел $\alpha^\beta, \dots, \alpha^{\beta^{d-1}}$ в комплексной области (см. [3]). Принципиальные усовершенствования были сделаны Р. Тайдеманом в 1971 г., доказавшим точную оценку для числа нулей экспоненциальных полиномов, что позволило освободиться от лишних технических ограничений. Т. Н. Шорей [8] в 1972 г. доказал p -адический аналог теоремы Тайдемана и установил ряд результатов об алгебраической независимости значений экспоненциальной и логарифмической функций в p -адической области. В частности, он доказал, что для алгебраического числа $\alpha \in \mathbb{C}_p$, $\alpha \neq 0, 1$, и кубической иррациональности $\beta \in \mathbb{C}_p$, принадлежащих областям сходимости соответствующих функций, среди трех чисел $\log_p \alpha$, α^β , α^{β^2} содержатся по крайней мере два алгебраически независимых числа. Кроме того, при $p > 2$ и тех же условиях множество e^p , $e^{p\beta}$, $e^{p\beta^2}$ также содержит не менее двух алгебраически независимых над $\mathbb{Q}$ чисел. По-видимому, в каждом из случаев все три числа должны быть алгебраически независимы, однако эти утверждения к настоящему времени не доказаны. Алгебраическую независимость чисел во втором случае можно было бы вывести из p -адического аналога теоремы Линдемана–Вейерштрасса. В комплексном случае эта теорема была установлена в 1882 г., но ее аналог для p -адических чисел все еще не доказан. Некоторые обобщения сформулированных результатов и более подробную библиографию можно найти в статьях [9], [10], а также в книге [3].

Пусть $a_1, \dots, a_u$ и $b_1, \dots, b_v$ – два множества p -адических чисел, линейно независимые над $\mathbb{Q}$. Предположим, что все произведения $a_i b_j$ принадлежат области сходимости экспоненциальной функции. Ж. П. Серр [11] в 1966 г. доказал, что при условии $uv > u + v$ по крайней мере одно из чисел $e^{a_i b_j}$ трансцендентно. Комплексный вариант этого утверждения, известный под названием *теорема о шести экспонентах* ($u = 3$, $v = 2$), является следствием одной общей теоремы, доказанной Т. Шнейдером в 1949 г. Непосредственное доказательство этого варианта впервые было опубликовано С. Ленгом [12] в 1965 г.

Далее будем предполагать, что числа $a_1, \dots, a_u \in \mathbb{C}_p$ и $b_1, \dots, b_v \in \mathbb{C}_p$ удовлетворяют более жестким ограничениям, а именно неравенствам

$$|k_1 a_1 + \dots + k_u a_u|_p \geq e^{-C(\ln K)^\chi}, \quad |l_1 b_1 + \dots + l_v b_v|_p \geq e^{-C(\ln L)^\chi} \quad (1)$$

при любых достаточно больших натуральных числах K , L и любых целых $k_1, \dots, k_u, l_1, \dots, l_v$ с условиями

$$0 < \max |k_j| \leq K, \quad 0 < \max |l_j| \leq L.$$

Здесь $\chi > 0$, $C > 0$ – некоторые фиксированные действительные числа, зависящие от a_i , b_j , а $\ln$ – обычная логарифмическая функция на множестве действительных чисел. Очевидно, условие (1) означает линейную независимость каждого из наборов чисел $\{a_j\}$, $\{b_j\}$ над полем $\mathbb{Q}$.

В настоящей статье доказывается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $a_1, \dots, a_u$ и $b_1, \dots, b_v$ принадлежат $\mathbb{C}_p$, удовлетворяют условиям (1) с некоторыми константами $C > 0$, $\chi > 0$ и неравенствам $|a_i|_p < p^{-1/(p-1)}$, $|b_j|_p \leq 1$. Тогда

$$\mathrm{tr} \deg_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(a_1, \dots, a_u, b_1, \dots, b_v, e^{a_1 b_1}, \dots, e^{a_u b_v}) \geq \frac{uv}{u+v}.$$

Поле, степень трансцендентности которого оценивается в теореме 1, порождается $u + v + uv$ числами.

Первые попытки распространить метод Гельфонда на произвольное количество чисел были предприняты Г. В. Чудновским [13], [14]. И хотя он не смог дать полные доказательства анонсированных им результатов (в комплексной и p -адической областях), тем не менее, препринты [13], [14] сыграли важную роль, подтолкнув многих исследователей на поиски полных доказательств этих и других подобных результатов на основе идеи Чудновского о последовательном исключении переменных. Пробелы в рассуждениях Чудновского были заполнены П. Варкентином, Э. Рейссатом, Р. Энделл, М. Вальдшмидтом и Дж. Яоченом, П. Филиппоном (см. [3]).

Иной метод, основанный на идеях коммутативной алгебры и общей теории исключения, был предложен в 1982 г. в работе автора [15]. Основная идея этой работы заключалась в использовании индукции по размерности идеалов вместо исключения переменных. В 1984 г. Филиппон [16] усовершенствовал подход, использованный в работе [15], что позволило ему обобщить критерий Гельфонда алгебраической независимости. На этой основе были принципиально улучшены оценки степени трансцендентности числовых полей. В работе [16] Филиппон опубликовал ряд утверждений об алгебраической независимости чисел в комплексной и p -адической областях (в частности, утверждение теоремы 1) с указанием, что они легко могут быть выведены из его критерия. Полные доказательства этих результатов в комплексном случае были опубликованы в работах [17]–[19]. Метод, используемый в настоящей работе, представляет собой распространение идей автора из работы [20] на p -адический случай.

Приведем следствия теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{C}_p$ – алгебраические числа, $|\alpha - 1|_p < p^{-1/p}$ и $|\beta|_p \leq 1$, $\deg \beta = d \geq 2$. Тогда

$$\mathrm{tr} \deg_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\log_p \alpha, \alpha^\beta, \dots, \alpha^{\beta^{d-1}}) \geq \frac{d}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно выбрать $u = v = d$, $a_i = \beta^{i-1} \log_p \alpha$, $b_j = \beta^{j-1}$, $i, j = 1, \dots, d$.

При $d = 3$ этот результат совпадает с теоремой Шюрца.

Следующее утверждение – “половина теоремы Линдемана–Вейерштрасса” – при $d = 3$ также совпадает с теоремой Шюрца.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{C}_p$ – алгебраические числа, составляющие базис некоторого конечного расширения степени d поля $\mathbb{Q}$ и удовлетворяющие неравенствам $|\alpha_j|_p < p^{-1/(p-1)}$. Тогда среди чисел

$$e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, \dots, e^{\alpha_d}$$

имеется не менее $d/2$ алгебраически независимых над $\mathbb{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно взять $u = v = d$ и $a_i = \alpha_i$, $b_j = \alpha_j$.

