Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. З. Гараев, В. С. Гарсиа, С. В. Конягин, Проблема Варинга с τ -функцией Рамануджана, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 1, 39–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/im1139>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 09:16:06

УДК 511.34

М. З. Гараев, В. К. Гарсия, С. В. Конягин

Проблема Варинга с τ -функцией Рамануджана

Доказано, что диофантово уравнение $\sum_{i=1}^{74000} \tau(n_i) = N$, где $\tau(n)$ – τ -функция Рамануджана, для любого целого N имеет решение в натуральных числах $n_1, n_2, \dots, n_{74000}$, удовлетворяющих условию $\max_{1 \leq i \leq 74000} n_i \ll |N|^{2/11} + 1$. Рассмотрены аналогичные вопросы в полях вычетов по модулю большого простого числа p .

Библиография: 13 наименований.

§ 1. Введение

Функция Рамануджана $\tau(n)$ определяется соотношением

$$X \prod_{n=1}^{\infty} (1 - X^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) X^n$$

и обладает рядом замечательных свойств арифметической природы. Известно, что:

- 1) $\tau(n)$ – целочисленная мультипликативная функция, т. е. при $\gcd(n, m) = 1$ имеем $\tau(nm) = \tau(n)\tau(m)$;
- 2) для любого целого числа $\alpha \geq 0$ и простого q выполнено $\tau(q^{\alpha+2}) = \tau(q^{\alpha+1})\tau(q) - q^{11}\tau(q^{\alpha})$, в частности $\tau(q^2) = \tau^2(q) - q^{11}$;
- 3) $\tau(n) \equiv \sum_{d|n} d^{11} \pmod{691}$;
- 4) $\tau(n) \equiv \sum_{d|n} d^{11} \pmod{2^8}$ при нечетном n ;
- 5) $|\tau(q)| \leq 2q^{11/2}$ для любого простого q и $|\tau(n)| \ll n^{11/2+\varepsilon}$ для любого положительного целого n и любого $\varepsilon > 0$; это неравенство вывел П. Делинь [1].

Здесь и далее константы в символах Виноградова $\ll$ и $\gg$ зависят только от ε .

Доказательства этих и других свойств функции $\tau(n)$ можно найти в работах [1]–[4]. В частности, из результатов, полученных в работе [4], можно вывести, что любой класс вычетов по модулю простого числа p может быть записан как $\tau(n) \pmod{p}$ для некоторого положительного n . Используя оценки сумм-произведений, полученные Дж. Бургейном, Н. Кацем и Т. Тао [5], и оценки двойных тригонометрических сумм Виноградова, И. Е. Шпарлинский [6] установил, что значения $\tau(n)$, $n \leq p^4$, образуют конечный аддитивный базис по модулю p , т. е. существует целая абсолютная константа $s \geq 1$ такая, что любой класс вычетов по модулю p представим в виде

$$\tau(n_1) + \dots + \tau(n_s) \pmod{p},$$

Работа третьего автора выполнена при поддержке ИНТАС (грант № 03-51-2070), РФФИ (грант № 03-51-5070) и Программы Президента РФ государственной поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-5813.2006.1).

где $n_1, \dots, n_s \leq p^4$ – некоторые целые числа. В настоящей работе, применяя новый подход, мы уменьшаем показатель степени 4 числа p до наилучшего возможного значения, равного $2/11$.

ТЕОРЕМА 1. *Множество значений функции $\tau(n)$ образует конечный аддитивный базис множества целых чисел. Более того, для любого целого числа N диофантово уравнение*

$$\sum_{i=1}^{74000} \tau(n_i) = N$$

имеет решение в натуральных числах $n_1, n_2, \dots, n_{74000}$, удовлетворяющих условию

$$\max_{1 \leq i \leq 74000} n_i \ll |N|^{2/11} + 1.$$

Следует отметить, что число 74000 было получено в результате вычислений: $36 \times 2050 + 200$. Здесь число 2050 (так же, как число 200) может быть уменьшено, если использовать недавно полученные в работах [7], [8] улучшения в задаче Варинга–Гольдбаха. Однако количество слагаемых, тем не менее, останется большим. В связи с этим мы докажем следующий результат, в котором предполагается, что p – большое простое число.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого целого числа λ сравнение*

$$\sum_{i=1}^{16} \tau(n_i) - \sum_{i=1}^{16} \tau(m_i) \equiv \lambda \pmod{p}$$

имеет место для некоторых натуральных чисел $n_1, m_1, \dots, n_{16}, m_{16}$, удовлетворяющих условиям

$$\max_{1 \leq i \leq 16} \{n_i, m_i\} \ll p^2 \log^4 p, \quad \gcd(n_i m_i, 23!) = 1.$$

