Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Никулин, О компонентах связности модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 1, 99–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/im1143>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 17:45:52

УДК 512.774.5+511.334

В. В. Никулин

О компонентах связности модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей

Завершаются исследования, проведенные автором в работе [11], по классификации компонент связности модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей. В частности, показано, что данная классификация неминуемо связана с классическими вопросами теории чисел такими, как классификация бинарных неопределенных решеток и представлений чисел в виде суммы двух квадратов. В качестве приложения при использовании недавних результатов [13] полностью классифицируются вещественные поляризованные КЗ-поверхности, являющиеся деформациями вещественных гиперэллиптически поляризованных КЗ-поверхностей. Это важно, так как вещественные гиперэллиптически поляризованные КЗ-поверхности могут быть построены явно.

Библиография: 15 наименований.

§ 1. Введение

В работе [11] перечислялись компоненты связности модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей (X, P') . В § 2, п. 2.1 настоящей работы приведен обзор этих результатов.

При использовании глобальной теоремы Торелли для КЗ-поверхностей, доказанной И. И. Пятецким-Шапиро и И. Р. Шафаревичем [14], и эпиморфности отображения периодов для КЗ-поверхностей, доказанной Вик. С. Куликовым [7], в работе [11] было показано, что компонента связности модулей определяется классом изоморфизма действия антиголоморфной инволюции φ на $H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ при учете соответствующей поляризации $P' \in H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$, удовлетворяющей условию $\varphi(P') = -P'$. Тем самым, перечисление компонент связности модулей сводится к чисто арифметической задаче.

Для решения этой задачи в [11] были введены и классифицированы инварианты

$$(r, a, \delta_\varphi; k, n, \delta_P, \delta_{\varphi P}) \quad (1)$$

рода этого действия. Они имеют ясный геометрический смысл. Например, $k \in \mathbb{N}$ определяется тем, что элемент $P = P'/k$ примитивен в решетке Пикара, $n = P^2$ является примитивной степенью, $n > 0$ и $n \equiv 0 \pmod{2}$. Инварианты (r, a, δ_φ) определяют топологический тип множества $X(\mathbb{R})$ вещественных точек, которое является компактной ориентируемой поверхностью. Инвариант $\delta_\varphi \in \{0, 1\}$, и $\delta_\varphi = 0$, если и только если $X(\mathbb{R}) \sim 0 \pmod{2}$ в $H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$. Все

возможные инварианты (r, a, δ_φ) приведены на рис. 1. Они описывают компоненты связности модулей вещественных кэлеровых (т.е. без поляризации) КЗ-поверхностей (см. полное описание инвариантов (1) далее, в п. 2.1).

Инварианты (1) дают основные инварианты компонент связности модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей. Как показано в [11], инварианты (1) “почти всегда” однозначно определяют компоненту связности модулей, т.е. пространство модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей с данными инвариантами связно. Более точно, как показано в [11], это верно, если $r \leq 18 - \delta_P$. Инвариант $r \in \mathbb{N}$ принимает значения $1 \leq r \leq 20$, а инвариант $\delta_P \in \{0, 1\}$. Поэтому только для очень немногих случаев, когда $r = 18$ или $r = 19, 20$ (см. рис. 1), связность не была установлена в работе [11].

В п. 2.2 данному результату придается окончательная форма. Доказывается, что инварианты (1) однозначно определяют компоненту связности модулей, если $r \leq 18$. Для этого используются результаты из работ [8] и [4], где был получен общий аналог теоремы Витта для неопределенных решеток ранга не меньше трех. В [11, теорема 1.14.2] был использован его частный случай. Вещественные КЗ-поверхности, удовлетворяющие условию $r \leq 18$, могут быть описаны чисто топологически:

$$X(\mathbb{R}) \neq T_1 \amalg (T_0)^8, (T_0)^9, (T_0)^{10}.$$

Здесь T_g обозначает связную компактную ориентируемую поверхность рода g . Таким образом, если топологический тип отличен от этих трех типов, то компонента связности модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей однозначно определяется инвариантами рода (1).

Если $X(\mathbb{R}) = T_1 \amalg (T_0)^8, (T_0)^9, (T_0)^{10}$, то данный результат единственности, очевидно, не верен в общем случае, т.е. для произвольной примитивной степени n , и требуется ввести некоторые дополнительные к (1) инварианты компонент связности модулей. Эти дополнительные инварианты определяются в теоремах 5–9 и однозначно определяют компоненту связности модулей. При этом используется развитая в работе [11] техника дискриминантных форм. Интересно, что эти дополнительные инварианты оказываются классическими объектами теории чисел такими, как бинарные неопределенные решетки и их группы автоморфизмов или представления целого числа в виде суммы двух квадратов. Таким образом, в этих случаях полная классификация компонент связности модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей неминуемо связана с классификацией данных классических объектов теории чисел.

Для вещественных поляризованных КЗ-поверхностей топологических типов $X(\mathbb{R}) = T_1 \amalg (T_0)^8, (T_0)^9$ некоторые компоненты связности модулей (и соответствующие КЗ-поверхности) являются особыми и будут называться *стандартными* или *отличными от стандартных только над 2 (двойкой)*. Они определяются особенно простыми дополнительными инвариантами и важны в дальнейшем (см. их определение после формулировок теорем 5–9).

В § 3 при использовании недавних результатов, полученных в [13], данные улучшения старых результатов [11] применяются для ответа на следующий

важный вопрос: *какие вещественные поляризованные КЗ-поверхности являются деформациями вещественных гиперэллиптически поляризованных КЗ-поверхностей $(X, \tilde{P})$?* Иными словами, когда связная компонента модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей содержит гиперэллиптически поляризованную КЗ-поверхность? При этом КЗ-поверхность $(X, \tilde{P})$ называется *гиперэллиптически поляризованной*, если общая кривая соответствующей полной линейной системы $|\tilde{P}|$ гиперэллиптическая (тогда линейная система дает двулистное накрытие).

Это важно, так как гиперэллиптически поляризованные КЗ-поверхности строятся явно как двулистные накрытия относительно минимальных рациональных поверхностей $Y = \mathbb{P}^2$ или $Y = \mathbb{F}_m$, $m = 0, 1, 2, 4$, разветвленные в неособой кривой $A \in |-2K_Y|$, где K_Y – канонический класс поверхности Y . Тогда соответствующая полная линейная система $|\tilde{P}|$ – прообраз некоторой стандартной полной линейной системы на Y .

В работе [13] были описаны все возможные инварианты рода (1) таких деформаций (эквивалентно, в [13] они назывались деформациями вещественных общих КЗ-двойных рациональных скроллов). Используя эти результаты [13] и полученные в настоящей работе окончательные результаты о компонентах связности модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей, получаем полную классификацию таких КЗ-поверхностей, приведенную в следующей теореме, утверждение (i) которой было получено в [13].

ТЕОРЕМА 1. *Вещественная поляризованная КЗ-поверхность (X, P') – деформация вещественного общего КЗ-двойного рационального скролла (эквивалентно, деформация вещественной гиперэллиптически поляризованной КЗ-поверхности), если и только если выполнено одно из следующих условий:*

- (i) *примитивная степень n равна 2 или 4 (см. [13]);*
- (ii) *$n \geq 6$, $X(\mathbb{R}) \neq T_1 \amalg (T_0)^8$, $(T_0)^9$, $(T_0)^{10}$ и $X(\mathbb{R}) \not\sim P \pmod{2}$ в $H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$, если $X(\mathbb{R}) = (T_0)^k$;*
- (iii) *$n \geq 6$, $X(\mathbb{R}) = T_1 \amalg (T_0)^8$ и КЗ-поверхность (X, P') стандартная, если $n \equiv 0, 2 \pmod{8}$, и отлична от стандартной только над 2, если $n \equiv 4, 6 \pmod{8}$;*
- (iv) *$n \geq 6$, $X(\mathbb{R}) = (T_0)^9$, $X(\mathbb{R}) \not\sim P \pmod{2}$ в $H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ и (X, P') – стандартная.*

§ 2. Классификация компонент связности модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей

В настоящем параграфе завершается начатое в работе [11] перечисление компонент связности модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей.

2.1. Старые результаты о компонентах связности модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей. Здесь дается обзор результатов из [11] о вещественных поляризованных КЗ-поверхностях.

Пусть (X, P') – вещественная поляризованная КЗ-поверхность, т. е. X – алгебраическая КЗ-поверхность, определенная над $\mathbb{R}$, и P' – очень обильный класс дивизоров на X , определенный над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Эквивалентно, (X, P') – комплексная поляризованная КЗ-поверхность с антиголоморфной инволюцией φ такой, что $\varphi(P') = -P'$. Рассматривается описание компонент связности модулей пар (X, P') .

Пусть $L = H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ – решетка гомологий поверхности X со спариванием индекса пересечения. Она является четной унимодулярной решеткой сигнатуры $(3, 19)$. Это характеризует данную решетку однозначно с точностью до изоморфизма. Поляризация $P' \in L$ – элемент решетки L , имеющий квадрат $(P')^2 > 0$. Антиголоморфная инволюция φ действует на L , и $\varphi(P') = -P'$. Тройка (L, φ, P') , рассматриваемая с точностью до естественных изоморфизмов, называется *целочисленной поляризованной инволюцией вещественной поляризованной КЗ-поверхности (X, P')* . Точнее, тройка $(\tilde{L}, \tilde{\varphi}, \tilde{P}')$ называется *изоморфной* тройке (L, φ, P') , если существует изоморфизм $f: L \rightarrow \tilde{L}$ решеток (т. е. изоморфизм $\mathbb{Z}$ -модулей, сохраняющий спаривание) такой, что $f(P') = \tilde{P}'$ и $\tilde{\varphi}f = f\varphi$. Далее L^φ и L_φ – собственные подпространства решетки L , соответствующие собственным значениям 1 и -1 для действия инволюции φ на L . Целочисленная поляризованная инволюция (L, φ, P') удовлетворяет условиям: решетка L^φ гиперболична (т. е. имеет ровно один положительный квадрат) и $P' \in L_\varphi$ (см., например, [6], [11]).