Справедливость условия (1) при $\chi = 1$ в обоих случаях легко следует из доказанной Малером в 1935 г. оценки p -адической абсолютной величины значений многочленов в алгебраической точке (см. [21, теорема 1]).

§ 2. Сведение теоремы 1 к оценке меры алгебраической независимости

Теорема 1 будет выведена в этом параграфе из некоторого количественного утверждения (см. теорему 2 ниже). Чтобы сформулировать и впоследствии доказать эту теорему, мы воспользуемся рядом понятий и утверждений из работы [22]. При этом они будут формулироваться не в полной общности, а применительно к рассматриваемой ситуации, т. е. для кольца многочленов с рациональными коэффициентами, поля $\mathbb{C}_p$ и абсолютного значения $|\cdot|_p$.

Пусть m – натуральное число и $\mathbb{Q}[\bar{x}] = \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_m]$ – кольцо многочленов с рациональными коэффициентами от переменных $x_0, \dots, x_m$. С каждым однородным несмешанным идеалом $I \subset \mathbb{Q}[\bar{x}]$ можно связать некоторые численные характеристики: размерность идеала $\dim I$, степень идеала $\deg I$ и высоту идеала $h(I) \geq 0$. Удобно будет использовать также тип идеала $t(I) = \deg I + h(I)$. Аналогичные характеристики можно ввести и для многочленов кольца $\mathbb{Q}[\bar{x}]$. Для каждой ненулевой точки $\bar{\omega} \in \mathbb{C}_p^{m+1}$ можно также определить величину идеала в этой точке $|I(\bar{\omega})|_p$. Эти характеристики обладают рядом полезных свойств, описываемых следующими предложениями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть I – несмешанный однородный идеал кольца $\mathbb{Q}[\bar{x}]$, $\dim I \geq 0$, $I = I_1 \cap \dots \cap I_s$ – несократимое примарное разложение, $\mathfrak{p}_j = \sqrt{I_j}$, k_j – показатель примарного идеала I_j . Пусть $\bar{\omega} \in \mathbb{C}_p^{m+1}$, $\bar{\omega} \neq 0$. Тогда:

- 1) $\sum_{j=1}^s k_j t(\mathfrak{p}_j) \leq 2m^2 t(I)$;
- 2) $\sum_{j=1}^s k_j \ln |\mathfrak{p}_j(\bar{\omega})|_p = \ln |I(\bar{\omega})|_p$.

Пусть $Q \in \mathbb{Q}[\bar{x}]$ – однородный многочлен. Далее будем использовать обозначение

$$\|Q\|_{\bar{\omega}} = |Q(\bar{\omega})|_p |Q|_p^{-1} |\bar{\omega}|_p^{-\deg Q},$$

где $|Q|_p$ – максимальная из норм коэффициентов многочлена Q , а $|\bar{\omega}|_p$ – максимальная из норм координат вектора $\bar{\omega}$.

Условимся для любых двух ненулевых точек $\bar{\varphi} = (\varphi_0, \dots, \varphi_m) \in \mathbb{C}_p^{m+1}$ и $\bar{\psi} = (\psi_0, \dots, \psi_m) \in \mathbb{C}_p^{m+1}$ обозначать

$$\|\bar{\varphi} - \bar{\psi}\| = \left(\max_{0 \leq i < j \leq m} |\varphi_i \psi_j - \varphi_j \psi_i|_p \right) |\bar{\varphi}|_p^{-1} |\bar{\psi}|_p^{-1}$$

и называть эту величину *расстоянием* между точками $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$. Очевидно, всегда выполняется неравенство

$$\|\bar{\varphi} - \bar{\psi}\| \leq 1.$$

Если точку $\bar{\varphi}$ или точку $\bar{\psi}$ рассматривать как точку соответствующего m -мерного проективного пространства, то введенное расстояние не будет зависеть от координатного задания этой точки.

Далее, пусть $V(\mathfrak{p})$ обозначает многообразие нулей простого однородного идеала $\mathfrak{p} \subset \mathbb{Q}[\bar{x}]$ в проективном пространстве $\mathbb{P}_{\mathbb{C}_p}^m$, и пусть

$$\rho = \rho(\bar{\omega}) = \min_{\bar{\beta} \in V(\mathfrak{p})} \|\bar{\omega} - \bar{\beta}\|$$

– расстояние от $\bar{\omega}$ до многообразия нулей идеала $\mathfrak{p}$. Тогда для любого однородного многочлена $A \in \mathfrak{p} \subset \mathbb{Q}[\bar{x}]$ справедливо неравенство

$$\|A\|_{\bar{\omega}} \leq \rho. \quad (2)$$

Кроме того, справедливо

$$|\mathfrak{p}(\bar{\omega})|_p \leq \rho. \quad (3)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть однородный многочлен $Q \in \mathbb{Q}[\bar{x}]$, однородный простой идеал $\mathfrak{p} \subset \mathbb{Q}[\bar{x}]$, точка $\bar{\omega} \in \mathbb{C}_p^{m+1}$ и число $S > 0$ таковы, что

$$Q \notin \mathfrak{p}, \quad |\mathfrak{p}(\bar{\omega})|_p \leq e^{-S}, \quad \|Q\|_{\bar{\omega}} \leq e^{-2m \deg Q}.$$

Если целое число $\eta > 0$ удовлетворяет неравенству

$$-\eta \ln \|Q\|_{\bar{\omega}} \geq 2 \min \left\{ S, \ln \frac{1}{\rho} \right\}, \quad (4)$$

где $\rho = \min \|\bar{\omega} - \bar{\beta}\| < 1$ и последний минимум берется по всем нулям $\bar{\beta} \in V(\mathfrak{p})$, то при $r = 1 + \dim \mathfrak{p} \geq 2$ существует однородный несмешанный идеал $J \subset \mathbb{Q}[\bar{x}]$, нули которого совпадают с нулями идеала $(\mathfrak{p}, Q)$, $\dim J = \dim \mathfrak{p} - 1$, такой, что:

- 1) $t(J) \leq (m+1)^2 \eta t(\mathfrak{p}) t(Q)$;
- 2) $\ln |J(\bar{\omega})|_p \leq -S + 12m^2 \eta t(\mathfrak{p}) t(Q)$.