Используя теорему 2, мы показываем, что любой класс вычетов по модулю p представим в виде

$$\sum_{i=1}^{96} \tau(n_i) \pmod{p}$$

при условии $\max_{1 \leq i \leq 96} n_i \ll p^2 \log^4 p$. В частности, для некоторой положительной константы C множество

$$\{\tau(n) \pmod{p} : n \leq Cp^2 \log^4 p\}$$

образует конечный аддитивный базис в кольце вычетов $\mathbb{Z}_p$ порядка не более 96 (см. определение в [9]).

ТЕОРЕМА 3. *Для любого целого числа λ и любого $\varepsilon > 0$ сравнение*

$$\sum_{i=1}^{16} \tau(n_i) \equiv \lambda \pmod{p}$$

разрешимо в натуральных числах $n_1, \dots, n_{16}$, удовлетворяющих условию

$$\max_{1 \leq i \leq 16} n_i \ll p^{3+\varepsilon}.$$

В частности, множество $\{\tau(n) \pmod{p} : n \leq p^{3+\varepsilon}\}$ является базисом в $\mathbb{Z}_p$ порядка не более 16 для всех достаточно больших простых p .

Далее через $q, q_1, q_2, \dots$ обозначены простые числа, через $|\mathcal{A}|$ – мощность множества $\mathcal{A}$.

§ 2. Предварительные утверждения

Сначала приведем следствие классического результата Хуа Ло-Кена [10].

ЛЕММА 4. Пусть s_0 – фиксированное целое число, не меньшее 2049, и J – число решений уравнения Варинга–Гольдбаха

$$\sum_{i=1}^{s_0} q_i^{11} = N$$

в простых числах $q_1, \dots, q_{s_0}$ таких, что $q_i > 23$ для всех $1 \leq i \leq s_0$. Тогда существуют положительные постоянные $c_1 = c_1(s_0)$ и $c_2 = c_2(s_0)$ такие, что для всех достаточно больших целых чисел N , $N \equiv s_0 \pmod{2}$, выполнены следующие оценки:

$$c_1 \frac{N^{s_0/11-1}}{(\log N)^{s_0}} \leq J \leq c_2 \frac{N^{s_0/11-1}}{(\log N)^{s_0}}.$$

Далее нам понадобится следующий результат А. А. Глибичука [11].

ЛЕММА 5. Если $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset \mathbb{Z}_p$ – подмножества такие, что $|\mathcal{X}| |\mathcal{Y}| > 2p$, то

$$\left\{ \sum_{i=1}^8 x_i y_i : x_i \in \mathcal{X}, y_i \in \mathcal{Y} \right\} = \mathbb{Z}_p.$$

Понадобятся также некоторые результаты, основанные на значениях функции $\tau(n)$. По уже упомянутому результату Делиня имеем

$$|\tau(n)| \ll n^{11/2+\varepsilon}$$

и следующие N^6 чисел

$$\sum_{i=1}^6 \tau(a_i), \quad 1 \leq a_1, \dots, a_6 \leq N,$$

являются целыми числами порядка $O(N^{11/2+\varepsilon})$. Таким образом, в среднем каждое число представимо в виде суммы шести значений функции $\tau(n)$ многими способами. Можно ожидать, что нуль тоже можно представить в виде суммы шести значений $\tau(n)$. Имея в виду это наблюдение, будем искать шесть положительных целых чисел $a_1, \dots, a_6$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^6 \tau(a_i) = 0.$$

Существует много формул, связывающих функцию $\tau(n)$ с функцией

$$\sigma_s(n) = \sum_{d|n} d^s.$$

Известно, например, что

$$\tau(n) = \frac{65}{756}\sigma_{11}(n) + \frac{691}{756}\sigma_5(n) - \frac{691}{3} \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_5(k)\sigma_5(n-k).$$

Другая формула имеет вид

$$\tau(n) = n^4\sigma_0(n) - 24 \sum_{k=1}^{n-1} (35k^4 - 52k^3n + 18k^2n^2)\sigma_0(k)\sigma_0(n-k)$$

(см. [12]). Такого рода формулы полезны для численных расчетов значений функции $\tau(n)$. В частности, можно вывести, что

$$\begin{aligned} \tau(12) &= -370944, & \tau(27) &= -73279080, & \tau(55) &= 2582175960, \\ \tau(69) &= 4698104544, & \tau(90) &= 13173496560, & \tau(105) &= -20380127040. \end{aligned}$$