Основной результат, основанный на глобальной теореме Торелли [14] и эпиморфности отображения периодов [7] для КЗ-поверхностей, дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2 [11, теорема 3.10.1]. *Компоненты связности модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей находятся во взаимно однозначном соответствии с классами изоморфизма целочисленных поляризованных инволюций (L, φ, P') , где L – четная унимодулярная решетка сигнатуры $(3, 19)$, решетка L^φ гиперболична, $P' \in L_\varphi$ (т. е. $\varphi(P') = -P'$) и $(P')^2 > 0$.*

Таким образом, описание компонент связности модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей эквивалентно чисто арифметической задаче классификации целочисленных поляризованных инволюций из теоремы 2. Далее мы называем их *целочисленными поляризованными КЗ-инволюциями*. Для решения этой задачи в [11] были введены их инварианты

$$(r, a, \delta_\varphi; k, n, \delta_P, \delta_{\varphi P}). \quad (2)$$

Здесь $r = \text{rk } L^\varphi \in \mathbb{N}$; $((L^\varphi)^*/L^\varphi) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^a$, где $a \geq 0$ – целое число; $\delta_\varphi \in \{0, 1\}$ равно нулю, если и только если $x \cdot \varphi(x) \equiv 0 \pmod{2}$ для любого $x \in L$. Инварианты (r, a, δ_φ) определяют пару (L, φ) однозначно с точностью до изоморфизма. Далее, $k \in \mathbb{N}$ определяется тем, что $P = P'/k$ – примитивный элемент решетки L ; $n = P^2 = (P'/k)^2$ – *примитивная степень*, являющаяся четным натуральным числом; $\delta_P \in \{0, 1\}$ равно нулю, если и только если $P \cdot L_\varphi \equiv 0 \pmod{2}$; $\delta_{\varphi P} \in \{0, 1\}$ равно нулю, если и только если $x \cdot \varphi(x) \equiv x \cdot P \pmod{2}$ для любого

$x \in L$. Инварианты (2) определяют все *инварианты рода* соответствующей целочисленной поляризованной КЗ-инволюции: для одинаковых инвариантов (2) соответствующие целочисленные поляризованные КЗ-инволюции изоморфны над $\mathbb{R}$ и кольцами $\mathbb{Z}_p$ целых p -адических чисел для всех простых p .

Геометрический смысл инвариантов (2) приведен в работах [5], [6] и [11]. Отметим только следующее (где T_g – связная компактная ориентируемая поверхность рода g):

$$X(\mathbb{R}) = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } (r, a, \delta_\varphi) = (10, 10, 0), \\ T_1 \amalg T_1, & \text{если } (r, a, \delta_\varphi) = (10, 8, 0), \\ T_g \amalg (T_0)^k & \text{в остальных случаях, где} \\ & g = (22 - r - a)/2, \quad k = (r - a)/2; \end{cases} \quad (3)$$

$$X(\mathbb{R}) \sim 0 \pmod{2} \quad \text{в} \quad H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), \quad (4)$$

если и только если $\delta_\varphi = 0$; и

$$X(\mathbb{R}) \sim P \pmod{2} \quad \text{в} \quad H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), \quad (5)$$

если и только если $\delta_{\varphi P} = 0$. Здесь $X(\mathbb{R}) = X(\mathbb{C})^\varphi$ – множество неподвижных точек соответствующей антиголоморфной инволюции φ в множестве $X(\mathbb{C})$ комплексных точек КЗ-поверхности, т. е. вещественная часть поверхности X .

В [11, теорема 3.4.3] инварианты рода (2) целочисленных поляризованных КЗ-инволюций были классифицированы: в данной общей теореме следует положить $l_{(+)} = 3$, $l_{(-)} = 19$, $t_{(+)} = 1$ и $t_{(-)} = r - 1$.

ТЕОРЕМА 3 [11, теорема 3.4.3]. *Инварианты (2) дают полную систему инвариантов рода целочисленных поляризованных КЗ-инволюций. Вещественная поляризованная КЗ-поверхность с инвариантами рода (2) существует, если и только если данные инварианты удовлетворяют следующим условиям.*

0. Условия для (r, a, δ_φ) :

- 1) $1 \leq r \leq 20$, $0 \leq a \leq \min\{r, 22 - r\}$;
- 2) $r + a \equiv 0 \pmod{2}$; если $\delta_\varphi = 0$, то $r \equiv 2 \pmod{4}$;
- 3) если $a = 0$, то $\delta_\varphi = 0$ и $r \equiv 2 \pmod{8}$;
- 4) если $a = 1$, то $r \equiv 1, 3 \pmod{8}$;
- 5) если $(a = 2, r \equiv 6 \pmod{8})$, то $\delta_\varphi = 0$;
- 6) если $(a = r, \delta_\varphi = 0)$, то $r \equiv 2 \pmod{8}$;
- 7) если $(a = 22 - r, \delta_\varphi = 0)$, то $r \equiv 2 \pmod{8}$.

1. Условия для $n, \delta_P, \delta_{\varphi P}$:

а) общие условия:

- 1) $n > 0$ и $n \equiv 0 \pmod{2}$;
- 2) если $(n \equiv 2 \pmod{4}, \delta_P = 0)$, то $\delta_\varphi = 1$;
- 3) если $\delta_{\varphi P} = 0$, то $(\delta_P = 0, \delta_\varphi = 1, r \equiv 2 + n/2 \pmod{4})$;

б) условия около границы $a = 22 - r$:

- 4) если $a = 22 - r$, то $\delta_P = 0$;
 5) если $(a = 22 - r, \delta_{\varphi P} = 0)$, то $r \equiv 2 + n/2 \pmod{8}$;
 6) если $(a = 20 - r, n \equiv 0 \pmod{4}, \delta_P = 1, \delta_{\varphi} = 0)$, то $r \equiv 2 \pmod{8}$;
 с) условия около границы $a = 0$:
 7) если $a = 0$, то $\delta_P = 1$;
 8) если $(a = 1, n \equiv 0 \pmod{4})$, то $\delta_P = 1$;
 9) если $(a = 1, \delta_P = 0, n \equiv \pm 2 \pmod{8})$, то $r \equiv 2 \pm 1 \pmod{8}$;
 10) если $(a = 2, \delta_P = 0, n \equiv \pm 2 \pmod{8})$, то $r \equiv 2, 2 \pm 2 \pmod{8}$;
 11) если $(a = 2, \delta_P = 0, n \equiv 0 \pmod{8})$, то $r \equiv 2 \pmod{8}$;
 12) если $(a = 3, \delta_P = 0, n \equiv 0 \pmod{8})$, то $r \equiv 1, 3 \pmod{8}$;
 13) если $(a = 2, \delta_P = 0, n \equiv 4 \pmod{8}, r \equiv 2 \pmod{8})$, то $\delta_{\varphi} = 0$;
 14) если $(a = 1, \delta_P = 0)$, то $\delta_{\varphi P} = 0$;
 15) если $(a = 2, \delta_P = 0, n \equiv 4 \pmod{8}, r \equiv 0 \pmod{4})$, то $\delta_{\varphi P} = 0$;
 16) если $(a = 3, \delta_P = 0, n \equiv \pm 2 \pmod{8}, r \equiv 2 \pm 5 \pmod{8})$, то $\delta_{\varphi P} = 0$;
 17) если $(a = 2, \delta_P = 0, n \equiv 0 \pmod{8}, r \equiv 2 \pmod{8}, \delta_{\varphi} = 1)$, то $\delta_{\varphi P} = 0$;
 18) если $(a = 4, \delta_P = 0, n \equiv 0 \pmod{8}, r \equiv 6 \pmod{8}, \delta_{\varphi} = 1)$, то $\delta_{\varphi P} = 0$;
 d) условия около границ $a = 0$ и $a = 22 - r$:
 19) если $r = 20$, то $n = 2^{\varepsilon} p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$, где $\varepsilon = 1, 2$, числа p_i простые и $p_i \equiv 1 \pmod{4}$.

Отметим, что инварианты (r, a, δ_{φ}) , удовлетворяющие условиям 0, 1)–7) теоремы 3 классифицируют с точностью до изоморфизма целочисленные инволюции (L, φ) , удовлетворяющие условию: решетка L^{φ} гиперболична. Все такие инварианты перечислены на рис. 1. Они классифицируют компоненты связности модулей вещественных кэлеровых (т. е. без поляризации) КЗ-поверхностей.

Рис. 1. Все возможные инварианты (r, a, δ_{φ})

Все условия на поляризацию 1, 1)–19) зависят от $n \pmod{8}$, кроме условия 1, 5), которое зависит от $n \pmod{16}$ и имеет место только на границе $(r + a = 22, \delta_{\varphi} = 1)$ (см. рис. 1), и условия 1, 19), которое зависит от разложения n на простые множители и имеет место только в одной точке $(r, a, \delta_{\varphi}) = (20, 2, 1)$

(см. рис. 1). Таким образом, в зависимости от $n \bmod 8$ или $n \bmod 16$, все инварианты рода (2) могут быть легко описаны, как на рис. 1 (см. [13, рис. 33–41]).

Наконец, как показано в [11], “почти во всех случаях” инварианты рода (2) определяют классы изоморфизма целочисленных поляризованных КЗ-инволюций, и тогда (по теореме 2) пространство модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей с этими инвариантами связно. Точно имеет место утверждение (см. [11, теорема 3.3.1]): *пространство модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей с фиксированными инвариантами рода (2) связно, если $r \leq 18 - \delta_P$; в частности, оно связно, если $r \leq 17$.*

Из рис. 1 видно, что существует мало точек (r, a, δ_φ) , не удовлетворяющих этому условию, но их все еще слишком много.

В следующем пункте данному результату связности будет придана окончательная форма. Когда этот результат не имеет места, компоненты связности модулей будут перечислены с помощью дополнительных инвариантов.

2.2. Новые результаты по перечислению компонент связности модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей. Окончательный результат о связности дает следующая теорема, последнее утверждение которой вытекает из (3) и рис. 1.

ТЕОРЕМА 4. *Инварианты рода (2) однозначно определяют класс изоморфизма целочисленной поляризованной КЗ-инволюции, если $r \leq 18$.*

В частности (по теореме 2), пространство модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей с фиксированными инвариантами рода (2) связно, если $r \leq 18$.

Эквивалентно, пространство модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей (X, P') с фиксированными инвариантами рода (2) связно, если $X(\mathbb{R})$ отлично от $T_1\Pi(T_0)^9$ (т. е. $(r, a) = (19, 1)$), от $(T_0)^9$ (т. е. $(r, a) = (19, 3)$) и от $(T_0)^{10}$ (т. е. $(r, a) = (20, 2)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть фиксированы инварианты рода (2), удовлетворяющие условию $r \leq 18$. Данные инварианты определяют род решеток L^φ и $L_{\varphi, P} = (L^\varphi \oplus \mathbb{Z}P)_L^\perp = (P)_{L^\varphi}^\perp$. Обозначим через q_S дискриминантную квадратичную форму решетки S (см. [11]). Утверждение теоремы имеет место, если решетки L^φ и $L_{\varphi, P}$ единственны в их роде и канонические гомоморфизмы

$$O(L^\varphi) \rightarrow O(q_{L^\varphi}), \quad O(L_{\varphi, P}) \rightarrow O(q_{L_{\varphi, P}})$$

эпиморфны (см. [11, доказательство теоремы 3.3.1] или [12, замечание 1.6.2]). Здесь O – полная ортогональная группа соответствующей решетки или квадратичной формы.