Неравенство 2) справедливо и при $r = 1$, если в этом случае формально считать $|J(\bar{\omega})|_p = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $I \subset \mathbb{Q}[\bar{x}]$ – однородный несмешанный идеал, $r = 1 + \dim I \geq 1$. Для каждой ненулевой точки $\bar{\omega} \in \mathbb{C}_p^{m+1}$ существует нуль $\bar{\beta} \in \mathbb{C}_p^{m+1}$ идеала I такой, что

$$\deg I \cdot \ln \|\bar{\omega} - \bar{\beta}\| \leq \frac{1}{r} \ln |I(\bar{\omega})| + \frac{1}{r} h(I) + 4m^3 \deg I.$$

Теорема 1 будет выведена нами из следующего более общего утверждения – основного результата статьи. Чтобы сформулировать его, введем некоторые обозначения. Положим $m = u + v + uv$, $\bar{\omega} = (1, a_1, \dots, a_u, b_1, \dots, b_v, e^{a_1 b_1}, \dots, e^{a_u b_v}) \in \mathbb{C}_p^{m+1}$ и $\mathbb{Q}[\bar{x}] = \mathbb{Q}[x_{0,0}, x_{1,0}, \dots, x_{u,0}, x_{0,1}, \dots, x_{0,v}, x_{1,1}, \dots, x_{u,v}]$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $a_1, \dots, a_u$ и $b_1, \dots, b_v$ принадлежат $\mathbb{C}_p$, удовлетворяют условиям (1) с некоторыми константами $C > 0$, $\chi > 0$ и неравенствам $|a_i|_p < p^{-1/(p-1)}$, $|b_j|_p \leq p^{-1}$. Пусть r – целое число, удовлетворяющее неравенствам $1 \leq r < \kappa = 1 + \frac{uv}{u+v}$. Тогда существует постоянная

$\mu_r = \mu_r(a_1, \dots, a_u, b_1, \dots, b_v) > 0$ такая, что для любого однородного несмешанного идеала $I \subset \mathbb{Q}[\bar{x}]$ с условием $\dim I = r - 1$ выполняется неравенство

$$\ln |I(\bar{\omega})|_p \geq -T^\kappa, \quad (5)$$

где $T \geq 1$ – произвольное число, удовлетворяющее неравенству

$$t(I) \leq \mu_r T^{\kappa-r} (\log T)^{-\gamma r} \quad (6)$$

при $\gamma = 1 + (\chi - 1) \frac{uv}{m}$.

Покажем сначала, что теорема 1 следует из теоремы 2. Прежде всего отметим, что теорему 1 достаточно доказать, считая выполненными неравенства $|b_i|_p \leq p^{-1}$, поскольку в случае необходимости числа b_i можно заменить на pb_i . Обозначим через $\mathcal{L}$ поле, порожденное над $\mathbb{Q}$ координатами точки $\bar{\omega}$, а через $\mathcal{E}$ простой идеал кольца $\mathbb{Q}[\bar{x}]$, порожденный всеми однородными многочленами $P(\bar{x}) \in \mathbb{Q}[\bar{x}]$, обращающимися в нуль в $\bar{\omega}$. Положим $r = 1 + \text{tr deg } \mathcal{L}$. Тогда $\dim \mathcal{E} = r - 1$. Если $r < \kappa$, то, выбрав достаточно большое число T , заключаем по теореме 2, что $\ln |\mathcal{E}(\bar{\omega})|_p > 0$. Но это противоречит неравенству (3), примененному к идеалу $\mathcal{E}$ (при $\rho = 0$). Следовательно, $r \geq \kappa$, т. е. $\text{tr deg } \mathcal{L} \geq \frac{uv}{u+v}$, что доказывает теорему 1.

Выведем еще два следствия теорем 1 и 2.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если алгебраическое число $\alpha \in \mathbb{C}_p$ удовлетворяет неравенствам $0 < |\alpha|_p < p^{-1/(p-1)}$, то для любого многочлена $A(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $A \neq 0$, имеем

$$|A(e^\alpha)|_p \geq e^{-ct^3(A) \ln^3 t(A)}$$

с некоторой постоянной $c > 0$, зависящей только от числа α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $B(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $B(x) \neq 0$, и

$$|B(e^{p\alpha})|_p < e^{-3\lambda t^3(B) \ln^3 t(B)},$$

где λ – достаточно большая константа. Положим $u = 1$, $v = 1$, $a_1 = \alpha$, $b_1 = p$, $\bar{\omega} = (1, \alpha, p, e^{p\alpha}) \in \mathbb{C}_p^4$. Пусть $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ – неприводимый многочлен, корнем которого является α . Положим

$$R(x_{0,0}, x_{1,0}) = x_{0,0}^{\deg P} P(x_{1,0}/x_{0,0}), \quad Q(x_{0,0}, x_{1,1}) = x_{0,0}^{\deg B} B(x_{1,1}/x_{0,0}).$$

Тогда идеал

$$\mathfrak{p} = (px_{0,0} - x_{0,1}, R(x_{1,0}, x_{0,0})) \subset \mathbb{Q}[x_{0,0}, x_{1,0}, x_{0,1}, x_{1,1}]$$

однороден и прост. Кроме того, тип $t(\mathfrak{p})$ ограничен константой, зависящей только от α . Справедливы неравенства

$$\|Q(\bar{\omega})\|_{\bar{\omega}} = |B(e^{p\alpha})|_p |B|_p^{-1} \leq e^{-3\lambda t^3(B) \ln^3 t(B) + t(B)} < e^{-2\lambda t^3(B) \ln^3 t(B)}.$$

Применим предложение 2 к идеалу $\mathfrak{p}$ и многочлену $Q(x_{0,0}, x_{1,1})$, выбрав $S = \lambda t^3(B) \ln^3 t(B)$ и $\eta = 1$. Так как $\bar{\omega}$ – нуль идеала $\mathfrak{p}$, то $\rho = \rho(\bar{\omega}) = 0$

и все условия предложения 2 выполнены. Согласно этому предположению существует однородный несмешанный идеал $J \subset \mathbb{Q}[\bar{x}]$, $\dim J = 0$, для которого $t(J) \leq 16t(\mathfrak{p})t(B)$, $\ln |J(\bar{\omega})|_p \leq -\frac{\lambda}{2}t^3(B)\ln^3 t(B)$. Но это противоречит при достаточно большой константе λ теореме 2, примененной к идеалу J с параметром T , определенным равенством $T^{3/2} = \frac{\lambda}{2}t^3(B)\ln^3 t(B)$. Заметим, что в рассматриваемом случае согласно теореме Малера имеем $\chi = 1$ (см. [21, теорема 1]) и $m = 3$. Итак, для любого многочлена $B(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $B(x) \neq 0$, справедливо неравенство

$$|B(e^{p\alpha})|_p \geq e^{-3\lambda t^3(B)\ln^3 t(B)}.$$

Возьмем теперь произвольный многочлен $A(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $A(x) \neq 0$. Обозначим $\zeta = e^{2\pi i/p}$ и положим

$$C(x) = \prod_{k=0}^{p-1} A(\zeta^k x) \in \mathbb{Z}[x].$$

Поскольку $C(\zeta x) = C(x)$, то с некоторым многочленом $B(x) \in \mathbb{Z}[x]$ имеем $C(x) = B(x^p)$. Тогда $B(x^p) = A(x)E(x)$, $E(x) \in \mathbb{Z}[x]$, причем, как легко проверить, $t(B) \leq 2pt(A)$. Нужно утверждение следует теперь из неравенств

$$|A(e^\alpha)|_p \geq |A(e^\alpha)E(e^\alpha)|_p = |B(e^{p\alpha})|_p \geq e^{-3\lambda t^3(B)\ln^3 t(B)} \geq e^{-\lambda^2 t^3(A)\ln^3 t(A)}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4. При любом натуральном n среди чисел

$$e^p, e^{pe^p}, e^{pe^{2p}}, \dots, e^{pe^{n^p}}$$

имеется не менее $\left[\frac{n+5}{4}\right]$ алгебраически независимых над $\mathbb{Q}$ чисел.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно взять $u = [n/2] + 1$, $v = n + 1 - [n/2]$, $a_i = pe^{(i-1)p}$, $b_j = e^{(j-1)p}$ при $1 \leq i \leq u$, $1 \leq j \leq v$ и учесть, что $\left[\frac{((n/2)+1)(n+1-[n/2])}{n+2}\right] = \left[\frac{n+5}{4}\right]$. Условие (1) выполнено в данном случае при $\chi = 4$ благодаря следствию 3.