Таким образом, мы имеем

$$\tau(12) + \tau(27) + \tau(55) + \tau(69) + \tau(90) + \tau(105) = 0. \quad (1)$$

Далее, считая теорему 2 доказанной, умножим равенство множеств

$$\left\{ \sum_{i=1}^{16} \tau(n_i) - \sum_{i=1}^{16} \tau(m_i) \pmod{p} : m_i, n_i \leq Cp^2 \log^4 p, \gcd(m_i n_i, 23!) = 1 \right\} = \mathbb{Z}_p$$

на $\tau(12)$. Поскольку

$$\begin{aligned} \tau(12) \left(\sum_{i=1}^{16} \tau(n_i) - \sum_{i=1}^{16} \tau(m_i) \right) &= \sum_{i=1}^{16} \tau(12)\tau(n_i) \\ &+ (\tau(27) + \tau(55) + \tau(69) + \tau(90) + \tau(105)) \sum_{i=1}^{16} \tau(m_i), \end{aligned}$$

то, используя мультипликативность функции $\tau(n)$, мы выводим, что множество

$$\{\tau(n) \pmod{p} : n \leq Cp^2 \log^4 p\}$$

является аддитивным базисом в $\mathbb{Z}_p$ порядка не более 96.

Полезно также отметить, что

$$\begin{aligned} \tau(6) &= -6048, & \tau(14) &= 401856, & \tau(29) &= 128406630, & \tau(41) &= 308120442, \\ \tau(42) &= 101267712, & \tau(44) &= -786948864, & \tau(48) &= 248758272. \end{aligned}$$

Таким образом, получим представление нуля в виде суммы семи значений функции $\tau(n)$:

$$\tau(6) + \tau(14) + \tau(29) + \tau(41) + \tau(42) + \tau(44) + \tau(48) = 0. \quad (2)$$

§ 3. Доказательство теоремы 1

Пусть M – большой четный параметр. Определим следующее множество:

$$\mathcal{Q} = \{q: 23 < q \leq M^{1/11}\}.$$

Подмножество $\mathcal{Q}' \subset \mathcal{Q}$ назовем *допустимым*, если уравнение

$$\sum_{i=1}^6 \tau(q'_i) = \sum_{i=7}^{12} \tau(q'_i)$$

не имеет решений $q'_1, \dots, q'_{12} \in \mathcal{Q}'$, удовлетворяющих условиям

$$q'_1 < \dots < q'_6, \quad q'_7 < \dots < q'_{12}, \quad (q'_1, \dots, q'_6) \neq (q'_7, \dots, q'_{12}).$$

Используя различные свойства функции $\tau(n)$, легко проверить, что существуют допустимые подмножества из 12 элементов. Это можно получить, используя упомянутые выше сравнения

$$\tau(q) \equiv 1 + q^{11} \pmod{691}, \quad \tau(q) \equiv 1 + q^{11} \pmod{2^8}, \quad (3)$$

где q – нечетное простое число, китайскую теорему об остатках и теорему о простых числах в арифметической прогрессии для доказательства того, что для любого j , $1 \leq j \leq 12$, можно найти достаточно большое простое число ℓ_j такое, что

$$\tau(\ell_j) \equiv 2^j \pmod{8 \times 691}.$$

Далее, рассмотрим допустимое подмножество $\mathcal{Q}'$ наибольшей мощности. Если их несколько, то в качестве $\mathcal{Q}'$ выберем любое из таких подмножеств. В частности, $|\mathcal{Q}'| \geq 12$, и все суммы вида

$$\sum_{i=1}^6 \tau(q'_i), \quad q'_1 < \dots < q'_6, \quad q'_1, \dots, q'_6 \in \mathcal{Q}',$$

различны. Из оценки Делиня функции $\tau(q)$ и принципа Дирихле выводим:

$$|\mathcal{Q}'|^6 \ll (M^{1/11})^{11/2},$$

откуда получаем

$$|\mathcal{Q}'| \ll M^{1/11-1/132}. \quad (4)$$

Для данного $q \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}'$ рассмотрим множество $\mathcal{Q}' \cup \{q\}$. Из максимальной $|\mathcal{Q}'|$ следует существование $q'_1, \dots, q'_{12} \in \mathcal{Q}' \cup \{q\}$ таких, что

$$\sum_{i=1}^6 \tau(q'_i) = \sum_{i=7}^{12} \tau(q'_i), \quad (5)$$

$$q'_1 < \dots < q'_6, \quad q'_7 < \dots < q'_{12}, \quad (q'_1, \dots, q'_6) \neq (q'_7, \dots, q'_{12}). \quad (6)$$

