Общероссийский математический портал

В. В. Дубинин, Кубатурные формулы для классов Бесова, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 2, 27–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/im114>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 10:48:37

УДК 517.5

В. В. Дубинин

Кубатурные формулы для классов Бесова

Работа посвящена исследованию оптимальных кубатурных формул для классов Бесова функций с ограничениями на смешанную разность и является продолжением работ [1] и [2]. Здесь для указанных выше классов установлен правильный порядок погрешности кубатурных формул, построенных на основе значений функции в точках.

Библиография: 12 наименований.

Задача численного интегрирования обычно состоит в оценке интеграла по значениям функции в отдельных точках¹. Более точно, пусть задана непрерывная функция $f(x)$, определенная либо на всем действительном пространстве и имеющая носитель в $\Omega = [0, 1]^d$, либо периодическая с периодом $[0, 1]^d$. Приближающий функционал, или кубатурная формула, имеет вид

$$I_N(f) = \sum_{i=1}^N \lambda_i f(\xi^i).$$

Абсолютная величина отклонения этого функционала от истинного значения интеграла носит название *погрешности* кубатурной формулы,

$$R_N(f, \Lambda_N) = \left| \sum_{i=1}^N \lambda_i f(\xi^i) - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right|,$$

где через Λ_N обозначена совокупность весов $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$ и узлов $\{\xi^i\}_{i=1}^N$ некоторой кубатурной формулы. Естественно построение кубатурной формулы для класса функций, выделяемых по их дифференциальным свойствам. Если мы обозначим рассматриваемый класс через F , то под погрешностью данной кубатурной формулы на этом классе мы будем понимать величину

$$R_N(F, \Lambda_N) = \sup_{f \in F} R_N(f, \Lambda_N).$$

Наряду с ней рассмотрим следующую величину:

$$R_N(F) = \inf_{\Lambda_N} R_N(F, \Lambda_N),$$

¹Задача восстановления интеграла с использованием значений производных наряду со значениями самой функции в данной работе не рассматривается.

где $\inf$ взят по всевозможным наборам $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$ и $\{\xi^i\}_{i=1}^N$. Кубатурная формула называется *оптимальной в смысле порядка*² для данного класса, если

$$R_N(F) \asymp R_N(F, \Lambda_N),$$

где под знаком $\asymp$ мы, как всегда, понимаем равенство соответствующих величин с точностью до функции, ограниченной сверху и снизу положительными числами, вообще говоря, зависящими от всех параметров, кроме N . Основная цель данной работы – установление оптимальности по порядку конкретной кубатурной формулы для классов функций, к описанию которых мы переходим. Для краткости мы будем называть эти классы *классами Бесова*, хотя правильнее было бы называть их *классами Бесова для смешанных разностей*. Мы надеемся, что это не приведет к недоразумению, так как именно эти классы в основном рассматриваются в работе³.

Для описания классов функций нам понадобятся определения модуля непрерывности и смешанной разности. Для полноты изложения напомним их определения. Для функции $f(\mathbf{x})$ положим

$$\Delta_{j;h_j} f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h_j, x_{j+1}, \dots, x_d) - f(x_1, \dots, x_d),$$

и

$$\Delta_{j;h_j}^l = \underbrace{\Delta_{j;h_j} \cdots \Delta_{j;h_j}}_{l \text{ раз}}.$$

Используя эти обозначения, оператор смешанной разности представляется в виде

$$\Delta_{\mathbf{h}}^l(G) = \prod_{j \in G} \Delta_{j;h_j}^l,$$

где G – некоторое подмножество $\{1, \dots, d\}$. Наряду с модулем непрерывности для периодических функций,

$$\Omega_l(G)(f, \mathbf{t})_p = \sup_{|h_j| \leq t_j} \|\Delta_{\mathbf{h}}^l(G) f(\mathbf{x})\|_{L_p(\Omega)},$$

нам понадобится также аналогичный модуль непрерывности для функций, заданных на всем пространстве

$$\dot{\Omega}_l(G)(f, \mathbf{t})_p = \sup_{|h_j| \leq t_j} \|\Delta_{\mathbf{h}}^l(G) f(\mathbf{x})\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}.$$

Для краткости будем писать $\Delta_{\mathbf{h}}^l$ вместо $\Delta_{\mathbf{h}}^l(G)$ и Ω_l вместо $\Omega_l(G)$, если $G = \{1, \dots, d\}$.

²В дальнейшем для краткости будем опускать слова “в смысле порядка”.

³Отметим, что построение оптимальных в указанном выше смысле кубатурных формул для классических классов Бесова не представляет труда.

Пусть $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$. Обозначим через $\mathbf{MB}_{p,l,\theta}^{\mathbf{r}}$ классы Бесова периодических функций с периодом Ω , удовлетворяющих условиям⁴

$$\left(\int_{[0,1]^{|G|}} \left(\prod_{j \in G} t_j^{-1-r_j\theta} \right) \Omega_l(G)(f, \mathbf{t})_p^\theta \prod_{j \in G} dt_j \right)^{1/\theta} \leq 1, \quad (1)$$

$l > r_d, \forall G$.

Аналогично определяется класс $\dot{\mathbf{M}}\mathbf{B}_{p,l,\theta}^{\mathbf{r}}$. К этому классу принадлежат функции, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\left(\int_{[0,1]^{|G|}} \left(\prod_{j \in G} t_j^{-1-r_j\theta} \right) \dot{\Omega}_l(G)(f, \mathbf{t})_p^\theta \prod_{j \in G} dt_j \right)^{1/\theta} \leq 1,$$

$l > r_d, \forall G$, а

$$\text{supp } f(\mathbf{x}) \subset \Omega = [0, 1]^d.$$

Отметим, что окончательные результаты в смысле порядка для классов функций с ограничениями на коэффициенты Фурье⁵, а также в случае $p = 2$ для классов функций с ограниченной смешанной производной содержатся в работе [4]. В этой же работе содержится результат для классов функций с ограниченной смешанной разностью при $p = \infty$ для малых гладкостей. В случае $2 < p < \infty$ неулучшаемая оценка снизу для классов функций с ограниченной производной была получена в работе [5]. Используемая в [2] и развитая в данной работе техника позволила решить задачи интегрирования в упомянутой выше постановке для классов Никольского (в случае малых гладкостей) и Бесова. Несколько иная, нежели в работах [5] и [6], замена переменных дала возможность охватить случай $p = 1$. В наших обозначениях в случае $\theta = \infty$ мы имеем дело с обобщениями классов Никольского для смешанной разности⁶. Отметим сразу, что оценки снизу как в этом случае, так и в случае произвольного θ достигаются на функциях, рассмотренных в [7]. Доказательство этого факта будет приведено в конце работы. Оценка сверху содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $1/p < r$, $1 \leq \theta < \infty$. Тогда

$$R_N(\mathbf{MB}_{p,l,\theta}^{\mathbf{r}}) \ll N^{-r} (\log N)^{(\nu-1)/\theta'},$$

где $1/\theta + 1/\theta' = 1$.

Для доказательства этой теоремы докажем сначала утверждение, которое является ее частным случаем для функций с компактным носителем.

Пусть $B > 0$. В дальнейшем не будем различать класс функций, содержащий функции f , и класс функций, составленный из функций Bf . Это не приведет к недоразумению, так как все результаты содержат только порядковые соотношения.

⁴Здесь и в дальнейшем будем считать, что вектор $\mathbf{r}$ имеет вид

$$\mathbf{r} = r_1 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_d.$$

⁵При некоторых параметрах классы с ограниченной смешанной разностью вложены в эти классы.

⁶Правильный порядок кубатурных формул для этих классов получен в работе [2].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $r > 1/p$, $1 \leq p \leq 2$, $1 \leq \theta < \infty$. Тогда

$$R_N(\mathbf{M}\dot{\mathbf{B}}_{p,l,\theta}^{\mathbf{r}}) \ll N^{-r}(\log N)^{(\nu-1)/\theta'},$$

где $1/\theta + 1/\theta' = 1$.

При доказательстве этой теоремы используется лемма, устанавливающая существование решеток специального вида. Впервые подобные решетки для построения кубатурных формул были использованы К. К. Фроловым [6].

ЛЕММА 1. Существует матрица A ($\det A > 0$) такая, что решетка $\mathbf{L}(\mathbf{m}) = A\mathbf{m}$, где $\mathbf{m}$ – вектор с целыми координатами $m_1, \dots, m_d$, обладает свойствами:

- 1) $\prod_{j=1}^d |L_j(\mathbf{m})| \geq 1$ для любого $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$;
- 2) в параллелепипеде P объема $|P|$, грани которого параллельны координатным гиперплоскостям, содержится не более $|P| + 1$ точек решетки.

Эта лемма в различных модификациях использовалась в работах [5], [6], [8]. Там же указаны конкретные примеры матриц A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Нам понадобятся определения скалярного произведения, свертки и коэффициентов Фурье для периодических и непериодических функций.

Пусть g и f – периодические функции с периодом Γ ; тогда свертка $f * g(\mathbf{x})$ и скалярное произведение $\langle f(\cdot), g(\cdot) \rangle$ этих двух функций определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} f * g(\mathbf{x}) &= \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} f(\mathbf{x} - \mathbf{t})g(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \\ \langle f, g \rangle &= \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} f(\mathbf{t})\bar{g}(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \end{aligned}$$

В случае же функций, заданных на всем $\mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} f * g(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x} - \mathbf{t})g(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \\ \langle f(\cdot), g(\cdot) \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{t})\bar{g}(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \end{aligned}$$

Если теперь период Γ решетки $(A^{-1})^T \mathbf{k}$ является периодом функции f , то

$$f(\mathbf{x}) \sim \sum_{\mathbf{k}} \hat{f}(A\mathbf{k}) e^{2\pi i(A\mathbf{k}, \mathbf{x})},$$

где

$$\hat{f}(A\mathbf{k}) = \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i(A\mathbf{k}, \mathbf{x})} d\mathbf{x}.$$

В случае функции f , заданной на всем $\mathbb{R}^d$,

$$f(\mathbf{x}) \sim \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{2\pi i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x})} d\boldsymbol{\lambda},$$

где

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{t}) e^{-2\pi i(\lambda, \mathbf{t})} d\mathbf{t}.$$

Пусть теперь ${}^7 \bar{\Omega} = [-l-1, l+1]^d$ и $\mathbf{F}(\mathbf{z}) = (A^{-1})^T \mathbf{z}$. Обозначим через $\tilde{\Omega}_{A,\delta}$ область, ограниченную гиперплоскостями

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{F}(y_1, \dots, y_{j-1} \pm \delta/2, y_{j+1}, \dots, y_d), \\ j &= 1, \dots, d, \quad y_i \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Будем писать $\tilde{\Omega}_A$ вместо $\tilde{\Omega}_{A,n}$, если натуральное число n подобрано так, что $\bar{\Omega} \subset \tilde{\Omega}_{A,n}$. Определим оператор периодического продолжения T_A с периодом $\tilde{\Omega}_A$, действующий на функции $f(\mathbf{x}) \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Рассмотрим ряд $\sum_{\mathbf{k}} f(\mathbf{x} + (A^{-1})^T n\mathbf{k})$. Этот ряд сходится абсолютно в смысле метрики $L_1(\tilde{\Omega}_A)$. Ясно, что $\tilde{\Omega}_A$ – период решетки $(A^{-1})^T n\mathbf{k}$. В силу полноты пространства $L_1(\tilde{\Omega}_A)$ существует функция $f^*(\mathbf{x}) \in L_1(\tilde{\Omega}_A)$, к которой этот ряд сходится по норме в $L_1(\tilde{\Omega}_A)$. Обозначим $f^*(\mathbf{x})$ через $T_A f(\mathbf{x})$. Если теперь $\text{supp } f(\mathbf{x}) \subset \bar{\Omega}$, то

$$\begin{aligned} \hat{f}^*\left(\frac{A\mathbf{k}}{n}\right) &= \frac{1}{|\tilde{\Omega}_A|} \int_{\tilde{\Omega}_A} f^*(\mathbf{x}) e^{-2\pi i(A\mathbf{k}/n, \mathbf{x})} d\mathbf{x} \\ &= \frac{\det A}{n^d} \int_{\tilde{\Omega}_A} f^*(\mathbf{x}) e^{-2\pi i(A\mathbf{k}/n, \mathbf{x})} d\mathbf{x} \\ &= \frac{\det A}{n^d} \int_{\bar{\Omega}} f^*(\mathbf{x}) e^{-2\pi i(A\mathbf{k}/n, \mathbf{x})} d\mathbf{x} \\ &= \frac{\det A}{n^d} \hat{f}\left(\frac{A\mathbf{k}}{n}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Пусть $K_s(x) = \int_{\mathbb{R}} \kappa_s(\lambda) e^{-2\pi i\lambda x} d\lambda$, где

$$\kappa_s(\lambda) = \begin{cases} 1, & |\lambda| < 2^{s-1}, \\ 2\left(1 - \frac{|\lambda|}{2^s}\right), & 2^{s-1} \leq |\lambda| \leq 2^s, \\ 0, & |\lambda| > 2^s, \end{cases}$$

в случае $s \neq 0$, и

$$\kappa_0(\lambda) = \begin{cases} 1 - |\lambda|, & 0 \leq |\lambda| \leq 1, \\ 0, & |\lambda| > 1. \end{cases}$$

Определим последовательно $A_s(x)$, $A_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} A_s(x) &= K_s(x) - K_{s-1}(x), \quad \text{если } s \neq 0, \\ A_0(x) &= K_0(x), \\ A_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) &= \prod_{j=1}^d A_{s_j}(x_j), \quad \text{где } \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d). \end{aligned}$$

⁷ Отметим, что $\bar{\Omega}$ выбрана таким образом, что $\text{supp } \Delta^l(G)_{\mathbf{h}} f \in \bar{\Omega}$, если $\text{supp } f \in \Omega$.

Интегрированием по частям нетрудно показать, что $|A_s(x)| \ll \min(2^s, 2^{-s}|x|^{-2})$ и, следовательно, $\|A_s(\mathbf{x})\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} \ll 1$. Для любой функции $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ такой, что $\text{supp } f(x) \subset \bar{\Omega}$, имеем

$$\begin{aligned} \|T_A((f * A_s)(\mathbf{x}))\|_{L_p(\tilde{\Omega}_A)} &\ll \|(T_A f * T_A A_s)(\mathbf{x})\|_{L_p(\tilde{\Omega}_A)} \\ &\ll \|T_A f(\mathbf{x})\|_{L_p(\tilde{\Omega}_A)} \|T_A A_s(\mathbf{x})\|_{L_1(\tilde{\Omega}_A)} \\ &\ll \|T_A f(\mathbf{x})\|_{L_p(\tilde{\Omega}_A)} \|A_s(\mathbf{x})\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} \ll \|T_A f(\mathbf{x})\|_{L_p(\tilde{\Omega}_A)} \\ &\ll \|f(\mathbf{x})\|_{L_p(\tilde{\Omega}_A)} \ll \|f(\mathbf{x})\|_{L_p(\bar{\Omega})}. \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим теперь кубатурную формулу для функции $f \in \mathbf{MB}_{p,l,\theta}^{\mathbf{r}}$:

$$I_N(f) = (q^d \det A)^{-1} \sum_{\mathbf{m}} f\left(\frac{(A^{-1})^T \mathbf{m}}{q}\right), \quad (4)$$

где

$$q^d \det A \leq N < (q+1)^d \det A.$$

Нам понадобится следующий аналог формулы суммирования Пуассона.

ЛЕММА 2. Для любой непрерывной функции f , заданной на всем $\mathbb{R}^d$ с носителем из Ω , имеем

$$(q^d \det A)^{-1} \sum_{\mathbf{m}} f\left(\frac{(A^{-1})^T \mathbf{m}}{q}\right) = \sum_{\mathbf{m}} \hat{f}(q\mathbf{L}(\mathbf{m})), \quad (5)$$

где под сходимостью суммы в правой части равенства (5) будем понимать сходимость следующих частичных сумм:

$$\sum_{\substack{|qL_j(\mathbf{m})| \leq 2^{s_j} \\ j=1, \dots, d}} \kappa_s(q\mathbf{L}(\mathbf{m})) \hat{f}(q\mathbf{L}(\mathbf{m})),$$

где

$$\kappa_s(\boldsymbol{\lambda}) = \prod_{j=1}^d \kappa_{s_j}(\lambda_j).$$

Заметим, что в формуле (4) для функций с финитным носителем суммируется только конечное число слагаемых.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фактически для доказательства соотношения (5) достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{\substack{|qL_j(\mathbf{m})| \leq 2^{s_j} \\ j=1, \dots, d}} \kappa_s(q\mathbf{L}(\mathbf{m})) \hat{f}(q\mathbf{L}(\mathbf{m})) e^{i2\pi(A\mathbf{m}, \mathbf{x})} \quad (6)$$

к

$$h(\mathbf{x}) = (q^d \det A)^{-1} \sum_{\mathbf{m}} f\left(\mathbf{x} + \frac{(A^{-1})^T \mathbf{m}}{q}\right)$$

в точке $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Для доказательства этого введем следующее обозначение:

$$\tilde{K}_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = (q^d \det A)^{-1} \sum_{\mathbf{m}} K_{\mathbf{s}}\left(\mathbf{x} + \frac{(A^{-1})^T \mathbf{m}}{q}\right),$$

где

$$K_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^d K_{s_j}(x_j).$$

В этом случае разность между частичными суммами (6) и функцией $h(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ с точностью до постоянного множителя мы можем переписать в виде

$$\left| \int_{\Omega'_A} [h(-\mathbf{t}) - h(\mathbf{0})] \tilde{K}_{\mathbf{s}}(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right|,$$

где Ω'_A – наименьший период решетки $\frac{(A^{-1})^T \mathbf{m}}{q}$.

Тогда имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega'_A} [h(-\mathbf{t}) - h(\mathbf{0})] \tilde{K}_{\mathbf{s}}(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right| \\ & \leq \int_{\Omega'_A} |h(-\mathbf{t}) - h(\mathbf{0})| \sum_{\mathbf{m}} (q^d \det A)^{-1} \left| K_{\mathbf{s}}\left(\mathbf{t} + \frac{(A^{-1})^T \mathbf{m}}{q}\right) \right| d\mathbf{t} \\ & \leq \sum_{\mathbf{m}} \int_{\Omega'_A - \frac{(A^{-1})^T \mathbf{m}}{q}} (q^d \det A)^{-1} |h(-\mathbf{t}) - h(\mathbf{0})| |K_{\mathbf{s}}(\mathbf{t})| d\mathbf{t}, \end{aligned}$$

где

$$\Omega'_A - \frac{(A^{-1})^T \mathbf{m}}{q} := \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} + \frac{(A^{-1})^T \mathbf{m}}{q} \in \Omega'_A \right\}.$$

Здесь также использовано то обстоятельство, что $h(\mathbf{t})$ – периодическая функция с периодом Ω'_A .

Итак,

$$\left| \int_{\Omega'_A} [h(-\mathbf{t}) - h(\mathbf{0})] \tilde{K}_{\mathbf{s}}(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right| \leq (q^d \det A)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} |h(-\mathbf{t}) - h(\mathbf{0})| |K_{\mathbf{s}}(\mathbf{t})| d\mathbf{t}.$$

Воспользуемся теперь тем обстоятельством, что

$$K_s(x) = C \frac{\cos 2^{s+1}x - \cos 2^s x}{2^{s-1}x^2}.$$

Учитывая непрерывность функции $h(\mathbf{t})$ и оценку

$$K_s(t) \ll \min\{2^s, 2^{-s}t^{-2}\},$$

получим требуемый результат.

ЛЕММА 3. Для непрерывной функции f с компактным носителем Ω при $1 \leq p \leq 2$ имеем ($1/p + 1/p' = 1$)

$$|I_N(f) - \hat{f}(\mathbf{0})| \ll \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 \geq l_0} \|(\Delta_{\mathbf{h}^{\mathbf{s}}}^l(G_{\mathbf{s}})f(\mathbf{x}))\|_{L_p(\tilde{\Omega}_A)} \|P_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\|_{L_{p'}(\tilde{\Omega}_A)}, \quad (7)$$

где

$$\|P_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\|_{L_{p'}(\tilde{\Omega}_A)} \ll \left[\frac{2^{\|\mathbf{s}\|_1}}{q^d} \right]^{1/p} \quad (8)$$

и

$$2^{l_0} \leq q^d < 2^{l_0+1}, \quad \mathbf{h}^{\mathbf{s}} = (2^{-(s_1+1)}, \dots, 2^{-(s_d+1)}), \quad G_{\mathbf{s}} = \{j : s_j \geq 2\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2

$$|I_N(f) - \hat{f}(\mathbf{0})| = \left| \sum_{\mathbf{m} \neq \mathbf{0}} \hat{f}(q\mathbf{L}(\mathbf{m})) \right|.$$

Имеем: если

$$f(\mathbf{x}) \sim \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{2\pi i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x})} d\boldsymbol{\lambda},$$

то

$$\Delta_{\mathbf{h}}^l(G)f(\mathbf{x}) \sim \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j \in G} (e^{i\lambda_j h_j} - 1)^l \hat{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{2\pi i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x})} d\boldsymbol{\lambda}.$$

Согласно (2) получим

$$|I_N(f) - \hat{f}(\mathbf{0})| \ll \left| \sum_{\mathbf{m} \neq \mathbf{0}} \hat{f}^*(q\mathbf{L}(\mathbf{m})) \right|.$$

Окончательно имеем при $q > 1$

$$|I_N(f) - \hat{f}(\mathbf{0})| \left| \sum_{\substack{\mathbf{s} \neq \mathbf{0} \\ s_j \in \mathbb{Z}^+}} \langle (T_A(\Delta_{\mathbf{h}^{\mathbf{s}}}^l(G_{\mathbf{s}})f * A_{\mathbf{s}})(\cdot)), P_{\mathbf{s}}(\cdot) \rangle \right|, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) &:= \sum_{\mathbf{k} \in \rho_{\mathbf{s}}} e^{2\pi i(qA\mathbf{k}, \mathbf{x})} \bar{a}_{\mathbf{s}}(2\pi qA\mathbf{k}), \\ G_{\mathbf{s}} &:= \{j : s_j \geq 2\}, \quad \rho_{\mathbf{s}} := \{\mathbf{k} : [2^{s_j-2}] \leq |qL_j(\mathbf{k})| < 2^{s_j}\}, \\ a_{\mathbf{s}}(\lambda) &= \left(\Delta_{\mathbf{h}^{\mathbf{s}}}^l(G_{\mathbf{s}})e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x})} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \right)^{-1} = \left(\prod_{j \in G_{\mathbf{s}}} (e^{i\lambda_j h_j^{\mathbf{s}}} - 1)^l \right)^{-1}, \end{aligned}$$

где $h_j^{\mathbf{s}} = 2^{-(s_j+1)}$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$.

Мы имеем

$$|a_{\mathbf{s}}(2\pi q A \mathbf{k})| \ll \left| \prod_{j \in G} \sin(q\pi L_j(\mathbf{k}) h_j^{\mathbf{s}}) \right|^{-l}.$$

Отсюда следует, что $|a_{\mathbf{s}}(2\pi q A \mathbf{k})| \ll 1$. Принимая во внимание второе утверждение леммы 1, найдем

$$\begin{aligned} \|P_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\|_{L_2(\tilde{\Omega}_A)} &\ll \left[\frac{2^{\|\mathbf{s}\|_1}}{q^d} \right]^{1/2}, \\ \|P_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\|_{L_{\infty}(\tilde{\Omega}_A)} &\ll \frac{2^{\|\mathbf{s}\|_1}}{q^d}. \end{aligned}$$

Из этих двух неравенств получим

$$\|P_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\|_{L_p(\tilde{\Omega}_A)} \ll \left[\frac{2^{\|\mathbf{s}\|_1}}{q^d} \right]^{1-1/p}, \quad 2 \leq p \leq \infty.$$

Заметим, что из первого утверждения леммы 1 следует, что $P_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) \equiv 0$, если $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ и $2^{\|\mathbf{s}\|_1} \leq q^d$. Оценим теперь $\|T_A(\Delta_{\mathbf{h}^{\mathbf{s}}}^l(G_{\mathbf{s}})f * A_{\mathbf{s}})(\mathbf{x})\|_{L_p(\tilde{\Omega}_A)}$. Согласно (3)

$$\|T_A(\Delta_{\mathbf{h}^{\mathbf{s}}}^l(G_{\mathbf{s}})f * A_{\mathbf{s}})(\mathbf{x})\|_{L_p(\tilde{\Omega}_A)} \ll \|\Delta_{\mathbf{h}^{\mathbf{s}}}^l(G_{\mathbf{s}})f(\mathbf{x})\|_{L_p(\tilde{\Omega}_A)}. \quad (10)$$

Используя эту оценку, получим для $1 \leq p \leq 2$, $1/p + 1/p' = 1$

$$\begin{aligned} |I_N(f) - \hat{f}(\mathbf{0})| &\ll \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 \geq l_0} \|T_A(\Delta_{\mathbf{h}^{\mathbf{s}}}^l(G_{\mathbf{s}})f * A_{\mathbf{s}})(\mathbf{x})\|_{L_p(\tilde{\Omega}_A)} \|P_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\|_{L_{p'}(\tilde{\Omega}_A)} \\ &\ll \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 \geq l_0} \|(\Delta_{\mathbf{h}^{\mathbf{s}}}^l(G_{\mathbf{s}})f(\mathbf{x}))\|_{L_p(\tilde{\Omega}_A)} \|P_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\|_{L_{p'}(\tilde{\Omega}_A)}. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Если $f \in \mathbf{MB}_{p,l,\theta}^{\mathbf{r}}$, используя неравенство Минковского и лемму 3, имеем

$$\begin{aligned} |I_N(f) - \hat{f}(\mathbf{0})| &\ll \left(\sum_{\|\mathbf{s}\|_1 \geq l_0} \|\Delta_{\mathbf{h}^{\mathbf{s}}}^l(G_{\mathbf{s}})f(\mathbf{x})\|_{L_p(\tilde{\Omega}_A)}^{\theta} \prod_{j \in G_{\mathbf{s}}} 2^{r_j s_j \theta} \right)^{1/\theta} \\ &\quad \times \left(\sum_{\|\mathbf{s}\|_1 \geq l_0} \|P_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\|_{L_{p'}(\tilde{\Omega}_A)}^{\theta'} \prod_{j \in G_{\mathbf{s}}} 2^{-r_j s_j \theta'} \right)^{1/\theta'}. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно первую и вторую суммы. Для первой суммы имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{\|\mathbf{s}\|_1 \geq l_0} \|(\Delta_{\mathbf{h}^{\mathbf{s}}}^l(G_{\mathbf{s}})f(\mathbf{x}))\|_{L_p(\tilde{\Omega}_A)}^{\theta} \prod_{j \in G_{\mathbf{s}}} 2^{r_j s_j \theta} \\ &\ll \sum_{\substack{\mathbf{s} \\ s_j \in \mathbb{Z}^+}} \|(\Delta_{\mathbf{h}^{\mathbf{s}}}^l(G_{\mathbf{s}})f(\mathbf{x}))\|_{L_p(\tilde{\Omega}_A)}^{\theta} \prod_{j \in G_{\mathbf{s}}} 2^{r_j s_j \theta} \\ &\ll \sum_{\substack{\mathbf{s} \\ s_j \in \mathbb{Z}^+}} \Omega_l(G_{\mathbf{s}})(f, 2^{-\mathbf{s}})_p^{\theta} \prod_{j \in G_{\mathbf{s}}} 2^{r_j s_j \theta}. \end{aligned}$$

Оценивая сумму интегралом, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 \geq l_0} \|(\Delta_{\mathbf{h}^{\mathbf{s}}}^l(G_{\mathbf{s}})f(\mathbf{x}))\|_{L_p(\tilde{\Omega}_A)}^\theta \prod_{j \in G_{\mathbf{s}}} 2^{r_j s_j \theta} \\ \ll \sum_G \int_{\mathbb{R}_+^{|G|}} \Omega_l(G)(f, 2^{-\mathbf{s}})_p^\theta \prod_{j \in G} 2^{r_j s_j \theta} ds_j, \end{aligned}$$

где

$$\mathbb{R}_+^{|G|} = \underbrace{[0, \infty] \times \cdots \times [0, \infty]}_{|G| \text{ раз}}.$$

Проводя теперь замену переменных $2^{-s_j} = t_j$, $j \in G$, получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 \geq l_0} \|(\Delta_{\mathbf{h}^{\mathbf{s}}}^l(G_{\mathbf{s}})f(\mathbf{x}))\|_{L_p(\tilde{\Omega}_A)}^\theta \prod_{j \in G_{\mathbf{s}}} 2^{r_j s_j \theta} \\ \ll \int_{[0,1]^{|G|}} \Omega_l(G_{\mathbf{s}})(f, \mathbf{t})_p^\theta \prod_{j \in G} t_j^{-r_j \theta - 1} dt_j. \end{aligned}$$

В силу определения классов $\mathbf{M}\dot{\mathbf{B}}_{p,l,\theta}^{\mathbf{r}}$ окончательно имеем

$$\sum_{\|\mathbf{s}\|_1 \geq l_0} \|(\Delta_{\mathbf{h}^{\mathbf{s}}}^l(G_{\mathbf{s}})f(\mathbf{x}))\|_{L_p(\tilde{\Omega}_A)}^\theta \left(\prod_{j \in G_{\mathbf{s}}} 2^{r_j s_j \theta} \right) \ll 1.$$

Переходя к оценке второй суммы, введем обозначение

$$E = \left(\sum_{\|\mathbf{s}\|_1 \geq l_0} \|P_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\|_{L_p(\tilde{\Omega}_A)}^{\theta'} \prod_{j \in G_{\mathbf{s}}} 2^{-r_j s_j \theta'} \right)^{1/\theta'}.$$

В силу определения $G_{\mathbf{s}}$ имеем

$$\begin{aligned} E^{\theta'} &\ll \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 \geq l_0} \|P_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\|_{L_p(\tilde{\Omega}_A)}^{\theta'} 2^{-(\mathbf{r}, \mathbf{s})\theta'} \ll \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 \geq l_0} 2^{-(\mathbf{r}, \mathbf{s})\theta'} \left(\frac{2^{\|\mathbf{s}\|_1}}{q^d} \right)^{\theta'/p} \\ &= q^{-d\theta'/q} \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 \geq l_0} \prod_{j=1}^d 2^{-(r_j - 1/p)s_j \theta'} \\ &= q^{-d\theta'/q} \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 \geq l_0} \left(\prod_{j=\nu+1}^d 2^{-(r_j - r)s_j \theta'} \right) 2^{(r-1/p)\|\mathbf{s}\|_1 \theta'} \\ &\ll q^{-d\theta'/q} \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 \geq l_0} 2^{-\beta \|\mathbf{s}^\nu\|_1 \theta'} 2^{-(r-1/p)\|\mathbf{s}\|_1 \theta'} \\ &= q^{-d\theta'/q} \sum_{k \geq l_0} 2^{-(r-1/p)k \theta'} \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 = k} 2^{-\beta \|\mathbf{s}^\nu\|_1 \theta'}, \end{aligned}$$

где $\beta = r_{\nu+1} - r_\nu$, $\mathbf{s}^\nu = (s_{\nu+1}, \dots, s_d)$ и $\mathbf{s}_\nu = (s_1, \dots, s_\nu)$.

Окончательно имеем

$$\begin{aligned}
E^{\theta'} &\ll \sum_{k \geq l_0} q^{-d\theta'/q} 2^{-(r-1/p)k\theta'} \sum_{m+n=k} \sum_{\|s_\nu\|_1=n} \sum_{\|s^\nu\|_1=m} 2^{-\beta\|s^\nu\|_1\theta'} \\
&\ll q^{-d\theta'/q} \sum_{k \geq l_0} 2^{-(r-1/p)k\theta'} \sum_{m+n=k} (n+1)^{\nu-1} 2^{-\beta m\theta'} (m+1)^{d-\nu-1} \\
&\ll q^{-d\theta'/q} \sum_{k \geq l_0} 2^{-(r-1/p)k\theta'} (k+1)^{\nu-1} \ll q^{-d\theta'/p} \frac{(l_0+1)^{\nu-1}}{2^{(r-1/p)\theta' l_0}} \ll \frac{(\log N)^{\nu-1}}{N^{r\theta'}}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$|I_N(f) - \hat{f}(\mathbf{0})| \ll \frac{(\log N)^{(\nu-1)/\theta'}}{N^r}. \quad (11)$$

Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 в силу монотонности L_p -норм следует

ТЕОРЕМА 3. Пусть $r > \max(1/p, 1/2)$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta < \infty$; тогда

$$R_N(\mathbf{M}\dot{\mathbf{B}}_{p,l,\theta}^r) \ll N^{-r} (\log N)^{(\nu-1)/\theta'}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению случая $2 < p \leq \infty$, $1/p < r \leq 1/2$. Для этого определим следующие функции:

$$D_s(x) = \int_{\mathbb{R}} g_s(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \quad \tilde{D}_s(x) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}_s(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda,$$

где при $s \geq 2$

$$\begin{aligned}
g_s(\lambda) &= \begin{cases} (\sin \pi |\lambda| 2^{-(s+1)})^{-1}, & 2^{s-2} \leq |\lambda| < 2^s, \\ -\frac{b}{2^{s-2}}(|\lambda| - 2^s) + 1, & 2^s \leq |\lambda| < (4 + \frac{1}{b}) 2^{s-2}, \\ \frac{(\sin \pi/8)^{-1}}{2^{s-3}}(|\lambda| - 2^{s-3}), & 2^{s-3} \leq |\lambda| < 2^{s-2}, \\ 0 & \text{при других } \lambda, \end{cases} \\
\tilde{g}_s(\lambda) &= \begin{cases} -\frac{b}{2^{s-2}}(|\lambda| - 2^s) + 1, & 2^{s-2} \leq |\lambda| < (4 + \frac{1}{b}) 2^{s-2}, \\ \frac{(\sin \pi/8)^{-1}}{2^{s-3}}(|\lambda| - 2^{s-3}), & 2^{s-3} \leq |\lambda| < 2^{s-2}, \\ 0 & \text{при других } \lambda, \end{cases} \\
g_1(\lambda) = g_0(\lambda) = \tilde{g}_1(\lambda) = \tilde{g}_0(\lambda) = \kappa_2(\lambda), & b = \frac{(\sin \pi/8)^{-1} - 1}{3}.
\end{aligned}$$

Интегрированием по частям легко показать, что $|\tilde{D}_s(x)| \ll \min(2^s, 2^{-s}|x|^{-2})$, и, следовательно,

$$\|\tilde{D}_s(x)\|_{L_1(R)} \ll 1. \quad (12)$$

Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 4. $\|D_s(x)\|_{L_1(\mathbb{R})} \ll 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $g_s^0(\lambda) = \tilde{g}_s(\lambda) - g_s(\lambda)$. Если мы установим утверждение леммы для

$$D_s^0(x) = \int_{\mathbb{R}} g_s^0(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda,$$

то согласно (12) доказательство будет закончено. Но при $s \geq 2$

$$g_s^0(\lambda) = \begin{cases} \frac{b}{2^{s-2}}(|\lambda| - 2^s) + 1 - (\sin \pi |\lambda| 2^{-(s+1)})^{-1}, & 2^{s-2} \leq |\lambda| < 2^s, \\ 0 & \text{при других } \lambda, \end{cases}$$

а $g_0^0 \equiv g_1^0 \equiv 0$, причем для любого s

$$g_s^0(\pm 2^{s-2}) = g_s^0(\pm 2^s) = 0. \quad (13)$$

Для доказательства леммы достаточно будет оценить

$$D_s^+(x) = \int_{2^{s-2}}^{2^s} g_s^0(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \quad s \geq 2.$$

В силу (13) имеем

$$\begin{aligned} D_s^+(x) &= -\frac{1}{ix} \int_{2^{s-2}}^{2^s} (g_s^0)'(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \\ &= -\frac{1}{(ix)^2} ((g_s^0)'(2^s) e^{i2^s x} - (g_s^0)'(2^{s-2}) e^{i2^{s-2} x}) \\ &\quad + \frac{1}{(ix)^2} \int_{2^{s-2}}^{2^s} (g_s^0)''(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda. \end{aligned}$$

Так как $|(g_s^0)'(\lambda)| \ll 2^{-s}$ и $|(g_s^0)''(\lambda)| \ll 2^{-2s}$, то из последнего равенства и определения $D_s^+(x)$ получим

$$|D_s^+(x)| \ll \min \left[2^s, \frac{2^{-s}}{|x|^2} \right].$$

Отсюда следует, что $\|D_s^+(x)\|_{L_1(\mathbb{R})} \ll 1$. Лемма доказана.

Из доказанной леммы следует, что функция $D_s(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^d D_{s_j}(x_j)$ удовлетворяет соотношению

$$\|D_s(\mathbf{x})\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} \ll 1. \quad (14)$$

Пусть теперь $\overline{\Delta}_{\mathbf{h}}(G)$ – симметрическая разность, т.е. $\overline{\Delta}_{\mathbf{h}}(G) = \prod_{j \in G} (\Delta_{j; h_j} - \Delta_{j; -h_j})$. Очевидно, что $\|\overline{\Delta}_{\mathbf{h}}(G)f\|_{L_p(\Omega)} \ll \|\Delta_{\mathbf{h}}(G)f\|_{L_p(\Omega)}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $2 < p \leq \infty$, $1/p < r \leq 1/2$, $1 \leq \theta < \infty$; тогда

$$R_N(\mathbf{M}\dot{\mathbf{B}}_{p,l,\theta}^r) \ll N^{-r} (\log N)^{(\nu-1)/\theta'}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сведем общий случай произвольного r_d к случаю $r_d < 1$. Если $r_d > 2/3$, то $\exists \mu$: $r_\mu > 2/3$, а $r_{\mu-1} \leq 2/3$. Положим $r' = (r_1, \dots, r_{\mu-1}, 2/3, \dots, 2/3)$. Непосредственно из определения классов $\mathbf{MB}_{p,l,\theta}^{\mathbf{r}}$ в силу неравенства $a^r \leq a^{r'}$ для $0 \leq a \leq 1$ и $r' \leq r$ имеем $\mathbf{MB}_{p,l,\theta}^{\mathbf{r}} \subset \mathbf{MB}_{p,l,\theta}^{\mathbf{r}'}$ и $\mathbf{MB}_{p,l,\theta}^{\mathbf{r}'} \subset \mathbf{MB}_{p,1,\theta}^{\mathbf{r}'}$. Ясно, что оценку достаточно доказать для $\mathbf{MB}_{p,1}^{\mathbf{r}'}$. Эти несколько искусственные рассуждения позволяют оперировать только с первой разностью, так как теперь мы имеем $r_j < 1$, $j = 1, \dots, d$. Аналогичное доказательство можно было проводить и в общем случае, однако оно стало бы неоправданно громоздким.

Повторяя те же рассуждения, что и при доказательстве формулы (7) в лемме 3, получим

$$|I_N(f) - \hat{f}(\mathbf{0})| \ll \left| \sum_{\substack{\mathbf{s} \neq \mathbf{0} \\ s_j \in \mathbb{Z}^+}} \langle T_A(\bar{\Delta}_{\mathbf{h}^{\mathbf{s}}}(G_{\mathbf{s}})f * A_{\mathbf{s}})(\cdot), (2i)^d T_A D_{\mathbf{s}}(\cdot) \rangle \right|, \quad (15)$$

$\mathbf{h}^{\mathbf{s}} = (2^{-s_1}, \dots, 2^{-s_d})$, а $G_{\mathbf{s}}$ то же, что и при доказательстве леммы 3. В силу второго утверждения леммы 1 ясно, что

$$\|T_A D_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\|_{L_\infty(\tilde{\Omega}_A)} \ll \frac{2^{\|\mathbf{s}\|_1}}{q^d}. \quad (16)$$

С другой стороны, в силу (14) имеем

$$\|T_A D_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\|_{L_1(\tilde{\Omega}_A)} \ll 1.$$

В силу двух последних неравенств имеем

$$\|T_A D_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\|_{L_p(\tilde{\Omega}_A)} \ll \left[\frac{2^{\|\mathbf{s}\|_1}}{q^d} \right]^{1-1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (17)$$

Из неравенства (15) так же, как и в лемме 3, найдем

$$|I_N(f) - \hat{f}(\mathbf{0})| \ll \sum_{\|\mathbf{s}\| \geq l_0} \|T_A(\bar{\Delta}_{\mathbf{h}^{\mathbf{s}}}(G_{\mathbf{s}})f * A_{\mathbf{s}})(\mathbf{x})\|_{L_p(\tilde{\Omega}_A)} \|T_A D_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\|_{L_{p'}(\tilde{\Omega}_A)}.$$

Таким образом, мы вновь пришли к формуле, представляющей собой аналог соотношения, полученного в лемме 3, где вместо $P_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})$ мы имеем $T_A D_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})$, а вместо обычной разности симметрическую. Однако при получении формулы (11) мы пользовались неравенством (8), которое в данном случае заменяется на неравенство (17). Аналогично соотношение (10) в данном случае имеет вид

$$\|T_A(\bar{\Delta}_{\mathbf{h}^{\mathbf{s}}}(G_{\mathbf{s}})f * A_{\mathbf{s}})(\mathbf{x})\|_{L_p(\tilde{\Omega}_A)} \ll \|\Delta_{\mathbf{h}^{\mathbf{s}}}(G_{\mathbf{s}})f(\mathbf{x})\|_{L_p(\tilde{\Omega}_A)}.$$

Повторяя выкладки, приведшие от формулы (9) к формуле (11), получим и в этом случае

$$|I_N(f) - \hat{f}(\mathbf{0})| \ll \frac{(\log N)^{(\nu-1)/\theta'}}{N^r},$$

если $f \in \mathbf{MB}_{p,l,\theta}^{\mathbf{r}}$. Теорема доказана.

Объединяя теоремы 3 и 4, мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $1/p < r$, $1 \leq \theta < \infty$; тогда

$$R_N(\mathbf{MB}_{p,l,\theta}^r) \ll N^{-r} (\log N)^{(\nu-1)/\theta'},$$

где $1/\theta + 1/\theta' = 1$.

Покажем теперь, что задача интегрирования для классов периодических функций сводится к задаче интегрирования для классов функций, заданных на $\mathbb{R}^d$. Фактически с помощью замены переменных мы преобразуем функции с периодом Ω в функции, заданные на всем $\mathbb{R}^d$. Подобные замены переменных в связи с вопросом о кубатурных формулах впервые использовались в кандидатской диссертации К.К. Фролова [4].

ТЕОРЕМА 6. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $r > 1/p$, $1 \leq \theta < \infty$, $l > r_d$. Тогда

$$R_N(\mathbf{MB}_{p,l,\theta}^r) \ll R_N(\mathbf{MB}_{p,l,\theta}^r).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Итак, рассмотрим периодическую функцию f , принадлежащую одному из классов $\mathbf{MB}_{p,l,\theta}^r$. В этом случае рассматриваемую функцию можно представить в виде суммы следующего сходящегося ряда (что эквивалентно сходимости частичных сумм Фейера):

$$f(x) = \sum_{\substack{\mathbf{s} \\ s_j \in \mathbb{Z}^+}} A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}), \quad (18)$$

где

$$A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{f}(\mathbf{k}) \hat{g}_{\mathbf{s}}(\mathbf{k}) e^{2\pi i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}$$

и

$$\begin{aligned} \hat{g}_{\mathbf{s}}(\lambda) &= \prod_{j=1}^d \hat{g}_{s_j}(\lambda_j), \\ \hat{g}_s(\lambda) &= \begin{cases} \frac{|\lambda| - 2^{s-2}}{2^{s-2}}, & 2^{s-2} \leq |\lambda| < 2^{s-1}, \\ \frac{2^s - |\lambda|}{2^{s-1}}, & 2^{s-1} \leq |\lambda| < 2^s, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \end{aligned}$$

$s \neq 0, 1$, и

$$\hat{g}_1(\lambda) = \begin{cases} |\lambda|, & 0 \leq |\lambda| \leq 1, \\ 2 - |\lambda|, & 1 < |\lambda| \leq 2, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

а

$$\hat{g}_0(\lambda) = \begin{cases} 1 - |\lambda|, & 0 \leq |\lambda| \leq 1, \\ 0, & |\lambda| > 1. \end{cases}$$

Из определения следует, что $A_s(f, \mathbf{x})$ представляют собой полиномы степени не выше 2^{s_j} по переменной x_j . Замена переменных, о которых шла речь выше, осуществляется с помощью следующей функции:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \int_0^x e^{\frac{-1}{t(1-t)}} dt \left(\int_0^1 e^{\frac{-1}{t(1-t)}} dt \right)^{-1}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x < 0, \\ 1, & x > 1. \end{cases} \quad (19)$$

Для этой функции нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

ЗАМЕЧАНИЕ. 1) $\varphi^{(k)}(t) \ll 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$.

2) $\frac{e^{-k/t(1-t)}}{\varphi'(t)} Q(t) \ll 1$, где $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$, $t \in [0, 1]$, а $Q(t)$ – рациональная функция, которая может иметь полюсы только в точках $t = 0$, $t = 1$.

Первое утверждение этого замечания очевидно. Для доказательства второго утверждения заметим, что $\varphi'(t) = C \exp(-\frac{1}{t(1-t)})$. Таким образом, дело сводится к оценке в равномерной метрике функции $\exp(-\frac{(k-1)}{t(1-t)})Q(t)$, ограниченность которой очевидна в силу условий, наложенных на рациональную функцию $Q(t)$ и число k .

Будем рассматривать каждое слагаемое суммы (18) в отдельности. Для определенности положим

$$v_s(\mathbf{x}) = A_s(f, \varphi(\mathbf{x}))\psi(\mathbf{x}),$$

где

$$\varphi(\mathbf{x}) = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_d)), \quad \psi(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^d \varphi'(x_j).$$

Подобные замены переменных использовались в работах [6], [5] и [8].

Возьмем $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$, $\beta_j = 0, 1$, а $\mathbf{w} = l\beta$. Ясно, что $v_s^{(\mathbf{w})}$ представляет собой сумму конечного числа слагаемых вида $A_s^{(\alpha)}(f, \varphi(\mathbf{x}))\psi^{(\vartheta)}(\mathbf{x})$, где $\alpha + \vartheta = \mathbf{w}$. Количество этих слагаемых определяется вектором $\mathbf{w}$.

Рассмотрим одно из этих слагаемых⁸. Пусть для определенности $\beta_1 = \dots = \beta_c = 0$; $\beta_{c+1} = \dots = \beta_d = 1$; $\alpha_{c+1} = \dots = \alpha_h = 0$; $\alpha_{h+1} \neq 0, \dots, \alpha_d \neq 0$. Пусть также $\mathbf{s}_h^c = (s_{c+1}, \dots, s_h)$ и $\mathbf{s}_c^h = (s_1, \dots, s_c, s_{h+1}, \dots, s_d)$. Аналогично, $\mathbf{x}_h^c = (x_{c+1}, \dots, x_h)$ и $\mathbf{x}_c^h = (x_1, \dots, x_c, x_{h+1}, \dots, x_d)$; $\Omega_h^c = [0, 1]^{d-h+c}$.

⁸Остальные слагаемые оцениваются аналогично.

Тогда в случае $p = 1$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} |A_{\mathbf{s}}^{(\boldsymbol{\alpha})}(f, \varphi(\mathbf{x})) \psi^{(\boldsymbol{\theta})}(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \\
& \ll \int_{\Omega_h^c} \sup_{\mathbf{x}_h^c} |A_{\mathbf{s}}^{(\boldsymbol{\alpha})}(f, \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_c), x_{c+1}, \dots, x_h, \varphi(x_{h+1}), \dots, \varphi(x_d))| \\
& \quad \times \prod_{j=h+1}^d |\psi^{(\vartheta_j)}(x_j)| \prod_{j=1}^c \psi(x_j) d\mathbf{x}_c^h \\
& \ll 2^{\|\mathbf{s}_h^c\|_1} \int_{\Omega} |A_{\mathbf{s}}^{(\boldsymbol{\alpha})}(f, \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_c), x_{c+1}, \dots, x_h, \varphi(x_{h+1}), \dots, \varphi(x_d))| \\
& \quad \times \prod_{j=h+1}^d |\psi^{(\vartheta_j)}(x_j)| \prod_{j=1}^c \psi(x_j) d\mathbf{x}, \tag{20}
\end{aligned}$$

где $\psi(t) = \varphi'(t)$.

При получении последнего неравенства использовано неравенство Никольского (см., например, [10]).

Заметим теперь, что подынтегральная функция не превосходит конечную сумму слагаемых вида

$$\begin{aligned}
& |A_{\mathbf{s}}^{(\boldsymbol{\gamma})}(f, \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_c), x_{c+1}, \dots, x_h, y_{h+1}, \dots, y_d)| \Big|_{y_j = \varphi(x_j)} \\
& \times \left| \prod_{j=h+1}^d e^{\frac{-k}{x_j(1-x_j)}} Q(x_j) \right| \prod_{j=1}^c \psi(x_j),
\end{aligned}$$

где $k \geq 2$, $0 \leq \gamma_i \leq \alpha_i$, $i = 1, \dots, d$, а $Q(t)$ – рациональная функция. Тогда согласно п.2) замечания получим

$$\begin{aligned}
& |A_{\mathbf{s}}^{(\boldsymbol{\gamma})}(f, \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_c), x_{c+1}, \dots, x_h, y_{h+1}, \dots, y_d)| \Big|_{y_j = \varphi(x_j)} \\
& \times \left| \prod_{j=h+1}^d e^{\frac{-k}{x_j(1-x_j)}} Q(x_j) \right| \prod_{j=1}^c \psi(x_j) \\
& \ll |A_{\mathbf{s}}^{(\boldsymbol{\gamma})}(f, \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_c), x_{c+1}, \dots, x_h, y_{h+1}, \dots, y_d)| \Big|_{y_j = \varphi(x_j)} \\
& \times \prod_{j=h+1}^d \psi(x_j) \prod_{j=1}^c \psi(x_j).
\end{aligned}$$

Поэтому, продолжая неравенство (20), получим

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} |A_{\mathbf{s}}^{(\boldsymbol{\alpha})}(f, \varphi(\mathbf{x})) \psi^{(\boldsymbol{\theta})}(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \\
& \ll \sup_{\gamma_j \leq \alpha_j} 2^{\|\mathbf{s}_h^c\|_1} \int_{\Omega} |A_{\mathbf{s}}^{(\boldsymbol{\gamma})}(f, \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_c), x_{c+1}, \dots, x_h, y_{h+1}, \dots, y_d)| \Big|_{y_j = \varphi(x_j)} \\
& \quad \times \left| \prod_{j=h+1}^d \psi(x_j) \right| \prod_{j=1}^c \psi(x_j) d\mathbf{x} \ll \sup_{\gamma_j \leq \alpha_j} 2^{\|\mathbf{s}_h^c\|_1} \|A_{\mathbf{s}}^{(\boldsymbol{\gamma})}\|_{L_1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Используя неравенство Бернштейна (см., например, [11, с. 94]), получим следующую оценку для $v_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \|v_{\mathbf{s}}^{(\mathbf{w})}(\mathbf{x})\|_{L_1(\Omega)} &\ll \sup_{\alpha_j \leq w_j} \int_{\Omega} |A_{\mathbf{s}}^{(\alpha)}(f, \varphi(\mathbf{x})) \psi^{(\boldsymbol{\vartheta})}(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \\ &\ll \sup 2^{\|\mathbf{s}_h\|_1} 2^{(\mathbf{s}, \boldsymbol{\gamma})} \|A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})\|_{L_1(\Omega)}, \end{aligned}$$

где $\sup$ берется по всем допустимым значениям $\gamma_j \leq w_j$. Заметим, что набор компонент вектора $\mathbf{s}_h^c$ зависит от вектора α , а значит, и от $\boldsymbol{\gamma}$. В следующем неравенстве мы пользуемся тем обстоятельством, что в случае $\gamma_j = w_j$ соответствующая компонента вектора $\mathbf{s}$ не принадлежит $\mathbf{s}_h^c$. Окончательно имеем

$$\|v_{\mathbf{s}}^{(\mathbf{w})}(\mathbf{x})\|_{L_1(\Omega)} \ll 2^{(\mathbf{w}, \mathbf{s})} \|A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})\|_{L_1(\Omega)} = 2^{(\mathbf{l}\beta, \mathbf{s})} \|A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})\|_{L_1(\Omega)}.$$

Заметим, что в случае $p > 1$ $|\psi^{(\boldsymbol{\vartheta})}(\mathbf{x})|^p \ll \psi(\mathbf{x})$, а

$$|A_{\mathbf{s}}^{(\alpha)}(f, \varphi(\mathbf{x}))|^p \ll |A_{\mathbf{s}}^{(\alpha)}(f, \mathbf{y})|^p \Big|_{\mathbf{y}=\varphi(\mathbf{x})}.$$

Таким образом, вновь используя неравенство Бернштейна, и в этом случае получим

$$\|v_{\mathbf{s}}^{(\mathbf{l}\beta)}(\mathbf{x})\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll 2^{(\mathbf{l}\beta, \mathbf{s})} \|A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})\|_{L_p(\Omega)}. \quad (21)$$

Итак, эта оценка верна для $1 \leq p \leq \infty$.

Теперь, пользуясь тем обстоятельством, что функция f принадлежит какому-либо классу с ограниченной смешанной разностью, мы докажем, что $g(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{s}} v_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})$ принадлежит соответствующему классу функций, заданных на $\mathbb{R}^d$ и имеющих носитель, содержащийся в $\Omega = [0, 1]^d$. Кроме того, интеграл функции f по периоду равен интегралу функции g , взятому по $\mathbb{R}^d$. Утверждение относительно носителя функции g очевидно, так как носитель функции $\psi(\mathbf{x})$ содержится в Ω .

Пусть теперь функция принадлежит классу $\mathbf{MB}_{p, l, \theta}^{\mathbf{r}}$. Нам понадобится следующая лемма (ее аналог можно найти в [11] и [12]; по существу приводимое ниже доказательство опирается на развитую там технику и идеи, содержащиеся в работе [9]).

ЛЕММА 5. Если $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{MB}_{p, l, \theta}^{\mathbf{r}}$, то выполняется следующее соотношение для $A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})$:

$$\sum_{\substack{\mathbf{s} \\ s_j \in \mathbb{Z}^+}} 2^{\theta(\mathbf{r}, \mathbf{s})} \|A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})\|_{L_p(\Omega)}^{\theta} \ll 1. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим интересующую нас сумму в виде

$$\sum_{G \in \{1, \dots, d\}} \sum_{\substack{s_j \geq 2^{l+1} \\ j \in G}} \sum_{\substack{s_j < 2^{l+1} \\ j \in \{1, \dots, d\} \setminus G}} 2^{\theta(\mathbf{r}, \mathbf{s})} \|A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})\|_{L_p(\Omega)}^{\theta}. \quad (23)$$

Рассмотрим основное слагаемое этой суммы, для которого $G = \{1, \dots, d\}$. Для этой суммы имеем

$$\sum_{\substack{\mathbf{s} \\ s_j \geq 2^{l+1}}} 2^{\theta(\mathbf{r}, \mathbf{s})} \|A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})\|_{L_p(\Omega)}^{\theta} = \sum_{\substack{\mathbf{s} \\ s_j \geq 2^{l+1}}} 2^{\theta(\mathbf{r}, \mathbf{s})} \|A_{\mathbf{s}}(f - T_{\mathbf{s}-\mathbf{2}}, \mathbf{x})\|_{L_p(\Omega)}^{\theta}.$$

Здесь $T_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})$ – произвольные квазиполиномы вида

$$T_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^d \sum_{\substack{k_j \\ |k_j| \leq 2^{s_j}}} a_{k_j}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d) e^{2\pi i k_j x_j}.$$

В силу ограниченности оператора $A_{\mathbf{s}}$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\mathbf{s} \\ s_j \geq 2^{l+1}}} 2^{\theta(\mathbf{r}, \mathbf{s})} \|A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})\|_{L_p(\Omega)}^{\theta} &= \sum_{\substack{\mathbf{s} \\ s_j \geq 2^{l+1}}} 2^{\theta(\mathbf{r}, \mathbf{s})} \|A_{\mathbf{s}}(f - T_{\mathbf{s}-\mathbf{2}}, \mathbf{x})\|_{L_p(\Omega)}^{\theta} \\ &\ll \sum_{\substack{\mathbf{s} \\ s_j \geq 2^l}} 2^{\theta(\mathbf{r}, \mathbf{s})} E_{2^{\mathbf{s}}}(f)_p^{\theta}, \end{aligned}$$

где $E_{2^{\mathbf{s}}}(f)_p$ – наилучшее приближение функции $f(\mathbf{x})$ квазиполиномами указанного выше вида степени не выше 2^{s_j} по переменной x_j в метрике L_p .

Заменяя теперь сумму интегралом, получим

$$\sum_{\substack{\mathbf{s} \\ s_j \geq 2^{l+1}}} 2^{\theta(\mathbf{r}, \mathbf{s})} \|A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})\|_{L_p(\Omega)}^{\theta} \ll \int_{2^l}^{\infty} \dots \int_{2^l}^{\infty} 2^{\theta(\mathbf{r}, \mathbf{y})} E_{2^{[\mathbf{y}]}}(f)_p^{\theta} d\mathbf{y},$$

где $2^{[\mathbf{y}]} = (2^{[y_1]}, \dots, 2^{[y_d]})$.

Используя полиномы Джексона для получения оценки наилучшего приближения и продолжая неравенство⁹, получим

$$\begin{aligned} &\ll \int_{2^l}^{\infty} \dots \int_{2^l}^{\infty} 2^{\theta(\mathbf{r}, \mathbf{y})} \left\| \int_{\Omega} J_{2^{[\mathbf{y}]}(\mathbf{t})} \Delta_{\mathbf{t}}^l f(\cdot) d\mathbf{t} \right\|_{L_p(\Omega)}^{\theta} d\mathbf{y} \\ &\ll \int_{2^l}^{\infty} \dots \int_{2^l}^{\infty} 2^{\theta(\mathbf{r}, \mathbf{y})} \left(\int_{\Omega} J_{2^{[\mathbf{y}]}(\mathbf{t})} \|\Delta_{\mathbf{t}}^l f(\cdot)\|_{L_p(\Omega)} d\mathbf{t} \right)^{\theta} d\mathbf{y}, \end{aligned}$$

где

$$J_{2^{\mathbf{s}}}(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^d J_{2^{s_j}}(t_j), \quad J_{2^s}(\xi) = \kappa_s \left(\frac{\sin 2\pi 2^{s-l} \frac{\xi}{2}}{\sin 2\pi \frac{\xi}{2}} \right)^{2^l}$$

– полиномы Джексона, причем κ_s выбрана таким образом, что $\int_0^1 J_{2^s}(\xi) d\xi = 1$.

⁹Подобные рассуждения для классов Никольского можно найти в работе [11].

Продолжая теперь неравенство, получим

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\mathbf{s} \\ s_j \geq 2^{l+1}}} 2^{\theta(\mathbf{r}, \mathbf{s})} \|A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})\|_{L_p(\Omega)}^\theta \\ \ll \int_{2^l}^\infty \cdots \int_{2^l}^\infty 2^{\theta(\mathbf{r}, \mathbf{y})} \left(\int_{\Omega} J_{2^{[\mathbf{y}]}}(\mathbf{t}) \Omega_l(f, \mathbf{t})_p d\mathbf{t} \right)^\theta d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (24)$$

Рассмотрим отдельно внутренний интеграл:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} J_{2^{[\mathbf{y}]}}(\mathbf{t}) \Omega_l(f, \mathbf{t})_p d\mathbf{t} &\ll \sum_{\substack{G \\ G \subset \{1, \dots, d\}}} \left(\prod_{j \in \{1, \dots, d\} \setminus G} \int_{|t_j| \leq 2^{-[y_j]}} \right) \\ &\times \left(\prod_{j \in G} \int_{|t_j| > 2^{-[y_j]}} \right) J_{2^{[\mathbf{y}]}}(\mathbf{t}) \Omega_l(f, \mathbf{t})_p d\mathbf{t} \\ &\ll \Omega_l\left(f, \frac{1}{2^{[\mathbf{y}]}}\right)_p \sum_{\substack{G \\ G \subset \{1, \dots, d\}}} \left(\prod_{j \in G} \int_{|t_j| > 2^{-[y_j]}} (2^{[y_j]t_j})^l J_{2^{[y_j]}}(t_j) dt_j \right) \\ &\ll \Omega_l\left(f, \frac{1}{2^{[\mathbf{y}]}}\right)_p. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали тот факт, что

$$\Omega_l(f, \mathbf{t})_p \ll \left(\prod_{j \in G} 2^{[y_j]t_j} \right)^l \Omega_l(f, \boldsymbol{\xi}_G)_p,$$

где

$$(\boldsymbol{\xi}_G)_j = \begin{cases} t_j, & j \in \{1, \dots, d\} \setminus G, \\ 2^{-[y_j]}, & j \in G, \end{cases}$$

для $2^{[y_j]t_j} \geq 1$, если $j \in G$. Также было учтено то обстоятельство, что $J_{2^s}(t) \ll (t2^s)^{-2^l} 2^s$.

Возвращаясь теперь к неравенству (24), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\mathbf{s} \\ s_j \geq 2^{l+1}}} 2^{\theta(\mathbf{r}, \mathbf{s})} \|A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})\|_{L_p(\Omega)}^\theta &\ll \int_{2^l}^\infty \cdots \int_{2^l}^\infty 2^{\theta(\mathbf{r}, \mathbf{y})} \Omega_l\left(f, \frac{1}{2^{[\mathbf{y}]}}\right)_p^\theta d\mathbf{y} \\ &\ll \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty 2^{\theta(\mathbf{r}, \mathbf{y})} \Omega_l\left(f, \frac{1}{2^{\mathbf{y}}}\right)_p^\theta d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Проводя замену переменных $2^{-y_j} = t_j$, $j = 1, \dots, d$, получим

$$\sum_{\substack{\mathbf{s} \\ s_j \geq 2^{l+1}}} 2^{\theta(\mathbf{r}, \mathbf{s})} \|A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})\|_{L_p(\Omega)}^\theta \ll \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\prod_{j=1}^d t_j^{-1-r_j\theta} \right) \Omega_l(f, \mathbf{t})_p^\theta d\mathbf{t}.$$

Приняв во внимание тот факт, что остальные слагаемые суммы (23) оцениваются аналогично, непосредственно из (1) получим требуемое неравенство. Лемма доказана.

Докажем теперь, что функция $g(\mathbf{x}) = f(\varphi(\mathbf{x}))\psi(\mathbf{x})$ принадлежит $\mathbf{M}\dot{\mathbf{B}}_{p,l,\theta}^{\mathbf{r}}$. Для этого непосредственно воспользуемся определением класса $\mathbf{M}\dot{\mathbf{B}}_{p,l,\theta}^{\mathbf{r}}$. Итак, пусть

$$\|g\|_{\mathbf{M}\dot{\mathbf{B}}_{p,l,\theta}^{\mathbf{r}}}^{\theta} = \sum_G \int_{[0,1]^{|G|}} \left(\prod_{j \in G} t_j^{-1-\theta r_j} \right) \Omega_l(G)(g, \mathbf{t})_p^{\theta} \prod_{j \in G} dt_j.$$

Мы будем рассматривать слагаемое с $G = \{1, \dots, d\}$; для других G доказательство проводится аналогично. Имеем

$$\int_{[0,1]^d} \left(\prod_{j=1}^d t_j^{-1-\theta r_j} \right) \Omega_l(g, \mathbf{t})_p^{\theta} d\mathbf{t} \ll \int_{\mathbb{R}_+^d} 2^{\theta(\mathbf{r}, \mathbf{y})} \Omega_l(g, 2^{-\mathbf{y}})_p^{\theta} d\mathbf{y},$$

где $2^{-\mathbf{y}} = (2^{-y_1}, \dots, 2^{-y_d})$ и $\mathbb{R}_+^d = \mathbb{R}_+ \times \dots \times \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty]$. Оценивая теперь интеграл соответствующей суммой, получим

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^d} \left(\prod_{j=1}^d t_j^{-1-\theta r_j} \right) \Omega_l(g, \mathbf{t})_p^{\theta} d\mathbf{t} \\ & \ll \sum_{\substack{\mathbf{k} \\ k_j \in \mathbb{Z}^+}} \int_{k_1}^{k_1+1} \dots \int_{k_d}^{k_d+1} 2^{\theta(\mathbf{r}, \mathbf{y})} \Omega_l(g, 2^{-\mathbf{y}})_p^{\theta} d\mathbf{y} \\ & \ll \sum_{\substack{\mathbf{k} \\ k_j \in \mathbb{Z}^+}} 2^{\theta(\mathbf{r}, \mathbf{k})} \Omega_l(g, 2^{-\mathbf{k}})_p^{\theta}. \end{aligned} \tag{25}$$

Оценим теперь $\Omega_l(g, 2^{-\mathbf{s}})_p$. Из определения имеем

$$\begin{aligned} \Omega_l(g, 2^{-\mathbf{k}})_p &= \sup_{|h_j| \leq 2^{-k_j}} \|\Delta_{\mathbf{h}}^l g(\mathbf{x})\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \\ &= \sup_{|h_j| \leq 2^{-k_j}} \left\| \Delta_{\mathbf{h}}^l \sum_{\substack{\mathbf{s} \\ s_j \in \mathbb{Z}^+}} v_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \\ &\ll \sup_{|h_j| \leq 2^{-k_j}} \sum_{\substack{\mathbf{s} \\ s_j \in \mathbb{Z}^+}} \|\Delta_{\mathbf{h}}^l v_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \\ &\ll \sum_{\substack{\mathbf{s} \\ s_j \in \mathbb{Z}^+}} \sup_{|h_j| \leq 2^{-k_j}} \|\Delta_{\mathbf{h}}^l v_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \\ &\ll \sum_{\substack{\mathbf{s} \\ s_j \in \mathbb{Z}^+}} 2^{-(l\beta^{\mathbf{s}}, \mathbf{k})} \|v_{\mathbf{s}}^{(l\beta^{\mathbf{s}})}(\mathbf{x})\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \\ &\ll \sum_{\substack{\mathbf{s} \\ s_j \in \mathbb{Z}^+}} 2^{-(l\beta^{\mathbf{s}}, \mathbf{k})} 2^{(l\beta^{\mathbf{s}}, \mathbf{s})} \|A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})\|_{L_p(\Omega)}. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве использовалось соотношение (21), $\beta^{\mathbf{s}} = (\beta_1^{\mathbf{s}}, \dots, \beta_d^{\mathbf{s}})$ и

$$\beta_j^{\mathbf{s}} = \begin{cases} 1, & s_j \leq k_j, \\ 0, & s_j > k_j. \end{cases}$$

Итак, продолжая оценку (25), получим

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^d} \left(\prod_j^d t_j^{-1-\theta r_j} \right) \Omega_l(g, \mathbf{t})_p^\theta dt \\ & \ll \sum_{\substack{\mathbf{k} \\ k_j \in \mathbb{Z}^+}} 2^{\theta(\mathbf{r}, \mathbf{k})} \left(\sum_{\substack{\mathbf{s} \\ s_j \in \mathbb{Z}^+}} 2^{-(l\beta^{\mathbf{s}}, \mathbf{k})} 2^{(l\beta^{\mathbf{s}}, \mathbf{s})} \|A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})\|_{L_p(\Omega)} \right)^\theta. \end{aligned} \quad (26)$$

Соответственно значениям $\beta^{\mathbf{s}}$ разобьем внутреннюю сумму на 2^d сумм. Рассмотрим теперь одну из таких сумм. Для этой суммы положим $L_1 = \{j : \beta_j^{\mathbf{s}} = 1\}$ и $L_2 = \{j : \beta_j^{\mathbf{s}} = 0\}$, так что $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ и $L_1 \cup L_2 = \{1, \dots, d\}$.

Пользуясь неравенством $|\sum_{i=1}^n \lambda_i|^\theta \leq n^\theta \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^\theta$, из ограниченности произвольно взятой суммы получаем ограниченность интеграла из (26).

Итак, имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\mathbf{k} \\ k_j \in \mathbb{Z}^+}} 2^{\theta(\mathbf{r}, \mathbf{k})} \left(\sum_{\substack{s_i \\ i \in L_2}} \sum_{\substack{s_i \\ i \in L_1}} 2^{(l\beta^{\mathbf{s}}, \mathbf{s} - \mathbf{k})} \|A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})\|_{L_p(\Omega)} \right)^\theta \\ & = \sum_{\substack{\mathbf{k} \\ k_j \in \mathbb{Z}^+}} 2^{\theta(\mathbf{r}, \mathbf{k})} \left(\sum_{\substack{s_i \\ i \in L_2}} \sum_{\substack{s_i \\ i \in L_1}} 2^{(l\beta^{\mathbf{s}}, \mathbf{s} - \mathbf{k})} \prod_{j \in L_1} 2^{(r_j - l + \gamma)s_j} 2^{(l - r_j - \gamma)s_j} \right. \\ & \quad \left. \times \prod_{j \in L_2} 2^{(r_j - \gamma)s_j} 2^{(\gamma - r_j)s_j} \|A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})\|_{L_p(\Omega)} \right)^\theta, \end{aligned}$$

где γ выбрана таким образом, что $l - r_d - \gamma > 0$ и $r_1 - \gamma > 0$.

Продолжая предыдущее соотношение, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\mathbf{k} \\ k_j \in \mathbb{Z}^+}} 2^{\theta(\mathbf{r}, \mathbf{k})} \left(\sum_{\substack{s_i \\ i \in L_2}} \sum_{\substack{s_i \\ i \in L_1}} 2^{(l\beta^{\mathbf{s}}, \mathbf{s} - \mathbf{k})} \|A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})\|_{L_p(\Omega)} \right)^\theta \\ & \ll \sum_{\substack{\mathbf{k} \\ k_j \in \mathbb{Z}^+}} 2^{\theta(\mathbf{r}, \mathbf{k})} \left(\sum_{\substack{s_i \\ i \in L_2}} \sum_{\substack{s_i \\ i \in L_1}} \|A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})\|_{L_p(\Omega)} \left(\prod_{j \in L_1} 2^{s_j r_j + \gamma s_j - k_j l} \right) \right)^\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\prod_{j \in L_2} 2^{(r_j - \gamma)s_j} \right) \left(\prod_{j \in L_1} 2^{(l - r_j - \gamma)s_j} \right) \left(\prod_{j \in L_2} 2^{-(r_j - \gamma)s_j} \right)^\theta \\
& \ll \sum_{\substack{\mathbf{k} \\ k_j \in \mathbb{Z}^+}} 2^{\theta(\mathbf{r}, \mathbf{k})} \left(\sum_{\substack{s_i \\ i \in L_2}} \sum_{\substack{s_i \\ i \in L_1}} \|A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})\|_{L_p(\Omega)}^\theta \right. \\
& \quad \times \left(\prod_{j \in L_1} 2^{s_j r_j + \gamma s_j - k_j l} \right)^\theta \left(\prod_{j \in L_2} 2^{(r_j - \gamma)s_j} \right)^\theta \\
& \quad \times \left(\sum_{\substack{s_i \\ i \in L_2}} \sum_{\substack{s_i \\ i \in L_1}} \left(\prod_{j \in L_1} 2^{(l - r_j - \gamma)s_j \theta'} \right) \left(\prod_{j \in L_2} 2^{-(r_j - \gamma)s_j \theta'} \right) \right)^{\theta/\theta'} \\
& \ll \sum_{\substack{\mathbf{k} \\ k_j \in \mathbb{Z}^+}} 2^{\theta(\mathbf{r}, \mathbf{k})} \left(\prod_{j \in L_1} 2^{(l - r_j - \gamma)k_j} \right)^\theta \left(\prod_{j \in L_2} 2^{-(r_j - \gamma)k_j} \right)^\theta \\
& \quad \times \left(\sum_{\substack{s_i \\ i \in L_2}} \sum_{\substack{s_i \\ i \in L_1}} \|A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})\|_{L_p(\Omega)}^\theta \left(\prod_{j \in L_1} 2^{s_j r_j + \gamma s_j - k_j l} \right)^\theta \left(\prod_{j \in L_2} 2^{(r_j - \gamma)s_j} \right)^\theta \right) \\
& \ll \sum_{\substack{\mathbf{s} \\ s_j \in \mathbb{Z}^+}} \|A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})\|_{L_p(\Omega)}^\theta \left(\prod_{j \in L_1} 2^{s_j r_j + \gamma s_j} \right)^\theta \left(\prod_{j \in L_2} 2^{(r_j - \gamma)s_j} \right)^\theta \\
& \quad \times \left(\sum_{\substack{k_i \\ i \in L_2}} \sum_{\substack{k_i \\ i \in L_1}} \left(\prod_{j \in L_1} 2^{-\gamma k_j} \right)^\theta \left(\prod_{j \in L_2} 2^{\gamma k_j} \right)^\theta \right) \\
& \ll \sum_{\substack{\mathbf{s} \\ s_j \in \mathbb{Z}^+}} \|A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})\|_{L_p(\Omega)}^\theta \left(\prod_{j \in L_1} 2^{s_j r_j + \gamma s_j} \right)^\theta \left(\prod_{j \in L_2} 2^{(r_j - \gamma)s_j} \right)^\theta \\
& \quad \times \left(\prod_{j \in L_1} 2^{-\gamma s_j} \right)^\theta \left(\prod_{j \in L_2} 2^{\gamma s_j} \right)^\theta = \sum_{\substack{\mathbf{s} \\ s_j \in \mathbb{Z}^+}} \|A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})\|_{L_p(\Omega)}^\theta 2^{\theta(\mathbf{r}, \mathbf{s})}.
\end{aligned}$$

Согласно неравенству (22) из леммы 5 имеем $\|g\|_{\mathbf{M}\dot{\mathbf{B}}_{p,l,\theta}^{\mathbf{r}}} \ll 1$.

Итак, и в этом случае существует постоянная C такая, что $Cg \in \mathbf{M}\dot{\mathbf{B}}_{p,l,\theta}^{\mathbf{r}}$.
Как уже отмечалось,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi(\mathbf{x})) \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Рассматривая кубатурную формулу

$$R_N(f) = I_N(f(\varphi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}))),$$

в которой узлами являются точки $(\varphi(\xi_1^i), \dots, \varphi(\xi_d^i))$, а весами $\lambda_i\psi(\xi^i)$, где ξ^i и λ_i – соответственно узлы и веса кубатурной формулы $I_N(f)$ для функций, заданных на $\mathbb{R}^d$ с носителем из Ω , получим доказательство теоремы 6, что в совокупности с теоремой 5 завершает доказательство теоремы 1.

Для получения оценки снизу мы воспользуемся конструкцией, предложенной Н. С. Бахваловым [7]. Итак, верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, $\nu = d$; тогда

$$R_N(\mathbf{MB}_{p,l,\theta}^r) \gg N^{-r} \log^{(d-1)/\theta'} N,$$

где $1/\theta + 1/\theta' = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу монотонности L_p -норм достаточно доказать эту оценку для $p = \infty$. Пусть $\Omega = [0, 1]^d$ – область интегрирования. Рассмотрим сетку с шагом 2^{-s_j} по переменной x_j , где $\|\mathbf{s}\|_1 = n$, $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d)$, s_j – целые числа и $s_j \geq 0$. Выберем число n такое, что $4N > 2^n \geq 2N$. Обозначим каждую ячейку этой сетки через

$$I_{\mathbf{s}, \mathbf{j}} = \prod_{i=1}^d [j_i 2^{-s_i}, (j_i + 1) 2^{-s_i}),$$

где $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_d)$ и j_i – натуральные числа, не превосходящие $2^{s_i} - 1$.

По крайней мере 2^{n-1} ячеек $I_{\mathbf{s}, \mathbf{j}}$ не содержат узлов данной кубатурной формулы I_N . Обозначим соответствующее множество векторов $\mathbf{j}$ через $L_{\mathbf{s}}$. Рассмотрим теперь бесконечно дифференцируемую функцию $\eta(x)$ такую, что $\text{supp } \eta(x) \subset [0, 1]$, $\eta(x) \geq 0$ и $\int_{[0,1]} \eta(x) dx = a > 0$.

Пусть

$$\eta_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{j} \in L_{\mathbf{s}}} \prod_{i=1}^d \eta(2^{s_i} x_i - j_i). \quad (27)$$

Положим теперь

$$\eta_n(\mathbf{x}) = \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 = n} \eta_{\mathbf{s}}.$$

Для функции $\eta_n(\mathbf{x})$ имеем

$$\int_{\Omega} \eta_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \gg n^{d-1}.$$

С другой стороны, $I_N(\eta_n(\mathbf{x})) = 0$, поэтому $R_N(\eta_n(\mathbf{x})) \gg n^{d-1}$.

Оценим теперь норму этой функции в $\mathbf{MB}_{\infty,l,\theta}^r$. Для этого сначала докажем, что

$$\sup_{0 \leq t_j \leq 1} \Omega_l(G)(\eta_n, \mathbf{t})_{\infty} \prod_{j \in G} t_j^{-r_j} \ll 2^{nr} \quad (28)$$

и

$$\int_{\Omega} \left(\prod_{j \in G} t_j^{-1-r} \right) \Omega_l(G)(\eta_n, \mathbf{t})_{\infty} d\mathbf{t} \ll n^{(d-1)2^{nr}}. \quad (29)$$

Отсюда будет следовать, что

$$\left(\int_{\Omega} \left(\prod_{j \in G} t_j^{-1-\theta r} \right) (\Omega_l(G)(\eta_n, \mathbf{t})_{\infty})^{\theta} d\mathbf{t} \right)^{1/\theta} \ll n^{(d-1)/\theta 2^{nr}}.$$

Для простоты изложения будем рассматривать случай $G = \{1, \dots, d\}$.

Из определения $\eta_{\mathbf{s}} \mathbf{x}$ непосредственно следует оценка

$$\|\eta_{\mathbf{s}}^{(l\beta)}(\mathbf{x})\|_{L_{\infty}(\Omega)} \ll 2^{(l\beta, \mathbf{s})},$$

где $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$ и $\beta_j = 0, 1$.

Пользуясь этой оценкой, получим

$$\Omega_l(\eta_{\mathbf{s}}, \mathbf{t})_{\infty} \ll \left(\prod_{j=1}^d \min\{(t_j 2^{s_j})^l, 1\} \right).$$

Непосредственно переходя к доказательству (28), имеем

$$\begin{aligned} \Omega_l(\eta_{\mathbf{s}}, \mathbf{t})_{\infty} \prod_{j=1}^d t_j^{-r} &\ll \prod_{j=1}^d \min\{(t_j 2^{s_j})^l, 1\} \prod_{j=1}^d t_j^{-r} \\ &= 2^{r\|\mathbf{s}\|_1} \prod_{j=1}^d \min\{(t_j 2^{s_j})^{l-r}, (t_j 2^{s_j})^{-r}\}. \end{aligned}$$

Суммируя по $\mathbf{s}$, получим

$$\Omega_l(\eta_n, \mathbf{t})_{\infty} \ll 2^{rn} \sum_{\|\mathbf{s}\|_1=n} \prod_{j=1}^d \min\{(2^{s_j} t_j)^{l-r}, (2^{s_j} t_j)^{-r}\} \ll 2^{rn}.$$

Переходя к доказательству (29), представим интеграл

$$\int_{\Omega} \left(\prod_{j=1}^d \min\{(t_j 2^{s_j})^l, 1\} \right) \left(\prod_{j=1}^d t_j^{-1-r} \right) d\mathbf{t}$$

в виде суммы 2^d интегралов вида

$$\left(\prod_{j \in H} \int_0^{2^{-s_j}} t_j^l t_j^{-1-r} dt_j 2^{ls_j} \right) \left(\prod_{j \in \{1, \dots, d\} \setminus H} \int_{2^{-s_j}}^1 t_j^{-1-r} dt_j \right).$$

Вычисляя интегралы, имеем

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \prod_{j \in G} t_j^{-1-r} \Omega_l(\eta_{\mathbf{s}}, \mathbf{t})_{\infty} dt \\
& \ll \sum_{\substack{H \subset \{1, \dots, d\} \\ H \subset \{1, \dots, d\}}} \left(\prod_{j \in H} 2^{-(l-r)s_j} 2^{ls_j} \right) \left(\prod_{j \in \{1, \dots, d\} \setminus H} 2^{rs_j} \right) \\
& \ll 2^{r\|\mathbf{s}\|_1} = 2^{rn}.
\end{aligned} \tag{30}$$

Суммируя по $\mathbf{s}$, учитывая, что в этой сумме n^{d-1} слагаемых, и принимая во внимание тот факт, что для каждого слагаемого верна оценка (30), получим (29). Теорема 7 доказана.

Для перехода к случаю $\nu \neq d$ достаточно заменить функцию, определенную в (27), на

$$\eta_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{j} \in L_{\mathbf{s}}} \prod_{i=1}^{\nu} \eta(2^{s_i} x_i - j_i) \prod_{i=\nu+1}^d \eta(x_i).$$

Дальнейший анализ не претерпит существенных изменений.

Итак, окончательно мы приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $rp > 1$, $1 \leq \theta < \infty$. Тогда

$$R_N(\mathbf{MB}_{p,l,\theta}^{\mathbf{r}}) \asymp R_N(\mathbf{MB}_{p,l,\theta}^{\mathbf{r}}) \asymp N^{-r} (\log N)^{(\nu-1)/\theta'},$$

где $1/\theta + 1/\theta' = 1$. Причем оценки сверху для классов $\mathbf{MB}_{p,l,\theta}^{\mathbf{r}}$ достигаются на сетке с узлами в точках

$$\varphi\left(\frac{(A^{-1})^T \mathbf{m}}{q}\right) \frac{(A^{-1})^T \mathbf{m}}{q} \in [0, 1]^d$$

и весами

$$(q^d \det A)^{-1} \psi\left(\frac{(A^{-1})^T \mathbf{m}}{q}\right),$$

где матрица A взята из леммы 1 и

$$\varphi(\mathbf{x}) = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_d)), \quad \psi(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^d \varphi'(x_j),$$

$\varphi(t)$ определяется формулой (19).

Список литературы

1. *Дубинин В. В.* Об оптимальных квадратурных формулах для классов функций с ограниченной смешанной разностью // Матем. заметки. 1991. Т. 49. № 1. С. 149–151.
2. *Дубинин В. В.* Квадратурные формулы для классов функций с ограниченной смешанной разностью // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 7. С. 23–34.
3. *Дубинин В. В.* Оптимальные кубатурные формулы для классов функций с ограничениями, наложенными на смешанную разность: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук, 1993.
4. *Фролов К. К.* Квадратурные формулы на классах функций: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР, 1979.
5. *Темляков В. Н.* Об одном приеме получения оценок снизу погрешностей квадратурных формул // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 10. С. 1403–1413.
6. *Фролов К. К.* Оценки сверху погрешностей квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 1976. Т. 231. № 4. С. 818–821.
7. *Бахвалов Н. С.* Оценки снизу асимптотических характеристик классов функций с доминирующей смешанной производной // Матем. заметки. 1972. Т. 12. № 6. С. 655–664.
8. *Быковский В. А.* О правильном порядке погрешности оптимальных кубатурных формул в пространствах с доминирующей производной и квадратичных отклонениях сеток. Препринт Дальневосточного научного центра АН СССР. 1985. С. 3–31.
9. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН. 1986. Т. CLXXVIII.
10. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. МИАН. 1951. Т. 38. С. 224–278.
11. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
12. *Аманов Т. И.* Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-Ата: Наука КазахССР, 1976.

Поступило в редакцию
15.VIII.1995