Оценка теоремы 2 может быть доказана и с разделенными характеристиками $\deg I$, $h(I)$. Мы выбрали совокупную характеристику $t(I)$ лишь для простоты вычислений. Такое же замечание относится и к оценке следствия 3. В комплексном случае известно более сильное неравенство, чем утверждение следствия 3 (см., например, [23, теорема 6]).

§ 3. Доказательство теоремы 2

Теорему 2 будем доказывать индукцией по размерности идеалов. Пусть $r \in \mathbb{Z}$, $1 \leq r < \aleph$, и при $r \geq 2$ для любого идеала кольца $\mathbb{Q}[\bar{x}]$ размерности, меньшей $r - 1$, утверждение теоремы выполняется.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Существует постоянная $\mu > 0$ такая, что для любого однородного простого идеала $\mathfrak{p} \subset \mathbb{Q}[\bar{x}]$ с условием $\dim \mathfrak{p} = r - 1$ и для любого действительного $T \geq 1$, удовлетворяющего

$$t(\mathfrak{p}) \leq \mu T^{\aleph-r} (\ln T)^{-\gamma r},$$

справедливо неравенство

$$\ln |\mathfrak{p}(\bar{\omega})|_p \geq -T^{\aleph}.$$

Покажем сначала, как из предложения 4 следует утверждение теоремы 2 для идеалов размерности $r - 1$. Выберем $\mu_r = (3m^2)^{-1}\mu$.

Пусть $I \subset \mathbb{Q}[\bar{x}]$ – произвольный однородный несмешанный идеал размерности $r - 1$ и $S \geq 1$ – произвольное число, удовлетворяющее неравенству (6), т. е.

$$t(I) \leq \mu_r S^{\varkappa-r} (\log S)^{-\gamma r}. \quad (7)$$

Предположим, что неравенство (5) при этом нарушается, т. е.

$$\ln |I(\bar{\omega})|_p < -S^{\varkappa}. \quad (8)$$

Пусть $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ – простые идеалы кольца $\mathbb{Q}[\bar{x}]$, ассоциированные с I , а $k_1, \dots, k_s$ – соответствующие показатели. Если для любого из идеалов $\mathfrak{p}_j$ выполняется неравенство

$$\ln |\mathfrak{p}_j(\bar{\omega})|_p \geq -\frac{1}{3m^2\mu_r} S^r (\ln S)^{\gamma r} t(\mathfrak{p}_j),$$

то согласно предложению 1 находим

$$\begin{aligned} \ln |I(\bar{\omega})|_p &= \sum_{j=1}^s k_j \ln |\mathfrak{p}_j(\bar{\omega})|_p \geq -\frac{1}{3m^2\mu_r} S^r (\ln S)^{\gamma r} \sum_{j=1}^s k_j t(\mathfrak{p}_j) \\ &\geq -\frac{2}{3\mu_r} S^r (\ln S)^{\gamma r} t(I) \geq -\frac{2}{3} S^{\varkappa}. \end{aligned}$$

Получившееся неравенство противоречит (8), следовательно, найдется простой идеал $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_j$, для которого справедливо

$$\ln |\mathfrak{p}(\bar{\omega})|_p < -\frac{1}{3m^2\mu_r} S^r (\ln S)^{\gamma r} t(\mathfrak{p}). \quad (9)$$

Определим параметр T так, чтобы выполнялось равенство

$$T^{\varkappa} = \frac{1}{3m^2\mu_r} S^r (\ln S)^{\gamma r} t(\mathfrak{p}). \quad (10)$$

Тогда с помощью неравенства (7) находим

$$T^{\varkappa} \leq \frac{1}{3m^2\mu_r} S^r (\ln S)^{\gamma r} t(I) \leq \frac{1}{3m^2} S^{\varkappa} < S^{\varkappa}.$$

Поэтому $T < S$ и из равенства (10) следует

$$t(\mathfrak{p}) = 3m^2\mu_r T^{\varkappa} (S(\ln S)^{\gamma})^{-r} \leq \mu T^{\varkappa-r} (\ln T)^{-\gamma r}.$$

Получившееся неравенство вместе с (9) и (10) противоречит утверждению предложения 4. Итак, утверждение теоремы 2 для идеалов размерности $r - 1$ доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4. Предположим, что в случае $r \geq 2$ утверждение теоремы 2 справедливо для идеалов размерности, меньшей, чем $r - 1$.

Пусть λ – достаточно большое положительное число. Для доказательства предложения достаточно установить, что множество чисел $T \geq 1$, для которых существует простой однородный идеал $\mathfrak{p} \subset \mathbb{Q}[\bar{x}]$ с условиями $\dim \mathfrak{p} = r - 1$ и

$$t(\mathfrak{p}) \leq \lambda^{-3v-7} T^{\varkappa-r} (\ln T)^{-\gamma r}, \quad (11)$$

$$\ln |\mathfrak{p}(\bar{\omega})|_p < -T^{\varkappa}, \quad (12)$$

ограничено. Поэтому мы предположим, что идеал $\mathfrak{p}$ удовлетворяет неравенствам (11), (12) при достаточно большом T , и придем к противоречию.

Положим $\rho = \min_{\bar{\beta} \in V(\mathfrak{p})} \|\bar{\omega} - \bar{\beta}\|$ и определим действительное число X равенством

$$2\lambda^{3v+2} X^m (\ln X)^{-1+\chi} = \min\left(T^{\varkappa}, \ln \frac{1}{\rho}\right). \quad (13)$$

Из предложения 3 и неравенств (11), (12) следует, что

$$\begin{aligned} r \deg \mathfrak{p} \ln \rho &\leq \ln |\mathfrak{p}(\bar{\omega})|_p + 4m^3 r t(\mathfrak{p}) \\ &\leq -T^{\varkappa} + T^{\varkappa-r} (\ln T)^{-\gamma r} \leq -\frac{1}{2} T^{\varkappa} \end{aligned}$$

при достаточно больших λ и T . Отсюда следует, что

$$\ln \rho < -T^r (\ln T)^{\gamma r}$$

и, значит, с ростом T величина X будет неограниченно возрастать.