Из определения множества $\mathcal{Q}'$ получаем, что

$$q \in \{q'_1, \dots, q'_{12}\}.$$

Кроме того, согласно (6) число q появляется в последовательности $q'_1, \dots, q'_{12}$ не более чем в двух местах. Если элемент q появляется там дважды, то он появляется ровно один раз в последовательности $q'_1, \dots, q'_6$ и ровно один раз в последовательности $q'_7, \dots, q'_{12}$. Следовательно, можно вычесть из обеих частей (5) число $\tau(q)$ и перенумеровать оставшиеся числа q'_i . Мы получим существование элементов

$$q'_1, \dots, q'_5 \in \mathcal{Q}', \quad q'_7, \dots, q'_{11} \in \mathcal{Q}' \quad (7)$$

таких, что

$$\sum_{i=1}^5 \tau(q'_i) = \sum_{i=7}^{11} \tau(q'_i),$$

$$q'_1 < \dots < q'_5, \quad q'_7 < \dots < q'_{11}, \quad (q'_1, \dots, q'_5) \neq (q'_7, \dots, q'_{11}). \quad (8)$$

Поскольку $|\mathcal{Q}'| > 10$, то найдется число

$$q' \in \mathcal{Q}' \setminus \{q'_1, \dots, q'_5, q'_7, \dots, q'_{11}\}. \quad (9)$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^5 \tau(q'_i) + \tau(q') = \sum_{i=7}^{11} \tau(q'_i) + \tau(q').$$

Это ввиду соотношений (7)–(9) противоречит определению $\mathcal{Q}'$.

Таким образом, единственный возможный случай – это когда q появляется в последовательности $q'_1, \dots, q'_{12}$ ровно один раз. Значит, в силу (5) существуют $\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{11} \in \mathcal{Q}'$ такие, что

$$\sum_{i=1}^6 \tau(\tilde{q}_i) = \sum_{i=7}^{11} \tau(\tilde{q}_i) + \tau(q).$$

Следовательно, для всех $q \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}'$ мы получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 \tau(\tilde{q}_i q) - \sum_{i=7}^{11} \tau(\tilde{q}_i q) - \tau(q^2) &= \tau(q) \sum_{i=1}^6 \tau(\tilde{q}_i) - \tau(q) \sum_{i=7}^{11} \tau(\tilde{q}_i) - \tau(q^2) \\ &= \tau^2(q) - \tau(q^2) = q^{11}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что для любого элемента $q \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}'$ существуют элементы $\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{11} \in \mathcal{Q}'$ такие, что

$$q^{11} = \sum_{i=1}^6 \tau(\tilde{q}_i q) - \sum_{i=7}^{11} \tau(\tilde{q}_i q) - \tau(q^2). \quad (10)$$

Наша следующая цель – доказать разрешимость уравнения Варинга–Гольдбаха

$$\sum_{j=1}^{2050} q_j^{11} = M \quad (11)$$

в простых числах $q_1, \dots, q_{2050} \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}'$. Сначала заметим, что из соотношения (11) вытекает неравенство $q_j \leq M^{1/11}$. Далее, для числа решений I

уравнения (11) с условием $q_j \in \mathcal{Q}$ из леммы 4 при $s_0 = 2050$ мы получаем следующую оценку снизу:

$$I \geq c_1 \frac{M^{2050/11-1}}{(\log M)^{2050}}. \quad (12)$$

Для числа решений J уравнения (11) таких, что по крайней мере одно $q_{j_0} \in \mathcal{Q}'$, из леммы 4 при $s_0 = 2049$ и (4) получаем оценку сверху:

$$J \leq 2050 c_2 |\mathcal{Q}'| \frac{M^{2049/11-1}}{(\log M)^{2049}} \ll \frac{M^{2050/11-1-1/132}}{(\log M)^{2049}}. \quad (13)$$

Таким образом, $I > J$. Следовательно, уравнение (11) разрешимо в числах $q_j \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}'$. Зафиксируем одно из таких решений $q_1, \dots, q_{2050}$. К каждому q_j , $1 \leq j \leq 2050$, применим (10) при $q = q_j$ и просуммируем полученные соотношения по $1 \leq j \leq 2050$. Так как $\tilde{q}_i q \leq M^{2/11}$, то мы получаем

$$M = \sum_{i=1}^{6 \times 2050} \tau(n_i) - \sum_{i=1}^{6 \times 2050} \tau(m_i), \quad (14)$$