Решетка L^φ гиперболична и 2-элементарна (т. е. $(L^\varphi)^*/L^\varphi \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^a$ – 2-элементарная абелева группа). Для таких решеток утверждение всегда выполнено (в силу [11, теоремы 3.6.2 и 3.6.3]).

Решетка $M = L_{\varphi, P}$ является неопределенной решеткой ранга не меньше 3, так как $\text{rk } M = 22 - r - 1$ и $r \leq 18$. Ее дискриминантная группа $A_M = M^*/M$ и

дискриминантная форма на этой группе вычислены в [11] (см. также [12]). Для любого нечетного простого p дискриминантная группа A_M имеет p -компоненту, являющуюся циклической группой $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})$, и 2-компоненту, изоморфную $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{k_1} \oplus (\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z})$, где $k \geq 0$.

Предположим, что $\text{rk } M \leq 17$. Тогда $\text{rk } M = 21 - r \geq 4$, и требуемое утверждение для $M = L_{\varphi, P}$ вытекает из [11, теорема 1.14.2] (или [10, теорема 1.2']).

Теперь предположим, что $r = 18$. Тогда $\text{rk } M = 3$. Если 2-компонента группы A_M – циклическая группа, то утверждение теоремы следует также из [11, теорема 1.14.2] (или [10, теорема 1.2']). Например, это условие выполнено, если инвариант δ_P равен нулю.

Предположим, что $r = 18$, но 2-компонента группы A_M нециклическая. Из того, что решетка M четна, вытекает, что 2-компонента группы A_M изоморфна $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \oplus (\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z})$, где $k \geq 1$. В этом случае утверждение теоремы вытекает из общих результатов, анонсированных в [8], [9]. Их доказательства содержатся в работе [4]. Отметим, что здесь мы используем очень частный случай общих результатов из [8], [9], который лишь немного сильнее теоремы 1.14.2 из [11]. Отсюда вытекает теорема.

Теперь предположим, что $r \geq 19$. Тогда решетка $M = L_{\varphi, P}$ имеет ранг 2 или 1 и очевидно, что утверждение теоремы 4 не выполнено (это будет ясно из дальнейшего). Следует ввести дополнительные инварианты.

По теореме 3 (см. рис. 1), если $r \geq 19$, то $(r, a, \delta_{\varphi}) = (19, 1, 1)$, $(19, 3, 1)$ или $(20, 2, 1)$. Предполагая, что имеет место один из этих трех случаев, применим следующую общую конструкцию, в которой используется техника дискриминантных форм из [11].

Фиксируем инварианты (r, a, δ_{φ}) рода (2), где $r \geq 19$. Инварианты (r, a, δ_{φ}) определяют класс изоморфизма решетки L^{φ} . Дополнительные инварианты $(n, \delta_P, \delta_{\varphi P})$ определяют решетку

$$L^{\varphi, P} = [L^{\varphi}, P]_{\text{pr}}, \quad (6)$$

которая является примитивной подрешеткой в L , порожденной L^{φ} и P . Обозначим через

$$q = q_{L^{\varphi, P}} \quad (7)$$

дискриминантную квадратичную форму решетки $L^{\varphi, P}$. Введем группу

$$O(L^{\varphi})_P = \{f \in O(L^{\varphi, P}) \mid f(P) = P\} \subset O(L^{\varphi})$$

и рассмотрим образ естественного гомоморфизма

$$O(L^{\varphi})_P \rightarrow \overline{O(L^{\varphi})_P} \subset O(q), \quad (8)$$

который обозначим $\overline{O(L^{\varphi})_P}$. Решетка $L_{\varphi, P}$ ортогональна $L^{\varphi, P}$ в четной унимодулярной решетке L . Тогда она имеет сигнатуру $(1, 20 - r)$ и дискриминантную квадратичную форму, изоморфную $-q$, что фиксирует род решетки $L^{\varphi, P}$.

Можно взять любую решетку $L^{\varphi,P}$ с данными инвариантами, ее класс изоморфизма является дополнительным инвариантом целочисленной поляризованной КЗ-инволюции.

Поскольку $L^{\varphi,P}$ и $L_{\varphi,P}$ – взаимные ортогональные дополнения в четной уни-модулярной решетке L , это задает канонический изоморфизм

$$\tau: q_{L_{\varphi,P}} \cong -q \quad (9)$$

конечных квадратичных форм. Можно взять любой из них, и это определяет еще один инвариант целочисленной поляризованной КЗ-инволюции. Можно взять любую такую пару

$$(L_{\varphi,P}, \tau), \quad (10)$$

которая определяет класс изоморфизма целочисленной поляризованной КЗ-инволюции с данными инвариантами рода. В точности имеем

$$L = [L^{\varphi,P} \oplus L_{\varphi,P}, \{x_+^* \oplus x_-^* \mid x_+^* \in (L^{\varphi,P})^*, x_-^* \in (L_{\varphi,P})^*, \tau(x_-^* + L_{\varphi,P}) = x_+^* + L^{\varphi,P}\}] \quad (11)$$

с действием инволюции φ , равным $+1$ на L^{φ} и -1 на P и $L_{\varphi,P}$. Иначе говоря,

$$L/(L^{\varphi,P} \oplus L_{\varphi,P}) \subset (L^{\varphi,P})^*/L^{\varphi,P} \oplus (L_{\varphi,P})^*/L_{\varphi,P}$$

является графиком изоморфизма τ .

Две такие пары $(L_{\varphi,P}, \tau)$ и $(\widetilde{L}_{\varphi,P}, \widetilde{\tau})$ определяют изоморфные целочисленные поляризованные КЗ-инволюции, если и только если существует изоморфизм $f: L_{\varphi,P} \rightarrow \widetilde{L}_{\varphi,P}$ решеток такой, что для индуцированного изоморфизма $\widetilde{f}: q_{L_{\varphi,P}} \rightarrow q_{\widetilde{L}_{\varphi,P}}$ их дискриминантных форм выполнено

$$\widetilde{\tau}\widetilde{f} = g\tau, \quad (12)$$

где $g \in \overline{O(L^{\varphi})_P}$.

Таким образом, для фиксированного класса изоморфизма $L_{\varphi,P}$ число классов изоморфизма пар равно числу двойных классов смежности

$$\overline{O(L_{\varphi,P})} \setminus O(q)/\overline{O(L^{\varphi})_P}, \quad (13)$$

где $\overline{O(L_{\varphi,P})}$ – образ $O(L_{\varphi,P})$ в $O(q)$, задаваемый τ . В результате точное число классов изоморфизма целочисленных поляризованных КЗ-инволюций и компонент связности модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей равно

$$\sum_{\text{класс } L_{\varphi,P} \text{ рода } (1, 20-r, -q)} \#(\overline{O(L_{\varphi,P})} \setminus O(q)/\overline{O(L^{\varphi})_P}). \quad (14)$$

Отметим, что

$$O(q) = \prod_p O(q_p), \quad (15)$$

где q_p – нетривиальная p -компонента формы q для простого p . Данная p -компонента q_p – квадратичная форма на циклической группе, если $p \mid n$ нечетно, и

тогда $O(q_p) = \{\pm 1_p\}$. Здесь 1_p обозначает тождественный автоморфизм формы q_p . То же самое верно для q_2 , если 2-компонента также циклична. Отметим, что $O(L^\varphi)_P$ действует только на 2-компоненту формы q , и это действие тривиально почти во всех случаях. Таким образом, получаем

$$O(q) = O(q_2) \prod_{\text{odd } p|n} \{\pm 1_p\}, \quad \overline{O(L^\varphi)}_P \subset O(q_2). \quad (16)$$

Ниже данные инварианты вычисляются для всех трех случаев инвариантов (r, a, δ_φ) с $r \geq 19$.

Используем следующие обозначения: $\langle A \rangle$ – решетка с целочисленной симметрической матрицей A , ее стандартные образующие имеют матрицу Грама A (так, решетка $U = \langle \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \rangle$ дает единственный класс изоморфизма четной унимодулярной решетки сигнатуры $(1, 1)$); E_8 – отрицательно определенная четная унимодулярная решетка ранга 8, она определяется соответствующей диаграммой E_8 ; $K(m)$ – решетка, полученная из K умножением формы решетки K на $m \in \mathbb{Q}$; $\oplus$ – ортогональная сумма решеток.

2.2.1. Случай $(r, a, \delta_\varphi) = (19, 1, 1)$. В этом случае $L^\varphi = U \oplus 2E_8 \oplus \langle -2 \rangle$.

Пусть $\delta_P = 1$. Тогда $L^{\varphi, P} = L^\varphi \oplus \mathbb{Z}P = U \oplus 2E_8 \oplus \langle -2 \rangle \oplus \langle n \rangle$. Поскольку решетки U и E_8 унимодулярны, дискриминантная форма имеет вид

$$q = q_{L^{\varphi, P}} = q_{\langle -2 \rangle \oplus \langle n \rangle}. \quad (17)$$

Группа $\overline{O(L^{\varphi, P})}_P$ тривиальна, так как действует только на компоненту $q_{\langle -2 \rangle}$, являющуюся формой на группе порядка 2. Гиперболическая решетка $\langle 2 \rangle \oplus \langle -n \rangle$ имеет дискриминантную квадратичную форму, изоморфную $-q$. Таким образом, $L^{\varphi, P}$ – любая решетка того же рода. Здесь $n > 0$ может быть любым четным числом, а $\delta_{\varphi P} = 1$ (см. теорему 3). Естественно отождествляем формы: $-q = -q_{\langle -2 \rangle \oplus \langle n \rangle} = q_{\langle 2 \rangle \oplus \langle -n \rangle}$. Тогда изоморфизм $\tau: q_{L^{\varphi, P}} \rightarrow -q$ отождествляется с изоморфизмом $\tau: q_{L^{\varphi, P}} \rightarrow q_{\langle 2 \rangle \oplus \langle -n \rangle}$.

Таким образом, окончательно получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5. Если $(r, a, \delta_\varphi, \delta_P) = (19, 1, 1, 1)$ (эквивалентно, имеем $X(\mathbb{R}) = T_1 \amalg (T_0)^8$ и $\delta_P = 1$), то $\delta_{\varphi P} = 1$, n – любое положительное четное число, k – любое положительное целое число и классы изоморфизма целочисленных поляризованных КЗ-инволюций (эквивалентно, компоненты связности модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей) с данными инвариантами находятся во взаимно однозначном соответствии с парами

$$(L_{\varphi, P}, \tau),$$

где $L_{\varphi, P}$ – любая решетка рода $\langle 2 \rangle \oplus \langle -n \rangle$ и $\tau: q_{L_{\varphi, P}} \rightarrow q_{\langle 2 \rangle \oplus \langle -n \rangle}$ – любой изоморфизм квадратичных форм, рассматриваемые с точностью до естественного действия группы $O(L_{\varphi, P})$. Таким образом, число компонент связности модулей равно

$$\sum_{\text{класс } L_{\varphi, P} \text{ рода } \langle 2 \rangle \oplus \langle -n \rangle} \#(O(q_{L_{\varphi, P}})/\overline{O(L_{\varphi, P})}).$$

Следующее определение будет важно в дальнейшем. Компонента связности модулей теоремы 5 называется *стандартной*, если $L_{\varphi,P} = \langle 2 \rangle \oplus \langle -n \rangle$ (она определяет единицу в соответствующей группе классов Гаусса бинарных решеток; см., например, [3]), а изоморфизм τ тождествен на решетке $\langle 2 \rangle \oplus \langle -n \rangle$. Любая другая компонента связности модулей с данной решеткой $L_{\varphi,P} \cong \langle 2 \rangle \oplus \langle -n \rangle$ отличается от стандартной только автоморфизмом из $O(q_{\langle 2 \rangle} \oplus q_{\langle -n \rangle})$ (с точностью до $O(\langle 2 \rangle \oplus \langle -n \rangle)$) и нумеруется данным автоморфизмом. Если этот автоморфизм принадлежит 2-компоненте $O(q_{\langle 2 \rangle} \oplus q_{\langle -n \rangle_2})$ данной группы автоморфизмов, то данная компонента называется *отличной от стандартной только над 2 (двойкой)*. Разумеется, мы используем те же названия для вещественных поляризованных КЗ-поверхностей из таких компонент связности модулей. Те же самые определения используются во всех рассматриваемых ниже случаях, когда определяются стандартные компоненты модулей.

Отметим, что 2-компонента $O(q_{\langle 2 \rangle} \oplus q_{\langle -n \rangle_2})$ тривиальна, если $n \equiv 2 \pmod{8}$, равна $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, если $n \equiv 0 \pmod{16}$, и равна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ в остальных случаях.

Таким образом, число компонент связности модулей, отличных от стандартной только над 2, равно единице, если $n \equiv 2 \pmod{8}$, не больше четырех, если $n \equiv 0 \pmod{16}$, и не больше двух в остальных случаях.

Например, теорема 5 дает ровно одну компоненту связности модулей, которая стандартна, для $n = 2, 4, 6, 8$.

Пусть $\delta_P = 0$. Поскольку $(r, a, \delta_\varphi) = (19, 1, 1)$ и $\delta_P = 0$, то по теореме 3 (см. условия 1, 2), 9), 19)) получаем $\delta_{\varphi P} = 0$, $P^2 = n \equiv 2 \pmod{8}$ и $\mathbb{Z}P = \langle n \rangle$.

Опять запишем $L^\varphi = U \oplus 2E_8 \oplus \langle -2 \rangle$. Обозначим через e стандартную образующую слагаемого $\langle -2 \rangle$, $e^2 = -2$. Так как $\delta_P = 0$ и $a = 1$, то

$$L^{\varphi,P} = U \oplus 2E_8 \oplus (\langle -2 \rangle \oplus \langle n \rangle)(1/2, 1/2),$$

где $\langle -2 \rangle \oplus \langle n \rangle(1/2, 1/2) \supset \langle -2 \rangle \oplus \langle n \rangle$ – надрешетка индекса 2, определяемая

$$\langle -2 \rangle \oplus \langle n \rangle(1/2, 1/2) = [e, e/2 + P/2] = \left\langle \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & \frac{n-2}{4} \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (18)$$

Поскольку U и E_8 унимодулярны, а решетка (18) унимодулярна над 2, получаем

$$q_{L^{\varphi,P}} = q\left(\left\langle \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & \frac{n-2}{4} \end{pmatrix} \right\rangle\right) = \bigoplus_{\text{неч. } p|n} q_{\langle n \rangle_p}. \quad (19)$$

Здесь через $q(S)$ (или $b(S)$) обозначается дискриминантная квадратичная (или билинейная) форма решетки S . Тогда группа $\overline{O(L^\varphi)_P}$ опять тривиальна, и аналогично предыдущему случаю получаем результат.

ТЕОРЕМА 6. Если $(r, a, \delta_\varphi, \delta_P) = (19, 1, 1, 0)$ (эквивалентно, имеем $X(\mathbb{R}) = T_1 \amalg (T_0)^8$ и $\delta_P = 0$), то $\delta_{\varphi P} = 0$, n – любое положительное число такое, что $n \equiv 2 \pmod{8}$, k – любое положительное целое число, и классы изоморфизма целочисленных поляризованных КЗ-инволюций (эквивалентно, компоненты связности модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей)

с данными инвариантами находятся во взаимно однозначном соответствии с парами

$$(L_{\varphi,P}, \tau),$$

где $L_{\varphi,P}$ – любая решетка рода $\langle \begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{2-n}{4} \end{smallmatrix} \rangle$ и

$$\tau: q_{L_{\varphi,P}} \rightarrow q\left(\left\langle \begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{2-n}{4} \end{smallmatrix} \right\rangle\right) = \bigoplus_{\substack{\text{неч. } p|n}} q_{\langle -n \rangle_p}$$

– любой изоморфизм квадратичных форм, рассматриваемый с точностью до естественного действия $O(L_{\varphi,P})$.

Таким образом, число компонент связности модулей равно

$$\sum_{\text{класс } L_{\varphi,P} \text{ рода } \langle \begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{2-n}{4} \end{smallmatrix} \rangle} \sharp(O(q_{L_{\varphi,P}})/\overline{O(L_{\varphi,P})}).$$

В этом случае стандартная компонента связности модулей соответствует $L_{\varphi,P} = \langle \begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{2-n}{4} \end{smallmatrix} \rangle$ и изоморфизму τ , индуцированному тождественным изоморфизмом решеток. Любая компонента связности модулей, отличная от стандартной только над 2, совпадает со стандартной.

Например, теорема 6 дает ровно одну компоненту связности модулей, совпадающую со стандартной, если $n = 2$.

2.2.2. Случай $(r, a, \delta_{\varphi}) = (19, 3, 1)$. В силу соотношения 1, 5) теоремы 3 получаем: если $\delta_{\varphi P} = 0$, то $n \equiv 2 \pmod{16}$. Это единственное соотношение между инвариантами из (2).

В этом случае необходимо модифицировать наши рассуждения.

Поскольку $(r, a, \delta_{\varphi}) = (19, 3, 1)$, то L_{φ} является четной 2-элементарной решеткой сигнатуры $(2, 1)$ с инвариантом $a = 3$. Отсюда следует, что $L_{\varphi}(1/2)$ – унимодулярная решетка сигнатуры $(2, 1)$. Эта решетка нечетна, и

$$L_{\varphi}(1/2) \cong \langle 1 \rangle \oplus \langle 1 \rangle \oplus \langle -1 \rangle$$

в силу классификации неопределенных унимодулярных решеток.

Элемент $P \in L_{\varphi}(1/2)$ примитивен, и $P^2 = n/2$. Так как решетки L^{φ} и L_{φ} единственны в их роде и для них канонические гомоморфизмы

$$O(L^{\varphi}) \rightarrow O(q_{L^{\varphi}}), \quad O(L_{\varphi}) \rightarrow O(q_{L_{\varphi}})$$

эпиморфны, то любой автоморфизм решетки L_{φ} может быть продолжен до автоморфизма решетки L , коммутирующего с инволюцией φ .

Таким образом, две целочисленные поляризованные КЗ-инволюции изоморфны, если и только если соответствующие им элементы $P \in L_{\varphi}(1/2)$ сопряжены группой $O(L_{\varphi})$. Инвариант $\delta_{\varphi P}$ тогда получает следующий смысл: решетка $P_{L_{\varphi}(1/2)}^{\perp} = L_{\varphi,P}(1/2)$ нечетна, если $\delta_{\varphi P} = 1$, и четна, если $\delta_{\varphi P} = 0$. Последний случай возможен, только если $n \equiv 2 \pmod{16}$.

Подрешетка $\mathbb{Z}P \subset L_\varphi(1/2)$ имеет дискриминантную билинейную форму $b_{\langle n/2 \rangle}$. Тогда решетка $L_{\varphi,P}(1/2)$ имеет дискриминантную билинейную форму $-b_{\langle n/2 \rangle}$ и сигнатуру $(1, 1)$.

Если $\delta_{\varphi P} = 1$, то эта решетка нечетна и имеет род решетки $\langle 1 \rangle \oplus \langle -n/2 \rangle$. Таким образом, $L_{\varphi,P}$ имеет род решетки $\langle 2 \rangle \oplus \langle -n \rangle$.

Если $\delta_{\varphi P} = 0$, следует изменить решетку $\langle 1 \rangle \oplus \langle -n/2 \rangle$ на четную, но имеющую ту же дискриминантную билинейную форму. Обозначим через e_1 и e_2 стандартные образующие решеток $\langle 1 \rangle$ и $\langle -n/2 \rangle$ соответственно. Новая решетка равна $[2e_1, 2e_2, (e_1 + e_2)/2]$. Это изменяет решетку только над 2. Новая решетка имеет базис $\{2e_1, (e_1 + e_2)/2\}$ и матрицу

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & \frac{2-n}{8} \end{pmatrix}.$$

Она четна и унимодулярна над 2, если $n \equiv 2 \pmod{16}$. Таким образом, решетка $L_{\varphi,P}$ имеет род решетки

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & \frac{2-n}{4} \end{pmatrix}.$$

Окончательно получаем следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 7. Если $(r, a, \delta_\varphi, \delta_{\varphi P}) = (19, 3, 1, 1)$ (эквивалентно, $X(\mathbb{R}) = (T_0)^9$ и $X(\mathbb{R}) \not\sim P \pmod{2}$ в $H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$), то $\delta_P = 0$, n – любое положительное четное число и k – любое положительное целое число. Классы изоморфизма целочисленных поляризованных КЗ-инволюций (эквивалентно, компоненты связности модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей), имеющие данные инварианты, находятся во взаимно однозначном соответствии с парами

$$(L_{\varphi,P}, \tau),$$

где $L_{\varphi,P}$ – любая решетка рода $\langle 2 \rangle \oplus \langle -n \rangle$ и

$$\tau: b_{L_{\varphi,P}(1/2)} \rightarrow b_{\langle 1 \rangle \oplus \langle -n/2 \rangle} = b_{\langle -n/2 \rangle}$$

– любой изоморфизм билинейных форм, рассматриваемый с точностью до естественного действия группы $O(L_{\varphi,P})$. Таким образом, число компонент связности модулей равно

$$\sum_{\text{класс } L_{\varphi,P} \text{ рода } \langle 2 \rangle \oplus \langle -n \rangle} \#(O(b_{L_{\varphi,P}(1/2)})/\overline{O(L_{\varphi,P})}).$$

Стандартная компонента связности модулей определяется тем, что $L_{\varphi,P} = \langle 2 \rangle \oplus \langle -n \rangle$ и изоморфизм τ индуцирован тождественным изоморфизмом решеток.

В этом случае 2-компонента $O(b_{\langle -n/2 \rangle})$ тривиальна, если $n \equiv 2 \pmod{4}$ или $n \equiv 4 \pmod{8}$, равна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, если $n \equiv 8 \pmod{16}$, и равна $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, если $n \equiv 0 \pmod{16}$.

Таким образом, число компонент связности модулей, отличных от стандартной только над 2, равно одному, если $n \equiv 2 \pmod{4}$ или $n \equiv 4 \pmod{8}$, не больше двух, если $n \equiv 8 \pmod{16}$, не больше четырех, если $n \equiv 0 \pmod{16}$.

Например, теорема 7 дает ровно одну компоненту связности модулей, которая стандартна, если $n = 2, 4, 6, 8$.

ТЕОРЕМА 8. Если $(r, a, \delta_\varphi, \delta_{\varphi P}) = (19, 3, 1, 0)$ (эквивалентно, $X(\mathbb{R}) = (T_0)^9$ и $X(\mathbb{R}) \sim P \pmod{2}$ в $H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$), то $\delta_P = 0$, n – любое положительное число такое, что $n \equiv 2 \pmod{16}$, и k – любое положительное целое число. Классы изоморфизма целочисленных поляризованных КЗ-инволюций (эквивалентно, компоненты связности модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей), имеющие данные инварианты, находятся во взаимно однозначном соответствии с парами

$$(L_{\varphi, P}, \tau),$$

где $L_{\varphi, P}$ – любая решетка рода $\langle \frac{8}{2} \frac{2-n}{4} \rangle$ и

$$\tau: b_{L_{\varphi, P}(1/2)} \rightarrow b\left(\left\langle \begin{matrix} 4 & 1 \\ 1 & \frac{2-n}{8} \end{matrix} \right\rangle\right) = b_{(-n/2)}$$

– любой изоморфизм билинейных форм, рассматриваемый с точностью до естественного действия группы $O(L_{\varphi, P})$. Таким образом, число компонент связности модулей равно

$$\sum_{\text{класс } L_{\varphi, P} \text{ рода } \langle \frac{8}{2} \frac{2-n}{4} \rangle} \#(O(b_{L_{\varphi, P}(1/2)})/\overline{O(L_{\varphi, P})}).$$

Стандартная компонента связности модулей определяется тем, что $L_{\varphi, P} = \langle \frac{8}{2} \frac{2-n}{4} \rangle$ и изоморфизм τ индуцирован тождественным изоморфизмом решеток.

Поскольку в этом случае $n \equiv 2 \pmod{4}$, то любая компонента связности модулей, отличная от стандартной только над 2, совпадает со стандартной.

Например, теорема 8 дает только одну компоненту связности модулей, которая стандартна, если $n = 2$.

2.2.3. Случай $(r, a, \delta_\varphi) = (20, 2, 1)$. В силу соотношения $(1, 4), (11), (15), (19)$ теоремы 3 получаем: $\delta_P = 0$; $n = 2^\varepsilon p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$, где $\varepsilon = 1, 2$, числа p_i простые и $p_i \equiv 1 \pmod{4}$; $\delta_{\varphi P} = 1$, если $n \equiv 2 \pmod{4}$ (т. е. $\varepsilon = 1$), и $\delta_{\varphi P} = 0$, если $n \equiv 0 \pmod{4}$ (т. е. $\varepsilon = 2$).

Этот случай очень похож на предыдущий. Поскольку $(r, a, \delta_\varphi) = (20, 2, 1)$, то L_φ – положительно определенная четная 2-элементарная решетка ранга 2 с инвариантом $a = 2$. Отсюда следует, что $L_\varphi(1/2)$ – унимодулярная положительно определенная решетка ранга 2. Эта решетка нечетна, и $L_\varphi(1/2) \cong \langle 1 \rangle \oplus \langle 1 \rangle$ в силу классификации унимодулярных решеток небольшого ранга. Отсюда получаем результаты, аналогичные полученным в предыдущем случае.

Две целочисленные поляризованные инволюции изоморфны, если и только если соответствующие им элементы $P \in L_\varphi(1/2)$ сопряжены группой $O(L_\varphi)$. Решетка $P_{L_\varphi(1/2)}^\perp = L_{\varphi, P}(1/2)$ нечетна, если $\delta_{\varphi P} = 1$, и четна, если $\delta_{\varphi P} = 0$.

Подрешетка $\mathbb{Z}P \subset L_\varphi(1/2)$ имеет дискриминантную билинейную форму $b_{\langle n/2 \rangle}$. Тогда решетка $L_{\varphi,P}(1/2)$ имеет дискриминантную билинейную форму $-b_{\langle n/2 \rangle}$, положительно определена и имеет ранг, равный единице. Отсюда следует, что $L_{\varphi,P} \cong \langle n \rangle$ и билинейная форма $b_{\langle n/2 \rangle}$ изоморфна $-b_{\langle n/2 \rangle}$. Это эквивалентно приведенным выше условиям для n .

Таким образом, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 9. *Если $(r, a, \delta_\varphi) = (20, 2, 1)$ (эквивалентно, $X(\mathbb{R}) = (T_0)^{10}$), то $\delta_P = 0$; $\delta_{\varphi P} = 1$ (эквивалентно, $X(\mathbb{R}) \not\sim P \pmod{2}$ в $H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$), если $n \equiv 2 \pmod{4}$, и $\delta_{\varphi P} = 0$ (эквивалентно, $X(\mathbb{R}) \sim P \pmod{2}$ в $H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$), если $n \equiv 0 \pmod{4}$; $n = 2^\varepsilon p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$, где $\varepsilon = 1, 2$, числа p_i простые и $p_i \equiv 1 \pmod{4}$; k – любое положительное целое число. Классы изоморфизма целочисленных поляризованных КЗ-инволюций (эквивалентно, компоненты связности модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей), имеющие данные инварианты, находятся во взаимно однозначном соответствии с изоморфизмами $\tau: b_{\langle n/2 \rangle} \rightarrow -b_{\langle n/2 \rangle}$ конечных билинейных форм, рассматриваемыми с точностью до ± 1 ($L_{\varphi,P} = \langle n \rangle$). Таким образом, число компонент связности модулей равно $2^{\max\{0, m-1\}}$, где m равно числу различных нечетных простых делителей числа n .*

В данном случае не существует понятия стандартной компоненты связности многообразия модулей.

Приведенные результаты также показывают, что классические объекты теории чисел, такие как неопределенные бинарные решетки и представления чисел в виде суммы двух квадратов, неминуемо появляются при классификации вещественных поляризованных КЗ-поверхностей.

§ 3. Деформации вещественных гиперэллиптически поляризованных КЗ-поверхностей

В качестве приложения предыдущих результатов рассмотрим классификацию вещественных поляризованных КЗ-поверхностей, являющихся деформациями вещественных гиперэллиптически поляризованных КЗ-поверхностей. Данная классификация рассматривалась в [13]. Используя § 2, мы получим окончательный результат.

Прежде всего точно сформулируем задачу. Пусть $(X, \tilde{P})$ – КЗ-поверхность с обильным классом дивизоров $\tilde{P}$ (не обязательно очень обильным) такая, что линейная система $|\tilde{P}|$ не имеет неподвижных компонент. Пусть P – соответствующий примитивный элемент в решетке Пикара поверхности X такой, что $\tilde{P} = tP$, где $t \in \mathbb{N}$. Как и выше, $n = P^2$ является примитивной степенью поверхности X . Пара $(X, \tilde{P})$ называется *гиперэллиптически поляризованной КЗ-поверхностью*, если полная линейная система $|\tilde{P}|$ не дает вложения поверхности X в проективное пространство.

Пусть $(X, \tilde{P})$ – гиперэллиптически поляризованная КЗ-поверхность. В силу результатов из [15] в этом случае общая кривая линейной системы $|\tilde{P}|$ гиперэллиптическая и линейная система $|\tilde{P}|$ дает двулистное накрытие $|\tilde{P}|: X \rightarrow Y \subset \mathbb{P}^N$ на рациональную поверхность Y , где $N = \dim |\tilde{P}| = \tilde{P}^2/2 + 1 = m^2n/2 + 1$. Взяв $P' = kP$, где $k > m$ достаточно велико (в силу [15] достаточно взять $k \geq 3$), получаем поляризованную КЗ-поверхность (X, kP) (т.е. класс kP очень обилен). Естественно, она также называется *гиперэллиптически поляризованной*. Тогда поляризованные КЗ-поверхности в той же связной компоненте модулей, что и (X, kP) , могут рассматриваться как деформации гиперэллиптически поляризованной КЗ-поверхности (X, kP) (или просто $(X, \tilde{P})$).

Легко видеть, что любая поляризованная комплексная КЗ-поверхность является именно такой деформацией, так как пространство модулей комплексных поляризованных КЗ-поверхностей (X, kP) примитивной степени $n = P^2 > 0$ связно в силу глобальной теоремы Торелли для КЗ-поверхностей [14] и, очевидно, содержит гиперэллиптически поляризованные КЗ-поверхности. Оно пусто, если $n = 2$ и $k = 1, 2$.

Аналогичный вопрос интересен для вещественных поляризованных КЗ-поверхностей: *когда вещественная поляризованная КЗ-поверхность является деформацией вещественной гиперэллиптически поляризованной КЗ-поверхности?* Ответ на этот вопрос может оказаться полезным, так как редуцирует многие вопросы к вещественным гиперэллиптически поляризованным КЗ-поверхностям, которые гораздо проще и могут быть построены явно.

Можно переформулировать данный вопрос следующим образом. Обозначим через $\mathcal{M}_{n,k}$ пространство модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей (X, kP) , где класс P примитивен, $P^2 = n$ и $k \in \mathbb{N}$ (т.е. класс kP очень обилен). Когда $n = 2$, можно предполагать, что $k \geq 3$, так как модули $\mathcal{M}_{2,1}$ и $\mathcal{M}_{2,2}$ пусты. Имеем очевидное вложение

$$\mathcal{M}_{n,k_1} \subset \mathcal{M}_{n,k_2}, \quad \text{если } k_1 \leq k_2, \quad (20)$$

и индуцированное вложение множества связных компонент модулей. По теореме 2 отображение (20) задает изоморфизм множеств компонент связности модулей. Компоненты связности модулей $\mathcal{M}_{n,k}$ одни и те же для всех k . Кроме того, известно, что отличие между модулями $\mathcal{M}_{n,k}$ для различных k имеет место только в коразмерности не менее 1 (соответствующие КЗ-поверхности имеют число Пикара не менее 2). Таким образом, даже если само $\mathcal{M}_{n,k}$ не имеет гиперэллиптически поляризованных КЗ-поверхностей, мы можем рассматривать данные КЗ-поверхности как деформации гиперэллиптически поляризованных КЗ-поверхностей, если та же самая компонента пространства модулей $\mathcal{M}_{n,k_2}$ для $k_2 > k$ имеет гиперэллиптически поляризованные КЗ-поверхности. Таким образом, ответ на наш вопрос не зависит от k , поэтому этот вопрос может быть сформулирован следующим образом: *какие связные компоненты $\mathcal{M}_{n,k}$ для $k \gg 0$ содержат гиперэллиптически поляризованные КЗ-поверхности (X, kP) , т.е. класс P примитивен и линейная система $|\tilde{P}|$ гиперэллиптически для $\tilde{P} = tP$, где $t = 1, 2$?*

Этот вопрос изучался в [13, § 8]. Используя результаты из § 2, мы получим здесь окончательный ответ.

Изложение материала в работе [13, § 8] очень сжатое, поэтому, прежде всего, приведем общие рассуждения из [13] более подробно.

В силу [15, теорема 5.2] для обильного $\tilde{P} = mP$ линейная система $|\tilde{P}|$ гиперэллиптическая в следующих и только следующих случаях:

- (i) $n = 2$, $m = 1, 2$, тогда $Y = \mathbb{P}^2$, $|\tilde{P}|: X \rightarrow Y = \mathbb{P}^2$ – двулистное накрытие, разветвленное в кривой степени 6, P – прообраз прямой в $\mathbb{P}^2$;
- (ii) $n \geq 4$ и существует эллиптическая кривая C на X такая, что $\tilde{P} \cdot C = 2$.

Отсюда следует, что для $n = 2$ все поляризованные КЗ-поверхности гиперэллиптически и, очевидно, являются деформациями гиперэллиптически поляризованных КЗ-поверхностей.

Предположим, что $n \geq 4$. Поскольку C – эллиптическая кривая, то $C^2 = 0$. Таким образом, классы $\tilde{P}$ и C имеют матрицу Грама $2 \begin{pmatrix} \tilde{P}^2/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, где матрица $\begin{pmatrix} \tilde{P}^2/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ имеет определитель, равный -1 , и является унимодулярной. Отсюда следует, что двумерная примитивная подрешетка $S \subset S_X$, порожденная $\tilde{P}$ и C в решетке Пикара S_X поверхности X , является 2-элементарной решеткой, т.е. $S^*/S \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^a$, где $a \leq 2$.

Поскольку класс P обилен, то $P_{S_X}^\perp$ не имеет элементов с квадратом, равным -2 . Отсюда следует, что $S_{S_X}^\perp$ также не имеет элементов с квадратом, равным -2 . Так как решетка S является 2-элементарной, по глобальной теореме Торелли для КЗ-поверхностей [14] существует инволюция τ поверхности X , тождественная на S и равная -1 на ортогональном дополнении $S^\perp$ в $H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$. Эта инволюция не симплектична, $Y = X/\{1, \tau\}$ – рациональная поверхность, и морфизм факторизации $\pi: X \rightarrow Y$ – двулистное накрытие поверхности Y , разветвленное в неособой кривой $A \in |-2K_Y|$ (см., например, [1]). В зависимости от класса изоморфизма решетки S получаем над $\mathbb{C}$ шесть случаев (см. общую классификацию в [1] или см. [13])

Случай $\mathbb{F}_1$: $S \cong \langle 2 \rangle \oplus \langle -2 \rangle$. В этом случае $Y = X/\{1, \tau\} = \mathbb{F}_1$ – раздутие $\mathbb{P}^2$ в одной точке. Обозначая через c класс кривой C , получаем, что эллиптический пучок $|c|$ – прообраз рационального пучка на $\mathbb{F}_1$. Обозначим через h класс прообраза прямой l на плоскости $\mathbb{P}^2$ и через e класс прообраза исключительного сечения s на $\mathbb{F}_1$ при отображении π . Таким образом, имеем $h^2 = 2$, $e^2 = -2$ и $h \cdot e = 0$. Тогда $c = h - e$. Так как $\tilde{P} \cdot c = 2$ и $\tilde{P} \cdot e > 0$, то $\tilde{P} = P = n_1c + e = n_1h + (1 - n_1)e$, где $n = P^2 = 4n_1 - 2 \equiv 2 \pmod{4}$ и $n \geq 6$. Как легко видеть, по теореме Римана–Роха на $\mathbb{F}_1$ линейная система $|P|$ является прообразом линейной системы с $\mathbb{F}_1$. Отсюда следует, что отображение $|\tilde{P}|: X \rightarrow Y \subset \mathbb{P}^N$ является морфизмом факторизации π .

Случай $\mathbb{F}_4$: $S \cong U$. В этом случае $Y = X/\{1, \tau\} = \mathbb{F}_4$, где $\mathbb{F}_4$ – относительно минимальная рациональная поверхность с исключительным сечением s таким, что $s^2 = -4$. Обозначим $E = \pi^{-1}(s)$, и пусть e – класс кривой E . Эллиптический пучок $|C|$ – прообраз рационального пучка на $\mathbb{F}_4$ при отображении π .

Обозначим этот класс через c . Тогда $c^2 = 0$, $e^2 = -2$ и $c \cdot e = 1$. Так как $mP \cdot c = 2$ и $P \cdot e > 0$, получаем следующие два случая.

Случай $(\mathbb{F}_4)^{(1)}$: $m = 2$ и $\tilde{P} = 2P$, где $P = n_1c + e$ и $n_1 \geq 3$. Тогда $n = P^2 = 2n_1 - 2$. Имеем $n \equiv 0 \pmod{2}$ и $n \geq 6$.

Случай $(\mathbb{F}_4)^{(2)}$: $m = 1$ и $\tilde{P} = P = n_1C + 2E$, где $n_1 \geq 5$ и $n_1 \equiv 1 \pmod{2}$. Тогда $n = P^2 = 4n_1 - 8$. Имеем $n \equiv 4 \pmod{8}$ и $n \geq 12$.

Используя теорему Римана–Роха на $\mathbb{F}_4$, легко видеть, что в обоих случаях линейная система $|\tilde{P}|$ – прообраз соответствующей линейной системы на $\mathbb{F}_4$ при отображении π . Отсюда следует, что $|\tilde{P}|: X \rightarrow Y \subset \mathbb{P}^N$ является морфизмом факторизации π .

Случай $\mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$: $S \cong U(2)$ и $Y = X/\{1, \tau\} \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Обозначим через e_1 и e_2 классы прообразов $\text{pt} \times \mathbb{P}^1$ и $\mathbb{P}^1 \times \text{pt}$ на X . Имеем $e_1^2 = e_2^2 = 0$ и $e_1 \cdot e_2 = 2$. Тогда C имеет класс e_1 или e_2 и получаем два случая: либо $\tilde{P} = P = n_1e_1 + e_2$, $n_1 \geq 1$ (случай $(\mathbb{F}_0)_{(1)}$), либо $\tilde{P} = P = e_1 + n_1e_2$, $n_1 \geq 1$ (случай $(\mathbb{F}_0)_{(2)}$). Тогда $n = P^2 = 4n_1$, где $n \equiv 0 \pmod{4}$ и $n \geq 4$. В обоих случаях линейная система $|\tilde{P}|$ – прообраз соответствующей линейной системы на $\mathbb{F}_0$. Отсюда следует, что $|\tilde{P}|: X \rightarrow Y \subset \mathbb{P}^N$ – отображение факторизации π . Над $\mathbb{R}$ важно различать случаи $(\mathbb{F}_0)_{(1)}$ и $(\mathbb{F}_0)_{(2)}$, которые симметричны над $\mathbb{C}$.

Случай $\mathbb{F}_2$: $S \cong U(2)$ и $Y = X/\{1, \tau\} \cong \mathbb{F}_2$. Этот случай может рассматриваться как вырождение предыдущего. Обозначим через e класс прообраза исключительного сечения относительно минимальной рациональной поверхности $\mathbb{F}_2$ (оно является несвязным объединением двух неособых рациональных кривых на X , сопряженных инволюцией τ ; тогда решетка Пикара поверхности X имеет ранг, равный по крайней мере трем) и через c класс прообраза рационального пучка на $\mathbb{F}_2$. Имеем $e^2 = -4$, $c^2 = 0$ и $c \cdot e = 2$. Тогда C имеет класс c и $\tilde{P} = P = n_1c + e$, где $n_1 \geq 3$. Отсюда $n = 4n_1 - 4$, где $n \equiv 0 \pmod{4}$ и $n \geq 8$. Как и в предыдущих случаях, $|\tilde{P}|$ – прообраз соответствующей линейной системы поверхности $\mathbb{F}_2$ и $|\tilde{P}|: X \rightarrow Y \subset \mathbb{P}^N$ – отображение факторизации π .

Таким образом, классификация гиперэллиптически поляризованных КЗ-поверхностей $(X, \tilde{P})$ эквивалентна классификации КЗ-поверхностей с несимплектической инволюцией (X, τ) , где поверхность $Y = X/\{1, \tau\}$ есть $\mathbb{P}^2$ или $\mathbb{F}_t$ для $t = 0, 1, 2, 4$, и $|\tilde{P}| = \pi^*[Q]$, где $|Q|$ – указанная выше линейная система на Y . Их деформации и дают поляризованные КЗ-поверхности, которые мы хотим изучить. Следующее утверждение показывает, что при этом можно не рассматривать случай $\mathbb{F}_2$.

ЛЕММА 1. *Вещественные поляризованные КЗ-поверхности, являющиеся деформациями вещественных гиперэллиптически поляризованных КЗ-поверхностей, получающихся из $\mathbb{F}_2$, также являются деформациями вещественных гиперэллиптически поляризованных КЗ-поверхностей, получающихся из $\mathbb{F}_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(X, \tilde{P})$ – вещественная гиперэллиптически поляризованная КЗ-поверхность, для которой класс $\tilde{P} \in S \cong U(2)$ приходит с поверхности $Y = X/\{1, \tau\}$, где $Y = \mathbb{F}_2$. Пусть φ – соответствующая антиголоморфная инволюция на X , коммутирующая с τ . Таким образом, тройка

(X, τ, φ) – вещественная КЗ-поверхность с несимплектической инволюцией τ . Если $Y \cong \mathbb{F}_2$, то решетка Пикара S_X содержит S , но имеет ранг, равный по крайней мере трем. Немного изменяя комплексную структуру на X и применяя глобальную теорему Торелли [14], получаем другую вещественную КЗ-поверхность с несимплектической инволюцией $(\tilde{X}, \tilde{\tau}, \tilde{\varphi})$, которая имеет то же действие инволюций на $H_2(\tilde{X}, \mathbb{Z})$, но имеет решетку Пикара $S_{\tilde{X}} = S$ ранга два.

Тогда $\tilde{X}/\{1, \tilde{\tau}\} \cong \mathbb{F}_0$ и тот же самый класс $\tilde{P}$ приходит с $\mathbb{F}_0$. Обе эти вещественные поляризованные КЗ-поверхности задают ту же самую целочисленную поляризованную КЗ-инволюцию $(L, \varphi = \tilde{\varphi}, \tilde{P})$ и по теореме 2 дают одну и ту же компоненту связности модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей. Это завершает доказательство леммы.

Гиперэллиптически поляризованные КЗ-поверхности $(X, \tilde{P})$, где $\tilde{P}$ приходит (так, как указано в шести приведенных выше случаях) с поверхности $Y = X/\{1, \tau\} \cong \mathbb{F}_t$, $t = 0, 1, 4$, назывались в [13] *общими КЗ-двойными рациональными скроллами*, так как $|\tilde{P}|$ определяет вложение $\mathbb{F}_t = Y \subset \mathbb{P}^N$ в качестве поверхности, являющейся рациональным скроллом (степень поверхности Y равна $N - 1$; см. [15]). Поверхность X является двулистным КЗ-накрытием данного скролла, имеющим в общем случае наименьшее возможное число Пикара, равное двум. Из приведенных выше рассуждений и леммы 1 следует, что деформации вещественных гиперэллиптически поляризованных КЗ-поверхностей эквивалентны деформациям вещественных общих КЗ-двойных рациональных скроллов.

В [13] была получена классификация компонент связности модулей вещественных общих КЗ-двойных рациональных скроллов, а также изучались вещественные поляризованные КЗ-поверхности, являющиеся их деформациями. Используя результаты из § 2, мы завершим классификацию этих деформаций.

Основной результат [13] о деформациях заключался в следующем.

ТЕОРЕМА 10 [13, теорема 30]. *Инвариант рода (2) вещественных поляризованных КЗ-поверхностей может быть получен деформацией вещественного общего КЗ-двойного рационального скролла (эквивалентно, вещественной гиперэллиптически поляризованной КЗ-поверхности), если и только если выполнено условие:*

$$\text{примитивная степень } n \leq 4,$$

$$\text{если либо } (r, a) = (20, 2), \text{ либо } r + a = 22 \text{ и } \delta_{\varphi P} = 0.$$

Эквивалентно,

$$\begin{aligned} n \leq 4, \text{ если либо } X(\mathbb{R}) = (T_0)^{10}, \text{ либо } X(\mathbb{R}) = (T_0)^k \\ \text{и } X(\mathbb{R}) \sim P \pmod{2} \text{ в } H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Поскольку для $n = 2$ и $n = 4$ инварианты рода дают только одну компоненту связности (см. § 2), из теоремы 10 вытекает следующий результат, который тривиален для $n = 2$ и был получен для $n = 4$ в [13].

ТЕОРЕМА 11 [13]. *Любая вещественная поляризованная КЗ-поверхность примитивной степени $n = 2$ или $n = 4$ является деформацией вещественного общего КЗ-двойного рационального скролла (эквивалентно, вещественной гиперэллиптически поляризованной КЗ-поверхности).*

Таким образом, далее можно предполагать, что $n \geq 6$. Применяя теорему 4 о связности, из теоремы 10 получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 12. *Пусть (X, P') – вещественная поляризованная КЗ-поверхность примитивной степени $n \geq 6$ и $X(\mathbb{R}) \neq T_1 \amalg (T_0)^8, (T_0)^9$. Тогда (X, P') является деформацией вещественного общего КЗ-двойного рационального*

скролла (эквивалентно, вещественной гиперэллиптически поляризованной КЗ-поверхности), если и только если $X(\mathbb{R}) \neq (T_0)^{10}$ и $X(\mathbb{R}) \not\sim P \pmod{2}$ в $H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$, когда $X(\mathbb{R}) = (T_0)^k$.

Теперь предположим, что $n \geq 6$ и $X(\mathbb{R}) = T_1 \amalg (T_0)^8$. Эквивалентно, $(r, a, \delta_\varphi) = (19, 1, 1)$. В этом случае необходимо применить инварианты теорем 5 и 6.

В силу [13] (особенно важен п. 8.1 в [13]) существуют три случая деформаций, которые символически показаны ниже (см. также наши рассуждения в начале этого параграфа).

Случай $(\mathbb{F}_4)^{(1)}$: $n \in (\mathbb{F}_4)^{(1)}$, если и только если $n \equiv 0 \pmod{2}$ и $n \geq 4$; $P = (n/2 + 1)C + E$;

$$\begin{aligned} D_n: ((\mathbb{F}_4)^{(1)}; r = 19, a = 1, H = 0, \delta_{\varphi S} = 1) \\ \implies (n; r = 19, a = 1, \delta_P = 1, \delta_\varphi = 1, \delta_{\varphi P} = 1). \end{aligned}$$

В этом случае

$$L = [C, E] \oplus [g_1, g_2; (g_1 + g_2)/2] \oplus U \oplus 2E_8,$$

где $C^2 = 0$, $E^2 = -2$ и $C \cdot E = 1$, $g_1^2 = 2$, $g_2^2 = -2$ и $g_1 \perp g_2$. Инволюции τ и φ характеризуются их собственными подпространствами, отвечающими собственному значению 1, которые равны $L^\tau = [C, E]$ и $L^\varphi = [g_2] \oplus U \oplus 2E_8$. Тогда тройка (L, τ, φ) имеет требуемые (в [13]) инварианты.

Решетка $L^{\varphi, P} = \mathbb{Z}P \oplus \mathbb{Z}g_2 \oplus U \oplus 2E_8$ равна $\langle n \rangle \oplus \langle -2 \rangle$ по модулю унимодулярной решетки $U \oplus 2E_8$. Здесь P и g_2 – стандартные образующие решеток $\langle n \rangle$ и $\langle -2 \rangle$ соответственно. Ортогональное дополнение к $L^{\varphi, P}$ в L равно $L_{\varphi, P} = \mathbb{Z}Q \oplus \mathbb{Z}g_1$, где $Q = (n/2 - 1)C - E$ и $Q^2 = -n$. Отсюда следует, что $L_{\varphi, P} = \langle -n \rangle \oplus \langle 2 \rangle$, где Q и g_2 – стандартные образующие решеток $\langle -n \rangle$ и $\langle 2 \rangle$ соответственно.

Получаем $Q/n + P/n = C \in L$ и $g_2/2 + g_1/2 = (g_1 + g_2)/2 \in L$. Отсюда следует, что компонента связности модулей является стандартной.

Случай $(\mathbb{F}_4)^{(2)}$: $n \in (\mathbb{F}_4)^{(2)}$, если и только если $n \equiv 4 \pmod{8}$ и $n \geq 12$; $P = (n/4 + 2)C + 2E$;

$$\begin{aligned} D_n: ((\mathbb{F}_4)^{(2)}; r = 19, a = 1, H = 0, \delta_{\varphi S} = 1) \\ \implies (n; r = 19, a = 1, \delta_P = 1, \delta_\varphi = 1, \delta_{\varphi P} = 1). \end{aligned}$$

В этом случае все аналогично предыдущему случаю, только $P = (n/4+2)C + 2E$ и $Q = (n/4 - 2)C - 2E$. Таким образом,

$$\frac{P}{n/2} + \frac{Q}{n/2} = C \in L, \quad \frac{P}{4} + \left(-\frac{Q}{4}\right) = C + E \in L,$$

где $n \equiv 4 \pmod{8}$. Отсюда следует, что компонента связности модулей отлична от стандартной на -1 в 2-компоненте дискриминантной формы.

Случай $\mathbb{F}_1$: $n \in \mathbb{F}_1$, если и только если $n \equiv 2 \pmod{4}$ и $n \geq 6$; имеем $P = ((n+2)/4)h + ((2-n)/4)e$;

$$\begin{aligned} D_n: (\mathbb{F}_1; r = 19, a = 1, H = [h], \delta_{\varphi S} = 0, v = h) \\ \implies (n; r = 19, a = 1, \delta_P, \delta_{\varphi} = 1, \delta_{\varphi P}), \end{aligned}$$

где

$$\delta_P = \delta_{\varphi P} = \begin{cases} 0, & \text{если } n \equiv 2 \pmod{8}, \\ 1, & \text{если } n \equiv -2 \pmod{8}. \end{cases}$$

В этом случае решетка имеет вид

$$L = [h, e, g_1, g_2; (h + g_2)/2, (e + g_1)/2] \oplus U \oplus 2E_8,$$

где h, e, g_1, g_2 ортогональны друг другу и $h^2 = 2, e^2 = -2, g_1^2 = 2, g_2^2 = -2$. Инволюции τ и φ характеризуются (как и выше) тем, что $L^\tau = [h, e]$ и $L^\varphi = \mathbb{Z}g_2 \oplus U \oplus 2E_8$. Тогда тройка (L, τ, φ) имеет требуемые (в [13]) инварианты.

Предположим, что $n \equiv -2 \pmod{8}$. Тогда $L^{\varphi, P} = \mathbb{Z}P \oplus \mathbb{Z}g_2 \oplus U \oplus 2E_8$ и эта решетка совпадает с $\langle n \rangle \oplus \langle -2 \rangle$ по модулю унимодулярной решетки $U \oplus 2E_8$. Здесь P и g_2 – стандартные образующие решеток $\langle n \rangle$ и $\langle -2 \rangle$ соответственно. Ортогональное дополнение к $L^{\varphi, P}$ в L равно $L_{\varphi, P} = \mathbb{Z}Q \oplus \mathbb{Z}g_1$, где $Q = ((n-2)/4)h - ((n+2)/4)e$ и $Q^2 = -n$. Таким образом, $L_{\varphi, P} = \langle -n \rangle \oplus \langle 2 \rangle$; здесь P и g_1 – стандартные образующие решеток $\langle -n \rangle$ и $\langle 2 \rangle$ соответственно.

Имеем

$$e = \frac{n-2}{2n}P - \frac{n+2}{2n}Q, \quad h = \frac{n+2}{2n}P + \frac{2-n}{2n}Q.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{P}{n/2} + \frac{Q}{n/2} &= h - e \in L, \\ -\frac{n}{2} \left(\frac{g_2}{2} \right) + \frac{n-2}{4} \left(\frac{Q}{2} \right) &= -\frac{n}{2} \left(\frac{h+g_2}{2} \right) + \frac{n+2}{8}P \in L, \end{aligned}$$

поэтому компонента связности модулей отлична от стандартной на нетривиальный автоморфизм 2-компоненты дискриминантной формы, которая имеет в этом случае группу автоморфизмов $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Если $n \equiv 2 \pmod{8}$, то 2-компонента дискриминантной формы тривиальна. В этом случае наши (или аналогичные) вычисления показывают, что компонента связности модулей является стандартной.