Из (13) следует, что $2\lambda^{3v+2} X^m (\ln X)^{-1+\chi} \leq T^{\varkappa}$, и потому

$$X \leq T^{1/(u+v)} (\ln T)^{(1-\chi)/m}. \quad (14)$$

ЛЕММА 1. Если однородный многочлен $A \in \mathbb{Q}[\bar{x}]$ принадлежит идеалу $\mathfrak{p}$, то

$$\|A\|_{\bar{\omega}} \leq e^{-2\lambda^{3v+2} X^m (\ln X)^{-1+\chi}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $A \in \mathfrak{p}$, то согласно (2) имеем $\|A\|_{\bar{\omega}} \leq \rho$. Из равенства (13) следует, что $\ln \rho \leq -2\lambda^{3v+2} X^m (\ln X)^{-1+\chi}$, и это завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 2. Если однородный многочлен $A \in \mathbb{Q}[\bar{x}]$ не принадлежит идеалу $\mathfrak{p}$ и справедливо неравенство

$$t(A) \leq 2\lambda^3 X^{u+v}, \quad (15)$$

то

$$\|A\|_{\bar{\omega}} \geq e^{-X^m (\ln X)^{-1}}. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что вместо неравенства (16) выполнено

$$\|A\|_{\bar{\omega}} < e^{-X^m (\ln X)^{-1}}.$$

Применим предложение 2 к многочлену A и идеалу $\mathfrak{p}$, выбрав

$$\eta = [5\lambda^{3v+2} (\ln X)^{\chi}], \quad S = T^{\varkappa}.$$

Согласно (13) имеем

$$-\eta \ln \|A\|_{\bar{\omega}} \geq 4\lambda^{3v+2}(\ln X)^{-1+\chi} X^m = 2 \min\left(T^{\chi}, \ln \frac{1}{\rho}\right).$$

Легко видеть, что все остальные условия предложения 2 также выполнены. Согласно этому предложению и оценкам (11), (14), (15) для некоторого идеала $J \subset \mathbb{Q}[\bar{x}]$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \ln |J(\bar{\omega})|_p &\leq -T^{\chi} + 12m^2 \cdot 10\lambda^{-2}(\ln X)^{\chi} X^{u+v} T^{\chi-r} (\ln T)^{-\gamma r} \\ &\leq -T^{\chi} + \lambda^{-1} T^{\chi-r+1} (\ln T)^{-\gamma(r-1)} \leq -\frac{1}{2} T^{\chi}. \end{aligned}$$

В случае $r = 1$ согласно предложению 2 имеем $|J(\bar{\omega})|_p = 1$, так что неравенство

$$\ln |J(\bar{\omega})|_p \leq -\frac{1}{2} T^{\chi}$$

невозможно. Поэтому $r \geq 2$ и по предложению 2 имеем $\dim J = r - 2$,

$$t(J) \leq (m+1)^2 \cdot 10\lambda^{-2}(\ln X)^{\chi} X^{u+v} T^{\chi-r} (\ln T)^{-\gamma r} \leq \lambda^{-1} T^{\chi-r+1} (\ln T)^{-\gamma(r-1)}.$$

Положим $T_1 = \frac{1}{2} T$. Тогда

$$\ln |J(\bar{\omega})|_p \leq -2^{\chi-1} T_1^{\chi} < -T_1^{\chi}, \quad (17)$$

и при $\lambda > 2^{\chi} \mu_{r-1}^{-1}$ находим

$$t(J) \leq \lambda^{-1} 2^{\chi-r+1} T_1^{\chi-r+1} (\ln T_1)^{-\gamma(r-1)} < \mu_{r-1} T_1^{\chi-r+1} (\ln T_1)^{-\gamma(r-1)}. \quad (18)$$

Неравенства (17), (18) противоречат индуктивному предположению, чем и завершается доказательство леммы.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $\mathcal{E}$ – простой идеал кольца $\mathbb{Q}[\bar{x}]$, порожденный всеми однородными многочленами $P(\bar{x}) \in \mathbb{Q}[\bar{x}]$, обращающимися в нуль в $\bar{\omega}$. Тогда справедливо включение $\mathcal{E} \subset \mathfrak{p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем однородные многочлены $A_1, \dots, A_q \in \mathbb{Q}[\bar{x}]$, составляющие некоторый базис идеала $\mathcal{E}$, и выбираем константу λ столь большой, чтобы выполнялись неравенства $t(A_j) < \lambda^3$. Предположим, что среди A_j найдется многочлен, не лежащий в идеале $\mathfrak{p}$. Для краткости обозначим его через A . Поскольку выполняется неравенство (15), то согласно лемме 2 можно утверждать, что $\|A\|_{\bar{\omega}} > 0$. Но это неверно, так как согласно определению идеала $\mathcal{E}$ и неравенству (2) должно быть $\|A\|_{\bar{\omega}} = 0$. Получившееся противоречие доказывает, что $A_j \in \mathfrak{p}$, $j = 1, \dots, q$, и, следовательно, $\mathcal{E} \subset \mathfrak{p}$.

Определим параметры

$$K = [X^v], \quad L = [X^u], \quad N = [\lambda^2 X^{u+v} (\ln X)^{-1}], \quad W = [\lambda X^{u+v} (\ln X)^{-1}],$$

которые будут играть важную роль в последующем доказательстве.

ЛЕММА 3. Для каждого достаточно большого T существуют однородные многочлены

$$A_{n,\bar{k}} \in \mathbb{Z}[\bar{x}], \quad 0 \leq n < N, \quad \bar{k} = (k_1, \dots, k_u), \quad 0 \leq k_j < K,$$

удовлетворяющие условиям:

- 1) $t(A_{n,\bar{k}}) \leq \lambda^3 X^{u+v}$;
- 2) не все многочлены $A_{n,\bar{k}}(\bar{x})$ лежат в идеале $\mathfrak{p}$;
- 3) для функции

$$F(z) = \sum_{(n,\bar{k})} A_{n,\bar{k}}(\bar{\omega}) z^n e^{(k_1 a_1 + \dots + k_u a_u)z} \quad (19)$$

справедливы неравенства

$$|F^{(w)}(l_1 b_1 + \dots + l_v b_v)|_p \leq e^{-\lambda^{3v+2} X^m (\ln X)^{-1+\chi}} \quad (20)$$