где

$$\max_{1 \leq i \leq 6 \times 2050} \{n_i, m_i\} \leq M^{2/11}, \quad \gcd(n_i m_i, 23!) = 1.$$

Мы предположили, что M – большое четное число. Ясно, что можно умножить обе части равенства (14) на -1 и получить представление такого же вида и для $-M$. Более того, мы можем рассматривать M любой четности, для этого следует заменить число M на $M - \tau(1)$ или $M - \tau(29)$. Таким образом, любое целое число M с достаточно большим $|M|$ может быть представлено в виде

$$M = \sum_{i=1}^{6 \times 2050} \tau(n_i) - \sum_{i=1}^{6 \times 2050+1} \tau(m_i), \quad (15)$$

где

$$\max_{1 \leq i \leq 6 \times 2050+1} \{n_i, m_i\} \leq |M|^{2/11} + 1, \quad \gcd(n_i m_i, 23!) = 1.$$

Напомним, что (см. (1))

$$-\tau(12) = 370944 = \tau(27) + \tau(55) + \tau(69) + \tau(90) + \tau(105).$$

Следовательно, умножая (15) на $-\tau(12)$ и используя мультипликативность функции $\tau(n)$, получаем

$$370944M = \sum_{i=1}^{6 \times 6 \times 2050+1} \tau(n_i) \quad (16)$$

при условии $\max_{1 \leq i \leq 6 \times 6 \times 2050+1} n_i \leq 106|M|^{2/11}$.

Докажем, что любое целое число r , $0 \leq r < 370944$, может быть представлено в виде суммы, скажем, ровно 198 чисел вида $\tau(n)$, $n \leq 105$ (дополнительные вычисления могут уменьшить 198 до значительно меньшей константы, но это существенно не повлияет на наш результат). Для этого напомним, что

$$\tau(1) = 1, \quad \tau(2) = -24, \quad \tau(3) = 252, \quad \tau(5) = 4830, \quad \tau(8) = 84480.$$

Если $0 \leq r < 370944$, то

$$r = 84480r_5 + r'_4 = \tau(8)r_5 + r'_4$$

для некоторых целых чисел $0 \leq r_5 \leq 4$ и $0 \leq r'_4 < 84480$. Далее, любое такое число r'_4 может быть записано в виде

$$r'_4 = 4830r_4 + r'_3 = \tau(5)r_4 + r'_3,$$

где $0 \leq r_4 \leq 17$ и $0 \leq r'_3 < 4830$. Любое такое число r'_3 можно представить в виде

$$r'_3 = 252r_3 - r'_2 = \tau(3)r_3 - r'_2,$$

где $0 \leq r_3 \leq 20$ и $0 \leq r'_2 < 252$. Любое такое число r'_2 записывается в виде

$$r'_2 = 24r_2 - r_1 = -\tau(2)r_2 - r_1,$$

где $0 \leq r_2 \leq 11$ и $0 \leq r_1 < 24$. Таким образом, мы получаем

$$r = \tau(8)r_5 + \tau(5)r_4 + \tau(3)r_3 + \tau(2)r_2 + r_1.$$

Следовательно, чтобы представить данное r , достаточно использовать

$$r_5 + \dots + r_1 \leq 75$$

слагаемых вида $\tau(n)$, $n \leq 10$. С другой стороны, любое целое число, большее 29, может быть записано в форме $6x + 7y$ с неотрицательными целыми x, y . Таким образом, чтобы получить фиксированное количество слагаемых для всех r , можно использовать конструкции (1) и (2). В частности, любое целое r , $0 \leq r < 370944$, можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{198} \tau(a_i)$$

с натуральными числами $a_1, \dots, a_{198} \leq 105$.

Пусть теперь N будет произвольным целым числом с достаточно большим модулем $|N|$. Последнее рассуждение показывает, что для некоторых натуральных чисел $a_1, \dots, a_{199} \leq 105$ мы получаем

$$N \equiv \sum_{i=1}^{198} \tau(a_i) \pmod{370944}.$$

Следовательно, используя (16), выводим:

$$N = \sum_{i=1}^{198} \tau(a_i) + 370944M = \sum_{i=1}^{6 \times 6 \times 2050 + 199} \tau(n_i) = \sum_{i=1}^{73999} \tau(n_i),$$

где

$$\max_{1 \leq i \leq 73999} n_i \leq 106|M|^{2/11} \leq 15N^{2/11}.$$

Таким образом, мы доказали, что существует абсолютная положительная целая константа N_0 такая, что для любого целого числа N , $|N| \geq N_0$, уравнение

$$\sum_{i=1}^{73999} \tau(n_i) = N$$

имеет решение в натуральных числах $n_1, \dots, n_{73999} \ll |N|^{2/11}$.

