Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Попов, Замечания о равномерных составных оценках осциллирующих интегралов с простыми особенностями, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 4, 173–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/im1141>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 18:22:14

УДК 517.3

Д. А. Попов

Замечания о равномерных составных оценках осциллирующих интегралов с простыми особенностями

Рассматривается вопрос о построении асимптотически точных (при $\Omega \gg 1$) и равномерных по параметрам $t = (t_1, t_2, \dots, t_m)$ оценок осциллирующих интегралов, содержащих большой параметр Ω . Предложен возможный многомерный аналог известной оценки И. М. Виноградова для одномерных интегралов. На основе этого предположения получены оценки интегралов с особенностями типа A_k , $D_4^\pm$ по классификации В. И. Арнольда и на примере особенностей $D_5^\pm$ обсуждается возможность обобщения полученных результатов.

Библиография: 28 наименований.

§ 1. Введение

Осциллирующим интегралом (ОИ) будем называть n -мерный интеграл вида

$$I_n[u | t, \Omega] = \int_M e^{i\Omega\Phi(z,t)} u(z,t) dz. \quad (1.1)$$

Здесь $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, $dz = dz_1 \dots dz_n$ и для определенности будем считать, что M – n -мерный параллелепипед, $M = \{z \in \mathbb{R}^n, a_i \leq z_i \leq b_i\}$. Принимающая действительные значения функция Φ называется *фазой*, функция u – *амплитудой* и величина Ω – *большим параметром*. Ниже всегда рассматривается семейство фаз и амплитуд, зависящих от m -мерного параметра $t = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m$, хотя для сокращения иногда вместо $\Phi(z, t)$, $u(z, t)$ используется запись $\Phi(z)$, $u(z)$.

В теории ОИ основными являются две следующие задачи:

- 1) об асимптотике ОИ (1.1) при $\Omega \rightarrow \infty$;
- 2) о равномерной по параметру $t \in \mathbb{R}^m$ оценке сверху величины $|I_n[u | t, \Omega]|$ при больших Ω .

Задача 1) возникла в физике при исследовании явления дифракции. В этой задаче рассматриваются асимптотики интеграла $I_n[u | t, \Omega]$ при $\Omega \rightarrow \infty$ и фиксированном значении параметра t , $t = t_0$. К асимптотической оценке ОИ сводятся многие вопросы теории распространения волн, квазиклассического приближения в квантовой механике и теории интегральных операторов Фурье. Метод стационарной фазы (СФ) в сочетании с методами теории особенностей в принципе решают задачу 1) в большинстве интересных случаев (см. [1]–[7]).

В настоящей работе мы рассмотрим задачу 2). Эта задача допускает различные формулировки. В частности, формулировка, принятая в теории особенностей, будет кратко обсуждаться ниже. Постановка задачи 2), рассматриваемая в настоящей работе, возникла в связи с приложениями равномерных оценок

в теории чисел, спектральной теории и современном гармоническом анализе. Вопрос о равномерных оценках ОИ был впервые поставлен в теории чисел. В работах И. М. Виноградова и Дж. Ван дер Корпута (см. [8]–[10]) были даны первые нетривиальные оценки одномерных ОИ и предложен элементарный метод их вывода (по поводу дальнейшего развития этого метода и его применения см. работы [11]–[13]). В настоящее время равномерные оценки ОИ находят все более широкое применение в вышеперечисленных областях и ряде других направлений (см., например, работы [14]–[19]).

Рассматриваемая ниже постановка задачи о равномерных оценках ОИ была предложена в работе [18]. В этой постановке рассматривается разбиение интересующей нас области T параметров $t \in T$ на зависящие от большого параметра Ω подобласти, в каждой из которых используется своя элементарная оценка. Используемый метод и его связь с методами работ [11]–[13] и методом стационарной фазы будут описаны ниже. Здесь отметим следующее. Как правило, в указанных выше приложениях оценка ОИ является промежуточным результатом и в дальнейшем полученную оценку необходимо интегрировать (суммировать) по области T . При этом область T , как правило, некомпактна и интерес представляют максимально точные оценки. Рассматриваемые разбиения области T связаны с геометрией ее пересечения с каустикой $\mathcal{K} = \mathcal{K}[\Phi]$ фазы Φ . Каустика разбита на подобласти с различными типами вырожденных критических точек. Ширины трубчатых окрестностей этих подобластей, где необходимо учитывать вырождение, зависят от величины Ω . Это и приводит к рассматриваемым ниже разбиениям области параметров T .

Рассмотрим ОИ (1.1) с гладким семейством фаз $\Phi(z, t)$. О величине $\Omega \geq 1$ не делается никаких априорных предположений, и все ограничения снизу величины Ω получаются в ходе вывода оценки. При этом, хотя явно это не указывается, фаза и амплитуда могут зависеть от Ω . Задача состоит в оценке сверху величины $|I_n[u | t, \Omega]|$ при больших Ω и всех t из некоторого множества $T \subset \mathbb{R}^m$. В соответствии с работой [18] ниже будет рассматриваться задача построения элементарных составных оценок интеграла (1.1). По определению это оценки вида

$$|I_n[u | t, \Omega]| \leq C_{in}[u, t] \Omega^{-\alpha_i + \varepsilon}, \quad \alpha_i > 0, \quad (1.2)$$

справедливые при всех $t \in T_i \subset T$ и любых $\varepsilon > 0$ при условиях $\Omega \geq \Omega_{in}(t)$. При этом константы $C_{in}[u, t]$ и величины $\Omega_{in}(t)$ должны быть явно указаны и множества T_i должны покрывать множество T : $T = \bigcup_i T_i$. Отметим, что возникающее при построении оценок разбиение $T = \bigcup_i T_i$ зависит от Ω и эта зависимость следует из условий $\Omega \geq \Omega_{in}(t)$.

Если элементарные составные оценки рассматривать с точностью до не зависящих от параметров t и Ω мультипликативных констант $C_{in}[u]$, то эти оценки можно упорядочить по их качеству. Пусть для любого $t \in T$ имеются две такие оценки. Тогда первая считается лучше второй, если она сильнее второй при $\Omega \rightarrow \infty$ в области $T' \subset T$ и не слабее второй для любого $t \in T \setminus T'$. Это дает возможность определить понятие асимптотически точной (неулучшаемой) для любого $t \in T$ оценки. Для такой оценки верхнюю грань величины α_i в формуле (1.2) дает метод СФ. Задача состоит в построении оценок, максимально близких к асимптотически точным, т. е. оценок, для которых объем области

в пространстве параметров, где оценка не является асимптотически точной, был как можно меньше и в любом случае меньше $\Omega^{-\gamma}$, $\gamma > 0$.

Примеры таких равномерных составных оценок рассмотрены в работе [18]. Простейшая из них возникает при оценке интеграла Эйри. Это одномерный ОИ $I_1[u | t, \Omega]$, в котором $a_1 = -\infty$, $b_1 = +\infty$, $u \in C_0^\infty$, $\Phi(x, t) = \frac{1}{3}x^3 - tx$, $z_1 = x$ и $T = [0, 1]$. В работе [18] для этого интеграла получена составная оценка вида

$$|I_1[u | t, \Omega]| \leq C[u] \cdot \begin{cases} \Omega^{-1/2} t^{-1/4}, & \Omega^{-2/3} \leq t \leq 1, \\ \Omega^{-1/3}, & 0 \leq t \leq \Omega^{-2/3}, \end{cases} \quad (1.3)$$

соответствующая разбиению $T = T_1 \cup T_2$, в котором $T_1 = [0, \Omega^{-2/3}]$, $T_2 = [\Omega^{-2/3}, 1]$. Эта оценка асимптотически точна, так как справа в формуле (1.3) стоят первые члены асимптотики интеграла Эйри при $t > 0$ и $t = 0$, т. е. оценка определяется вкладом критических точек. Кроме того, эта составная оценка согласована, так как две оценки в правой части формулы (1.3) совпадают (с точностью до констант $C[u]$) при $t = \Omega^{-2/3}$.

Заметим, что для интеграла Пирси – аналога интеграла Эйри, в котором $\Phi(x, t) = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}ax^2 + bx$, $t = (a, b)$, – по-видимому уже нельзя получить асимптотически точную элементарную составную оценку в круге $a^2 + b^2 \leq 1$ (точную в каждой точке этого круга [18]).

В соответствии с методом СФ основную роль при оценке ОИ будут играть критические точки фазы $\Phi(z)$, которые ниже обозначаются через $z_c \equiv z_c(t)$. Матрица вторых производных фазы Φ в точке z_c (гессиян) будет обозначаться через $\Phi_c^{(2)} \equiv \Phi^{(2)}(z_c, t)$. Если для любого $t \in T$

$$\text{corank } \Phi_c^{(2)} \equiv n - \text{rank } \Phi_c^{(2)} \leq 1,$$

то фаза Φ при $t \in T$ может иметь особенности только типа A_k [3], [20], [21]. В этом случае для получения элементарных составных оценок, близких к асимптотически точным, для любого $t \in T$ можно воспользоваться результатами работы [18]. Если же при некоторых $t \in T$ имеются критические точки $z_c(t)$ такие, что $\text{corank } \Phi_c^{(2)} \geq 2$, то фаза имеет более сложные особенности.

Основные результаты об оценках ОИ с использованием теории особенностей получены в работах [3], [4], [22]–[26]. Принятая в этих работах постановка задачи о равномерных оценках ОИ состоит в следующем. Пусть при заданном $t = t_0 \in T$ функция $\Phi_0(z) = \Phi(z, t_0)$ имеет особенность типа ν . Предполагается, что носитель амплитуды u лежит в достаточно малом шаре $|z - z_c(t_0)| \leq \sigma_1$. Теория особенностей в принципе позволяет по типу ν найти вклад критической точки $z_c(t_0)$ в асимптотику при $\Omega \rightarrow \infty$ интеграла (1.1). Пусть главный член этого вклада имеет вид

$$I_n^0[u | z_c(t_0)] = \frac{C[u](\ln \Omega)^{\gamma_\nu}}{\Omega^{\beta_\nu} F_\nu(z_c(t_0))}. \quad (1.4)$$

Тогда возникает следующий вопрос: будет ли в шаре $|t - t_0| \leq \sigma_2$ при достаточно малом σ_2 верна оценка

$$|I_n[u | t, \Omega]| \leq C_n[u, t] \Omega^{-\beta_\nu + \varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (1.5)$$

В указанных выше работах получен положительный ответ на этот вопрос в семействах фаз общего положения, зависящих от $m \leq 7$ параметров, а в двумерном случае ($n = 2$) – при любом числе параметров. Показано [26], что уже при $n = 3$ имеется особенность высокой коразмерности, для которой ответ на поставленный вопрос отрицателен.