при всех целых $w, l_1, \dots, l_v$ из промежутков

$$0 \leq w < W, \quad 0 \leq l_j < L. \quad (21)$$

Заметим, что функция (19) отлична от нуля. Действительно, если $A_{n,\bar{k}} \notin \mathfrak{p}$, то в силу включения $\mathcal{E} \subset \mathfrak{p}$ можно утверждать, что $A_{n,\bar{k}} \notin \mathcal{E}$ и, значит, $A_{n,\bar{k}}(\bar{\omega}) \neq 0$. Поскольку числа $a_1, \dots, a_u$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$, то все суммы $k_1 a_1 + \dots + k_u a_u$ различны, а это означает линейную независимость функций $e^{(k_1 a_1 + \dots + k_u a_u)z}$ в сумме (19) над полем $\mathbb{Q}(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} F^{(w)}(l_1 b_1 + \dots + l_v b_v) &= \sum_{n,\bar{k}} \sum_{\nu=0}^w A_{n,\bar{k}}(\bar{\omega}) \binom{w}{\nu} \frac{n!}{(n-\nu)!} \\ &\times (l_1 b_1 + \dots + l_v b_v)^{n-\nu} (k_1 a_1 + \dots + k_u a_u)^{w-\nu} \prod_{i=1}^u \prod_{j=1}^v (e^{a_i b_j})^{k_i l_j}. \end{aligned}$$

Докажем, что существуют однородные многочлены $B_{n,\bar{k}}(\bar{x}) \in \mathbb{Z}[\bar{x}]$, не все равные нулю, с условиями

$$\deg B_{n,\bar{k}} = D = [\lambda^2 X^{u+v}], \quad t(B_{n,\bar{k}}) \leq 2\lambda^{5/2} X^{u+v}, \quad (22)$$

удовлетворяющие при всех $w, l_1, \dots, l_v$ из промежутков (21) тождествам

$$\begin{aligned} \sum_{n,\bar{k}} \sum_{\nu=0}^{\min(w,n)} B_{n,\bar{k}}(\bar{x}) \binom{w}{\nu} \frac{n!}{(n-\nu)!} x_0^{d(n,\bar{k},w,\bar{l},\nu)} \\ \times (l_1 x_{0,1} + \dots + l_v x_{0,v})^{n-\nu} (k_1 x_{1,0} + \dots + k_u x_{u,0})^{w-\nu} \prod_{i=1}^u \prod_{j=1}^v x_{i,j}^{k_i l_j} \equiv 0, \quad (23) \end{aligned}$$

где целые числа $d(n,\bar{k},w,\bar{l},\nu) \geq 0$ выбираются таким образом, чтобы коэффициент при многочлене $B_{n,\bar{k}}(\bar{x})$ в левой части последнего тождества имел

степень $N + W + uvKL$. Тождества (23) представляют собой систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных коэффициентов многочленов $B_{n,\bar{k}}$. Количество неизвестных в этой системе равно

$$NK^u \binom{D+m}{m} \sim \frac{\lambda^{2m+2}}{m!} X^{m(u+v+1)} (\ln X)^{-1},$$

а количество уравнений удовлетворяет неравенству

$$WL^v \binom{D+N+W+uvKL}{m} < \frac{\lambda^{2m+2}}{3 \cdot m!} X^{m(u+v+1)} (\ln X)^{-1},$$

если λ достаточно велико. Коэффициенты указанной системы – целые числа, модуль которых оценивается величиной $U = 2^W N^N (vL)^N (uK)^W$, причем

$$\ln U = \ln(2^W N^N (vL)^N (uK)^W) < \lambda^{5/2} X^{u+v}.$$

При достаточно большом λ количество неизвестных более чем вдвое превосходит число уравнений, поэтому указанная система имеет нетривиальное решение в целых числах, причем

$$\ln |B_{n,\bar{k}}(\bar{x})| \leq \ln \left(2NK^u \binom{D+m}{m} U \right) \leq 2\lambda^{5/2} X^{u+v}$$

(см. [24, гл. 3, лемма 11]). Существование многочленов $B_{n,\bar{k}}$ доказано.

Пусть $\bar{r} = (r_{1,0}, \dots, r_{u,0}, r_{0,1}, \dots, r_{0,v}, r_{1,1}, \dots, r_{u,v}) \in \mathbb{Z}^m$ – вектор с неотрицательными координатами и минимальной суммой $r = r_{1,0} + \dots + r_{u,v}$, для которого существует многочлен $B_{n,\bar{k}_0}(\bar{x})$ с условием

$$\mathcal{D}_{\bar{r}} B_{n,\bar{k}_0}(\bar{x}) = \frac{\partial^r B_{n,\bar{k}_0}(\bar{x})}{\partial x_{1,0}^{r_{1,0}} \dots \partial x_{u,v}^{r_{u,v}}} \notin \mathfrak{p}.$$

Обозначим $A_{n,\bar{k}}(\bar{x}) = \frac{1}{r_{1,0}! \dots r_{u,v}!} \mathcal{D}_{\bar{r}} B_{n,\bar{k}}(\bar{x})$ и

$$\begin{aligned} Q_{w,\bar{l}}(\bar{x}) &= \sum_{n,\bar{k}} \sum_{\nu=0}^{\min(w,n)} A_{n,\bar{k}}(\bar{x}) \binom{w}{\nu} \frac{n!}{(n-\nu)!} x_0^{d(n,\bar{k},w,\bar{l},\nu)} \\ &\times (l_1 x_{0,1} + \dots + l_v x_{0,v})^{n-\nu} (k_1 x_{1,0} + \dots + k_u x_{u,0})^{w-\nu} \prod_{i=1}^u \prod_{j=1}^v x_{i,j}^{k_i l_j}. \end{aligned} \quad (24)$$

Применяя к тождеству (23) дифференциальный оператор $\mathcal{D}_{\bar{r}}$ и пользуясь определением вектора $\bar{r}$, получаем

$$Q_{w,\bar{l}}(\bar{x}) \in \mathfrak{p}, \quad 0 \leq w < W, \quad 0 \leq l_j < L,$$

так что согласно лемме 1

$$|F^{(w)}(l_1 b_1 + \dots + l_v b_v)|_p = |Q_{w,\bar{l}}(\bar{\omega})|_p \leq e^{-2\lambda^{3v+2} X^m (\ln X)^{-1+\chi}}.$$

Наконец, из (22) и определения многочленов $A_{n,\bar{k}}(\bar{x})$ легко следует оценка $t(A_{n,\bar{k}}) \leq \lambda^3 X^{u+v}$.

В дальнейшем понадобятся некоторые сведения об аналитических p -адических функциях. Функцию $f(z)$ будем называть *аналитической на шаре* $B = \{z \in \mathbb{C}_p, |z|_p \leq 1\}$, если она может быть представлена рядом Тейлора:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k, \quad f_k \in \mathbb{C}_p, \quad (25)$$

с условием $\lim_{k \rightarrow \infty} |f_k|_p = 0$. Таким образом, ряд (25) сходится к $f(z)$ на всем шаре B . В любой точке $z_0 \in B$ можно обычным способом определить производную $f^{(n)}(z_0)$, положив

$$f^{(n)}(z_0) = n! \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} f_k z_0^{k-n}.$$

Тогда, как легко проверить, в каждой точке $z \in B$ справедливо представление

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \cdot (z - z_0)^k.$$

Например, функция e^{az} аналитична на B при $|a|_p < p^{-1/(p-1)}$. Функции, аналитические на шаре B , очевидно, образуют кольцо, замкнутое относительно дифференцирования. Для каждого r , $0 < r \leq 1$, будем использовать обозначение

$$|f|(r) = \sup\{|f(z)|_p, |z|_p \leq r\}.$$

ЛЕММА 4. Пусть $f(z)$ – функция, аналитическая на шаре B , конечное подмножество $\Gamma \subset \mathbb{C}_p$ состоит из t точек, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$. Пусть r, R – действительные числа, $0 < r < R \leq 1$, и для каждого $\gamma \in \Gamma$ выполняется неравенство $|\gamma|_p \leq r$. Если положительные числа δ, ε определены равенствами

$$\delta = \min_{\gamma, \gamma' \in \Gamma, \gamma \neq \gamma'} \{|\gamma - \gamma'|_p\}, \quad \varepsilon = \max_{\gamma \in \Gamma, 0 \leq \nu < k} \left\{ \left| \frac{f^{(\nu)}(\gamma)}{\nu!} \right|_p \cdot \delta^\nu \right\},$$

то справедливо

$$|f|(r) \leq \max \left\{ \left(\frac{r}{R} \right)^{tk} |f|(R), \varepsilon \left(\frac{r}{\delta} \right)^{tk-1} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [25, теорема 3.1], где это утверждение доказано даже для p -адических функций от нескольких переменных.

ЛЕММА 5. Пусть $L_1 = \lambda^3 L$. Тогда для функции $F(z)$, построенной в лемме 3, справедливы неравенства

$$E = \max_{\substack{0 \leq w < W \\ 0 \leq l_j < L_1}} |F^{(w)}(l_1 b_1 + \dots + l_v b_v)| \leq \exp\{-2\lambda^{3v+2} X^m (\log X)^{-1+\chi}\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим лемму 4 к функции $F(z)$. Множество Γ будет состоять из точек $\{l_1 b_1 + \dots + l_v b_v, 0 \leq l_j < L\}$. Таким образом, $t = \text{Card } \Gamma = L^v$. Согласно (1) параметр δ удовлетворяет неравенству $\delta \geq \exp(-C(\ln L)^\chi)$.

Учитывая неравенства (20) и $\delta \leq 1$, а также $|(\nu!)^{-1}|_p \leq p^{\nu/(p-1)}$, при $k = W$ находим

$$\varepsilon \leq 2^W \exp(-2\lambda^{3v+2} X^m (\ln X)^{-1+\chi}).$$

Положим далее $r = p^{-1}$ и $R = 1$. Тогда

$$\varepsilon \left(\frac{r}{\delta} \right)^{tk-1} \leq \exp(-\lambda^{3v+2} X^m (\ln X)^{-1+\chi}) < p^{-WL^v}.$$

Учитывая теперь, что $|F|(1) \leq 1$, в соответствии с леммой 4 находим

$$|F|(r) \leq p^{-WL^v}.$$

Отсюда по принципу максимума следует, что при любых $w, l_1, \dots, l_v$ с условиями $0 \leq w < W$, $0 \leq l_j < L_1$ выполняется

$$\begin{aligned} |Q_{w,\bar{l}}(\bar{w})|_p &= |F^{(w)}(l_1 b_1 + \dots + l_v b_v)|_p \leq \frac{|w!|_p}{r^w} \cdot |F|(r) \\ &\leq p^{-\frac{1}{2}WL^v} < e^{-2X^m (\ln X)^{-1}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Из определения (24) следует, что при тех же w, l_j справедлива оценка $t(Q_{w,\bar{l}}) \leq 2\lambda^3 X^{u+v}$. Это неравенство и (26) в силу леммы 2 означают, что $Q_{w,\bar{l}}(\bar{x}) \in \mathfrak{p}$. Теперь с помощью леммы 1 получаем нужную оценку.

ЛЕММА 6. Пусть $n, s, m_0, \dots, m_{n-1}, r_0, \dots, r_{s-1}$ — неотрицательные целые числа и

$$m = \sum_{\nu=0}^{n-1} m_\nu, \quad r = \sum_{\sigma=0}^{s-1} r_\sigma.$$

Пусть $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ и, соответственно, $\beta_0, \dots, \beta_{s-1}$ — различные элементы из $\mathbb{C}_p$ и

$$\begin{aligned} a_0 &= \max_{0 \leq \nu < n} (|\alpha_\nu|_p), & b_0 &= \max_{0 \leq \sigma < s} (|\beta_\sigma|_p), \\ a &= \min_{0 \leq \mu < \nu < n} (|\alpha_\mu - \alpha_\nu|_p, 1), & b &= \min_{0 \leq \rho < \sigma < s} (|\beta_\rho - \beta_\sigma|_p, 1), \\ M &= (p-1)^{-1} \max_{0 \leq \nu < n} \{m_\nu\}, & \tilde{a}_0 &= \max\{1, a_0\}, & \tilde{b}_0 &= \max\{1, b_0\}. \end{aligned}$$

Предположим, что $a_0 b_0 < p^{-1/(p-1)}$. Тогда существует такая положительная постоянная $c > 0$, зависящая только от p, a_0, b_0 , что при условии $r \geq m + c \ln m$ каждая функция

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{m_\nu-1} A_{\mu,\nu} z^\mu e^{\alpha_\nu z}, \quad A_{\mu,\nu} \in \mathbb{C}_p,$$

удовлетворяет неравенствам

$$\max_{0 \leq \nu < n, 0 \leq \mu < m_\nu} \{|A_{\mu,\nu}|_p\} \leq p^M \left(\frac{\tilde{a}_0}{a} \right)^m \left(\frac{\tilde{b}_0}{b} \right)^r \max_{0 \leq \sigma < s, 0 \leq \rho < r_\sigma} \{|F^{(\rho)}(\beta_\sigma)|_p\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта лемма доказана П. Филиппоном в 1981 г. (см. [26, лемма 1]). Менее общий результат с $m_0 = \dots = m_{n-1} = 1$ установил в 1972 г. Т. Шорей (см. [8, теорема 1]). В комплексном случае аналогичное утверждение было доказано Р. Тайдеманом в 1971 г.

Применим лемму 6 к функции $F(z)$, построенной в лемме 3, выбрав в роли β_j точки $l_1 b_1 + \dots + l_v b_v$ с условием $0 \leq l_j < L_1$ и кратностями W . Тогда $m_\nu = N$, $n = K^u$, $s = L_1^v$. Для введенных в лемме 6 параметров имеем

$$a_0 \leq p^{-1/(p-1)}, \quad b_0 \leq p^{-1}, \quad a \geq e^{-C(\ln K)^\chi}, \quad b \geq e^{-C(\ln L_1)^\chi}, \\ M = (p-1)^{-1}N, \quad \tilde{a}_0 = 1, \quad \tilde{b}_0 = 1.$$

Кроме того, имеем

$$NK^u + c \ln(NK^u) \leq 2\lambda^2 X^{uv+u+v} (\ln X)^{-1} < r = WL_1^v,$$

если λ достаточно велико. Все условия леммы 6 выполнены, так что согласно ее утверждению и оценке леммы 5 имеем

$$\ln \max_{n, \bar{k}} \{|A_{n, \bar{k}}(\bar{\omega})|_p\} \leq \frac{N}{p-1} \ln p + CNK^u (\ln K)^\chi + CWL_1^v (\ln L_1)^\chi \\ - 2\lambda^{3v+2} X^{uv+u+v} (\ln X)^{-1+\chi} \leq -\lambda^{3v+2} X^{uv+u+v} (\ln X)^{-1+\chi}.$$

Однако эта оценка противоречит в силу леммы 2 существованию индексов $(n, \bar{k})$ с условием $A_{n, \bar{k}}(\bar{x}) \notin \mathfrak{p}$, (см. свойство 2) в лемме 3). Полученное противоречие завершает доказательство предложения 4, а вместе с ним и теоремы 2.

Список литературы

1. Н. Коблицц, *p*-адические числа, *p*-адический анализ и дзета-функции, Современная Математика: Вводные курсы, Мир, М., 1982; пер. с англ.: N. Koblitz, *p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions*, Graduate Texts in Mathematics, 58, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1977.
2. K. Mahler, “Ein Beweis der Transcendenz der *p*-adischen Exponentialfunktion”, *J. Reine Angew. Math.*, **169** (1932), 61–66.
3. N. I. Feldman, Yu. V. Nesterenko, “Transcendental numbers”, *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, **44**, Springer-Verlag, Berlin, 1998, 1–345.
4. G. R. Veldkamp, “Ein Transzenden-Satz für *p*-adische Zahlen”, *J. London Math. Soc.*, **15**:3 (1940), 183–192.
5. А. О. Гельфонд, “О делимости разности степеней целых чисел на степень простого идеала”, *Матем. сб.*, **7(49)** (1940), 7–25; А. О. Гельфонд, *Избранные труды*, Наука, М., 1973, 84–99.
6. W. W. Adams, “Transcendental numbers in the *p*-adic domain”, *Amer. J. Math.*, **88**:2 (1966), 279–308.
7. А. О. Гельфонд, “Об алгебраической независимости трансцендентных чисел некоторых классов”, *УМН*, **4**:5 (1949), 14–48; А. О. Гельфонд, *Избранные труды*, Наука, М., 1973, 191–222.
8. T. N. Shorey, “*p*-adic analogue of a theorem of Tijdeman and its application”, *Indag. Math.*, **34**:5 (1972), 436–442.

9. M. Waldschmidt, "Propriétés arithmétiques des valeurs de fonctions méromorphes algébriquement indépendantes", *Acta Arith.*, **23** (1973), 19–88.
10. W. D. Brownawell, "On the development of Gelfond's method", *Number theory, Proc. Southern Illinois Conf.* (Carbondale), *Lecture Notes in Math.*, **751**, 1979, 16–44.
11. J. P. Serre, "Dépendance d'exponentielles p -адических", *Theorie des Nombres* (1965–1966), *Semin. Delange–Pisot–Poitou*, **15**, 1967, 1–14.
12. S. Lang, *Introduction to transcendental numbers*, Reading, Addison-Wesley, 1966.
13. Г. В. Чудновский, *Некоторые аналитические методы в теории трансцендентных чисел*, Препринт ИМ-74-8, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1974.
14. Г. В. Чудновский, *Аналитические методы в диофантовых приближениях*, Препринт ИМ-74-9, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1974.
15. Yu. V. Nesterenko, "On the algebraic independence of algebraic numbers to algebraic powers", *Progr. Math.*, **31** (1983), 199–220.
16. P. Philippon, "Critères pour l'indépendance algébrique", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **64**:1 (1986), 5–52.
17. Ю. В. Нестеренко, "О мере алгебраической независимости значений некоторых функций", *Матем. сб.*, **128(170)**:4(12) (1985), 545–568; англ. пер.: Yu. V. Nesterenko, "On a measure of the algebraic independence of the values of certain functions", *Math. USSR Sb.*, **56**:2 (1987), 545–567.
18. M. Waldschmidt, "Groupes algébriques et grand degré de transcendance", *Acta Math.*, **156**:1 (1986), 253–294.
19. W. D. Brownawell, "Large transcendence degree revisited. I. Exponential and non- CM -cases", *Diophantine approximation and transcendence theory* (Bonn, 1987), *Lecture Notes in Math.*, **1290**, Springer, Berlin, 1987, 149–173.
20. Ю. В. Нестеренко, "О степени трансцендентности некоторых полей, порожденных значениями экспоненциальной функции", *Матем. заметки*, **46**:3 (1989), 40–49; англ. пер.: Yu. V. Nesterenko, "Transcendence degree of some fields generated by values of the exponential function", *Math. Notes*, **46**:3 (1989), 706–712.
21. K. Mahler, "Über transzendente p -adische Zahlen", *Compositio Math.*, **2** (1935), 259–275.
22. Ю. В. Нестеренко, "О мере алгебраической независимости значений функций Рамануджана", *Аналитическая теория чисел и приложения*, Тр. МИАН, **218**, Наука, М., 1997, 299–334; англ. пер.: Yu. V. Nesterenko, "On the measure of algebraic independence of the values of Ramanujan functions", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **218**:3 (1997), 294–331.
23. М. Вальдшмидт, Ю. В. Нестеренко, "О приближении алгебраическими числами значений экспоненциальной функции и логарифма", *Диофантовы приближения*, Сб., посвященный памяти проф. Н. И. Фельдмана, Матем. записки, **2**, 1996, 23–42.
24. А. В. Шидловский, *Трансцендентные числа*, Наука, М., 1987; англ. пер.: A. V. Shidlovskii, *Transcendental numbers*, de Gruyter Studies in Mathematics, **12**, Walter de Gruyter, Berlin, 1989.
25. Ph. Robba, "Lemmes de Schwarz et lemmes d'approximations p -адических en plusieurs variables", *Invent. Math.*, **48**:3 (1978), 245–277.
26. P. Philippon, "Indépendance algébrique de valeurs de fonctions exponentielles p -адических", *J. Reine Angew. Math.*, **329** (1981), 42–51.

Ю. В. НЕСТЕРЕНКО (Yu. V. NESTERENKO)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова,

механико-математический факультет

E-mail: nester@orc.ru

Поступило в редакцию

23.05.2006