Пусть теперь N – произвольное целое число. Если $|N| > N_0$, то $|N - \tau(1)| \geq N_0$, и поэтому мы можем выразить число $N - \tau(1)$ в виде суммы 73999 значений $\tau(n)$ при $n \ll |N|^{2/11}$. В этом случае теорема 1 доказана.

Если $|N| \leq N_0$, то возьмем постоянное целое число n_0 такое, что $|\tau(n_0)| > 2N_0$. Тогда

$$|N - \tau(n_0)| > N_0.$$

Таким образом, $N - \tau(n_0)$ может быть представлено в виде суммы 73999 значений $\tau(n)$, $n \ll 1$. Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Легко видеть, что построенные в доказательстве теоремы 1 числа n_i удовлетворяют условию

$$\tau(n_i) \ll |N|.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В нашей последующей статье мы докажем, что для любого целого числа N , $|N| \geq 2$, диофантово уравнение

$$\sum_{i=1}^{148000} \tau(n_i) = N$$

имеет решение в натуральных числах $n_1, n_2, \dots, n_{148000}$, удовлетворяющих условию

$$\max_{1 \leq i \leq 148000} n_i \ll |N|^{2/11} e^{-c \log |N| / \log \log |N|}$$

для некоторой абсолютной константы $c > 0$. Вследствие оценки Делиня имеем $\tau(n) \leq n^{11/2} d(n)$, где $d(n)$ – число делителей n , это условие соответствует наилучшей возможной границе для размера переменных n_i с точностью до значения константы c .

§ 4. Доказательство теоремы 2

Пусть C – большая положительная константа. Определим множества

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \{q: 23 < q \leq Cp^{1/2} \log p\}, \\ \mathcal{J} &= \{\tau(q) \pmod{p}: q \in \mathcal{Q}\}. \end{aligned}$$

Если $|\mathcal{J}| > 3\sqrt{p}$, то можно разбить $\mathcal{J}$ на два подмножества $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ таких, что $|\mathcal{X}| |\mathcal{Y}| > 2p$. Доказываемый результат в этом случае следует из леммы 5.

Теперь рассмотрим случай $|\mathcal{J}| < 3\sqrt{p}$. Тогда

$$\mathcal{Q} = \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} \mathcal{A}_i,$$

где множества $\mathcal{A}_i$ определяются так, что условие $q', q'' \in \mathcal{A}_i$ влечет сравнение $\tau(q') \equiv \tau(q'') \pmod{p}$.

Ясно, что существует подмножество $\mathcal{A}'_i \subset \mathcal{A}_i$ такое, что

$$0 \leq |\mathcal{A}_i| - |\mathcal{A}'_i| \leq 3, \quad |\mathcal{A}'_i| \equiv 0 \pmod{4}.$$

Обозначим

$$\mathcal{Q}' = \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{I}|} \mathcal{A}'_i.$$

По теореме о распределении простых чисел мы имеем $|\mathcal{Q}| \geq Cp^{1/2}$, если p достаточно велико. Тогда

$$|\mathcal{Q}'| \geq |\mathcal{Q}| - 3|\mathcal{I}| \geq |\mathcal{Q}| - 9p^{1/2} \geq (C - 9)p^{1/2}. \quad (17)$$

Поскольку мощность каждого множества $\mathcal{A}'_i$ четна, можно составить $|\mathcal{A}'_i|/2$ пар различных простых из $\mathcal{A}'_i$. Тогда всего будет

$$\sum_{i=1}^{|\mathcal{I}|} |\mathcal{A}'_i|/2 = |\mathcal{Q}'|/2$$

пар (q, q') . Разделим это множество пар на два непересекающихся подмножества J_1 и J_2 так, чтобы $|J_1| = |J_2| = |\mathcal{Q}'|/4$. Далее рассмотрим следующие два множества:

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \{\tau(qq') - \tau(q^2) \pmod{p} : (q, q') \in J_1\}, \\ \mathcal{Y} &= \{\tau(qq') - \tau(q^2) \pmod{p} : (q, q') \in J_2\}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\tau(qq') - \tau(q^2) = \tau(q)\tau(q') - \tau(q^2) \equiv \tau^2(q) - \tau(q^2) \equiv q^{11} \pmod{p}$$

и $q^{11} \pmod{p}$ может принимать любое значение не более 11 раз, то получаем

$$|\mathcal{X}| \geq |J_1|/11 = |\mathcal{Q}'|/44, \quad |\mathcal{Y}| \geq |J_2|/11 \geq |\mathcal{Q}'|/44.$$

Следовательно, если выбрать, например, $C = 100$, то из (17) получим, что $|\mathcal{X}||\mathcal{Y}| > 2p$. Применяя лемму 5, мы завершим доказательство теоремы 2.