Рассмотрим вопрос: можно ли использовать эти результаты для получения нужных нам составных оценок, близких к асимптотически точным? Как это ясно из рассмотренного выше примера интеграла Эйри, для получения таких оценок надо иметь достаточно точную информацию о зависимости констант $C_n[u, t]$ в оценке (1.5) от параметра t . Вопрос о вычислении констант в оценках (1.5) в теории особенностей по-видимому остается открытым. С другой стороны, если пользоваться оценками вида

$$|I_n[u | t, \Omega]| \leq C_n[u] \Omega^{-\beta_\nu + \varepsilon}, \quad |t - t_0| < \sigma,$$

то возникающее разбиение области T не зависит от Ω и получаемая составная оценка может быть далека от точной.

В работе [18] для получения нужных оценок в случае особенностей типа A_k ($\nu = A_k$) использовалось сочетание метода СФ и элементарного метода оценок одномерных ОИ. Последний метод берет свое начало в работах И. М. Виноградова и Дж. Ван дер Корпута и получил свое развитие в работах [11]–[13]. В частности, в этих работах получен следующий результат. Пусть в одномерном ОИ (1.1) фаза Φ имеет $p \geq 2$ непрерывных производных (при $z \in \text{supp } u$) и условие

$$|\Phi^{(p)}(z, t)| \geq \Phi_p > 0, \quad z \in \text{supp } u, \quad (1.6)$$

выполняется равномерно по z, t . Тогда имеет место оценка

$$|I_1[u | t, \Omega]| \leq C_p[u] (\Omega \Phi_p)^{-1/p} \quad (1.7)$$

и константа $C_p[u]$ в ней может быть явно указана. Именно этот результат вместе с полученными в работе [18] оценками остаточных членов в разложении ОИ позволяет найти нужные оценки для многомерных ОИ с фазой, имеющей особенности типа A_k .

Цель настоящей работы – рассмотреть возможность обобщения указанного подхода в случае, когда фаза имеет вырожденные критические точки с более сложным вырождением.

Для нахождения нужных оценок в областях параметров, где имеются только простые особенности [3], [20], [21], достаточно получить двумерный аналог оценок (1.7), так как для простых особенностей $\text{corank } \Phi_c^{(2)} \leq 2$. Заметим, что все особенности в семействах фаз общего положения при $m \leq 5$ простые.

При наличии двумерного аналога оценки (1.7) получение нужных составных оценок в областях параметров, где все особенности простые, уже не представляет принципиальных трудностей и производится следующим образом.

1. Пусть критические точки $z_c(t)$, $t \in T$, известны и все они простые. С помощью разбиения единицы и количественного варианта формулы интегрирования по частям [18, лемма 3.1] задача локализуется, т. е. сводится к исследованию n -мерных ОИ по малым (диаметром $\Omega^{-\gamma}$, $\gamma > 0$) окрестностям критических точек.

2. Делая, если нужно, линейную замену координат $y = Az$ в каждом таком интеграле, получим, что фаза как функция переменных $y_2, \dots, y_n$ для особенностей типа A_k или как функция переменных $y_3, \dots, y_n$ для других простых особенностей имеет только невырожденные критические точки. Интегрируем по этим переменным, используя теорему 2.1 или следствие 2.1 из работы [18].

3. Оставшийся одномерный ОИ по переменной y_1 или двумерный по переменным y_1, y_2 оцениваем с помощью (1.7) или соответствующего двумерного аналога этой оценки.

Для особенностей типа A_k эта схема реализована в работе [18]. Ясно, что она естественно обобщается и на непростые особенности, но в этом случае нужны трехмерные обобщения оценок (1.7) при $\text{corank } \Phi_c^{(2)} \geq 3$.

Чтобы сформулировать нужную нам гипотезу о многомерном аналоге оценки (1.7), рассмотрим сначала случай особенностей типа A_k . Тогда на этапе 3 оценки мы имеем одномерный ОИ с фазой $\tilde{\Phi}(y)$, $y = y_1 \in \mathbb{R}$. Если $\tilde{\Phi}^{(k)}(y_c) = 0$, $k \leq p-1$, $|\tilde{\Phi}^{(p)}(y_c)| \geq \Phi_p > 0$, то условие (1.6) означает, что в точке z_c имеется особенность типа A_{p-1} , а оценка (1.7) имеет вид (с точностью до не зависящей от Ω константы) первого члена асимптотики соответствующего одномерного интеграла с фазой $\tilde{\Phi}$. Учитывая явный вид (1.4) основного вклада критической точки z_c типа ν в асимптотику ОИ, можно предположить, что естественным обобщением условий (1.6) являются условия вида

$$|F_\nu(z)| \geq B_\nu > 0, \quad (1.8)$$

в которых функция $F_\nu(z)$ определяется равенством (1.4), и предполагаемая оценка интеграла $I_n[u | t, \Omega]$ при условии (1.8) может иметь вид

$$|I_n[u | t, \Omega]| \leq \frac{C_{n,\nu}[u, t]}{\Omega^{\beta_\nu - \varepsilon} B_\nu} \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (1.9)$$

Основные результаты настоящей работы относятся к оценкам двумерных ОИ. Это не является дополнительным ограничением, так как мы рассматриваем простые особенности. Сформулированное выше предположение при $n = 2$ будет доказано для особенностей типа A_k и в несколько ослабленной форме для особенностей типа $D_4^\pm$. Уже для особенностей типа $D_5^\pm$ полученная ниже оценка хотя и нетривиальна, но далека от асимптотически точной.

§ 2. Невырожденные критические точки

В этом параграфе будет приведено следствие из результатов, полученных в работе [18], позволяющее в n -мерном случае достаточно просто оценить ОИ, когда все критические точки невырождены. В § 3, 4 результаты настоящего параграфа не используются, но они позволяют строить оценки n -мерных ОИ без ссылок на работу [18]. Попутно будут введены нужные определения и обозначения.

Константой ниже называется любая величина, не зависящая от переменных z и Ω . Все константы, значения которых не указываются, обозначаются через C , и так могут обозначаться различные константы. Всегда указывается, от каких величин эти константы зависят, и если эти величины не указаны,

то C – абсолютная константа. Все константы, фигурирующие в тексте, эффективны, и метод их вычисления содержится в доказательстве соответствующей оценки.

Используются стандартные обозначения: $\partial_i = \partial/\partial z_i$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $|z|$ – евклидова норма $z \in \mathbb{R}^n$ и $|t|$ – евклидова норма t в пространстве параметров $\mathbb{R}^m$. Через ∂^k обозначается любая производная ∂^α порядка k , $|\alpha| = k$.

Рассмотрим множество T_0 в пространстве параметров $\mathbb{R}^m$ такое, что при $t \in T_0$ фаза Φ имеет только конечное число $\mathcal{N} \geq 1$ невырожденных критических точек $z_c \equiv z_c(t) \in \text{supp } u$. Таким образом, будем предполагать, что при $t \in T_0$

$$|\det \Phi^{(2)}(z_c)| \geq \Phi_{2c} \geq \Phi_2 > 0 \quad \forall z_c \in \text{supp } u. \quad (2.1)$$

Здесь и ниже $\Phi^{(2)}(z)$ – гессиан (матрица вторых производных $\partial_i \partial_j \Phi$) в точке z . Заметим, что условие $|\det \Phi^{(2)}(z)| \geq \Phi_2 > 0$ является многомерным обобщением условия (1.6) при $p = 2$.

Чтобы сформулировать результат, введем некоторые определения. Будем говорить, что $(u, \Phi) \in \Lambda(v, \lambda)$, $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, если выполнены следующие условия:

1) $u \in C_0^\infty$, $u(z) = 0$ при $|z| \geq 1$ и

$$|\partial^\alpha u(z)| \leq v \lambda_2^{|\alpha|}, \quad \lambda_2 \geq 1; \quad (2.2)$$

2) $\Phi \in C^\infty$ при $|z| \leq 1$ и

$$|\partial^\alpha \Phi(z)| \leq \lambda_0 \lambda_1^{|\alpha|}, \quad |\alpha| \geq 2, \quad \lambda_1 \geq 1. \quad (2.3)$$

Заметим, что приведенные ниже результаты справедливы и при $u \in C_0^k$, $\Phi \in C^k$ для достаточно больших k (см. замечание 1 в конце настоящего параграфа).

Пусть $\mu_1^c, \dots, \mu_n^c$ – собственные числа гессиана $\Phi^{(2)}(z_c)$ и

$$B_c = \min_k |\mu_k^c|, \quad \min_{z_c \in \text{supp } u} B_c \geq B_0 > 0. \quad (2.4)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \max_k |\mu_k^c| &\leq n \max_{i,j} |\partial_i \partial_j \Phi(z_c)| \leq n \lambda_0 \lambda_1^2, \\ |\det \Phi^{(2)}(z_c)| &\leq \left(\max_k |\mu_k^c| \right)^{n-1} B_c, \end{aligned}$$

то, следовательно (см. (2.1)),

$$B_c \geq C_n \Phi_{2c} (\lambda_0 \lambda_1^2)^{-n+1}. \quad (2.5)$$

Пусть $z_{\text{ex}} \neq z_c$ – экстремальные точки функции $G = |\nabla \Phi|^2$, $\nabla \equiv \nabla_z = (\partial_1 \dots \partial_n)$, определяемые из уравнений $\partial_i G = 0$. Определим константу $g > 0$ из условия

$$g \equiv g(t) \leq \min_{z_{\text{ex}} \neq z_c} |G(z_{\text{ex}})|^{1/2}. \quad (2.6)$$

Заметим, что при $t \in T_0$ (см. [18])

$$|z_{\text{ex}} - z_c| \geq C_n B_0 (\lambda_0 \lambda_1^3)^{-1}, \quad |z_c - z_{c'}| \geq C_n B_0 (\lambda_0 \lambda_1^3)^{-1},$$

следовательно, для количества $\mathcal{N}$ критических точек в носителе амплитуды u , т.е. при $|z| \leq 1$, имеет место оценка

$$\mathcal{N} \leq C_n \Phi_2^{-n} (\lambda_0^n \lambda_1^{2n+1})^n. \quad (2.7)$$

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) $(u, \Phi) \in \Lambda(v, \lambda)$;
- 2) при $t \in T_0 \subset \mathbb{R}^m$ все критические точки z_c невырождены и

$$|\det \Phi^{(2)}(z_c)| \geq \Phi_2 > 0;$$

- 3) $\Omega \geq 1$ и выполняются оценки

$$v \leq C \Omega^{\theta_1}, \quad 1 \leq \mathcal{N} \leq C \Omega^{\theta_2}, \quad \lambda_0 \leq C \Omega^{\theta_3}, \quad \theta_i \geq 0. \quad (2.8)$$

Тогда можно указать константы $C_n(\lambda, \varepsilon)$, $C_n(\varepsilon, \theta)$, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, такие, что если при $t \in T_0$ для некоторого ε , $0 < \varepsilon \leq 1$, выполнено

$$\Omega \geq C_n(\lambda, \varepsilon) [1 + g^{-2-2\varepsilon} + \Phi_2^{-6-6\varepsilon}], \quad (2.9)$$

где константа $g = g(t)$ определена в (2.6), то при $t \in T_0$ имеет место оценка

$$|I_n[u | t, \Omega]| \leq \frac{C_n(\varepsilon, \theta) v}{\Omega^{n/2}} \sum_{z_c \in \text{supp } u} |\det \Phi^{(2)}(z_c)|^{-1/2}. \quad (2.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что нужный результат вытекает из [18, следствие 2.1]. Введем обозначение

$$\lambda_3 = \max(\lambda_1, \lambda_2) \quad (2.11)$$

и предположим, что

$$\begin{aligned} \lambda_0 \Omega &\geq C, & \lambda_0^2 \lambda_1^{12} B_0^{-6} &\leq C \Omega^{1-\varepsilon}, \\ \lambda_0^2 \lambda_3^6 B_0^{-3} &\leq C \Omega^{1-\varepsilon}, & g &\geq C_n \Omega^{-(1-\varepsilon)/2} \lambda_0^{1/2} \lambda_1, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где B_0 – величина, определенная в формуле (2.4). При этих условиях в силу [18, следствие 2.1] для любых $Q_1 \geq 0$, $Q_2 \geq 0$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} |I_n[u | t, \Omega]| &\leq \sum_{z_c \in \text{supp } u} \frac{v}{\Omega^{n/2} |\det \Phi^{(2)}(z_c)|^{1/2}} \sum_{q=0}^{Q_1} C_{nq} \left(\frac{\lambda_0^2 \lambda_3^6}{\Omega B_c^3} \right)^q \\ &+ C_n(Q_1, Q_2, \varepsilon, \theta) \left[\Omega^{-Q_2} + \sum_{z_c \in \text{supp } u} \frac{v}{\Omega^{n/2} |\det \Phi^{(2)}(z_c)|^{1/2}} \left(\frac{\lambda_0^2 \lambda_3^6}{\Omega B_c^3} \right)^{Q_1+1} \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

В соответствии с неравенством (2.5) и условиями теоремы константы $C_n(\lambda, \varepsilon)$ в (2.9) можно выбрать таким образом, чтобы выполнялись условия (2.12) и,

следовательно, была справедлива оценка (2.13). Выбирая $Q_1 = 0$ и учитывая неравенства (2.12), из (2.13) получаем

$$|I_n[u | t, \Omega]| \leq C_n^1(Q_2, \varepsilon, \theta) \sum_{z_c \in \text{supp } u} \frac{v}{\Omega^{n/2} |\det \Phi^{(2)}(z_c)|} + \frac{C_n^2(Q_2, \varepsilon, \theta)}{\Omega^{Q_2}}. \quad (2.14)$$

В силу условий (2.8), (2.9) можно считать, что $\Phi_2 \geq \Omega^{-1}$, и целое число $Q_2 = Q_2(\varepsilon, \theta)$ можно выбрать таким образом, что $\mathcal{N}v\Omega^{-n/2}\Phi_2^{-1} \geq \Omega^{-Q_2}$. Нужный результат (2.10) теперь следует из оценки (2.14).

Из результатов работы [18] вытекает, что утверждение теоремы 2.1 остается верным, если $u \in C_0^k$, $\Phi \in C^k$ и условия (2.2), (2.3) выполняются при $|\alpha| \leq k$. При $\theta_i = \theta_0$ можно взять

$$k \geq 2[(2\theta_0 + 3)(Q_2 + 2\theta_0)\varepsilon^{-2}] + n + 3.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В формулировке теоремы 2.1 условия (2.9) можно заменить на условия (2.12). Условие, налагаемое на величину g (2.6) и содержащееся в (2.9), означает, что величина $\delta_0 = C_n\Omega^{-(1-\varepsilon)/2}\lambda_0^{1/2}\lambda_1 B_0^{-1}$ достаточно мала [18]. Величина $\delta_0 \leq C_n B_0 \lambda_0 \lambda_1^3$ называется достаточно малой, если минимум величины G в области $|z - z_c| \geq \delta_0$ достигается на одной из сфер $|z - z_c| = \delta_0$ и условие для величины g можно заменить требованием достаточной малости величины $\delta_0 = C_n\Omega^{-(1-\varepsilon)/2}\lambda_0^{1/2}\lambda_1 B_0^{-1}$, задающей размер окрестностей критических точек z_c , дающих основной вклад в оценку величины $|I_n[u | t, \Omega]|$.

При доказательстве теоремы 2.1 нигде не предполагалось, что фаза Φ и амплитуда u не зависят от Ω . Такая зависимость допустима, важно только то, чтобы при этом выполнялись условия (2.12).

Граница области T_0 в пространстве параметров, где имеет место оценка (2.10), задается условием (2.9) (или (2.12)). Из этого условия следует ограничение снизу расстояния от точек $t \in T_0$ до каустики $\mathcal{K}$. Напомним, что каустика $\mathcal{K}$ это множество таких $t \in \mathbb{R}^m$, при которых фаза Φ имеет хотя бы одну вырожденную критическую точку z_c^0 , в которой $\det \Phi^{(2)}(z_c^0) = 0$.

Оценка (2.10) без условий (2.9) приведена в работе [22]. Условия (2.9) достаточны для справедливости этой оценки. Заметим, что условия (2.9) не являются точными, однако без условий такого типа оценка (2.10) не верна уже для интеграла Пирси [18].

§ 3. Особенности типа A_k

Начиная с этого параграфа и везде далее (кроме п. 3.2) будем предполагать, что $n = 2$, т. е. рассматривать двумерные ОИ. В этом случае будут использоваться обозначения $z = (x, y)$ и

$$I_2[u | t, \Omega] \equiv I_2[u | t] \equiv I_2[u] = \iint_M e^{i\Omega\Phi} u \, dx \, dy. \quad (3.1)$$

Как уже указывалось, так как мы ограничиваемся рассмотрением простых особенностей, то $\text{rank } \Phi^{(2)}(z_c) \geq n - 2$ и предположение $n = 2$ в сущности не является ограничением, так как по $n - 2$ переменным можно интегрировать,

используя теорему 2.1 или результаты работы [18]. Метод интегрирования по этим переменным описан в § 1 и демонстрируется далее при доказательстве теоремы 3.1.

3.1. Формулировка результата. Вблизи каустики $\mathcal{K}$ оценка (2.10) не обоснована, так как $\Phi_2 \rightarrow 0$ при $d(t, \mathcal{K}) \rightarrow 0$, $d(t, \mathcal{K})$ – евклидово расстояние от точки t до каустики, следовательно, нарушается условие (2.9). Чтобы рассмотреть простейший случай области $T_1 \subset \mathbb{R}^m$, $T_1 \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$, будем предполагать, что

$$|\partial_x^2 \Phi(x, y)| \geq \Phi_{21} > 0, \quad t \in T_1, \quad z \in \text{supp } u. \quad (3.2)$$

Тогда $\text{rank } \Phi^{(2)}(z_c) \geq 1$ при $n = 2$ и, исключая случай бесконечнократного вырождения, при $d(t, \mathcal{K}) \rightarrow 0$, $t \in T_1$, возникают только особенности типа A_k , $k \geq 2$. Условие (3.2) так же, как и $|\det \Phi^{(2)}(z)| > 0$, можно рассматривать как одно из двумерных обобщений условий (1.6) при $p = 2$.

Предположим, что существует конечный набор гладких решений $x_k(y)$ уравнения

$$\partial_x \Phi(x, y) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \mathcal{N}. \quad (3.3)$$

В силу определения $x_k(y)$ – критические точки фазы Φ , рассматриваемой как функция от x . Введем функции

$$S_k(y) = \Phi(x_k(y), y) \quad (3.4)$$

и предположим, что для некоторого p_k , $2 \leq p_k \leq \bar{p}$,

$$|S_k^{(p_k)}(y)| \geq S_k > 0. \quad (3.5)$$

При условиях (3.2), (3.5) все критические точки z_c имеют тип A_n и $n \leq \bar{p} - 1$.

Для заданной критической точки $x_k(y)$ и целого числа $q \geq 0$ определим функцию

$$f_q^k(y) = D_q^k(y) |\partial_x^2 \Phi(x_k(y), y)|^{-1/2}, \quad (3.6)$$

где

$$D_q^k(y) = \sum_{\mu=0}^{2q} b_{\mu, \mu+q}^k, \quad (3.7)$$

$$b_{\mu, p}^k = \frac{i^{p+\mu}}{\mu! p! 2^p (\partial_x^2 \Phi(x_k(y), y))^p} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^p (u \Psi_\mu^k) \right] (x_k(y), y)$$

и функции Ψ_μ^k задаются равенствами

$$\Psi_\mu^k(x, y) = u(x, y) \left[\Phi(x, y) - \Phi(x_k(y), y) - \frac{1}{2} \partial_x^2 \Phi(x_k(y), y) (x - x_k(y))^2 \right].$$

Величины D_q^k входят в стандартный вид разложения ОИ

$$I_1[u | y, t, \Omega] = \int e^{i\Omega \Phi(x, y)} u(x, y) dx \quad (3.8)$$

по методу стационарной фазы [2], [18]. Переменная y при этом рассматривается как параметр. То, что все критические точки $x_k(y)$ фазы Φ невырождены, следует из условий (3.2). Введем для интеграла (3.8) аналог g_1 величины g (2.6).

Если $x_{\text{ex}} \equiv x_{\text{ex}}(y)$ – экстремальные точки производной, определяемые из условий $\partial_x^2 \Phi(x_{\text{ex}}, y) = 0$, $x_{\text{ex}} \neq x_k(y)$, то

$$g_1 \equiv g_1(t) = \min_{x_{\text{ex}} \neq x_k(y), |y| \leq 1} |\partial_x \Phi(x_{\text{ex}})|. \quad (3.9)$$

Через $m[f]$ обозначим число участков монотонности функции f .

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $(u, \Phi) \in \Lambda(v, \lambda)$ при $t \in T_1$ и существует конечный набор гладких решений $x_k(y)$ уравнения (3.3). Пусть, кроме того, для некоторого ε , $0 < \varepsilon \leq 1$, выполняются условия

$$\Omega \geq C(\lambda, \varepsilon) (1 + g_1^{-2-2\varepsilon} + \Phi_{21}^{-3-3\varepsilon}), \quad (3.10)$$

$$m[f_q^k] \leq C_q \Omega^{\varepsilon q}, \quad (3.11)$$

где функции f_q^k определены в (3.6), величина Φ_{21} – в (3.2) и $m[f_q^k]$ – число участков монотонности функции f_q^k . Тогда при $t \in T_1$ имеет место равномерная по t оценка двумерного ОИ (3.1):

$$|I_2[u | t]| \leq \sum_{x_k(y)} \frac{C_k(\varepsilon, \lambda) v}{(\Omega \Phi_{21})^{1/2} (\Omega S_k)^{1/p_k}}. \quad (3.12)$$

Здесь суммирование ведется по всем решениям $x_k(y)$ уравнения (3.3).

Для доказательства теоремы 3.1 нам будут нужны вспомогательные леммы, доказательство которых приведено в п. 3.2. Эти леммы являются некоторым усилением соответствующих результатов, полученных в работе [18]. Это усиление позволяет вместо степени $-6 - 6\varepsilon$ для Φ_2 в (2.9) получить степень $-3 - 3\varepsilon$ для Φ_{21} в (3.10), что существенно используется в § 4.

3.2. Вспомогательные леммы. Первая из приведенных ниже лемм уточняет лемму 3.1 из работы [18] в случае, когда все вторые производные $\partial^2 \Phi$ малы, и дает оценку степеней $(A_\Phi)^N$ оператора A_Φ , определяемого равенствами

$$A_\Phi f = \sum_{i=1}^n \partial_i (f G^{-1} \partial_i \Phi), \quad (3.13)$$

$$G = |\nabla \Phi|^2 = \sum_{i=1}^n (\partial_i \Phi)^2$$

и входящего в формулу интегрирования по частям

$$I_n[f | t, \Omega] = \left(\frac{i}{\Omega} \right)^N I_n[(A_\Phi)^N f | t, \Omega], \quad (3.14)$$

справедливую для достаточно гладких f при $z_c \notin \text{supp } f$, $\text{supp } f \subset M \setminus \partial M$.

В формулировке следующей леммы используются обозначения

$$\begin{aligned} \sum_{(k,l) \in O_1} a_{kl} &\equiv \sum_{0 \leq k \leq N/2} \sum_{l=0}^k a_{kl} + \sum_{k \geq N/2} \sum_{l=0}^{N-k} a_{kl}, \\ \sum_{(k,l) \in O_2} a_{kl} &\equiv \sum_{k \geq N/2} \sum_{l=N-k}^k a_{kl}, \end{aligned}$$

и через $|\partial^k f|$, $|\partial^k \Phi|$, Φ_1 обозначены любые функции или константы такие, что выполняются оценки

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha f| &\leq |\partial^k f|, \quad |\partial^\alpha \Phi| \leq |\partial^k \Phi|, \quad |\alpha| = k, \\ |\nabla \Phi| &= G^{1/2} \geq \Phi_1. \end{aligned} \quad (3.15)$$

ЛЕММА 3.1. Пусть функции f , Φ нужное число раз дифференцируемы, имеют место оценки (3.15) и $|\partial^k \Phi| \leq \lambda_0 \lambda_1^k$, $k \geq 2$. Тогда для любого $N \geq 2$

$$\begin{aligned} |(A_\Phi)^N f| &\leq C_{N,n} (\Phi_1)^{-2N} \left[\sum_{(k,l) \in O_1} (\Phi_1)^k |\partial^{k-l} f| |\partial^2 \Phi|^{N-k-l} \lambda_0^l \lambda_1^{3l} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{(k,l) \in O_2} (\Phi_1)^k |\partial^{k-l} f| \lambda_0^{N-k} \lambda_1^{2N-2k+l} \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [18, лемма 3.1] следует, что

$$|(A_\Phi)^N f| \leq C_{N,n} \sum_{p=0}^N |\partial^p f| \sum_{j=0}^{N-p} (\Phi_1)^{-N-j} \sum_{(n)} |\partial^2 \Phi|^{n_2} \dots |\partial^{N+1} \Phi|^{n_{N+1}}, \quad (3.17)$$

и в этой формуле суммирование ведется по всем наборам $(n) = (n_2, \dots, n_{N+1})$ целых чисел таких, что $n_i \geq 0$,

$$n_2 + n_3 + \dots + n_{N+1} = j, \quad n_2 + 2n_3 + \dots + Nn_{N+1} = N - p.$$

Делая замену переменных $(j, p) \rightarrow (k, l)$, $j = N - k$, $p = k - l$, перепишем неравенство (3.17) в виде

$$|(A_\Phi)^N f| \leq C_{N,n} \sum_{k=0}^N (\Phi_1)^{-2N+k} \sum_{l=0}^k |\partial^{k-l} f| \sum_{(n)} |\partial^2 \Phi|^{n_2} \dots |\partial^{N+1} \Phi|^{n_{N+1}},$$

где набор (n) удовлетворяет условиям

$$n_2 + \dots + n_{N+1} = N - k, \quad n_2 + 2n_3 + \dots + Nn_{N+1} = N - k + l.$$

Таким образом, при $N \geq 2$ имеют место неравенства $n_3 + n_4 + \dots + n_{N+1} \leq l$ и $t_0 \leq n_2 \leq N - k$, где $t_0 = \max(0, N - k - l)$. Выделяя суммирование по $n_2 = t$, имеем

$$|(A_\Phi)^N f| \leq C_{N,n} \sum_{k=0}^N (\Phi_1)^{-2N+k} \sum_{l=0}^k |\partial^{k-l} f| \sum_{t=t_0}^{N-k} |\partial^2 \Phi|^t \sum_{(n)}^1 |\partial^3 \Phi|^{n_3} \dots |\partial^{N+1} \Phi|^{n_{N+1}},$$

суммирование в $\sum_{(n)}^1$ ведется по наборам (n) таким, что

$$n_3 + \dots + n_{N+1} = N - k + t, \quad 2n_3 + \dots + Nn_{N+1} = N - k + l - t.$$

Используя оценку $|\partial^k \Phi| \leq \lambda_0 \lambda_1^k$, $k \geq 3$, получим

$$|(A_\Phi)^N f| \leq C_{N,n} \sum_{k=0}^N (\Phi_1)^{-2N+k} \sum_{l=0}^k |\partial^{k-l} f| \sum_{t=t_0}^{N-k} |\partial^2 \Phi|^t \lambda_0^{N-k-t} \lambda_1^{2N-2k-2t+l}.$$

Поскольку $|\partial^2 \Phi| \leq \lambda_0 \lambda_1^2$, то

$$|(A_\Phi)^N f| \leq C_{N,n} \sum_{k=0}^N (\Phi_1)^{-2N+k} \sum_{l=0}^k |\partial^{k-l} f| |\partial^2 \Phi|^{t_0} \lambda_0^{N-k-t_0} \lambda_1^{N-k-2t_0+l}. \quad (3.18)$$

Остается заметить, что $t_0 = 0$ при $(k, l) \in O_2$ и $t_0 = N - k - l$ при $(k, l) \in O_1$, чтобы из (3.18) получить нужный результат (3.16).

Лемма 3.1 позволяет в одномерном случае уточнить следствие 2.1 из работы [18]. Это уточнение содержится в следующей лемме.

ЛЕММА 3.2. *Рассмотрим одномерный ОИ вида (3.8). Пусть $(u, \Phi) \in \Lambda(v, \lambda)$, выполняются условия (2.8), все критические точки фазы $\Phi(x)$ невырождены и*

$$|\Phi^{(2)}(x_c)| \geq \Phi_{2c} \geq \Phi_2 > 0.$$

Пусть, кроме того, для некоторого ε , $0 < \varepsilon \leq 1$, выполняются условия

$$\begin{aligned} \lambda_0^2 \lambda_3^6 \Phi_2^{-3} &\leq C \Omega^{1-\varepsilon}, & \lambda_2 &\leq C \Omega^{(1-\varepsilon)/2} \Phi_2^{1/2}, & \lambda_0 \Omega &\geq 1, \\ g &\geq C \Omega^{-(1-\varepsilon)/2} \Phi_2^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

в которых величины g , λ_3 определены равенствами (2.6), (2.11). Тогда для любого $Q \geq 0$ выполняется равенство

$$I_1[u | t, \Omega] = \sum_{x_c} I_{1c}^Q + \Delta I_{1Q}, \quad (3.20)$$

где

$$\begin{aligned} I_{1c}^Q &= \left(\frac{2\pi}{\Omega} \right)^{1/2} \frac{\exp\left\{ \frac{i\pi}{4} \kappa_c + i\Omega \Phi(x_c) \right\}}{|\Phi^{(2)}(x_c)|^{1/2}} \sum_{q=0}^Q \frac{D_q^c}{\Omega^q}, \\ \kappa_c &= \text{sign } \Phi^{(2)}(x_c), \end{aligned}$$

и величины D_q^c задаются равенствами (3.7), в которых индекс k надо заменить на c и $x_k(y)$ — на x_c . При этом для величин D_q^c , ΔI_{1Q} имеют место следующие оценки:

$$|D_q^c| \leq C_q v \left(\frac{\lambda_0^2 \lambda_3^6}{\Phi_{2c}} \right)^q, \quad (3.21)$$

$$|\Delta I_{1Q}| \leq \frac{C_Q(\varepsilon, \theta) v}{(\Omega \Phi_2)^{1/2}} \mathcal{N} \Omega^{-\varepsilon(Q+1)}. \quad (3.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма доказывается точно так же, как следствие 2.1 из работы [18], только для оценки величин $(A_\Phi)^N f$ теперь используется лемма 3.1.

3.3. Доказательство теоремы 3.1. Запишем интеграл $I_2[u]$ (3.1) в виде повторного интеграла:

$$I_2[u] = \int I_1[u] dy, \quad I_1[u] = \int u e^{i\Omega \Phi} dx. \quad (3.23)$$

Условия (3.10) влекут выполнение условий (3.19) (см. § 1), и по лемме 3.2 имеем

$$I_1[u] = \sum_{x_k(y)} \left(\frac{2\pi}{\Omega} \right)^{1/2} \frac{\exp\left\{ \frac{i\pi}{4} \varkappa_k + i\Omega S_k(y) \right\}}{|\partial_x^2 \Phi(x_k(y), y)|^{1/2}} \sum_{q=0}^Q \frac{D_q^k}{\Omega^q} + \Delta I_{1Q}.$$

Подставляя это выражение в равенство (3.23), получим

$$I_2[u] = \sum_{x_k(y)} \left(\frac{2\pi}{\Omega} \right)^{1/2} \exp\left\{ \frac{i\pi}{4} \varkappa_k \right\} \sum_{q=0}^Q \int_{-1}^1 f_q^k(y) e^{i\Omega S_k(y)} dy + \Delta I_{2Q} \quad (3.24)$$

и с помощью оценки (3.22) находим оценку остаточного члена

$$|\Delta I_{2Q}| \leq \int_{-1}^1 |\Delta I_{1Q}| dy \leq \frac{C_Q(\varepsilon, \theta)}{(\Omega \Phi_2)^{1/2}} v \mathcal{N} \Omega^{-\varepsilon(Q+1)}. \quad (3.25)$$

Для оценки одномерных интегралов по y в правой части равенства (3.24) используем оценку (1.7) при $p = p_k$ (целые числа p_k были определены выше, см. (3.5)). Согласно работе [14] в оценке (1.7) константу $C_p[u]$ можно записать в виде $C_p[u] = C m[u] \max |u|$, где $m[u]$ – число участков монотонности функции u . Из оценки (3.21) следует, что

$$|f_q^k(y)| \leq \frac{C_{kq} v}{(\Phi_{21})^{1/2}} \left(\frac{\lambda_0^2 \lambda_3^6}{\Phi_{21}^3} \right)^q,$$

и, таким образом,

$$\left| \int_{-1}^1 f_q^k(y) e^{i\Omega S_k(y)} dy \right| \leq C_{kq} \frac{m[f_q^k] v}{(\Phi_{21})^{1/2} (\Omega S_k)^{1/p_k}} \left(\frac{\lambda_0^2 \lambda_3^6}{\Phi_{21}^3} \right)^q. \quad (3.26)$$

Используя эту оценку в равенстве (3.24) и учитывая оценку (3.25), получим

$$\begin{aligned} |I_2[u]| &\leq \frac{1}{(\Omega \Phi_2)^{1/2}} \sum_{x_k(y)} \sum_{q=0}^Q \frac{C_{kq} m[f_q^k] v}{(\Omega S_k)^{1/p_k}} \left(\frac{\lambda_0^2 \lambda_3^6}{\Phi_{21}^3} \right)^q \\ &\quad + C_Q(\varepsilon, \theta) v \mathcal{N} (\Omega \Phi_2)^{-1/2} \Omega^{-\varepsilon(Q+1)}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Для завершения доказательства теперь достаточно воспользоваться условиями (3.10), (3.1) и выбрать нужным образом величину $Q = Q(\varepsilon, \theta)$.

Теорема 3.1 содержит трудно проверяемое условие (3.11). Заметим, однако, что в силу принципа локализации эта теорема реально применяется в случаях, когда носитель амплитуды u мал, меньше $\Omega^{-\gamma}$, $\gamma > 0$. С другой стороны, от условия (3.11) можно вообще избавиться ценой некоторого ухудшения оценки в области, где $\Phi_{21} < \Omega^{-\gamma}$, $\gamma > 0$. Покажем, как это сделать. Рассмотрим одномерный ОИ

$$I_1[f] = \int_{-1}^1 f(y) e^{i\Omega S(y)} dy, \quad f \in C_0^\infty, \quad \text{supp } f \in (-1, 1),$$

и запишем его в виде

$$I_1[f] = \int_{-1}^1 f^{(1)}(y) \left[\int_y^1 e^{i\Omega S(t)} dt \right] dy.$$

Таким образом, имеется оценка

$$|I_1[f]| \leq \int_{-1}^1 |f^{(1)}(y)| dy \cdot \max_{|y| \leq 1} \left| \int_y^1 e^{i\Omega S(y)} dy \right|.$$

Предполагая, что $|S^{(p)}(y)| \geq S_p$, $p \geq 2$, и используя оценку (1.7) вместе с указанным выше видом константы в ней, получим

$$|I_1[f]| \leq \max_{|y| \leq 1} |f^{(1)}(y)| \frac{C_p}{(\Omega S_p)^{1/p}}. \quad (3.28)$$

Нас интересует случай $f = f_q^k(y)$. Чтобы оценить производные $(f_q^k)^{(1)}$, сначала оценим величины dx_k/dy . Дифференцируя тождества $\partial_x \Phi(x_k(y), y) = 0$ по y , заключаем, что

$$\frac{dx_k}{dy} = -\frac{\partial_x \partial_y \Phi(x_k(y), y)}{\partial_x^2 \Phi(x_k(y), y)}. \quad (3.29)$$

Отсюда следует оценка

$$\left| \frac{dx_k}{dy} \right| \leq \lambda_0 \lambda_1^2 \Phi_{21}^{-1},$$

используя которую, получим

$$|(f_q^k)^{(1)}(y)| \leq \frac{C_{kq} v}{(\Phi_{21})^{1/2}} \left(\frac{\lambda_0^2 \lambda_3^6}{(\Phi_{21})^3} \right)^q \frac{\lambda_2 \lambda_1^4 \lambda_3}{(\Phi_{21})^2}.$$

С помощью этой оценки и (3.28) имеем вместо (3.26) оценку

$$\left| \int f_q^k(y) e^{i\Omega S_k(y)} dy \right| \leq \frac{C_{kq} v}{(\Phi_{21})^{1/2} (\Omega S_k)^{1/p_k}} \left(\frac{\lambda_0^2 \lambda_3^6}{(\Phi_{21})^3} \right)^q \frac{\lambda_2 \lambda_1^4 \lambda_3}{(\Phi_{21})^2},$$

следовательно, вместо (3.12) – оценку

$$|I_2[u]| \leq \sum_{x_k(y)} \frac{C_k(\varepsilon, \theta) v}{(\Omega \Phi_{21})^{1/2} (\Omega S_k)^{1/p_k}} \frac{\lambda_2 \lambda_1^4 \lambda_3}{(\Phi_{21})^2}. \quad (3.30)$$

Оценка (3.30) верна уже без условия (3.11).

Заметим, что равенства (3.29) позволяют выписать явный вид условий (3.5) в терминах ограничений на производные фазы Φ . В качестве примера рассмотрим случай, когда $z_c = (x_k(y_c), y_c)$ является критической точкой типа A_2 , т.е. для указанного номера k выполнено $S_k^{(1)}(y_c) = S_k^{(2)}(y_c) = 0$, $S_k^{(3)}(y_c) \neq 0$. Используя равенства (3.29), получим, что при условии $\partial_x^2 \Phi(z_c) \neq 0$ выполнено

$$\begin{aligned} S_k^{(3)}(y_c) = & \left(\frac{\partial^2 \Phi(z_c)}{\partial x^2} \right)^{-2} \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)^2 \right. \\ & \left. - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right] (z_c). \end{aligned}$$

Таким образом, z_c является критической точкой типа A_2 при $\partial_x^2 \Phi(z_c) \neq 0$, если выражение, стоящее в квадратных скобках в правой части последнего равенства, отлично от нуля.

§ 4. Особенности типа $D_4^\pm$

Если хотя бы одна из вторых производных $\partial_x^2 \Phi$, $\partial_x \partial_y \Phi$, $\partial_y^2 \Phi$ больше $C(\lambda) \times \Omega^{-(1-\varepsilon)/3}$, то оценка ОИ $I_2[u]$ (3.1) уже получена в § 3. Таким образом, осталось рассмотреть область T_2 такую, что при $t \in T_2$ все вторые производные фазы Φ малы, точнее, область T_2 , где

$$|\partial^2 \Phi(z)| \leq C(\lambda) \Omega^{-(1-\varepsilon)/3}, \quad t \in T_2. \quad (4.1)$$

Простейшей после A_k и наиболее часто встречающейся является особенность $D_4^\pm$ [20], [21]. Пусть при $t = 0$ точка $z = 0$ является критической точкой с особенностью $D_4^\pm$. Тогда в этой точке $\partial^2 \Phi(0) = 0$ и $D(0) \neq 0$, где $D(0)$ – значение в точке $z = 0$ дискриминанта кубической формы от переменных x, y , задаваемой членами третьей степени в ряде Тейлора фазы Φ . В этом случае основной вклад $I_2^0[u|0]$ (см. (1.4)) точки $z = 0$ в асимптотику интеграла $I_2[u]$ (см. (3.1)) имеет вид

$$I_2^0[u|0] = \frac{C[u]}{\Omega^{2/3} |D(0)|^{1/6}}. \quad (4.2)$$

Чтобы записать условие (1.8), введем обозначения

$$\begin{aligned} f_0(z) &= \frac{1}{6} \partial_x^3 \Phi(z), & f_1(z) &= \frac{1}{3} \partial_x^2 \partial_y \Phi(z), \\ f_2(z) &= \frac{1}{3} \partial_x \partial_y^2 \Phi(z), & f_3(z) &= \frac{1}{6} \partial_y^3 \Phi(z), \end{aligned} \quad z = (x, y). \quad (4.3)$$

Дискриминант $D(z)$ кубической формы, задаваемой членами третьей степени в ряде Тейлора фазы Φ в точке z , имеет вид

$$D(z) = (f_1^2 f_2^2 - 4f_1^3 f_3 + 18f_0 f_1 f_2 f_3 - 4f_2^3 f_0 + 27f_0^2 f_3^2)(z). \quad (4.4)$$

В соответствии с гипотезой, изложенной в § 1, в настоящем параграфе будем рассматривать область T_2 в пространстве параметров $\mathbb{R}^m$ такую, что

$$|D(z)| \geq A, \quad t \in T_2. \quad (4.5)$$

Этого условия достаточно, чтобы при $t \in T_2$ все критические точки фазы Φ имели тип A_k или $D_4^\pm$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $(u, \Phi) \in \Lambda(v, \lambda)$ при $t \in T_2$, $\mathcal{N} \geq 1$ – общее число критических точек и для некоторого ε , $0 < \varepsilon \leq 1$, выполняются условия

$$\begin{aligned} |\partial^2 \Phi(z)| &\leq C_1(\lambda) \Omega^{-\frac{1}{3}(1-\varepsilon)}, \\ |D(z)| &\geq A \geq C_2(\lambda) \Omega^{-\frac{2}{15}(1-\varepsilon)}, \\ \Omega &\geq C_3(\lambda, \varepsilon), \quad g \geq C_4(\lambda, \varepsilon) \Omega^{-\frac{2}{3}(1-\varepsilon)} A^{-3}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где g – величина, определенная в (2.6). Тогда при $t \in T_2$

$$|I_2[u]| \leq C(\lambda, \varepsilon) \mathcal{N} v \Omega^{-\frac{2}{3}(1-\varepsilon)} A^{-2} \quad (4.7)$$

и все константы $C_i(\lambda, \varepsilon)$, $C(\lambda, \varepsilon)$ могут быть явно указаны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную фиксированную точку $t \in T_2$ в пространстве параметров $\mathbb{R}^m$. Выделим некоторое конечное число $\mathcal{N}_1 \leq \mathcal{N}$ критических точек z_m , $m \in \{c\}$. Эти точки и числа $\delta_m \geq \delta_0 > 0$ всегда могут быть выбраны таким образом, чтобы в области $|z - z_m| \geq 2\delta_m$ не было критических точек. Заметим, что в круге $|z - z_m| \leq \delta_m$ могут содержаться несколько критических точек различных типов. Будем предполагать, что

$$|\partial^2 \Phi(z)| \leq a. \quad (4.8)$$

Константа a так же, как и величины $\delta_m \geq \delta_0 > 0$, пока не фиксирована.

Рассмотрим гладкое разбиение единицы с центрами в точках z_m , указанных выше, и масштабами δ_m , т. е. введем функции $\rho_m \in C_0^\infty$ такие, что

$$\begin{aligned} \rho_m(z) &= \begin{cases} 1, & \text{если } |z - z_m| \leq \delta_m, \\ 0, & \text{если } |z - z_m| \geq 2\delta_m, \end{cases} \\ |\partial^\alpha \rho_m(z)| &\leq C_{|\alpha|} \delta_m^{-|\alpha|}, \end{aligned}$$

и определим функцию $\tilde{\rho}$ равенством

$$1 = \sum_{z_m} \rho_m(z) + \tilde{\rho}(z).$$

В силу определения функций ρ_m имеем

$$\tilde{\rho}(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } |z - z_m| \geq 2\delta_m \text{ для любого } z_m, \\ 0, & \text{если } |z - z_m| \leq \delta_m \text{ для некоторого } z_m. \end{cases} \quad (4.9)$$

Запишем ОИ $I_2[u]$ (см. (3.1)) в виде

$$I_2[u] = \sum_{z_m} I_2[\rho_m u] + I_2[\tilde{\rho} u] \quad (4.10)$$

и будем отдельно оценивать интегралы $I_2[\tilde{\rho} u]$ и $I_2[\rho_m u]$. Так как все выделенные критические точки z_m равноправны, то достаточно рассмотреть одну из них; будем предполагать, что для этой точки $z_m(t) = 0$. По формуле Тейлора

$$\Phi(z) = \Phi(0) + Q(z) + P(z) + h_4(z), \quad (4.11)$$

где

$$\begin{aligned} Q(z) &\equiv Q(x, y) = q_{11}x^2 + 2q_{12}xy + q_{22}y^2, \\ P(z) &\equiv P(x, y) = a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3, \\ |h_4(z)| &= O(|z|^4). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Здесь и ниже

$$a_i = f_i(0), \quad (4.13)$$

где f_i – функции, определенные в равенстве (4.3). Будем предполагать, что

$$D(0) \geq A > 0. \quad (4.14)$$

Это предположение означает, что в точке $z = 0$ фаза Φ может иметь особенность типа D_4^- . Случай $D(0) < -A$ (особенность D_4^+) анализируется точно так же и поэтому рассматриваться не будет.

Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы (при определенных условиях для величин δ_m) доказать оценку

$$|\nabla\Phi(z)| \geq C[\Phi]\delta_m^2 \quad \text{при} \quad |z| = \delta_m$$

и указать константу $C[\Phi]$ в ней.

Сделаем линейную замену координат

$$\begin{aligned} z &= S\xi, & \xi &= (\xi_1, \xi_2), & S &= (s_{ij}), \\ x &= s_{11}\xi_1 + s_{12}\xi_2, & y &= s_{21}\xi_1 + s_{22}\xi_2, \end{aligned} \quad (4.15)$$

приводящую кубическую форму $P(x, y)$ (см. (4.12)) к каноническому виду [27], [28]:

$$P(x, y) = \gamma\xi_1(\xi_1^2 - \xi_2^2). \quad (4.16)$$

При условии (4.14) полином $P(x, 1)$ имеет три различных действительных корня $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, которые будем нумеровать таким образом, что $\alpha_1 \rightarrow \infty$ при $a_0 \rightarrow 0$. Тогда из разложения

$$P(x, y) = a_0(x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y)(x - \alpha_3 y)$$

следует, что

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_3} - \frac{\alpha_1}{\alpha_3 - \alpha_1} \right), & s_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_3} + \frac{\alpha_1}{\alpha_3 - \alpha_1} \right), \\ s_{21} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_3} - \frac{1}{\alpha_3 - \alpha_1} \right), & s_{22} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_3} + \frac{1}{\alpha_3 - \alpha_1} \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

При этом

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{4} \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1)}, \\ D(0) &= a_0^4 (\alpha_2 - \alpha_1)^2 (\alpha_3 - \alpha_1)^2 (\alpha_3 - \alpha_2)^2. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Заметим, что если $a_0 \rightarrow 0$, то

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\rightarrow -\frac{a_1}{a_0}, & \alpha_{2,3} &\rightarrow \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_1a_3}}{2a_1}, \\ D(0) &\rightarrow a_1^2(a_2^2 - 4a_1a_3), & \gamma &\rightarrow -\frac{a_1}{4(\alpha_2 - \alpha_3)} \end{aligned}$$

и все приведенные ниже результаты выдерживают предельный переход $a_0 \rightarrow 0$. В новых переменных (см. (4.12), (4.15)) имеем

$$Q(z) = Q(S\xi) = p_{11}\xi_1^2 + 2p_{12}\xi_1\xi_2 + p_{22}\xi_2^2.$$

Будем предполагать, что

$$|s_{ij}| \leq s. \quad (4.19)$$

В силу неравенства (4.8) имеем $|q_{ij}| \leq a$, следовательно,

$$\begin{aligned} |p_{ij}| &\leq Cas^2, \\ |\nabla_\xi Q(S\xi)| &\leq Cas^2|\xi|, \quad \nabla_\xi = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Из равенства (4.16) получаем оценку

$$|\nabla_\xi P(S\xi)| \geq C|\gamma||\xi|^2. \quad (4.21)$$

С другой стороны, используя очевидные неравенства

$$\begin{aligned} |\nabla_\xi x| &\leq Cs, \quad |\nabla_\xi y| \leq Cs, \quad |z| \leq 1, \\ |\nabla_z h_4(z)| &\leq CH|z|^3, \quad H \leq \lambda_0 \lambda_1^4, \end{aligned} \quad (4.22)$$

имеем

$$|\nabla_\xi h_4(S\xi)| \leq CHs|z|^3 \leq CHs^4|\xi|^3. \quad (4.23)$$

Оценки (4.20), (4.21), (4.23) показывают, что при условиях

$$C \frac{as^2}{|\gamma|} \leq |\xi| \leq C \frac{|\gamma|}{Hs^4} \quad (4.24)$$

имеет место неравенство

$$|\nabla_\xi \Phi(S\xi)| \geq C|\gamma||\xi|^2. \quad (4.25)$$

Прямым вычислением получаем

$$\det S = \frac{1}{2} \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)}{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1)}. \quad (4.26)$$

Поскольку $\xi = S^{-1}z$, то

$$s^{-1}|z| \leq |\xi| \leq s|\det S|^{-1}|z|,$$

и из (4.24), (4.25) получаем, что в кольце

$$C \frac{as^3}{|\gamma|} \leq |z| \leq C \frac{|\gamma| |\det S|}{Hs^5} \quad (4.27)$$

нет критических точек и в этом кольце

$$|\nabla \Phi(z)| \geq C|\gamma|s^{-3}|z|^2. \quad (4.28)$$

Таким образом, если величины δ_m выбраны так, что

$$\delta_m \geq C \frac{as^3}{|\gamma|}, \quad \delta_m \leq C \frac{|\gamma| |\det S|}{Hs^5}, \quad (4.29)$$

то имеет место нужная нам оценка

$$|\nabla \Phi(z)| \geq C|\gamma|s^{-3}\delta_m^2, \quad |z| = \delta_m. \quad (4.30)$$

Заметим, что из приведенных результатов следует ограничение снизу расстояния между выбранными критическими точками $z_m \in \{z_c\}$:

$$|z_m - z_{m'}| \geq C \frac{|\gamma| |\det S|}{H s^5}.$$

Входящие в условия (4.29) величины $s^3 |\gamma|^{-1}$ и $|\gamma| |\det S| H^{-1} s^{-5}$ можно явно выразить через $|D(0)|$. Для этого, используя выражение (4.18) для $D(0)$, запишем величины s_{ij} (4.17) в виде

$$s_{ij} = \varphi_{ij}(\alpha_k) a_0^2 (\alpha_2 - \alpha_1) (D(0))^{-1/2}.$$

Из определения корней α_k следует, что

$$|a_0 \varphi_{ij}(\alpha_k)| \leq C (\lambda_0 \lambda_1^3 + (\lambda_0 \lambda_1^3)^{1/3}).$$

Таким образом, можно взять

$$s = C \frac{(\lambda_0 \lambda_1^3 + (\lambda_0 \lambda_1^3)^{1/3}) a_0^2 (\alpha_2 - \alpha_1)}{\sqrt{D(0)}}. \quad (4.31)$$

Выражения (4.18), (4.26) для величин $|\gamma|$ и $|\det S|$ можно переписать в виде

$$|\gamma| = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^3 (a_0)^3}{\sqrt{D(0)}}, \quad |\det S| = \frac{a_0^2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2}{\sqrt{D(0)}},$$

следовательно,

$$\frac{s^3}{|\gamma|} = \frac{C_1(\lambda)}{D(0)}, \quad \frac{|\gamma| |\det S|}{s^5} = C_2(\lambda) (D(0))^{3/2}. \quad (4.32)$$

Переходим к оценке интеграла $I_2[\tilde{\rho}u]$, входящего в разложение (4.10). Из оценки (4.30) и определения (2.6) величины g получаем, что при условии

$$g \geq C \frac{|\gamma|}{s^3} \delta_m^2 \quad (4.33)$$

минимум величины $|\nabla \Phi(z)|$ в области $|z - z_m| \geq \delta_m$ достигается на одной из окружностей $|z - z_m| = \delta_m$, и, следовательно, при выполнении условий (4.29), (4.33) оценка (4.30) верна во всей области $|z - z_m| \geq \delta_m$, т. е.

$$|\nabla \Phi(z)| \geq C |\gamma| s^{-3} \delta_0^2, \quad |z - z_m| \geq \delta_m \geq \delta_0 > 0. \quad (4.34)$$

В силу равенства (4.9) если $z \in \text{supp } \tilde{\rho}$, то $|z - z_m| \geq \delta_m$. Так как в этой области нет критических точек, то, интегрируя $I_2[\tilde{\rho}u]$ по частям (см. формулу (3.14)), имеем

$$I_2[\tilde{\rho}u] = \left(\frac{i}{\Omega}\right)^N \iint (A_\Phi)^N (\tilde{\rho}u) e^{i\Omega\Phi} dx dy.$$

Далее воспользуемся тривиальной оценкой

$$|I_2[\tilde{\rho}u]| \leq \frac{1}{\Omega^N} \max_{|z| \leq 1} |(A_\Phi)^N (\tilde{\rho}u)| \quad (4.35)$$

и для оценки величины $(A_\Phi)^N(\tilde{\rho}u)(z)$ применим лемму 3.1. В интересующем нас случае (в обозначениях этой леммы)

$$f > \tilde{\rho}u, \quad \Phi_1 = C \frac{|\gamma|}{s^3} \delta_0^2, \quad |\partial^2 \Phi| = a.$$

Будем предполагать, что $\delta_m \leq C\lambda_2^{-1}$, и тогда

$$|\partial^\alpha(\tilde{\rho}u)| \leq C_{|\alpha|} v \mathcal{N}_1 \delta_0^{-|\alpha|},$$

где $\mathcal{N}_1$ – число выбранных критических точек. Если выполняются условия

$$\delta_m \lambda_1 \leq 1, \quad \delta_m \lambda_2 \leq 1, \quad \frac{|\gamma|}{s^3} \frac{\delta_m}{a} \leq 1, \quad \frac{\delta_m}{a} \lambda_0 \lambda_1^3 \geq 1, \quad (4.36)$$

то из оценки (3.16) получим, что для любого $N \geq 2$

$$|(A_\Phi)^N(\tilde{\rho}u)(z)| \leq C_N v \mathcal{N}_1 \left[\frac{s^3}{\Omega |\gamma| \delta_0^3} \left(1 + \frac{s^3 \lambda_0 \lambda_1^3}{|\gamma|} \right) \right]^N,$$

следовательно (см. (4.35)),

$$|I_2[\tilde{\rho}u]| \leq C_N v \mathcal{N}_1 \left[\frac{s^3}{\Omega |\gamma| \delta_0^3} \left(1 + \frac{s^3 \lambda_0 \lambda_1^3}{|\gamma|} \right) \right]^N. \quad (4.37)$$

Поскольку из определения дискриминанта $D(0)$ следует, что

$$|D(0)| \leq C(\lambda_0 \lambda_1^3)^4,$$

то константу C в (4.31) можно выбрать таким образом, что

$$\frac{s^3 \lambda_0 \lambda_1^3}{|\gamma|} \geq 1, \quad (4.38)$$

и тогда при условии

$$\frac{s^6 \lambda_0 \lambda_1^3}{\Omega |\gamma|^2 \delta_0^3} \leq C \Omega^{-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \quad (4.39)$$

имеет место оценка

$$|I_2[\tilde{\rho}u]| \leq C_N v \mathcal{N}_1 \Omega^{-\varepsilon N} \quad \forall N \geq 2. \quad (4.40)$$

Будем считать, что $\delta_m = \delta_0$, и оставшиеся интегралы $I_2[\rho_m u]$ оценим тривиально:

$$|I_2[\rho_m u]| \leq C v \delta_0^2. \quad (4.41)$$

Напомним, что константа v входит в условие (2.2). Теперь прямо из разложения (4.10) получим

$$|I_2[u]| \leq C v \mathcal{N}_1 [\delta_0^2 + C_N \Omega^{-\varepsilon N}] \quad \forall N \geq 2. \quad (4.42)$$

Остается показать, что все условия для величин $\delta_m = \delta_0$ непротиворечивы, и выбрать нужным образом δ_0 и число N . С учетом равенств (4.32), условие (4.39) принимает вид

$$\delta_0 \geq C(\lambda)(D(0))^{-2/3} \Omega^{-(1-\varepsilon)/3}. \quad (4.43)$$

Теперь заметим, что в силу исходных предположений константу a в (4.8) можно выбрать так, что

$$a \leq C\lambda_0^{2/3}\lambda_3^2\Omega^{-(1-\varepsilon)/3} \equiv C(\lambda)\Omega^{-(1-\varepsilon)/3}.$$

Тогда с учетом равенств (4.32) первое из условий (4.29) и второе из условий (4.36) выполняются, если

$$\delta_0 \geq C(\lambda)(D(0))^{-1}\Omega^{-(1-\varepsilon)/3}. \quad (4.44)$$

В силу оценки (4.38) условия (4.44), (4.43) выполняются, если выбрать

$$\delta_0 = C(\lambda)(D(0))^{-1}\Omega^{-(1-\varepsilon)/3}. \quad (4.45)$$

Рассмотрим оставшиеся условия. Так как константа $H \leq \lambda_0\lambda_1^4$ (см. (4.22)), то, снова ссылаясь на равенства (4.32), заключаем, что второе из условий (4.29) выполняется, если выполняется второе из условий (4.6). Условие (4.33) выполняется в силу последнего из условий (4.6). Непосредственно проверяется, что остальные условия, использованные при доказательстве оценки (4.42), в силу выбора δ_0 (4.45) и оценки (4.38) имеют вид $\Omega \geq C(\lambda)$, следовательно, выполняются в силу третьего из условий (4.6).

С учетом равенства (4.45) оценка (4.42) приобретает вид

$$|I_2[u]| \leq C(\lambda)v\mathcal{N}_1(A^{-2}\Omega^{-\frac{2}{3}(1-\varepsilon)} + C_N\Omega^{-\varepsilon N}). \quad (4.46)$$

Поскольку $A \geq \Omega^{-\sigma}$, $\sigma > 0$, то, выбирая соответствующим образом N , получим нужную оценку (4.7).

Заметим, что оценка (4.46) является неулучшаемой по порядку Ω при $\varepsilon \rightarrow 0$, но не является асимптотически точной. Для получения асимптотически точной оценки надо еще заменить A^{-2} в (4.6) на $A^{-1/6}$. Как уже указывалось во введении, глобальные условия (3.2) на $\partial^2\Phi$ и (4.5) на $D(z)$ можно заменить на локальные, т. е. для справедливости полученных результатов достаточно предположить, что условия (3.2), (4.5) выполняются в критических точках z_c . Таким образом, неисследованной остается область в пространстве параметров, где одновременно для некоторой критической точки z_c выполняются условия

$$|\partial^2\Phi(z_c)| \leq C(\lambda)\Omega^{-\frac{1}{3}(1-\varepsilon)}, \quad |D(z_c)| \leq C(\lambda)\Omega^{-\frac{2}{15}(1-\varepsilon)}.$$

Изложенного выше достаточно, чтобы рассмотреть общие семейства фаз, зависящих не более чем от трех параметров, так как в таких семействах встречаются только особенности типов A_k , $D_4^\pm$ (см. [3], [20], [21]).

В случае четырех параметров могут встретиться еще и особенности $D_5^\pm$, а для пяти параметров – особенности типов $D_6^\pm$, $E_6^\pm$. Возникает вопрос о возможности описанным выше элементарным методом получить оценки, близкие к асимптотически точным и для этих простых особенностей.

Рассмотрим этот вопрос на примере особенности типа $D_5^\pm$. Пусть при $t = 0$ точка $z = 0$ является критической точкой с особенностью типа $D_5^\pm$. Это означает, что $\partial^2\Phi(0) = 0$, $D(0) = 0$ и полином $P(x, 1) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$

(см. (4.12)) имеет кратные корни. Весь класс особенностей $D_k^\pm$, $k \geq 5$, отвечает случаю $\alpha_1 \neq \alpha_2 = \alpha_3$, а особенность $E_6^\pm$ – трехкратному корню $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$. Будем действовать так же, как и выше при анализе особенности $D_4^\pm$. Разлагая фазу Φ в ряд Тейлора в нуле и учитывая члены четвертой степени, имеем

$$\Phi(z) = \Phi(0) + Q(z) + P(z) + R(z) + h_5(z), \quad |h_5(z)| = O(|z|^5),$$

где

$$R(z) \equiv R(x, y) = b_0x^4 + b_1x^3y + b_2x^2y^2 + b_3xy^3 + b_4y^4.$$

Для простоты предположим, что коэффициент a_0 в формуле (4.12) для $P(z)$ отличен от нуля ($a_0 \neq 0$). С помощью замены координат

$$\begin{aligned} z = S\xi, \quad S = (s_{ij}), \quad s_{11} = \alpha_1(\alpha_1 - \alpha_2)^{-1}, \\ s_{12} = -\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)^{-1}, \quad s_{21} = -s_{22} = (\alpha_1 - \alpha_2)^{-1} \end{aligned}$$

приведем полином $P(x, y)$ (см. (4.43)) к каноническому виду $P(S\xi) = a_0\xi_1^2\xi_2$. При $D(0) = 0$ корни $\alpha_1 \neq \alpha_2 = \alpha_3$ полинома $P(x, 1)$ явно выписываются как рациональные функции от коэффициентов a_i .

Введем величины

$$C_4(0) = R(s_{12}, s_{22}), \quad D_1(0) = 3a_2a_0 - a_1^2. \quad (4.47)$$

Аналог формулы (4.2), дающий главный член вклада критической точки $z_c = 0$ в асимптотику интеграла $I_2[u]$, имеет вид

$$I_2^0[u | 0] = \frac{C[u]}{\Omega^{5/8} |C_4(0)|^{1/8} |D_1(0)|^{1/2}}, \quad (4.48)$$

и условия $C_4(0) \neq 0$, $D_1(0) \neq 0$ необходимы и достаточны для того, чтобы в точке $z = 0$ была особенность типа $D_5^\pm$. По аналогии с тем, что было сделано выше, надо рассмотреть область параметров T_3 , в которой

$$C_4(z) \neq 0, \quad D_1(z) = (3f_2f_0 - f_1^2)(z) \neq 0. \quad (4.49)$$

По определению величина $C_4(z)$ получается заменой в выражении $C_4(0)$ коэффициентов a_i на f_i (4.3) и коэффициентов b_i на соответствующие четвертые производные $\partial^4\Phi(z)$. С помощью нелинейной замены координат $z_1 = z_1(\xi)$, описанной в работе [21], фаза Φ приводится к виду

$$\Phi(z_1) = a_0y_1x_1^2 + C_4(0)y_1^4 + h_5^1(z_1), \quad h_5^1(z_1) = O(|z_1|^5), \quad z_1 = (x_1, y_1).$$

Дальше можно использовать те же рассуждения, что и выше.

В силу теоремы 4.1 нас теперь интересует область параметров T_3 , где $\partial^2\Phi = O(\Omega^{-\frac{1}{3}(1-\varepsilon)})$, $D(z) = O(\Omega^{-\frac{2}{15}(1-\varepsilon)})$. Если использовать грубую оценку (4.41), то это позволяет получить при $t \in T_3$ только оценку вида

$$|I_2[u]| \leq C[u, \Phi] \Omega^{-\frac{2}{15}(1-\varepsilon)}.$$

При $|a_0| > 0$ этот результат можно улучшить, более аккуратно оценивая интеграл $I_2[\rho_m u]$ с фазой $\Phi(z_1)$. Тогда удается получить оценку

$$|I_2[u]| \leq C[u, \Phi] \Omega^{-\frac{3}{8}(1-\varepsilon)},$$

которая все еще далека от асимптотически точной (см. (4.48)).

Список литературы

1. М. В. Федорюк, *Метод перевала*, Наука, М., 1977.
2. Л. Хермандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*. Т. 1. *Теория распределений и анализ Фурье*, Мир, М., 1986; пер. с англ.: L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators*. V. I. *Distribution theory and Fourier analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **256**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
3. В. И. Арнольд, “Замечания о методе стационарной фазы и числах Кокстера”, *УМН*, **28:5** (1973), 17–44; англ. пер.: V. I. Arnol'd, “Remarks on the stationary phase method and Coxeter numbers”, *Russ. Math. Surveys*, **28:5** (1973), 19–48.
4. В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*. Т. 2. *Монодромия и асимптотика интегралов*, Наука, М., 1984; англ. пер.: V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade, A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps*. II. *Monodromy and the asymptotic behavior of integrals*, Birkhäuser, Boston, 1988.
5. J. J. Duistermaat, “Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **27:2** (1974), 207–281.
6. В. Гийемин, С. Стейнберг, *Геометрические асимптотики*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: V. Guillemin, Sh. Stenberg, *Geometric asymptotics*, Mathematical Surveys, **14**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1977.
7. В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1976; англ. пер.: V. P. Maslov and M. V. Fedoryuk, *Semi-classical approximation in quantum mechanics*, Nauka, Moscow, 1976; English transl. 1981.
8. И. М. Виноградов, *Метод тригонометрических сумм в теории чисел*, Наука, М., 1971; англ. пер.: I. M. Vinogradov, *The method of trigonometric sums in the theory of numbers*, Dover Publ., Mineola, NY, 2004.
9. И. М. Виноградов, *Особые варианты метода тригонометрических сумм*, Наука, М., 1976.
10. J. G. van der Corput, “Neue Zahlentheoretische Abschätzungen”, *Math. Ann.*, **89** (1923), 215–254.
11. Г. И. Архипов, А. А. Карацуба, В. Н. Чубариков, “Тригонометрические интегралы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43:5** (1979), 971–1003; англ. пер.: G. I. Arkhipov, A. A. Karatsuba, V. N. Chubarikov, “Trigonometric integrals”, *Math. USSR Izv.*, **15:2** (1980), 211–239.
12. Г. И. Архипов, А. А. Карацуба, В. Н. Чубариков, *Теория кратных тригонометрических сумм*, Наука, М., 1987.
13. G. I. Arkhipov, V. N. Chubarikov, A. A. Karatsuba, *Trigonometric sums in number theory and analysis*, de Gruyter Expositions in Mathematics, **39**, Walter de Gruyter, Berlin, 2004.
14. Д. В. Косыгин, А. А. Минасов, Я. Г. Синай, “Статистические свойства спектров операторов Лапласа–Бельтрами на поверхностях Лиувилля”, *УМН*, **48:4** (1993), 3–130; англ. пер.: D. V. Kosygin, A. A. Minasov, Ya. G. Sinai, “Statistical properties of the spectra of Laplace–Beltrami operators on Liouville surfaces”, *Russian Math. Surveys*, **48:4** (1993), 1–142.

15. J. Bourgain, " L^p -estimates for oscillatory integrals in several variables", *Geom. Funct. Anal.*, **1**:4 (1991), 321–374.
16. E. M. Stein, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Mathematical Series, **43**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.
17. Д. А. Попов, "Сферическая сходимость ряда и интеграла Фурье индикатора двумерной области", *Тр. МИАН*, **218** (1997), 354–373; англ. пер.: D. A. Popov, "Spherical convergence of the Fourier series and integral of the indicator of a two-dimensional domain", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **218**:3 (1997), 352–371.
18. Д. А. Попов, "Оценки с константами для некоторых классов осциллирующих интегралов", *УМН*, **52**:1 (1997), 77–148; англ. пер.: D. A. Popov, "Estimates with constants for some classes of oscillatory integrals", *Russian Math. Surveys*, **52**:1 (1997), 73–145.
19. Д. А. Попов, "Восстановление характеристических функций в двумерной радоновской томографии", *УМН*, **53**:1 (1998), 115–198; англ. пер.: D. A. Popov, "Reconstruction of characteristic functions in two-dimensional Radon tomography", *Russian Math. Surveys*, **53**:1 (1998), 109–193.
20. В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений. Т. 1. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов*, Наука, М., 1982; англ. пер.: V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade, and A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps. I. Classification of critical points, caustics and wave fronts*, Birkhäuser, Boston, 1985.
21. В. И. Арнольд, "Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k , D_k , E_k и лагранжевы особенности", *Функц. анализ и его прил.*, **6**:4 (1972), 3–25; англ. пер.: V. I. Arnol'd, "Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups of A_k , D_k , E_k and Lagrangian singularities", *Funct. Anal. Appl.*, **6**:4 (1972), 254–272.
22. Y. Colin de Verdière, "Nombre de points entiers dans une famille homothétique de domaines de $\mathbb{R}^n$ ", *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **10**:4 (1977), 559–575.
23. В. Н. Карпушкин, "Равномерные оценки осциллирующих интегралов с гиперболической и параболической фазой", *Тр. семин. им. И. Г. Петровского*, 1983, № 9, 3–39.
24. В. Н. Карпушкин, "Теорема о равномерных оценках осциллирующих интегралов с фазой, зависящей от двух переменных", *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **10** (1984), 150–169.
25. В. Н. Карпушкин, "Равномерные оценки объемов", *Тр. МИАН*, **221**, Наука, М., 1998, 225–231; англ. пер.: V. N. Karpushkin, "Uniform estimates of volumes", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **221** (1998), 214–220.
26. А. Н. Варченко, "Многогранник Ньютона и оценки осциллирующих интегралов", *Функц. анализ и его прил.*, **10**:3 (1976), 1–38; англ. пер.: A. N. Varchenko, "Newton polyhedra and estimation of oscillating integrals", *Funct. Anal. Appl.*, **10**:3 (1976), 175–196.
27. Т. Брёкер, Л. Ландер, *Дифференцируемые ростки и катастрофы*, Мир, М., 1977; пер. с англ.: Th. Bröcker, *Differentiable germs and catastrophes*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **17**, London, 1975.
28. Г. В. Гуревич, *Основы алгебраической теории инвариантов*, ГИТТЛ, М., 1948.

Д. А. Попов (D. A. Popov)

Научно-исследовательский институт

физико-химической биологии им. А. Н. Белозерского,

МГУ им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию

12.07.2006

20.09.2007