Таким образом, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 13. Пусть (X, P') – вещественная поляризованная КЗ-поверхность примитивной степени $n \geq 6$ и $X(\mathbb{R}) = T_1 \Pi(T_0)^8$. Тогда (X, P') является деформацией вещественного общего КЗ-двойного рационального скролла (эквивалентно, вещественной гиперэллиптической поляризованной КЗ-поверхности), если и только если выполнены условия:

- (а) если $n \equiv 0, 2 \pmod{8}$, то (X, P') стандартна;
- (б) если $n \equiv 4, 6 \pmod{8}$, то (X, P') отлична от стандартной только над 2.

Теперь предположим, что $n \geq 6$ и $X(\mathbb{R}) = (T_0)^9$. Эквивалентно, $(r, a, \delta_\varphi) = (19, 3, 1)$. Тогда нужно применить инварианты теоремы 7, так как $\delta_{\varphi P} = 1$.

В силу результатов [13] (особенно важен п. 8.1 из [13]) имеются два типа деформаций, которые символически описываются, как показано ниже (см. также наши рассуждения в начале этого параграфа).

Случай гиперболоида $\mathbb{H}_{(1)}$: $n \in \mathbb{H}_{(1)}$, если и только если $n \equiv 0 \pmod{4}$ и $n \geq 4$; $P = (n/4)e_1 + e_2$;

$$\begin{aligned} D_n: (\mathbb{H}_{(1)}; r = 19, a = 3, H = [e_1, e_2], \delta_{\varphi S} = 1) \\ \implies (n; r = 19, a = 3, \delta_P = 0, \delta_\varphi = 1, \delta_{\varphi P} = 1). \end{aligned}$$

В этом случае

$$L = [e_1, e_2, e'_1, e'_2; (e_1 + e'_1)/2, (e_2 + e'_2)/2] \oplus [g, g'; (g + g')/2] \oplus 2E_8,$$

где $e_1^2 = e_2^2 = 0$, $e_1 \cdot e_2 = 2$; $(e'_1)^2 = (e'_2)^2 = 0$, $e'_1 \cdot e'_2 = -2$; $[e_1, e_2] \perp [e'_1, e'_2]$; $g^2 = 2$, $(g')^2 = -2$, $g \perp g'$. Инволюции τ и φ характеризуются $L^\tau = [e_1, e_2]$ и $L^\varphi = [e'_1, e'_2] \oplus [g'] \oplus 2E_8$. Тогда тройка (L, τ, φ) имеет требуемые инварианты.

Решетка L_φ равна $[e_1, e_2, g]$. Имеем $\mathbb{Z}P = \langle n \rangle$, где $P = (n/4)e_1 + e_2$ – стандартная образующая решетки $\langle n \rangle$. Ее ортогональное дополнение в L_φ равно $L_{\varphi, P} = \mathbb{Z}Q \oplus \mathbb{Z}g$, где $Q = (n/4)e_1 - e_2$ и $Q^2 = -n$. Таким образом, $L_{\varphi, P} = \langle -n \rangle \oplus \langle 2 \rangle$, где Q и g – стандартные образующие решеток $\langle -n \rangle$ и $\langle 2 \rangle$ соответственно. Имеем

$$\frac{Q}{n/2} + \frac{P}{n/2} = e_1 \in L.$$

Отсюда следует (см. теорему 7), что связная компонента модулей стандартна.

Случай $\mathbb{F}_1$: $n \in \mathbb{F}_1$, если и только если $n \equiv 2 \pmod{4}$ и $n \geq 6$; имеем $P = ((n+2)/4)h + ((2-n)/4)e$;

$$\begin{aligned} D_n: (\mathbb{F}_1; r = 19, a = 3, H = [h, e], \delta_{\varphi S} = 1) \\ \implies (n; r = 19, a = 3, \delta_P = 0, \delta_\varphi = 1, \delta_{\varphi P} = 1). \end{aligned}$$

В этом случае

$$L = [h, e, h', e'; (h + h')/2, (e + e')/2] \oplus [g, g'; (g + g')/2] \oplus 2E_8,$$

где $h^2 = 2$, $e^2 = -2$, $h \perp e$; $(h')^2 = -2$, $(e')^2 = 2$, $h' \perp e'$; $[h, e] \perp [h', e']$; $g^2 = 2$, $(g')^2 = -2$, $g \perp g'$. Инволюции τ и φ характеризуются тем, что $L^\tau = [h, e]$ и $L^\varphi = [h', e'] \oplus [g'] \oplus 2E_8$. Тогда тройка (L, τ, φ) имеет требуемые инварианты.

Решетка L_φ равна $[h, e, g]$. Имеем $\mathbb{Z}P = \langle n \rangle$, где $P = ((n+2)/4)h + ((2-n)/4)e$ есть стандартная образующая решетки $\langle n \rangle$. Ее ортогональное дополнение в L_φ равно $L_{\varphi, P} = \mathbb{Z}Q \oplus \mathbb{Z}g$, где $Q = ((n-2)/4)h - ((n+2)/4)e$ и $Q^2 = -n$. Таким образом, $L_{\varphi, P} = \langle -n \rangle \oplus \langle 2 \rangle$, где Q и g – стандартные образующие решеток $\langle -n \rangle$ и $\langle 2 \rangle$ соответственно. Имеем

$$\frac{Q}{n/2} + \frac{P}{n/2} = h - e \in L.$$

Отсюда следует (см. теорему 7), что компонента связности модулей стандартна.

Получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 14. Пусть (X, P') – вещественная поляризованная КЗ-поверхность примитивной степени $n \geq 6$ и $X(\mathbb{R}) = (T_0)^9$. Тогда (X, P') является деформацией вещественного общего КЗ-двойного рационального скролла (эквивалентно, вещественной гиперэллиптически поляризованной КЗ-поверхности), если и только если $X(\mathbb{R}) \not\sim P \pmod{2}$ в $H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ и (X, P') стандартна.

Объединим полученные результаты в одну теорему.

ТЕОРЕМА 15. Вещественная поляризованная КЗ-поверхность (X, P') является деформацией вещественного общего КЗ-двойного рационального скролла (эквивалентно, вещественной гиперэллиптически поляризованной КЗ-поверхности), если и только если выполнено одно из следующих условий:

- (i) примитивная степень n равна 2 или 4;
- (ii) $n \geq 6$, $X(\mathbb{R}) \neq T_1 \amalg (T_0)^8, (T_0)^9, (T_0)^{10}$ и $X(\mathbb{R}) \not\sim P \pmod{2}$ в $H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$, если $X(\mathbb{R}) = (T_0)^k$;
- (iii) $n \geq 6$, $X(\mathbb{R}) = T_1 \amalg (T_0)^8$ и (X, P') стандартна, если $n \equiv 0, 2 \pmod{8}$, и (X, P') отлична от стандартной только над 2, если $n \equiv 4, 6 \pmod{8}$;
- (iv) $n \geq 6$, $X(\mathbb{R}) = (T_0)^9$, $X(\mathbb{R}) \not\sim P \pmod{2}$ в $H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ и (X, P') стандартна.

Список литературы

1. В. А. Алексеев, В. В. Никулин, “Классификация поверхностей дель Пеццо с лог-терминальными особенностями индекса ≤ 2 , инволюции на поверхностях КЗ и группы отражений в пространствах Лобачевского”, *Доклады по математике и ее приложениям*, т. 2, вып. 2, ред. Е. В. Щепин, Российская академия наук, Матем. ин-т им. В. А. Стеклова, М., 1988, 51–150.
2. V. Alexeev, V. V. Nikulin, *Del Pezzo and K3 surfaces*, Mathem. Soc. of Japan Memoirs, **15**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006.
3. J. W. S. Cassels, *Rational quadratic forms*, Academic Press, London–New York, 1978.
4. D. G. James, “The number of embeddings of quadratic $\mathbb{Z}$ -lattices”, *J. Number Theory*, **58**:1 (1996), 1–8.
5. В. М. Харламов, “Дополнительные сравнения для эйлеровой характеристики четномерных вещественных алгебраических многообразий”, *Функц. анализ и его прил.*, **9**:2 (1975), 51–60; англ. пер.: V. M. Harlamov, “Additional congruences for the Euler characteristic of real algebraic manifolds of even dimensions”, *Funct. Anal. Appl.*, **9**:2 (1975), 134–141.

6. В. М. Харламов, “Топологические типы неособых поверхностей степени 4 в $\mathbb{RP}^3$ ”, *Функц. анализ и его прил.*, **10**:4 (1976), 55–68; англ. пер.: M. P. Harlamov, “The topological type of nonsingular surfaces in $\mathbb{RP}^3$ of degree four”, *Funct. Anal. Appl.*, **10**:4 (1976), 295–305.
7. Вик. С. Куликов, “Вырождения $K3$ поверхностей и поверхностей Энриквеса”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:5 (1977), 1008–1042; англ. пер.: Vik. S. Kulikov, “Degenerations of $K3$ surfaces and Enriques surfaces”, *Math. USSR-Izv.*, **11**:5 (1977), 957–989.
8. R. Miranda, D. R. Morrison, “The number of embeddings of integral quadratic forms. I”, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **61**:10 (1985), 317–320.
9. R. Miranda, D. R. Morrison, “The number of embeddings of integral quadratic forms. II”, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **62**:1 (1986), 29–32.
10. В. В. Никулин, “Конечные группы автоморфизмов келеровых поверхностей типа $K3$ ”, *Тр. ММО*, **38** (1979), 75–137.
11. В. В. Никулин, “Целочисленные симметрические билинейные формы и некоторые их геометрические приложения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:1 (1979), 111–177; англ. пер.: V. V. Nikulin, “Integral symmetric bilinear forms and some of their applications”, **14**:1 (1980), 103–167.
12. В. В. Никулин, “Инволюции целочисленных квадратичных форм и их приложения к вещественной алгебраической геометрии”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **47**:1 (1983), 109–188; англ. пер.: V. V. Nikulin, “Involutions of integral quadratic forms and their applications to real algebraic geometry”, *Math. USSR-Izv.*, **22**:1 (1984), 99–172.
13. V. V. Nikulin, S. Saito, “Real $K3$ surfaces with non-symplectic involution and applications”, *Proc. London Math. Soc.*, **90**:3 (2005), 591–654.
14. И. И. Пятецкий-Шапиро, И. Р. Шафаревич, “Теорема Торелли для алгебраических поверхностей типа $K3$ ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35**:3 (1971), 530–572; англ. пер.: I. I. Pjateckij-Šapiro, I. R. Šafarevič, “A Torelli theorem for algebraic surfaces of type $K3$ ”, *Math. USSR-Izv.*, **5**:3 (1975), 547–588.
15. B. Saint-Donat, “Projective models of $K3$ surfaces”, *Amer. J. Math.*, **96** (1974), 602–639.

В. В. Никулин (V. V. NIKULIN)

Department of Pure Mathematics,

The University of Liverpool

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: vnikulin@liv.ac.uk, vvnikulin@list.ru

Поступило в редакцию

12.07.2006