§ 5. Доказательство теоремы 3

Рассмотрим множество классов вычетов

$$\mathcal{A}' = \{\tau(q) \pmod{p} : p/2 < q \leq p\}.$$

Для заданного $a' \in \mathcal{A}'$ пусть $I(a')$ – число решений сравнения

$$\tau(q) \equiv a' \pmod{p}, \quad p/2 < q \leq p.$$

Из асимптотического закона распределения простых чисел имеем

$$\sum_{a' \in \mathcal{A}'} I(a') = \sum_{p/2 < q \leq p} 1 \gg p \log^{-1} p.$$

Следовательно, существует элемент $a'_0 \in \mathcal{A}'$ такой, что

$$I(a'_0) \gg p|\mathcal{A}'|^{-1} \log^{-1} p. \quad (18)$$

Далее, обозначим $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \setminus \{a'_0\}$, если $|\mathcal{A}'| \geq 2$, и $\mathcal{A} = \{\tau(1)\} = \{1\}$, если $|\mathcal{A}'| = 1$. Тогда

$$|\mathcal{A}'|/2 \leq |\mathcal{A}| \leq |\mathcal{A}'|. \quad (19)$$

Теперь определим множество

$$\mathcal{B} = \{\tau(q^2) \pmod{p} : p/2 < q \leq p, \tau(q) \equiv a'_0 \pmod{p}\}.$$

Элементы множества $\mathcal{B}$ имеют вид

$$\tau(q^2) = \tau^2(q) - q^{11} \equiv (a'_0)^2 - q^{11} \pmod{p},$$

где $p/2 < q \leq p$ и $\tau(q) \equiv a'_0 \pmod{p}$. Таким образом, в силу (18) и (19) число q может принимать любое значение из множества, содержащего

$$\gg p|\mathcal{A}'|^{-1} \log^{-1} p \gg p|\mathcal{A}|^{-1} \log^{-1} p$$

различных классов вычетов по модулю p . Так как $q^{11} \pmod{p}$ может принимать любое значение не более 11 раз, то

$$|\mathcal{B}| \gg p|\mathcal{A}|^{-1} \log^{-1} p. \quad (20)$$

Возьмем произвольное ε , $0 < \varepsilon < 0.1$. Пусть $\mathcal{C}$ – множество попарно различных элементов последовательности

$$\tau(q) \pmod{p}, \quad \tau(q^2) \pmod{p},$$

где $q \leq p^{0.5\varepsilon}$. Применяя приведенное выше рассуждение ко множествам

$$\{\tau(q) \pmod{p} : q \leq p^{0.5\varepsilon}\},$$

$$\{\tau(q^2) \pmod{p} : q \leq p^{0.5\varepsilon}\},$$

получаем, что $|\mathcal{C}| \gg p^{\varepsilon/6}$. Заметим, что множества $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ составлены из элементов вида $\tau(n_1)$, $\tau(n_2)$, $\tau(n_3)$ таким образом, что числа n_1 , n_2 , n_3 попарно взаимно просты и $n_1 \leq p$, $n_2 \leq p^2$, $n_3 \leq p^\varepsilon$.

Если $|\mathcal{A}| < p^{0.1\varepsilon}$, то $|\mathcal{B}| \gg p^{1-\varepsilon/9}$ в силу (20), и поэтому $|\mathcal{B}||\mathcal{C}| \gg p^{1+0.01\varepsilon}$. Следовательно, мы можем применить лемму 5 при $\mathcal{X} = \mathcal{B}$ и $\mathcal{Y} = \mathcal{C}$ и использовать мультипликативность функции $\tau(n)$. Элементы множества

$$\mathcal{X}\mathcal{Y} = \{xy : x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}\}$$

в этом случае будут иметь вид $\tau(n) \pmod{p}$, где $n \leq p^{2+\varepsilon}$.

Если $|\mathcal{A}| > p^{2/3}$, то мы разобьем $\mathcal{A}$ на два непересекающихся подмножества $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, имеющих не меньше $p^{2/3}/3$ элементов в каждом. Применим лемму 5 для $\mathcal{X} = \mathcal{A}_1$ и $\mathcal{Y} = \mathcal{A}_2$. Элементы множества $\mathcal{X}\mathcal{Y}$ в этом случае будут иметь вид $\tau(n) \pmod{p}$, где $n \leq p^2$.

Если $p^{\varepsilon/10} \leq |\mathcal{A}| \leq p^{2/3}$, то через $\mathcal{T}$ обозначим то из двух множеств $\mathcal{A} + \mathcal{C}$ и $\mathcal{A}\mathcal{C}$, которое имеет наибольшую мощность. Так как $|\mathcal{C}| \gg p^{\varepsilon/6}$, то по оценке Бургейна [13, теорема 1.1] существует положительная константа $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$ такая, что

$$|\mathcal{T}| \gg p^\gamma |\mathcal{A}|.$$

Тогда $|\mathcal{B}||\mathcal{T}| \gg p^{1+\gamma/2}$. Поэтому мы можем применить лемму 5 для $\mathcal{X} = \mathcal{B}$ и $\mathcal{Y} = \mathcal{T}$. Элементы множества $\mathcal{X}\mathcal{Y}$ в этом случае будут иметь вид либо

$\tau(n_1) + \tau(n_2) \pmod{p}$ при $n \leq p^3$, либо $\tau(n) \pmod{p}$ при $n \leq p^{3+\varepsilon}$. Отсюда вытекает теорема 3.

Список литературы

1. П. Делинь, “Гипотеза Вейля. I”, *УМН*, **30:5** (1975), 159–190; пер. с фр.: P. Deligne, “La conjecture de Weil. I”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 1974, № 43, 273–307.
2. H. Iwaniec, *Topics in classical automorphic forms*, Grad. Stud. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
3. Н. Коблиц, *Введение в эллиптические кривые и модулярные формы*, ред. Ю. И. Манин, Мир, М., 1988; пер. с англ.: N. Koblitz, *Introduction to elliptic curves and modular forms*, Grad. Texts in Math., **97**, Springer-Verlag, New York, 1984.
4. Ж. П. Серр, “Сравнения и модулярные формы”, *УМН*, **28:2** (1973), 183–196; пер. с фр.: J.-P. Serre, “Congruences et formes modulaires [d’après H. P. F. Swinnerton-Dyer]”, *Séminaire Bourbaki*, 24e année (1971/1972), Exp. No. 416, *Lecture Notes in Math.*, **317**, Springer, Berlin, 1973, 319–338.
5. J. Bourgain, N. Katz, T. Tao, “A sum-product estimate in finite fields and applications”, *Geom. Func. Anal.*, **14:1** (2004), 27–57.
6. I. E. Shparlinski, “On the value set of the Ramanujan function”, *Arch. Math.*, **85:6** (2005), 508–513.
7. Г. И. Архипов, В. Н. Чубариков, “О числе слагаемых в аддитивной проблеме Виноградова и ее обобщениях”, *IV Международная конференция “Современные проблемы теории чисел и ее приложения”*: Актуальные проблемы, Ч. I (Тула, 10–15 сентября 2001), Мех.-мат. МГУ им. М. В. Ломоносова, М., 2002, 5–38.
8. A. V. Kumchev, D. I. Tolev, “An invitation to additive prime number theory”, *Serdica Math. J.*, **31:1–2** (2005), 1–74.
9. А. А. Карацуба, “Аддитивные сравнения”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **61:2** (1997), 81–94; англ. пер.: A. A. Karatsuba, “Additive congruences”, *Izv. Math.*, **61:2** (1997), 317–329.
10. Хуа Ло-Кен, *Аддитивная теория простых чисел*, Тр. МИАН, **22**, 1947.
11. А. А. Глибичук, “Комбинаторные свойства множеств вычетов по простому модулю и задача Эрдёша–Грэхэма”, *Матем. заметки*, **79:3** (2006), 384–395; англ. пер.: A. A. Glibichuk, “Combinatorial properties of sets of residues modulo a prime and the Erdős–Graham problem”, *Math. Notes*, **79:3–4** (2006), 356–365.
12. D. Niebur, “A formula for Ramanujan’s τ -function”, *Illinois J. Math.*, **19** (1975), 448–449.
13. J. Bourgain, “More on the sum-product phenomenon in prime fields and its applications”, *Int. J. Number Theory*, **1:1** (2005), 1–32.

М. З. ГАРАЕВ (M. Z. GARAEV)
National Autonomous University of Mexico,
Institute of Mathematics

Поступило в редакцию
12.07.2006

В. К. ГАРСИЯ (V. C. GARCIA)
National Autonomous University of Mexico,
Institute of Mathematics

С. В. КОНЯГИН (S. V. KONYAGIN)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет