Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. И. Борисов, Р. Р. Гадыльшин, О спектре периодического оператора с малым локализованным возмущением, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 4, 37–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/im1146>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 16:57:07

УДК 517.984

Д. И. Борисов, Р. Р. Гадыльшин

О спектре периодического оператора с малым локализованным возмущением

Изучается спектр периодического самосопряженного дифференциального оператора на оси, возмущенного малым локализованным несамосопряженным оператором. Показано, что непрерывный спектр не зависит от возмущения, остаточный спектр пуст, а точечный спектр не имеет конечных точек накопления. Изучен вопрос о существовании собственных значений, вложенных в непрерывный спектр. Получены необходимые и достаточные условия существования собственных значений. Построены асимптотические разложения для собственных значений и соответствующих собственных функций. Приведены примеры.

Библиография: 11 наименований.

§ 1. Введение

Хорошо известно, что спектр одномерного периодического самосопряженного дифференциального оператора второго порядка на оси непрерывен и состоит из зон, разделенных лакунами (см., например, [1, гл. V, § 56], [2, гл. 5]). При возмущении такого оператора быстро убывающим потенциалом непрерывная часть спектра не меняется, а в ее лакунах возникают изолированные собственные значения. Вопросы о существовании и количестве таких собственных значений изучались, например, в [3]–[6]. Было доказано, что число собственных значений в каждой лакуне конечно, а в удаленных лакунах – не более двух. В работе [6] также был рассмотрен случай, когда возмущающий потенциал умножается на малую константу связи, было установлено, что при достаточно малых значениях константы связи в каждой лакуне содержатся не более двух собственных значений, и приведены необходимые и достаточные условия, точно определяющие количество собственных значений в заданной лакуне.

В настоящей работе изучается спектр самосопряженного периодического дифференциального оператора второго порядка на оси, возмущенного достаточно произвольным линейным оператором вида $\varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon$, где ε – малый положительный параметр. Основным свойством оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ является его локализованность, которая состоит в следующем. Носитель функции $\mathcal{L}_\varepsilon u$ лежит в некотором фиксированном конечном отрезке $\overline{Q}$, причем эта функция полностью определяется теми значениями, которые аргумент u принимает на отрезке Q .

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ” (грант НШ-2215.2008.1). Кроме того, работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (грант № 07-01-00037), второго – РФФИ (грант № 05-01-97912-р_агидель). Работа первого автора также поддержана стипендией “Marie Curie International Fellowship” в рамках 6-й Европейской рамочной программы (MIF1-CT-2005-006254), стипендией из премии Балзана, присужденной П. Делиню в 2004 г., и Программой Президента РФ “Поддержка молодых кандидатов наук” (грант № МК-964.2008.1).

Одним из главных отличий рассматриваемого нами возмущения от случаев, исследованных в цитированных выше работах, является тот факт, что не предполагается самосопряженность для оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$. Не предполагается это свойство и для возмущенного оператора. Кроме того, множество возможных возмущений, описываемых этим оператором, помимо потенциалов включает в себя широкий класс примеров разнообразной природы, таких как дифференциальный оператор, интегральный оператор, линейный функционал (см. § 9).

В работе показано, что непрерывный спектр возмущенного оператора совпадает со спектром невозмущенного оператора. Также установлено, что остаточный спектр пуст, а точечный спектр состоит из не более чем счетного числа собственных значений конечной кратности, которые не имеют конечных точек накоплений. Приведен пример возмущения, которое порождает собственные значения, вложенные в непрерывный спектр. Отметим, что подобный эффект не мог возникнуть в задачах, рассмотренных в [3]–[6]. Также приводятся достаточные условия, гарантирующие отсутствие вложенных собственных значений. В настоящей работе установлено, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ собственные значения возмущенного оператора стремятся к бесконечности либо сходятся к краям невырожденных лакун в непрерывном спектре. Доказано, что в окрестности края заданной невырожденной лакуны существует не более одного такого собственного значения, приведен критерий существования и в случае существования построено его асимптотическое разложение. Также построено асимптотическое разложение соответствующей собственной функции.

В заключение параграфа опишем структуру статьи. В § 2 описывается постановка задачи и формулируются основные результаты. В § 3 доказывается общая теорема о положении спектра возмущенного оператора и устанавливается, что непрерывный спектр не зависит от возмущения, а остаточный спектр пуст. В § 4 показано отсутствие вложенных собственных значений в конечной части непрерывного спектра при достаточно малых ε . В § 5 исследованы счетность, сходимости и некоторые другие свойства точечного спектра возмущенного оператора. В § 6 изучаются вопросы существования собственных значений, вложенных в непрерывный спектр. В § 7 доказываются вспомогательные утверждения, которые используются в § 8, где строятся асимптотики собственных значений, сходящихся к краям невырожденных лакун в непрерывном спектре. В последнем § 9 приводятся примеры возмущений, к которым применимы результаты работы.

§ 2. Постановка задачи и основные результаты

Пусть

$$\mathcal{H}_0 := -\frac{d}{dx}p\frac{d}{dx} + q$$

– самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R})$ с областью определения $W_2^2(\mathbb{R})$. Здесь $p = p(x)$ – 1-периодическая кусочно непрерывно дифференцируемая вещественная функция, $q = q(x)$ – 1-периодическая кусочно непрерывная вещественная функции, причем

$$p(x) \geq p_0 > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Без ограничения общности всюду в работе предполагаем, что $p(0) = 1$.

Пусть $\mathcal{L}_\varepsilon : W_2^2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ – линейный оператор, ограниченный равномерно по ε и, вообще говоря, неограниченный как оператор в $L_2(Q)$. На пространстве $W_{2,\text{loc}}^2(\mathbb{R})$ определим оператор, принимающий значения в $L_2(\mathbb{R})$ по следующему правилу: элемент из $W_{2,\text{loc}}^2(\mathbb{R})$ сужается на Q , к нему применяется оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ и результат продолжается нулем вне Q . Такой оператор мы вновь будем обозначать через $\mathcal{L}_\varepsilon$. Ясно, что он является неограниченным оператором в $L_2(\mathbb{R})$ с областью определения $W_{2,\text{loc}}^2(\mathbb{R})$.

Обозначим через $\mathcal{H}_\varepsilon := (\mathcal{H}_0 - \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon)$ оператор в $L_2(\mathbb{R})$ с областью определения $W_2^2(\mathbb{R})$. Оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ замкнут (см. далее лемму 3.2).

Основной целью настоящей работы является изучение поведения спектра оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Прежде чем сформулировать основные результаты, мы введем дополнительные обозначения и напомним некоторые известные факты.

Всюду в работе через $\sigma(\cdot)$, $\sigma_c(\cdot)$ и $\sigma_p(\cdot)$ обозначим спектр, непрерывный спектр и точечный спектр соответственно. Следуя работе [1], мы определяем точечный спектр как множество всех собственных значений, а непрерывный спектр определяется в терминах характеристических последовательностей. Мы также вводим в рассмотрение остаточный спектр следующим образом:

$$\sigma_r(\cdot) := \sigma(\cdot) \setminus (\sigma_c(\cdot) \cup \sigma_p(\cdot)).$$

Известно [2, гл. 2, § 2.2, 2.3; гл. 5, § 5.3], что спектр оператора $\mathcal{H}_0$ имеет зонную структуру:

$$\sigma(\mathcal{H}_0) = \sigma_c(\mathcal{H}_0) = \bigcup_{n=0}^{\infty} [\mu_n^+, \mu_{n+1}^-], \quad (2.2)$$

где величины

$$\mu_0^+ < \mu_1^- \leq \mu_1^+ < \mu_2^- \leq \mu_2^+ < \mu_3^- \leq \mu_3^+ < \dots$$

являются простыми собственными значениями краевых задач

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q \right) \phi_n^\pm &= \mu_n^\pm \phi_n^\pm, \quad x \in (0, 1), \\ \phi_n^\pm(0) + (-1)^{n+1} \phi_n^\pm(1) &= 0, \quad \frac{d\phi_n^\pm}{dx}(0) + (-1)^{n+1} \frac{d\phi_n^\pm}{dx}(1) = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для $a \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$ обозначим $S_\delta(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a)| < \delta\}$.

Сформулируем основные результаты работы.

ТЕОРЕМА 2.1. *Существуют положительные $\delta_i = \delta_i(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, $i = 1, 2$, такие, что для достаточно малых ε верно вложение $\sigma(\mathcal{H}_\varepsilon) \subset S_{\delta_2(\varepsilon)}(\mu_0^+ - \delta_1(\varepsilon))$.*

ТЕОРЕМА 2.2. *При достаточно малых ε выполнены равенства $\sigma_c(\mathcal{H}_\varepsilon) = \sigma_c(\mathcal{H}_0)$, $\sigma_r(\mathcal{H}_\varepsilon) = \emptyset$.*

ТЕОРЕМА 2.3. *Точечный спектр оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ состоит из не более чем счетного числа собственных значений конечной кратности и не имеет конечных точек накопления.*

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть K – произвольный компакт в комплексной плоскости такой, что $K \cap \sigma_c(\mathcal{H}_0) \neq \emptyset$. Тогда при достаточно малых ε множество $\sigma_c(\mathcal{H}_\varepsilon) \cap K$ не содержит вложенных собственных значений.

Отметим, что теорема 2.4 не исключает случай наличия вложенных собственных значений, стремящихся к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$. В §6 будет приведен пример оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, у которого существует вложенное собственное значение. В следующей теореме приводятся достаточные условия отсутствия таких собственных значений.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) для любого подынтервала $\tilde{Q} \subseteq Q$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{L}_\varepsilon u\|_{L_2(\tilde{Q})} \leq C \|u\|_{W_2^2(\tilde{Q})}, \quad (2.4)$$

где константа C не зависит от ε и выбора подынтервала $\tilde{Q}$;

2) оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ представим в виде

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \frac{d}{dx} a_\varepsilon \frac{d}{dx} + \tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon,$$

где a_ε – кусочно непрерывно дифференцируемая функция с носителем в $\overline{Q}$, удовлетворяющая соотношению

$$\varepsilon \max_{\overline{Q}} |a'_\varepsilon(x)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \quad (2.5)$$

а $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon: W_2^1(Q) \rightarrow L_2(Q)$ – линейный оператор, ограниченный равномерно по ε .

Тогда при достаточно малых ε непрерывный спектр оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ не содержит вложенных собственных значений.

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть K – произвольный компакт в комплексной плоскости такой, что $K \cap \sigma_c(\mathcal{H}_0) \neq \emptyset$. Тогда при достаточно малых ε каждое из собственных значений оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, лежащих в K для всех достаточно малых ε , при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится к одному из краев невырожденных лагун в части спектра оператора $\mathcal{H}_0$, лежащей во множестве K .

Пусть $\theta_i(x, \lambda)$ – решения уравнения

$$\left(-\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q - \lambda \right) v = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.6)$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$\theta_1(0, \lambda) = 1, \quad \frac{d\theta_1}{dx}(0, \lambda) = 0, \quad \theta_2(0, \lambda) = 0, \quad \frac{d\theta_2}{dx}(0, \lambda) = 1, \quad (2.7)$$

где λ – комплексный параметр. Всюду далее для краткости обозначим $\theta_i(\lambda) := \theta_i(1, \lambda)$, $\theta'_i(\lambda) := \frac{d\theta_i}{dx}(1, \lambda)$, $i = 1, 2$. Положим $D(\lambda) := \theta_1(\lambda) + \theta'_2(\lambda)$.

Пусть $\mu_n^\pm$ – один из краев некоторой невырожденной лагуны в спектре оператора $\mathcal{H}_0$. Собственные функции задачи (2.3) выберем вещественными и для

четных n продолжим 1-периодически на всю вещественную ось, для нечетных n продолжим 1-антипериодически. Ясно, что продолженные таким образом функции будут дважды кусочно непрерывно дифференцируемы. Нормируем их следующим образом:

$$|\phi_n^\pm(0)|^2 + \left| \frac{d\phi_n^\pm}{dx}(0) \right|^2 = |\theta'_1(\mu_n^\pm)| + |\theta_2(\mu_n^\pm)|. \quad (2.8)$$

Ниже мы покажем, что правая часть равенства (2.8) не равна нулю (см. утверждение 1) леммы 5.4), а потому данная нормировка имеет смысл.

Пусть $\mathcal{G}_{n,0}^\pm$ – интегральный оператор, определенный на $L_2(Q)$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}_{n,0}^\pm f)(x) &:= \int_{\mathbb{R}} G_{n,0}^\pm(x, t) f(t) dt, \\ G_{n,0}^\pm(x, t) &:= \begin{cases} \frac{1}{2}(\theta_1(t, \mu_n^\pm)\theta_2(x, \mu_n^\pm) - \theta_1(x, \mu_n^\pm)\theta_2(t, \mu_n^\pm)), & t > x, \\ \frac{1}{2}(\theta_1(x, \mu_n^\pm)\theta_2(t, \mu_n^\pm) - \theta_1(t, \mu_n^\pm)\theta_2(x, \mu_n^\pm)), & t < x. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Поскольку $\mathcal{G}_{n,0}^\pm: L_2(Q) \rightarrow W_2^2(Q)$ – ограниченный оператор, то для достаточно малых ε оператор $\mathcal{L}_\varepsilon \mathcal{G}_{n,0}^\pm: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ ограничен равномерно по ε , а потому при достаточно малых ε в пространстве $L_2(Q)$ корректно определен ограниченный оператор

$$\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon, 0) := (I - \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon \mathcal{G}_{n,0}^\pm)^{-1}.$$

Здесь и далее I – единичный оператор. Далее точкой сверху будем обозначать дифференцирование по λ .

ТЕОРЕМА 2.7. Пусть $\mu_n^\pm$ – один из краев некоторой невырожденной лакуны в спектре оператора $\mathcal{H}_0$. Тогда оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ имеет не более одного собственного значения, сходящегося к $\mu_n^\pm$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это собственное значение существует, если

$$\pm \operatorname{Re}(\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon, 0) \mathcal{L}_\varepsilon \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(Q)} > 0, \quad (2.10)$$

и отсутствует, если

$$\pm \operatorname{Re}(\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon, 0) \mathcal{L}_\varepsilon \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(Q)} < 0 \quad (2.11)$$

или

$$(\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon, 0) \mathcal{L}_\varepsilon \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(Q)} = 0. \quad (2.12)$$

Если данное собственное значение существует, то оно является простым и имеет следующее асимптотическое разложение:

$$\lambda_{\varepsilon,n}^\pm = \mu_n^\pm \mp \frac{\varepsilon^2}{4|\dot{D}(\mu_n^\pm)|} (\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon, 0) \mathcal{L}_\varepsilon \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(Q)}^2 (1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)), \quad (2.13)$$

$$\lambda_{\varepsilon,n}^\pm = \mu_n^\pm \mp \varepsilon^2 (k_{n,\varepsilon}^{\pm,1} + \varepsilon k_{n,\varepsilon}^{\pm,2})^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4 |k_{n,\varepsilon}^{\pm,1}| + \varepsilon^5), \quad (2.14)$$

$$k_{n,\varepsilon}^{\pm,1} := \pm \frac{(\mathcal{L}_\varepsilon \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(Q)}}{2\sqrt{|\dot{D}(\mu_n^\pm)|}}, \quad k_{n,\varepsilon}^{\pm,2} := \pm \frac{(\mathcal{L}_\varepsilon \mathcal{G}_{n,0}^\pm \mathcal{L}_\varepsilon \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(Q)}}{2\sqrt{|\dot{D}(\mu_n^\pm)|}}. \quad (2.15)$$

Асимптотическое разложение соответствующей собственной функции имеет вид

$$\psi_{\varepsilon,n}^{\pm} = \phi_n^{\pm} + \varepsilon \mathcal{G}_{n,0}^{\pm} \mathcal{L}_{\varepsilon} \phi_n^{\pm} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.16)$$

в норме $W_2^2(\alpha_1, \alpha_2)$ для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В лемме 5.4 будут приведены формулы для $\dot{D}(\mu_n^{\pm})$, из которых, в частности, следует, что $\dot{D}(\mu_n^{\pm}) \neq 0$, если $\mu_n^{\pm}$ – край невырожденной лакуны.

Из теорем 2.6, 2.7 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть K – произвольный компакт в комплексной плоскости. Тогда при достаточно малых ε каждое из собственных значений оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon}$, лежащих в K для всех достаточно малых ε , является простым.

ТЕОРЕМА 2.8. Пусть $\mu_n^{\pm}$ – один из краев некоторой невырожденной лакуны в спектре оператора $\mathcal{H}_0$. Если

$$\operatorname{Re}(k_{n,\varepsilon}^{\pm,1} + \varepsilon k_{n,\varepsilon}^{\pm,2}) \geq C(\varepsilon)\varepsilon^2, \quad C(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} +\infty, \quad (2.17)$$

то существует собственное значение $\lambda_{\varepsilon,n}^{\pm}$ и верны равенства (2.13), (2.14). Если же

$$\operatorname{Re}(k_{n,\varepsilon}^{\pm,1} + \varepsilon k_{n,\varepsilon}^{\pm,2}) \leq -C(\varepsilon)\varepsilon^2, \quad C(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} +\infty, \quad (2.18)$$

то не существует собственного значения оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon}$, сходящегося к $\mu_n^{\pm}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В работе также получена явная формула для собственной функции $\psi_{\varepsilon,n}^{\pm}$ и описано ее поведение на бесконечности (см. далее (8.4)–(8.6)).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. В частном случае постоянных коэффициентов $p \equiv \text{const}$, $q \equiv \text{const}$ непрерывный спектр оператора $\mathcal{H}_0$ совпадает с полуосью $[q, +\infty)$ и не содержит внутренних лакун. В этом случае единственной невырожденной лакуной в непрерывном спектре является полубесконечная лакуна $(-\infty, q)$, а теоремы 2.6–2.8 описывают поведение собственных значений в окрестности точки $\mu_0^+ = q$.

§ 3. Доказательство теоремы 2.2

В настоящем параграфе мы доказываем теорему 2.1 и первую половину теоремы 2.2.

Положим $B_r(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - a| < r\}$. Для любой пары непустых множеств $M_1, M_2 \subset \mathbb{C}$ обозначим

$$\operatorname{dist}(M_1, M_2) := \inf_{\substack{\lambda_1 \in M_1 \\ \lambda_2 \in M_2}} |\lambda_1 - \lambda_2|.$$

ЛЕММА 3.1. Пусть M – произвольное непустое замкнутое множество в комплексной плоскости такое, что $M \cap \sigma(\mathcal{H}_0) = \emptyset$ и для некоторых $a \in \mathbb{R}$, $\delta \in (0, \pi/2)$, $r > 0$ верно вложение $M \setminus B_r(0) \subset \mathbb{C} \setminus S_{\delta}(a)$. Тогда для всех $f \in L_2(\mathbb{R})$ и $\lambda \in M$ справедлива оценка

$$\|(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1} f\|_{W_2^2(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

где константа C не зависит от $\lambda \in M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$, $\lambda \in M$. Поскольку $\lambda \notin \sigma(\mathcal{H}_0)$, то оператор $(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ ограничен, и согласно [7, гл. V, § 3.5, формула (3.16)] для всех $\lambda \in M$ справедлива оценка

$$\|u\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \frac{\|f\|_{L_2(\mathbb{R})}}{\text{dist}(\lambda, \sigma(\mathcal{H}_0))},$$

где $u := (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}f$. Из неравенства (2.1) и ограниченности функции q следует

$$(pu', u')_{L_2(\mathbb{R})} + (qu, u)_{L_2(\mathbb{R})} - \lambda \|u\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = (f, u)_{L_2(\mathbb{R})},$$

$$\|u'\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq C(1 + |\lambda|)\|u\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 + \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}\|u\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

где константа C не зависит от M . Выражая вторую производную u из уравнения $(\mathcal{H}_0 - \lambda)u = f$, из последних двух неравенств выводим оценку

$$\|(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}f\|_{W_2^2(\mathbb{R})} \leq C \cdot \frac{1 + |\lambda|}{\text{dist}(\lambda, \sigma(\mathcal{H}_0))} \|f\|_{L_2(\mathbb{R})} \quad (3.1)$$

с константой C , не зависящей от M . Если множество M ограничено, то утверждение леммы следует из оценки (3.1). Если множество M неограниченно, то утверждение леммы также следует из оценки (3.1) и очевидного неравенства

$$\sup_{M \cap B_r(0)} \frac{1 + |\lambda|}{\text{dist}(\lambda, \sigma(\mathcal{H}_0))} \leq \sup_{\mathbb{C} \setminus S_\delta(a)} \frac{1 + |\lambda|}{\text{dist}(\lambda, \sigma(\mathcal{H}_0))} < \infty.$$

ЛЕММА 3.2. Оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ замкнут для всех достаточно малых ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $(\mu_0^+ - 1) \notin \sigma(\mathcal{H}_0)$ в силу (2.2), то из леммы 3.1 с $M = \{\mu_0^+ - 1\}$ и равномерной по ε ограниченности оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ выводим:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_\varepsilon v\|_{L_2(\mathbb{R})} &= \|\mathcal{L}_\varepsilon v\|_{L_2(Q)} \leq C\|v\|_{W_2^2(\mathbb{R})} \leq C\|(\mathcal{H}_0 - \mu_0^+ + 1)v\|_{L_2(\mathbb{R})} \\ &\leq C(\|\mathcal{H}_0 v\|_{L_2(\mathbb{R})} + |\mu_0^+ - 1|\|v\|_{L_2(\mathbb{R})}). \end{aligned}$$

Следовательно, оператор $\varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon$ является $\mathcal{H}_0$ -ограниченным, причем при достаточно малых ε его $\mathcal{H}_0$ -граница строго меньше единицы. Отсюда в силу [7, гл. IV, § 1.1, теорема 1.1] вытекает утверждение леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Выберем произвольную пару чисел $a > 0$, $\delta \in (0, \pi/2)$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что при достаточно малых ε имеет место вложение $\sigma(\mathcal{H}_\varepsilon) \subset S_\delta(\mu_0^+ - a)$. В свою очередь, последнее вложение эквивалентно существованию резольвенты оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ для всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus S_\delta(\mu_0^+ - a)$ при достаточно малых ε . Докажем последний факт.

Множество $M := \mathbb{C} \setminus S_\delta(\mu_0^+ - a)$ удовлетворяет условию леммы 3.1, а потому в силу этой леммы и равномерной ограниченности оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ заключаем, что оператор $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}$ ограничен равномерно по ε . Следовательно, при достаточно малых ε оператор $(I - \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1})$ ограниченно обратим для всех $\lambda \in M$. Используя этот факт, теперь легко проверить, что резольвента оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ существует для всех $\lambda \in M$ и задается равенством

$$(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} = (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}(I - \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1})^{-1}. \quad (3.2)$$

Пусть точки x_0, x_1 таковы, что $\overline{Q} \subset (x_0, x_1)$.

ЛЕММА 3.3. *Справедливо равенство $\sigma_c(\mathcal{H}_\varepsilon) = \sigma_c(\mathcal{H}_0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda \in \sigma_c(\mathcal{H}_\varepsilon)$. Согласно определению непрерывного спектра существует последовательность $u_n \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_\varepsilon)$, ограниченная и некомпактная в $L_2(\mathbb{R})$, такая, что $\|f_n\|_{L_2(\mathbb{R})} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$, где $f_n := (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)u_n$. Так как $(\mathcal{H}_\varepsilon - i)u_n = f_n + (\lambda - i)u_n$, то, используя равенство (3.2) с $\lambda = i$ и лемму 3.1, нетрудно убедиться в том, что последовательность u_n ограничена и в норме $W_2^2(\mathbb{R})$. Выделяя при необходимости из u_n подпоследовательность, будем считать, что данная последовательность сходится к некоторой функции $u_* \in W_2^2(\mathbb{R})$ слабо в $W_2^2(\mathbb{R})$ и сильно в $W_2^1(Q)$ для любого отрезка $Q \Subset \mathbb{R}$. Для любой функции $v \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_\varepsilon^*)$ выполнено равенство

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} ((\mathcal{H} - \lambda)u_n, v)_{L_2(\mathbb{R})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} ((u_n, \mathcal{H}^*v)_{L_2(\mathbb{R})} - \lambda(u_n, v)_{L_2(\mathbb{R})}) \\ &= (u_*, \mathcal{H}^*v)_{L_2(\mathbb{R})} - \lambda(u_*, v)_{L_2(\mathbb{R})} = (\mathcal{H}_\varepsilon^*u_* - \lambda u_*, v)_{L_2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Поскольку область определения $\mathcal{D}(\mathcal{H}_\varepsilon^*)$ плотна в $L_2(\mathbb{R})$, то из последних соотношений следует, что $\mathcal{H}_\varepsilon u_* = \lambda u_*$.

Обозначим $\tilde{u}_n := u_n - u_*$. Последовательность $\tilde{u}_n$ некомпактна и ограничена и $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)\tilde{u}_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow +\infty$. Пусть $\chi = \chi(x)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице в отрезке $[x_0, x_1]$ и нулю вне некоторой конечной окрестности данного отрезка. Учитывая перечисленные выше свойства функций $\tilde{u}_n$, легко убедиться, что $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)(\chi\tilde{u}_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Отсюда в силу леммы 3.1 и сходимости $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)\tilde{u}_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$ выводим: $\|\tilde{u}_n\|_{W_2^2(x_0, x_1)} \leq \|\chi\tilde{u}_n\|_{W_2^2(x_0, x_1)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Следовательно, $\mathcal{L}_\varepsilon \tilde{u}_n \rightarrow 0$, $(\mathcal{H}_0 - \lambda)\tilde{u}_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Таким образом, $\lambda \in \sigma_c(\mathcal{H}_\varepsilon)$, и $\sigma_c(\mathcal{H}_\varepsilon) \subseteq \sigma_c(\mathcal{H}_0)$. Обратное включение доказывается аналогично.

§ 4. Доказательство теоремы 2.4

Через $\rho(\lambda)$ и $\varkappa(\lambda)$ обозначим мультипликатор и характеристический показатель уравнения (2.6):

$$\rho(\lambda) := \frac{D(\lambda) + \sqrt{D^2(\lambda) - 4}}{2}, \quad \varkappa(\lambda) := \ln \rho(\lambda). \quad (4.1)$$

Ветвь корня здесь пока не фиксирована. Ветвь логарифма выбирается из условия $\ln 1 = 0$.

Согласно теореме Флоке–Ляпунова уравнение (2.6) имеет фундаментальную систему решений вида

$$\varphi_1(x, \lambda) = e^{\varkappa(\lambda)x} \Phi_1(x, \lambda), \quad \varphi_2(x, \lambda) = e^{-\varkappa(\lambda)x} \Phi_2(x, \lambda),$$

где $\Phi_i(\cdot, \lambda)$ – 1-периодические функции. Данные формулы верны в случае $\rho(\lambda) \neq \pm 1$, а также в случае $\rho(\lambda) = \pm 1$, $|\theta_1(\lambda)|^2 + |\theta'_2(\lambda)|^2 \neq 0$. Если $\rho(\lambda) = \pm 1$, $\theta_1(\lambda) = \theta'_2(\lambda) = 0$, то уравнение (2.6) имеет фундаментальную систему вида

$$\varphi_1(x, \lambda) = e^{\varkappa(\lambda)x} \Phi_1(x, \lambda), \quad \varphi_2(x, \lambda) = e^{\varkappa(\lambda)x} (x\Phi_1(x, \lambda) + \Phi_2(x, \lambda)),$$

где $\Phi_i(\cdot, \lambda)$ – 1-периодические функции.

Через $W[f_1, f_2]$ будем обозначать вронскиан функций $f_1 = f_1(x)$, $f_2 = f_2(x)$.

ЛЕММА 4.1. Для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ функции $\theta_i(x, \lambda)$, $i = 1, 2$, голоморфны по λ в норме пространства $C^2[\alpha_1, \alpha_2]$. Функция $D(\lambda)$ голоморфна. Ветви функции $\rho(\lambda)$ голоморфны во всех точках комплексной плоскости, за исключением краев невырожденных лагун в спектре оператора $\mathcal{H}_0$, которые являются точками ветвления этой функции. Верно равенство

$$W[\theta_1, \theta_2](x) = \frac{1}{p(x)}. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (4.2) следует из начальных условий (2.7) и формулы Лиувилля для вронскиана.

Рассмотрим интегральный оператор

$$(\mathcal{P}(\lambda, \alpha)f)(x) := \int_{\alpha}^x (\theta_1(x, \lambda)\theta_2(t, \lambda) - \theta_1(t, \lambda)\theta_2(x, \lambda))f(t) dt. \quad (4.3)$$

В силу (4.2) данный оператор определяет решение задачи Коши

$$\left(-\frac{d}{dx}p\frac{d}{dx} + q\right)v = f, \quad x \in \mathbb{R}, \quad v(\alpha) = \frac{dv}{dx}(\alpha) = 0.$$

Легко убедиться в том, что для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ линейный оператор

$$\mathcal{P}(\lambda, \alpha): C[\alpha_1, \alpha_2] \rightarrow C^2[\alpha_1, \alpha_2]$$

ограничен для любых $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, а функции $\theta_i(x, \lambda)$ являются решениями уравнений

$$(I - \lambda\mathcal{P}(0, 0))\theta_i(\cdot, \lambda) = \theta_i(\cdot, 0), \quad (4.4)$$

которые мы рассматриваем как уравнения в $C[\alpha_1, \alpha_2]$. Уравнение (4.4) является уравнением Вольтерра, а потому оператор $I - \lambda\mathcal{P}(0, 0)$ ограниченно обратим для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ (см., например, [8, гл. XI, § 3.3]). Отсюда в силу [9, гл. XI, § 4, предложение 4.5] вытекает, что оператор $(I - \lambda\mathcal{P}(0, 0))^{-1}$ ограниченно голоморфен по $\lambda \in \mathbb{C}$ как оператор в $C[\alpha_1, \alpha_2]$. Следовательно, функции $\theta_i(x, \lambda)$ голоморфны по $\lambda \in \mathbb{C}$ в норме пространства $C[\alpha_1, \alpha_2]$. Так как в силу уравнений (4.4) верны соотношения

$$\theta_i(x, \lambda) = \theta_i(x, 0) + \lambda(\mathcal{P}(0, 0)\theta_i(\cdot, \lambda))(x, \lambda),$$

то функции $\theta_i(x, \lambda)$ голоморфны по $\lambda \in \mathbb{C}$ и в норме $C^2[\alpha_1, \alpha_2]$. Голоморфность функции $D(\lambda)$ следует из голоморфности функций $\theta_i(x, \lambda)$. Равенства $D(\lambda)^2 = 4$ выполнены только при $\lambda = \mu_n^{\pm}$ (см. [2, гл. 2, § 2.3, теорема 2.3.1]), а потому только в этих точках функция ρ имеет ветвление. Из п. с) доказательства теоремы 2.3.1 в [2, гл. 2, § 2.3] следует, что если $\mu_n^{\pm}$ – край невырожденной лагуны, то $(D^2 - 4)'|_{\lambda=\mu_n^{\pm}} \neq 0$. Если же лагуна вырожденная ($\mu_n^- = \mu_n^+$), то $(D^2 - 4)'|_{\lambda=\mu_n^{\pm}} = 0$, $(D^2 - 4)''|_{\lambda=\mu_n^{\pm}} \neq 0$. Отсюда следует утверждение леммы о функции ρ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.4. Допустим, что $\lambda \in \sigma_c(\mathcal{H}_0) \cap K$ является собственным значением оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon}$ для некоторого достаточно малого ε . Тогда для соответствующей собственной функции на вещественной оси выполнено уравнение

$$\left(-\frac{d}{dx}p\frac{d}{dx} + q - \lambda - \varepsilon\mathcal{L}_{\varepsilon}\right)\psi = 0. \quad (4.5)$$

При $x \notin Q$ данное уравнение совпадает с уравнением из (2.6). Следовательно, при x , лежащих левее множества Q , функция ψ имеет вид

$$\psi(x) = c_1 \varphi_1(x, \lambda) + c_2 \varphi_2(x, \lambda),$$

где c_i – некоторые константы. Аналогичное поведение верно и при x , лежащих правее множества Q . Так как $\lambda \in \sigma_c(\mathcal{H}_0)$, то в силу п. (v) теоремы 2.3.1 из [2, гл. 2, § 2.3] верно равенство $|\rho(\lambda)| = 1$, а потому $\operatorname{Re} \kappa(\lambda) = 0$. Отсюда вытекает, что функции $\varphi_i(x, \lambda)$ не интегрируемы с квадратом на бесконечности. Следовательно, функция ψ будет элементом $L_2(\mathbb{R})$ только в случае

$$\psi \equiv 0, \quad x \notin Q. \quad (4.6)$$

Поскольку $\psi \in W_2^2(\mathbb{R}) \subset C^1(\mathbb{R})$, то

$$\psi(x_0) = \psi'(x_0) = 0. \quad (4.7)$$

Напомним, что точки x_0, x_1 таковы, что $\overline{Q} \subset (x_0, x_1)$. В силу определения (4.3) оператора $\mathcal{P}$ начальная задача (4.5), (4.7) эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$(I - \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon \mathcal{P}(\lambda, x_0))\psi = 0. \quad (4.8)$$

Интегральный оператор $\mathcal{P}$ является линейным ограниченным оператором из $L_2(Q)$ в $W_2^2(Q)$. Более того, в силу леммы 4.1 он ограничен равномерно по $\lambda \in K$. Отсюда и из равномерной по ε ограниченности оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ теперь следует, что оператор $\mathcal{L}_\varepsilon \mathcal{P}(\lambda, x_0): L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ ограничен равномерно по ε и $\lambda \in K$. Следовательно, при достаточно малых ε и $\lambda \in K$ оператор $(I - \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon \mathcal{P}(\lambda, x_0))$ ограниченно обратим, а потому уравнение (4.8) имеет только тривиальное решение. Следовательно, $\psi \equiv 0$ при $x \in Q$. С учетом (4.6) отсюда следует, что функция ψ тождественно равна нулю, но это противоречит исходному предположению о том, что она является собственной функцией.

§ 5. Доказательство теорем 2.2, 2.3, 2.6

Рассмотрим уравнение

$$\left(-\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q - \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon - \lambda \right) u = f, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.1)$$

где $f \in L_2(\mathbb{R}; (x_0, x_1))$, $L_2(\mathbb{R}; (x_0, x_1))$ – подмножество функций из $L_2(\mathbb{R})$ с носителями в $[x_0, x_1]$. Будем искать решения этого уравнения, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} u(x, \lambda) &= e^{-\kappa(\lambda)x} \Phi_+(x, \lambda), & x \geq x_1, \\ u(x, \lambda) &= e^{\kappa(\lambda)x} \Phi_-(x, \lambda), & x \leq x_0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $\Phi_\pm$ – 1-периодические по x функции. Ветвь функции ρ здесь пока не фиксирована. Мы изучим зависимость решения задачи (5.1), (5.2) от λ , что позволит нам доказать теоремы 2.3, 2.6. Для решения задачи (5.1), (5.2) мы воспользуемся схемой, предложенной в [9, гл. XIV, § 4].

Положим

$$G(x, t, \lambda) := \frac{1}{\rho(\lambda) - \rho^{-1}(\lambda)} \left(\theta_2(\lambda) \theta_1(t, \lambda) \theta_1(x, \lambda) - (\rho(\lambda) - \theta'_2(\lambda)) \theta_2(t, \lambda) \theta_1(x, \lambda) \right. \\ \left. + (\rho(\lambda) - \theta_1(\lambda)) \theta_1(t, \lambda) \theta_2(x, \lambda) - \theta'_1(\lambda) \theta_2(t, \lambda) \theta_2(x, \lambda) \right), \quad t \geq x, \\ G(x, t, \lambda) := \frac{1}{\rho(\lambda) - \rho^{-1}(\lambda)} \left(\theta_2(\lambda) \theta_1(t, \lambda) \theta_2(x, \lambda) - (\rho(\lambda) - \theta'_2(\lambda)) \theta_1(t, \lambda) \theta_2(x, \lambda) \right. \\ \left. + (\rho(\lambda) - \theta_1(\lambda)) \theta_2(t, \lambda) \theta_1(x, \lambda) - \theta'_1(\lambda) \theta_2(t, \lambda) \theta_2(x, \lambda) \right), \quad x \geq t.$$

Функция $G(x, t, \lambda)$ определена корректно для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, кроме краев невырожденных лакун в спектре оператора $\mathcal{H}_0$. В самом деле, если $\lambda \neq \mu_n^\pm$, то $\rho^2(\lambda) \neq 1$ (см. [2, гл. 2, § 2.3, теорема 2.3.1]), а потому $\rho(\lambda) \neq \rho^{-1}(\lambda)$. Если лакуна вырождена ($\mu_n^- = \mu_n^+$), то в силу п. с) доказательства теоремы 2.3.1 в [2, гл. 2, § 2.3] при $\lambda \rightarrow \mu := \mu_n^- = \mu_n^+$ выполнены равенства

$$D(\lambda) = (-1)^n (2 - \gamma(\lambda - \mu)^2) + \mathcal{O}(|\lambda - \mu|^3), \\ \rho(\lambda) = (-1)^n (1 \pm i\sqrt{\gamma}(\lambda - \mu)) + \mathcal{O}(|\lambda - \mu|^2), \\ \theta_1(\lambda) = (-1)^n + \dot{\theta}_1(\mu)(\lambda - \mu) + \mathcal{O}(|\lambda - \mu|^2), \\ \theta_2(\lambda) = \dot{\theta}_2(\mu)(\lambda - \mu) + \mathcal{O}(|\lambda - \mu|^2), \\ \theta'_1(\lambda) = \dot{\theta}'_1(\mu)(\lambda - \mu) + \mathcal{O}(|\lambda - \mu|^2), \quad (5.3)$$

где $\gamma > 0$ – некоторая константа. Знаки $+$ и $-$ в равенстве для $\rho(\lambda)$ соответствуют различным ветвям этой функции. Из этих равенств следует, что существует конечный предел функции G при $\lambda \rightarrow \mu$, который мы примем за определение этой функции при $\lambda = \mu$.

На функциях $f \in L_2(\mathbb{R}; (x_0, x_1))$ определим оператор $\mathcal{G}(\lambda)$ с ядром $G(x, t, \lambda)$:

$$(\mathcal{G}(\lambda)f)(x, \lambda) := \int_{\mathbb{R}} G(x, t, \lambda) f(t) dt.$$

Ясно, что он ограничен как оператор из $L_2(x_0, x_1)$ в $W_2^2(x_0, x_1)$ для всех значений λ , не совпадающих с краями невырожденных лакун в спектре оператора $\mathcal{H}_0$.

Прямыми вычислениями с учетом определения функций $\rho(\lambda)$ и $D(\lambda)$ проверяется, что функция G является функцией Грина для уравнения

$$\left(-\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q - \lambda \right) v = f, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.4)$$

и функция $v := \mathcal{G}(\lambda)f$, где $f \in L_2(\mathbb{R}; (x_0, x_1))$, является решением этого уравнения.

Учитывая начальные условия (2.7) и периодичность функций p и q , нетрудно проверить, что

$$\theta_i(x+1, \lambda) = \theta_i(1, \lambda) \theta_1(x, \lambda) + \theta'_i(1, \lambda) \theta_2(x, \lambda), \quad i = 1, 2. \quad (5.5)$$

Используя это соотношение, равенства (4.2) и формулу

$$\rho(\lambda) + \frac{1}{\rho(\lambda)} = \theta_1(\lambda) + \theta'_2(\lambda), \quad (5.6)$$

вытекающую из (4.1), легко убедиться в том, что функция v удовлетворяет равенствам

$$v(x+1, \lambda) = \frac{1}{\rho(\lambda)} v(x, \lambda), \quad x \geq x_1, \quad v(x-1, \lambda) = \frac{1}{\rho(\lambda)} v(x, \lambda), \quad x \leq x_0, \quad (5.7)$$

откуда следует, что функция v удовлетворяет условиям (5.2).

Пусть

$$\mathcal{H}_0^{(0)} := -\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q$$

– оператор в $L_2(x_0, x_1)$ с областью определения, состоящей из функций из $W_2^2(x_0, x_1)$, обращающихся в нуль в точках x_0, x_1 . Ясно, что данный оператор самосопряжен.

Пусть $\mathcal{H}_\varepsilon^{(0)} := \mathcal{H}_0^{(0)} - \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon$ – оператор в $L_2(x_0, x_1)$, область определения которого совпадает с областью определения оператора $\mathcal{H}_0^{(0)}$. Здесь оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ определяется в пространстве $L_2(x_0, x_1)$ по той же схеме, которая была использована при определении этого оператора в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Аналогично доказательству леммы 3.2 нетрудно проверить, что оператор $\mathcal{H}_\varepsilon^{(0)}$ замкнут для достаточно малых ε .

ЛЕММА 5.1. *Оператор $(\mathcal{H}_\varepsilon^{(0)} - i)^{-1} : L_2(x_0, x_1) \rightarrow W_2^1(x_0, x_1)$ ограничен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как оператор $\mathcal{H}_0^{(0)}$ самосопряжен, то $\sigma(\mathcal{H}_0^{(0)}) \subset \mathbb{R}$. Следовательно, оператор $(\mathcal{H}_0^{(0)} - i)^{-1}$ ограничен как оператор в $L_2(x_0, x_1)$. Используя этот факт, аналогично доказательству леммы 3.1 нетрудно проверить, что оператор $(\mathcal{H}_0^{(0)} - i)^{-1} : L_2(x_0, x_1) \rightarrow W_2^2(x_0, x_1)$ также ограничен. Теперь получаем, что при достаточно малых ε оператор $(I - \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon (\mathcal{H}_0^{(0)} - i)^{-1})^{-1} : L_2(x_0, x_1) \rightarrow L_2(x_0, x_1)$ ограничен. Для завершения доказательства осталось отметить, что

$$(\mathcal{H}_\varepsilon^{(0)} - i)^{-1} = (\mathcal{H}_0^{(0)} - i)^{-1} (I - \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon (\mathcal{H}_0^{(0)} - i)^{-1})^{-1}.$$

Пусть $\zeta = \zeta(x)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная нулю при $x \notin [x_0, x_1]$ и единице в некоторой окрестности отрезка $\overline{Q}$, а $g \in L_2(\mathbb{R}; (x_0, x_1))$ – произвольная функция. Обозначим

$$v := \mathcal{G}(\lambda)g, \quad w_\varepsilon := (\mathcal{H}_\varepsilon^{(0)} - i)^{-1} \mathcal{L}_\varepsilon v. \quad (5.8)$$

Из леммы 5.1 следует, что оператор $(\mathcal{H}_\varepsilon^{(0)} - i)^{-1} \mathcal{L}_\varepsilon$ ограничен равномерно по ε как оператор в $W_2^2(x_0, x_1)$. Решение задачи (5.1), (5.2) будем искать в виде

$$u(x, \lambda) := v(x, \lambda) + \varepsilon \zeta(x) w_\varepsilon(x, \lambda). \quad (5.9)$$

Эта функция удовлетворяет соотношениям (5.2). Подставим ее в левую часть уравнения (5.1); тогда получим

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q - \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon - \lambda \right) (v + \varepsilon \zeta w_\varepsilon) = g - \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon v + \varepsilon \mathcal{T}_\varepsilon(\lambda)g \\ & + \varepsilon \zeta \left(-\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q - \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon - i \right) w_\varepsilon = g + \mathcal{T}_\varepsilon(\lambda)g, \\ & \mathcal{T}_\varepsilon(\lambda)g := -\frac{d}{dx} p w_\varepsilon \frac{d\zeta}{dx} - p \frac{d\zeta}{dx} \frac{dw_\varepsilon}{dx} + (i - \lambda) \zeta w_\varepsilon. \end{aligned}$$

Здесь мы также воспользовались равенством $\mathcal{L}_\varepsilon \zeta w_\varepsilon = \mathcal{L}_\varepsilon w_\varepsilon = \zeta \mathcal{L}_\varepsilon w_\varepsilon$, которое вытекает из тождества $\zeta \equiv 1$, $x \in \overline{Q}$. Следовательно, функция u , определенная формулой (5.9), будет решением уравнения (5.1), если

$$g + \varepsilon \mathcal{T}_\varepsilon(\lambda)g = f. \quad (5.10)$$

ЛЕММА 5.2. *Задача (5.1), (5.2) эквивалентна уравнению (5.10) для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, не совпадающих с краями невырожденных лакун в спектре оператора $\mathcal{H}_0$. А именно, для каждого решения уравнения (5.10) существует единственное решение задачи (5.1), (5.2), определяемое формулами (5.8), (5.9). Для каждого решения u задачи (5.1), (5.2) существует единственная функция g , удовлетворяющая уравнению (5.10) и связанная с решением u равенствами (5.8), (5.9).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если g – решение уравнения (5.10), то, как было показано выше, функция u , определенная формулами (5.8), (5.9), является решением задачи (5.1), (5.2).

Пусть u – решение задачи (5.1), (5.2). Определим функции v , w_ε и g следующим образом:

$$w_\varepsilon := (\mathcal{H}_0^{(0)} - i)^{-1} \mathcal{L}_\varepsilon u, \quad v := u - \varepsilon \zeta w_\varepsilon, \quad g := \left(-\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q - \lambda \right) v.$$

Функция v удовлетворяет соотношениям (5.2), а потому выполнена первая из формул (5.8). Равенство (5.9), очевидно, также выполнено. Так как

$$(\mathcal{H}_0^{(0)} - \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon - i)w_\varepsilon = \mathcal{L}_\varepsilon u - \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon w_\varepsilon = \mathcal{L}_\varepsilon (u - \varepsilon \zeta w_\varepsilon) = \mathcal{L}_\varepsilon v,$$

то верна и вторая из формул (5.8). Из определения функций g и v и уравнения (5.1) вытекает, что

$$\begin{aligned} g &= \left(-\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q - \lambda \right) (u - \varepsilon \zeta w_\varepsilon) = f + \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon u - \varepsilon \mathcal{T}_\varepsilon(\lambda)g - \varepsilon \zeta (\mathcal{H}_0^{(0)} - i)w_\varepsilon \\ &= f + \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon u - \varepsilon \mathcal{T}_\varepsilon(\lambda)g - \varepsilon \zeta \mathcal{L}_\varepsilon u = f - \varepsilon \mathcal{T}_\varepsilon(\lambda)g, \end{aligned}$$

откуда следует уравнение (5.10).

Из свойств операторов $\mathcal{G}$ и $(\mathcal{H}_\varepsilon^{(0)} - i)^{-1} \mathcal{L}_\varepsilon$, установленных выше, выводим, что отображение $g \mapsto w_\varepsilon$ является линейным оператором из $L_2(x_0, x_1)$ в $W_2^1(x_0, x_1)$, ограниченным равномерно по ε . Следовательно, оператор $\mathcal{T}_\varepsilon(\lambda): L_2(x_0, x_1) \rightarrow W_2^1(x_0, x_1)$ ограничен равномерно по ε . Более того, отсюда вытекает, что оператор $\mathcal{T}_\varepsilon$ компактен как оператор в $L_2(x_0, x_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Равенство $\sigma_c(\mathcal{H}_\varepsilon) = \sigma_c(\mathcal{H}_0)$ было доказано в лемме 3.3. С учетом определения остаточного спектра достаточно показать, что $\sigma_p(\mathcal{H}_\varepsilon) \cup \sigma_c(\mathcal{H}_\varepsilon) = \sigma(\mathcal{H}_\varepsilon)$. Пусть $\lambda \notin \sigma_p(\mathcal{H}_\varepsilon) \cup \sigma_c(\mathcal{H}_\varepsilon)$. Покажем, что в этом случае существует резольвента $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1}$, что будет означать $\lambda \notin \sigma(\mathcal{H}_\varepsilon)$.

Так как $\lambda \notin \sigma_c(\mathcal{H}_\varepsilon) = \sigma_c(\mathcal{H}_0) = \sigma(\mathcal{H}_0)$, то определена резольвента $(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}$. Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$. Решение уравнения $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)u = f$ будем искать в виде $u = \tilde{u} + (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}f$. Уравнение для функции $\tilde{u}$ имеет вид

$$(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)\tilde{u} = \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}f. \quad (5.11)$$

Из определения оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ следует, что $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}$ – ограниченный оператор в $L_2(\mathbb{R})$ и $\text{supp } \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}f \subseteq [x_0, x_1]$. Ясно, что уравнение (5.11) можно переписать в виде краевой задачи (5.1), (5.2) с правой частью $\varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}f$ в уравнении. При этом ветвь функции $\rho(\lambda)$ следует выбирать из условия $\text{Re } \varkappa(\lambda) > 0$. В силу леммы 5.2 теперь заключаем, что уравнение (5.11) эквивалентно уравнению (5.10) с правой частью $\varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}f$. Допустим, что оператор $(I + \varepsilon \mathcal{T}_\varepsilon(\lambda))$ необратим. В этом случае уравнение (5.10) с нулевой правой частью имеет нетривиальное решение, что означает наличие нетривиального решения уравнения $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)u_\varepsilon = 0$. В этом случае $\lambda \in \sigma_p(\mathcal{H}_\varepsilon)$, что невозможно по условию. Следовательно, уравнение (5.10) с правой частью $\varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}f$ однозначно разрешимо и, как следствие, то же верно и для уравнения (5.11). Следовательно, в точке λ существует резольвента $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.6. Для произвольного $\delta > 0$ положим

$$K_\delta := K \setminus \bigcup_n (B_\delta(\mu_n^-) \cup B_\delta(\mu_n^+)),$$

где объединение берется по краям невырожденных лакун в спектре оператора $\mathcal{H}_0$. Для $\lambda \in K_\delta$ выберем ветвь корня в определении (4.1) функции ρ из условия $|\rho(\lambda)| \geq 1$; в случае $|\rho(\lambda)| = 1$ конкретный выбор ветви неважен. Тогда оператор $\mathcal{G}(\lambda)$ кусочно непрерывен по $\lambda \in K_\delta$. Следовательно, оператор $\mathcal{T}_\varepsilon(\lambda)$ ограничен равномерно по ε и $\lambda \in K_\delta$ как оператор в $L_2(x_0, x_1)$. Отсюда выводим, что при малых ε оператор $I + \varepsilon \mathcal{T}_\varepsilon(\lambda)$ ограниченно обратим при всех $\lambda \in K_\delta$, а потому уравнение

$$g + \varepsilon \mathcal{T}_\varepsilon(\lambda)g = 0 \quad (5.12)$$

не имеет нетривиальных решений при $\lambda \in K_\delta$ и малых ε . В силу леммы 5.2 отсюда вытекает, что задача (4.5), (5.2) не имеет нетривиальных решений. Так как $\text{Re } \varkappa(\lambda) \geq 0$, $\lambda \in K_\delta$, в силу выбора ветви ρ , то уравнение (4.5) не имеет нетривиальных решений в пространстве $W_2^2(\mathbb{R})$. Таким образом, оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ не имеет собственных значений в множестве K_δ , если ε достаточно мало. Данный факт и произвольный выбор δ завершают доказательство теоремы.

ЛЕММА 5.3. *Точечный спектр оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ состоит из не более чем счетного числа собственных значений. Конечными точками накопления этих собственных значений могут быть только края невырожденных лакун в спектре оператора $\mathcal{H}_0$. Каждое собственное значение, не совпадающее с таким краем, имеет конечную кратность.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного $\delta > 0$ обозначим

$$M := \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Im } \lambda \geq 0\} \setminus \bigcup_n (B_\delta(\mu_n^-) \cup B_\delta(\mu_n^+)).$$

Здесь объединение берется только по n , соответствующим краям невырожденных лакун в спектре оператора $\mathcal{H}_0$. Из утверждения леммы 4.1 о функции ρ следует, что множество M можно покрыть следующим образом:

$$M \subset \widetilde{M} := \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j,$$

где M_j – односвязные области такие, что $M_j \setminus S_{\pi/4}(\mu_0^+ - 1) \neq \emptyset$, и для каждой из них можно выбрать ветвь функции ρ так, что эта функция будет голоморфна по $\lambda \in M_j$, удовлетворяя при этом оценке $|\rho(\lambda)| \geq 1$ при $\text{Im } \lambda \geq 0$. Из леммы 4.1 и (5.3) теперь следует, что оператор $\mathcal{G}(\lambda): L_2(x_0, x_1) \rightarrow W_2^2(x_0, x_1)$ голоморфен по $\lambda \in M_j$. Отсюда и из установленных выше свойств оператора $(\mathcal{H}_\varepsilon^{(0)} - i)^{-1} \mathcal{L}_\varepsilon$ вытекает, что оператор $\mathcal{T}_\varepsilon(\lambda)$ голоморфен по $\lambda \in M_j$ как оператор в $L_2(x_0, x_1)$.

Пусть $\lambda \in M$ – собственное значение оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$; тогда $\lambda \in M_j$ для некоторого j . Соответствующая собственная функция является решением задачи (4.5), (5.2), где характеристический показатель $\varkappa$ определяется через ветвь ρ , соответствующую M_j . В силу леммы 5.2 это означает, что соответствующее уравнение (5.12) имеет нетривиальное решение. Из компактности оператора $\mathcal{T}_\varepsilon(\lambda)$ следует, что число таких линейно независимых решений конечно, а потому λ – собственное значение конечной кратности. Так как $M_j \setminus S_{\pi/4}(\mu_0^+) \neq \emptyset$, то согласно теореме 2.1 существует точка $\lambda_* \in M_j \setminus \sigma(\mathcal{H}_\varepsilon)$. Следовательно, уравнение (5.12) с $\lambda = \lambda_*$ не имеет нетривиальных решений, что вместе с компактностью оператора $\mathcal{T}_\varepsilon(\lambda_*)$ означает ограниченную обратимость оператора $I + \varepsilon \mathcal{T}_\varepsilon(\lambda_*)$. Этот факт и установленная выше голоморфность оператора $\mathcal{T}_\varepsilon$ по $\lambda \in M_j$ позволяют применить теорему 7.1 из [9, гл. XV, § 7], согласно которой оператор $(I + \varepsilon \mathcal{T}_\varepsilon)^{-1}$ мероморфен по $\lambda \in M_j$ и имеет в M_j не более чем счетное число полюсов, которые могут накапливаться только в граничных точках множества M_j . Кроме того, полюсами оператора $(I + \varepsilon \mathcal{T}_\varepsilon)^{-1}$ являются те значения λ , при которых уравнение (5.12) имеет нетривиальные решения. Следовательно, собственные значения оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, лежащие в множестве $M_j \cap \{\lambda \in \mathbb{C}: \text{Im } \lambda \geq 0\}$, являются полюсами оператора $(I + \varepsilon \mathcal{T}_\varepsilon)^{-1}$, соответствующего M_j . Таким образом, оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ имеет счетное число собственных значений, лежащих в множестве M . Точки множества M не могут быть точками накопления этих собственных значений, так как каждая такая точка является внутренней точкой одного из множеств M_j .

Аналогично доказывается, что множество, полученное из M зеркальным отображением относительно вещественной оси, содержит не более чем счетное число собственных значений оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, которые не имеют в этом множестве точек накопления и являются собственными значениями конечной кратности. Учитывая теперь произвольный выбор δ , приходим к утверждению леммы.

С учетом леммы 5.3 для завершения доказательства теоремы 2.3 осталось лишь показать, что края невырожденных лакун в спектре оператора $\mathcal{H}_0$ не могут быть точками накопления собственных значений оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$. Также необходимо проверить, что если такой край является собственным значением оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, то его кратность конечна. Мы докажем эти утверждения на основе анализа уравнения, аналогичного (5.10). Использовать непосредственно это уравнение нельзя, так как функция ρ имеет ветвление в точках $\mu_n^\pm$, а потому оператор $\mathcal{T}_\varepsilon$ не голоморфен в этих точках. Сначала докажем вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 5.4. Пусть $\mu_n^\pm$ – один из краев некоторой невырожденной лакуны в спектре оператора $\mathcal{H}_0$. Тогда:

1) по крайней мере одно из чисел $\theta_1'(\mu_n^+)$ и $\theta_2(\mu_n^+)$ (соответственно, $\theta_1'(\mu_n^-)$ и $\theta_2(\mu_n^-)$) не равно нулю и выполнено неравенство $\theta_1'(\mu_n^\pm)\theta_2(\mu_n^\pm) \leq 0$;

- 2) $D(\mu_n^\pm) = 2(-1)^n, \mp(-1)^n \dot{D}(\mu_n^\pm) > 0$;
 3) числа $\dot{D}(\mu_n^\pm)$ определяются равенством

$$\dot{D}(\mu_n^\pm) = \int_0^1 \left(\theta_1'(\mu_n^\pm) \theta_2^2(x, \mu_n^\pm) + (\theta_1(\mu_n^\pm) - \theta_2'(\mu_n^\pm)) \theta_1(x, \mu_n^\pm) \theta_2(x, \mu_n^\pm) - \theta_2(\mu_n^\pm) \theta_1^2(x, \mu_n^\pm) \right)^2 dx;$$

кроме того,

$$\dot{D}(\mu_n^\pm) = -\frac{1}{4\theta_2'(\mu_n^\pm)} \int_0^1 \left(2\theta_2(\mu_n^\pm) \theta_1(x, \mu_n^\pm) + (\theta_1(\mu_n^\pm) - \theta_2'(\mu_n^\pm)) \theta_2(x, \mu_n^\pm) \right)^2 dx,$$

если $\theta_2(\mu_n^\pm) \neq 0$, и

$$\dot{D}(\mu_n^\pm) = \frac{1}{4\theta_1'(\mu_n^\pm)} \int_0^1 \left(2\theta_1'(\mu_n^\pm) \theta_2(x, \mu_n^\pm) + (\theta_1(\mu_n^\pm) - \theta_2'(\mu_n^\pm)) \theta_1(x, \mu_n^\pm) \right)^2 dx,$$

если $\theta_1'(\mu_n^\pm) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы следует из теоремы 2.3.1 в [2, гл. 2, § 2.3], а также из формулы (2.3.7) и равенства $D^2(\lambda) = 4 + (\theta_1(\lambda) - \theta_2'(\lambda))^2 + 4\theta_1'(\lambda)\theta_2(\lambda)$, установленных в доказательстве этой теоремы.

Пусть $\mu_n^\pm$ — один из краев некоторой невырожденной лакуны в спектре оператора $\mathcal{H}_0$. В малой окрестности $\mu_n^\pm$ вместо λ мы введем новый комплексный параметр по правилу $\lambda := \mu_n^\pm \mp k^2$. Обозначим

$$\rho_n^\pm = \rho_n^\pm(k) := \frac{D(\mu_n^\pm \mp k^2) + (-1)^n \sqrt{D^2(\mu_n^\pm \mp k^2) - 4}}{2}, \quad (5.13)$$

где ветвь корня выбирается из условия $\sqrt{1} = 1$, если $\arg k \in [0, \pi)$, и условия $\sqrt{1} = -1$, если $\arg k \in [\pi, 2\pi)$. В силу утверждения 2) леммы 5.4 при малых k верны равенства

$$\begin{aligned} D(\mu_n^\pm \mp k^2) &= (-1)^n (2 + |\dot{D}(\mu_n^\pm)| k^2) + \mathcal{O}(|k|^4), \\ D^2(\mu_n^\pm \mp k^2) - 4 &= 4|\dot{D}(\mu_n^\pm)| k^2 + \mathcal{O}(|k|^4). \end{aligned}$$

Следовательно, функция $\rho_n^\pm$ голоморфна по k , причем первые члены ее разложения в ряд Тейлора имеют вид

$$\rho_n^\pm(k) = (-1)^n \left(1 + \sqrt{|\dot{D}(\mu_n^\pm)|} k + \frac{1}{2} |\dot{D}(\mu_n^\pm)| k^2 \right) + \mathcal{O}(|k|^3). \quad (5.14)$$

Положим

$$\varkappa_n = \varkappa_n^\pm(k) := \begin{cases} \ln \rho_n^\pm(k), & \text{если } n \text{ четно,} \\ \ln \rho_n^\pm(k) - \pi i, & \text{если } n \text{ нечетно,} \end{cases}$$

где ветвь логарифма выбирается из условия $\ln 1 = 0$. При малых k функция $\varkappa_n^\pm(k)$ голоморфна по k и верно равенство

$$\varkappa_n^\pm(k) = \sqrt{|\dot{D}(\mu_n^\pm)|} k + \mathcal{O}(|k|^2). \quad (5.15)$$

Рассмотрим уравнение (5.1) с $\lambda = \mu_n^\pm \mp k^2$ и будем искать решения этого уравнения, удовлетворяющие условиям

$$u(x, \lambda) = \begin{cases} e^{-\kappa_n^\pm(k)x} \Phi_{n,+}^\pm(x, k), & x \geq x_1, \\ e^{\kappa_n^\pm(k)x} \Phi_{n,-}^\pm(x, k), & x \leq x_0, \end{cases} \quad (5.16)$$

где $\Phi_{n,\pm}^\pm$ – 1-периодические по x функции. Для решения этой задачи мы вновь воспользуемся схемой из [9, гл. XIV, § 4]. Основным отличием от рассмотренного выше случая здесь является то, что аналог функции v из (5.8) определяется более сложным способом, что позволяет избежать в итоге особенностей в точке $k = 0$ аналога оператора $\mathcal{T}_\varepsilon$ в (5.10). Для определения аналога функции v мы предварительно введем дополнительные обозначения.

Обозначим $\tau_n^\pm := \pm(-1)^n$. Положим

$$\begin{aligned} \varphi_{n,1}^\pm(x, k) &:= \sqrt{\tau_n^\pm \theta_2(\lambda)} \left(\theta_1(x, \lambda) + \frac{\rho_n^\pm(k) - \theta_1(\lambda)}{\theta_2(\lambda)} \theta_2(x, \lambda) \right), \\ \varphi_{n,2}^\pm(x, k) &:= \sqrt{\tau_n^\pm \theta_2(\lambda)} \left(\theta_1(x, \lambda) + \frac{(\rho_n^\pm(k))^{-1} - \theta_1(\lambda)}{\theta_2(\lambda)} \theta_2(x, \lambda) \right), \end{aligned} \quad (5.17)$$

если $\theta_2(\mu_n^\pm) \neq 0$, и

$$\begin{aligned} \varphi_{n,1}^\pm(x, k) &:= \sqrt{-\tau_n^\pm \theta'_1(\lambda)} \left(\frac{\rho_n^\pm(k) - \theta'_2(\lambda)}{\theta'_1(\lambda)} \theta_1(x, \lambda) + \theta_2(x, \lambda) \right), \\ \varphi_{n,2}^\pm(x, k) &:= \sqrt{-\tau_n^\pm \theta'_1(\lambda)} \left(\frac{(\rho_n^\pm(k))^{-1} - \theta'_2(\lambda)}{\theta'_1(\lambda)} \theta_1(x, \lambda) + \theta_2(x, \lambda) \right), \end{aligned} \quad (5.18)$$

если $\theta_2(\mu_n^\pm) = 0$. Всюду в этих формулах через λ обозначена сумма $\mu_n^\pm \mp k^2$. Из утверждения 1) леммы 5.4 следует, что функции $\varphi_{n,i}^\pm$ определены корректно.

Аналогично (5.5)–(5.7) нетрудно проверить, что функции $\varphi_{n,i}^\pm$ представимы в виде

$$\varphi_{n,1}^\pm(x, k) = e^{\kappa_n^\pm(k)x} \Phi_{n,1}^\pm(x, k), \quad \varphi_{n,2}^\pm(x, k) = e^{-\kappa_n^\pm(k)x} \Phi_{n,2}^\pm(x, k), \quad (5.19)$$

где $\Phi_{n,i}^\pm(x, k)$ – 1-периодические по x функции для четных n и 1-антипериодические для нечетных n . Из леммы 4.1 и 1-(анти)периодичности функций $\Phi_{n,i}^\pm$ следует, что для достаточно малых k эти функции голоморфны по k в норме пространства $C^2[\alpha_1, \alpha_2]$ для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Так как функции $\theta_i(x, \mu_n^\pm)$ вещественны, то из утверждений 2), 3) леммы 5.4 следует, что

$$\begin{aligned} \text{sign } \theta_2(\mu_n^\pm) &= \pm(-1)^n, \quad \text{если } \theta_2(\mu_n^\pm) \neq 0, \\ -\text{sign } \theta'_1(\mu_n^\pm) &= \pm(-1)^n, \quad \text{если } \theta'_1(\mu_n^\pm) \neq 0. \end{aligned}$$

Учитывая эти соотношения, голоморфность функций $\Phi_{n,i}^\pm$ и соотношения (5.6), (4.2), (5.14), (5.15), нетрудно убедиться в том, что

$$\varphi_{n,i}^\pm(x, 0) = \phi_n^\pm(x), \quad i = 1, 2, \quad (5.20)$$

где $\phi_n^\pm$ – собственные функции задач (2.3), соответствующие $\mu_n^\pm$ и удовлетворяющие нормирующему условию (2.8). Правая часть этого условия не равна

нулю в силу утверждения 1) леммы 5.4. Так как функция $\phi_n^\pm$ не равна тождественно нулю, то существует точка $x_2 \notin \overline{Q}$ такая, что $\phi_n^\pm(x_2) \neq 0$. Точка x_2 , разумеется, зависит от n и от выбора конкретного края лакуны. Увеличивая при необходимости интервал (x_0, x_1) , мы можем считать, что $x_2 \in (x_0, x_1)$ и $\zeta \equiv 1$ в некоторой окрестности точки x_2 .

На функциях $f \in L_2(\mathbb{R}; (x_0, x_1))$ определим операторы

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{n,+}^\pm(k)f &:= \mathcal{P}(\lambda, +\infty)f - \frac{(\mathcal{P}(\lambda, +\infty)f)(x_2, k)}{\varphi_{n,2}^\pm(x_2, k)}\varphi_{n,2}^\pm(\cdot, k), \\ \mathcal{G}_{n,-}^\pm(k)f &:= \mathcal{P}(\lambda, -\infty)f - \frac{(\mathcal{P}(\lambda, -\infty)f)(x_2, k)}{\varphi_{n,1}^\pm(x_2, k)}\varphi_{n,1}^\pm(\cdot, k),\end{aligned}$$

где $\lambda = \mu_n^\pm \mp k^2$, а $\mathcal{P}$, напомним, оператор из (4.3). Всюду до конца параграфа для краткости мы не будем выписывать в обозначениях индекс $\pm$, обозначающий конкретный выбор края лакуны.

В силу леммы 4.1, равенства (5.20) и предположения $\phi_n^\pm(x_2) \neq 0$ операторы $\mathcal{G}_{n,\pm}^\pm$ голоморфны по малым k как операторы из $L_2(\mathbb{R}; (x_0, x_1))$ в $W_2^2(x_0, x_1)$. Пусть $g \in L_2(\mathbb{R}; (x_0, x_1))$ – произвольная функция. Нетрудно проверить, что функции

$$v_+ := \mathcal{G}_{n,+}(k)g, \quad v_- := \mathcal{G}_{n,-}(k)g$$

являются решениями уравнения (5.4) с $\lambda = \mu_n^\pm \mp k^2$ и обращаются в нуль в точке x_2 . Кроме того, функция v_+ удовлетворяет первому из соотношений (5.16), а функция v_- – второму.

Введем в рассмотрение функцию $v(x, k) := v_-(x, k)$ при $x < x_2$, $v(x, k) := v_+(x, k)$ при $x > x_2$. Пусть w_ε – решение краевой задачи

$$\begin{aligned}\left(-\frac{d}{dx}p\frac{d}{dx} + q - \varepsilon\mathcal{L}_\varepsilon - i\right)w_\varepsilon &= h, \quad x \in (x_0, x_1), \quad w_\varepsilon = v, \quad x = x_0, x_1, \\ h &:= \begin{cases} \left(-\frac{d}{dx}p\frac{d}{dx} + q - i\right)v_-, & x < x_2, \\ \left(-\frac{d}{dx}p\frac{d}{dx} + q - i\right)v_+, & x > x_2. \end{cases}\end{aligned}\tag{5.21}$$

Функция h является элементом пространства $L_2(x_0, x_1)$. Задача (5.21) однозначно разрешима в $W_2^2(x_0, x_1)$ при достаточно малых ε . В самом деле, замена

$$w_\varepsilon = w_\varepsilon^{(0)} + w_\varepsilon^{(1)}, \quad w_\varepsilon^{(0)}(x) := \frac{v(x_1)(x - x_0) - v(x_0)(x - x_1)}{x_1 - x_0},$$

сводит задачу (5.21) к уравнению $(\mathcal{H}_\varepsilon^{(0)} - i)w_\varepsilon^{(1)} = h^{(1)}$, где

$$h^{(1)} := h - \left(-\frac{d}{dx}p\frac{d}{dx} + q - \varepsilon\mathcal{L}_\varepsilon - i\right)w_\varepsilon^{(0)}.$$

Как было показано выше, данное уравнение однозначно разрешимо. Более того, отображение $g \mapsto w_\varepsilon$ является линейным оператором из $L_2(\mathbb{R}; (x_0, x_1))$ в $W_2^2(x_0, x_1)$, голоморфным по малым k .

Решение задачи (5.1), (5.16) будем строить в виде

$$u(x, k) := (1 - \zeta(x))v(x, k) + \zeta(x)w_\varepsilon(x, k).\tag{5.22}$$

Данная функция удовлетворяет условиям (5.16). Подставим ее в левую часть уравнения (5.1) с $\lambda = \mu_n^\pm \mp k^2$; тогда получим

$$\left(-\frac{d}{dx}p\frac{d}{dx} + q - \varepsilon\mathcal{L}_\varepsilon - \mu_n^\pm \pm k^2\right)((1-\zeta)v + \zeta w_\varepsilon) = g + \mathcal{T}_{n,\varepsilon}^\pm(k)g,$$

$$\mathcal{T}_{n,\varepsilon}^\pm(k)g := -\frac{d}{dx}p(w_\varepsilon - v)\frac{d\zeta}{dx} - p\frac{d\zeta}{dx}\frac{d}{dx}(w_\varepsilon - v) + (i - \mu_n^\pm \pm k^2)\zeta(w_\varepsilon - v),$$

что приводит к уравнению

$$g + \mathcal{T}_{n,\varepsilon}^\pm(k)g = f. \quad (5.23)$$

Оператор $\mathcal{T}_{n,\varepsilon}^\pm$ компактен в $L_2(x_0, x_1)$.

ЛЕММА 5.5. *Задача (5.1), (5.16) эквивалентна уравнению (5.23) при достаточно малых k . А именно, для каждого решения уравнения (5.23) существует единственное решение задачи (5.1), (5.16), определяемое формулой (5.22). Для каждого решения u задачи (5.1), (5.16) существует единственная функция g , удовлетворяющая уравнению (5.23) и связанная с решением u равенством (5.22).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично доказательству леммы 5.2. Формулы, выражающие функции $v_\pm$, w_ε , g через решение u задачи (5.1), (5.16), имеют вид

$$\begin{aligned} v_\pm(x, k) &:= u(x, k) - \zeta(x)U_\pm(x, k), & \pm x > \pm x_2, \\ w_\varepsilon(x, k) &:= u + (1 - \zeta(x))U_\pm(x, k), & \pm x > \pm x_2, \\ g(x, k) &= \begin{cases} \left(-\frac{d}{dx}p\frac{d}{dx} + q - \mu_n^\pm \pm k^2\right)v_-, & x < x_2, \\ \left(-\frac{d}{dx}p\frac{d}{dx} + q - \mu_n^\pm \pm k^2\right)v_+, & x > x_2, \end{cases} \end{aligned}$$

где функции $U_\pm$ являются решениями краевых задач

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d}{dx}p\frac{d}{dx} + q - \varepsilon\mathcal{L}_\varepsilon - i\right)U_- &= \varepsilon\mathcal{L}_\varepsilon u, & x \in (x_0, x_2), \\ U_- &= 0, & x = x_0, \quad U_- = u, & x = x_1, \\ \left(-\frac{d}{dx}p\frac{d}{dx} + q - \varepsilon\mathcal{L}_\varepsilon - i\right)U_+ &= \varepsilon\mathcal{L}_\varepsilon u, & x \in (x_2, x_1), \\ U_+ &= u, & x = x_2, \quad U_+ = 0, & x = x_2. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3. Как уже было сказано выше, для доказательства этой теоремы осталось показать, что края невырожденных лагун в спектре оператора $\mathcal{H}_0$ не могут быть точками накопления собственных значений оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, а также проверить, что если такой край является собственным значением оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, то его кратность конечна. Мы установим эти факты аналогично доказательству леммы 5.3.

Пусть λ – собственное значение оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, лежащее в некоторой достаточно малой окрестности края $\mu_n^\pm$ невырожденной лагуны. Тогда соответствующая собственная функция является нетривиальным решением задачи

$$\left(-\frac{d}{dx}p\frac{d}{dx} + q - \varepsilon\mathcal{L}_\varepsilon - \mu_n^\pm \pm k^2\right)\psi = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.24)$$

удовлетворяющим условиям (5.16), где $\operatorname{Re} \kappa_n^\pm(k) \geq 0$. Последнее неравенство в силу (5.15) эквивалентно неравенству $\operatorname{Re} k \geq 0$. В силу леммы 5.5 это означает, что соответствующее уравнение (5.23) имеет нетривиальное решение. Из компактности оператора $T_{n,\varepsilon}^\pm(k)$ следует, что число таких решений конечно. Следовательно, если $\mu_n^\pm$ – собственное значение оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, то оно имеет конечную кратность.

Поскольку в силу леммы 5.3 число собственных значений оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ не более чем счетно, то в любой сколь угодно малой окрестности $\mu_n^\pm$ существуют точки λ_* , не принадлежащие спектру оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$. Пусть k_* – значение параметра k , соответствующее λ_* , причем $\operatorname{Re} k_* > 0$. Тогда задача (5.24), (5.16) при $k = k_*$ не имеет нетривиальных решений, что в силу леммы 5.5 означает отсутствие нетривиальных решений уравнения (5.23) при $k = k_*$. Следовательно, оператор $I + T_\varepsilon(k_*)$ ограниченно обратим. Этот факт вместе с голоморфностью данного оператора позволяет нам применить теорему 7.1 из [9, гл. XV, § 7], согласно которой оператор $(I + T_\varepsilon)^{-1}$ мероморфен по k и его полюсы не могут накапливаться к внутренней точке рассматриваемой окрестности. Каждое значение параметра k , соответствующее собственному значению оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, лежащему вблизи $\mu_n^\pm$, является полюсом оператора $(I + T_\varepsilon)^{-1}$. Следовательно, собственные значения оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, лежащие в окрестности точки $\mu_n^\pm$, не могут накапливаться к точке $\mu_n^\pm$.

§ 6. Доказательство теоремы 2.5

В настоящем параграфе мы докажем теорему 2.5. Кроме того, будет приведен пример, показывающий, что при нарушении условий этой теоремы оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ может иметь собственные значения, вложенные в непрерывный спектр.

Аналогично доказательству теоремы 2.4 показывается, что если собственное значение λ оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ является вложенным, то соответствующая собственная функция удовлетворяет равенству (4.6). Ниже в доказательстве мы пользуемся этим равенством, считая его доказанным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО п. 1) ТЕОРЕМЫ 2.5. Доказательство проведем от противного. Пусть $\lambda \in \sigma_c(\mathcal{H}_\varepsilon)$ является собственным значением оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, а ψ – соответствующая собственная функция. Пусть x_2 – крайняя левая точка носителя функции ψ и

$$\psi(x) \not\equiv 0, \quad x_2 < x < x_2 + \delta, \quad (6.1)$$

где δ – некоторое малое число. Так как $\psi \in W_2^2(\mathbb{R}) \subset C^1(\mathbb{R})$, то выполнены начальные условия

$$\psi(x_2) = \psi'(x_2) = 0. \quad (6.2)$$

Из определения (4.3) оператора $\mathcal{P}$ следует, что начальная задача (4.5), (6.2) эквивалентна интегральному уравнению

$$(I - \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon \mathcal{P}(\lambda, x_2))\psi = 0. \quad (6.3)$$

С учетом (4.3), леммы 4.1 и оценки (2.4) для любой функции $u \in W_2^2(x_2, x_2 + \delta)$ выводим:

$$\|\mathcal{L}_\varepsilon \mathcal{P}(\lambda, x_2)u\|_{L_2(x_2, x_2 + \delta)} \leq C\delta \|u\|_{L_2(x_2, x_2 + \delta)},$$

где константа C не зависит от δ и ε . Следовательно, при достаточно малых δ оператор $\mathcal{L}_\varepsilon \mathcal{P}(\lambda, x_2)$ является сжимающим в пространстве $L_2(x_2, x_2 + \delta)$, а потому уравнение (6.3) имеет только тривиальное решение. Последнее противоречит (6.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО п. 2) ТЕОРЕМЫ 2.5. С учетом теоремы 2.4 достаточно показать, что не существует собственных значений оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, лежащих в $\sigma_c(\mathcal{H}_\varepsilon)$ и стремящихся к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Пусть $\lambda \in \sigma_c(\mathcal{H}_\varepsilon)$ – любое собственное значение оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, большее единицы, а ψ – соответствующая собственная функция, нормированная в $L_2(\mathbb{R})$. Эта собственная функция удовлетворяет уравнению

$$\left(-\frac{d}{dx} p_\varepsilon \frac{d}{dx} + q - \lambda - \varepsilon \tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon \right) \psi = 0, \quad (6.4)$$

где $p_\varepsilon := p + \varepsilon a_\varepsilon$. Умножим уравнение (6.4) на $\bar{\psi}$ и проинтегрируем по частям с учетом (4.6); тогда получим

$$\|\sqrt{p_\varepsilon} \psi'\|_{L_2(Q)}^2 + (q\psi, \psi)_{L_2(Q)} + \varepsilon (\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon \psi, \psi)_{L_2(Q)} = \lambda. \quad (6.5)$$

Функция p_ε положительна при достаточно малых ε , так как в силу (2.5) и финитности a_ε

$$\varepsilon \max_Q |a_\varepsilon(x)| = \varepsilon \max_Q \left| \int_{x_0}^x a'_\varepsilon(t) dt \right| \leq \varepsilon |x_1 - x_0| \max_Q |a'_\varepsilon(t)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Учитывая это соотношение, из (6.5), (2.1) и равномерной по ε ограниченности оператора $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon: W_2^1(Q) \rightarrow L_2(Q)$ выводим:

$$\begin{aligned} \|\psi'\|_{L_2(Q)}^2 &\leq C + \lambda + C\varepsilon \|\psi'\|_{L_2(Q)}^2, & \|\psi\|_{W_2^1(Q)} &\leq C\sqrt{\lambda}, \\ \|\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon \psi\|_{L_2(Q)} &\leq C\sqrt{\lambda}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где C – некоторые константы, не зависящие от ε и λ . Умножим теперь уравнение (6.4) на $e^{\alpha x} p_\varepsilon \bar{\psi}'$, $\alpha > 0$, и проинтегрируем по частям, учитывая (4.6):

$$\begin{aligned} 0 &= -2 \operatorname{Re} \int_Q e^{\alpha x} p_\varepsilon \bar{\psi}' (p_\varepsilon \psi')' dx + 2 \operatorname{Re} \int_Q q e^{\alpha x} p_\varepsilon \bar{\psi} \psi' dx + 2\varepsilon \operatorname{Re} \int_Q e^{\alpha x} p_\varepsilon \bar{\psi}' \tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon \psi dx \\ &\quad - 2\lambda \operatorname{Re} \int_Q e^{\alpha x} p_\varepsilon \bar{\psi}' \psi dx = \alpha \|e^{\frac{\alpha}{2}} p_\varepsilon \psi'\|_{L_2(Q)}^2 + \lambda ((e^{\alpha x} p_\varepsilon)' \psi, \psi)_{L_2(Q)} \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} (q e^{\alpha x} p_\varepsilon \bar{\psi}', \psi)_{L_2(Q)} + 2\varepsilon \operatorname{Re} (e^{\alpha x} p_\varepsilon \tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon \psi, \psi')_{L_2(Q)}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Поскольку $(e^{\alpha x} p_\varepsilon)' = e^{\alpha x} (\alpha p_\varepsilon + p'_\varepsilon)$, то из (2.1) и (2.5) следует, что существует константа $\alpha > 0$, не зависящая от ε и λ , такая, что

$$(e^{\alpha x} (p + \varepsilon a_\varepsilon))' \geq 1, \quad x \in \bar{Q}.$$

Подставляя эту оценку и (6.6) в (6.7), получаем

$$\lambda \leq 2 \left| (e^{\alpha x} (p + \varepsilon a_\varepsilon) \bar{\psi}', \psi)_{L_2(Q)} \right| + 2\varepsilon \left| (e^{\alpha x} (p + \varepsilon a_\varepsilon) \tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon \psi, \psi')_{L_2(Q)} \right| \leq C\sqrt{\lambda} + \varepsilon C\lambda,$$

где константа C не зависит от ε и λ . Следовательно, $\lambda \leq C\sqrt{\lambda}$, откуда следует $\lambda \leq C$, где константа C не зависит от ε и λ .

В оставшейся части параграфа мы приведем пример, показывающий, что при нарушении условий теоремы 2.5 оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ может иметь собственное значение, вложенное в непрерывный спектр.

Положим $p \equiv 1$, $q \equiv 0$, т. е. $\mathcal{H}_0 = -\frac{d^2}{dx^2}$. Оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ определим следующим образом:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\varepsilon u)(x) &:= 2\xi_\varepsilon(x)l_\varepsilon u, & l_\varepsilon u &:= \varepsilon^{-1}(u'(\varepsilon^\alpha) - u'(0)), & \alpha &\geq 2, \\ \xi_\varepsilon(x) &:= c_\varepsilon \chi_\varepsilon(x) \sin(\nu_\varepsilon |x|), & c_\varepsilon &:= \left(\frac{2\pi[\nu_\varepsilon]}{\nu_\varepsilon} - \varepsilon^\alpha \right)^{-1}, & \nu_\varepsilon &:= \frac{\pi}{2\varepsilon^\alpha}, \end{aligned}$$

где χ_ε – характеристическая функция интервала $(-\frac{2\pi[\nu_\varepsilon]}{\nu_\varepsilon}, \frac{2\pi[\nu_\varepsilon]}{\nu_\varepsilon})$, $[\nu_\varepsilon]$ – целая часть ν_ε . Проверим, что оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ удовлетворяет всем необходимым требованиям при $Q = (-2\pi, 2\pi)$. Ясно, что в силу вложения $W_2^2(Q) \subset C^1(Q)$ функционал l_ε является линейным функционалом на пространстве $W_2^2(Q)$, а $\mathcal{L}_\varepsilon$ – линейным оператором из $W_2^2(Q)$ в $L_2(\mathbb{R}; Q)$. Из оценки

$$|l_\varepsilon u| \leq \varepsilon^{-1} \int_0^{\varepsilon^\alpha} |u''(t)| dt \leq \varepsilon^{\alpha/2-1} \|u''\|_{L_2(0,\varepsilon)} \leq C \|u\|_{W_2^2(Q)},$$

где константа C не зависит от ε , следует равномерная по ε ограниченность функционала l_ε на $W_2^2(Q)$. Отсюда вытекает и равномерная по ε ограниченность оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$.

Докажем теперь, что $\lambda_\varepsilon := \nu_\varepsilon^2$ – собственное значение оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, а

$$\psi_\varepsilon(x) := -\frac{\varepsilon}{\nu_\varepsilon} \int_Q \sin(\nu_\varepsilon |x-t|) \xi_\varepsilon(t) dt$$

– соответствующая собственная функция. Ясно, что $\psi_\varepsilon \in W_{2,\text{loc}}^2(\mathbb{R})$. Используя формулу

$$\psi'_\varepsilon(x) = -\varepsilon \int_Q \cos(\nu_\varepsilon(x-t)) \operatorname{sign}(x-t) \xi_\varepsilon(t) dt, \quad x \in Q,$$

прямыми вычислениями нетрудно проверить, что $\psi'_\varepsilon(0) = 0$, $\psi'_\varepsilon(\varepsilon^\alpha) = \varepsilon$, $l_\varepsilon \psi_\varepsilon = 1$. Из последнего равенства и определения функции ψ_ε следует, что эта функция является решением уравнения (4.5) с $\lambda = \lambda_\varepsilon$. Из определения ψ_ε также следует, что $\psi_\varepsilon(x) \equiv 0$ при $x \notin Q$, а потому $\psi_\varepsilon \in W_2^2(\mathbb{R})$. Следовательно, λ_ε – собственное значение оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$. Так как $\sigma_c(\mathcal{H}_0) = [0, +\infty)$, то в силу теоремы 2.2 верно равенство $\sigma_c(\mathcal{H}_\varepsilon) = [0, +\infty)$. Собственное значение оператора λ_ε положительно, а потому $\lambda_\varepsilon \in \sigma_c(\mathcal{H}_\varepsilon)$.

§ 7. Вспомогательные утверждения

В настоящем параграфе мы докажем ряд вспомогательных утверждений, необходимых для доказательства теорем 2.7, 2.8.

Всюду далее до конца параграфа, не оговаривая особо, под $\mu_n^\pm$ мы понимаем один из краев невырожденных лакун в спектре оператора $\mathcal{H}_0$.

Из равенства (4.2) и определений (5.17), (5.18) функций $\varphi_{n,i}^\pm$ вытекает, что

$$W[\varphi_{n,1}^\pm, \varphi_{n,2}^\pm] = \frac{\tau_n^\pm}{p(x)} \left(\frac{1}{\rho_n^\pm(k)} - \rho_n^\pm(k) \right), \quad (7.1)$$

где, напомним, функции $\rho_n^\pm$ были введены в (5.13). Через $\mathcal{G}_n^\pm(k)$ обозначим интегральный оператор, определенный в $L_2(Q)$:

$$(\mathcal{G}_n^\pm(k)f)(x) := \int_Q G_n^\pm(x, t, k) f(t) dt,$$

$$G_n^\pm(x, t, k) := \frac{\tau_n^\pm}{\rho_n^\pm(k) - (\rho_n^\pm(k))^{-1}} \times \begin{cases} \varphi_{n,1}^\pm(x, k) \varphi_{n,2}^\pm(t, k), & t > x, \\ \varphi_{n,1}^\pm(t, k) \varphi_{n,2}^\pm(x, k), & t < x. \end{cases}$$

ЛЕММА 7.1. Пусть $k \in \mathbb{C}$ достаточно мало. Тогда:

1) для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R}; Q)$ при $k \neq 0$ решение уравнения

$$\left(-\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q - \mu_n^\pm \pm k^2 \right) u = f, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (7.2)$$

удовлетворяющее условиям (5.16), задается формулой $u(x, k) = (\mathcal{G}_n^\pm(k)f)(x) \in W_{2,\text{loc}}^2(\mathbb{R})$; при $x \notin Q$ функция u имеет вид

$$u(x, k) = \frac{\tau_n^\pm e^{-\kappa_n^\pm(k)x} \Phi_{n,2}^\pm(x, k)}{\rho_n^\pm(k) - (\rho_n^\pm(k))^{-1}} \int_Q \varphi_{n,1}^\pm(t, k) f(t) dt, \quad (7.3)$$

если x лежит правее множества Q , и вид

$$u(x, k) = \frac{\tau_n^\pm e^{\kappa_n^\pm(k)x} \Phi_{n,1}^\pm(x, k)}{\rho_n^\pm(k) - (\rho_n^\pm(k))^{-1}} \int_Q \varphi_{n,2}^\pm(t, k) f(t) dt, \quad (7.4)$$

если x лежит левее множества Q ;

2) для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ оператор $\mathcal{G}_n^\pm(k): L_2(Q) \rightarrow W_2^2(\alpha_1, \alpha_2)$ ограниченно мероморфен по k ; справедливо представление

$$\mathcal{G}_n^\pm(k) = k^{-1} \mathcal{G}_{n,-1}^\pm + \mathcal{G}_{n,0}^\pm + k \mathcal{G}_{n,1}^\pm(k),$$

где оператор $\mathcal{G}_{n,-1}^\pm$ определяется равенством

$$(\mathcal{G}_{n,-1}^\pm f)(x) = \pm \frac{(f, \phi_n^\pm)_{L_2(Q)}}{2\sqrt{|\dot{D}(\mu_n^\pm)|}} \phi_n^\pm(x),$$

а оператор $\mathcal{G}_{n,1}^\pm: L_2(Q) \rightarrow W_2^2(\alpha_1, \alpha_2)$ ограниченно голоморфен по k .

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Напомним, что функции $\Phi_{n,i}^\pm$ из (7.3), (7.4) в п. 1) леммы 7.1 были определены равенствами (5.19), оператор $\mathcal{G}_{n,0}^\pm$ – формулой (2.9), а $\phi_n^\pm$ – собственные функции задач (2.3), нормированные условием (2.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7.1. Утверждение 1) следует непосредственно из определения функции $G_n^\pm$ и равенств (7.1), (5.19). Утверждение 2) вытекает из определения функции $G_n^\pm$, голоморфности по k функций $\varphi_{n,i}^\pm$, $\Phi_{n,i}^\pm$ и $\rho_n^\pm$ и равенства (5.14).

Из равномерной ограниченности оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ и утверждения 2) леммы 7.1 следует, что для достаточно малых ε и достаточно малых $k \in \mathbb{C}$ оператор

$\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{G}_{n,0}^\pm + k\mathcal{G}_{n,1}^\pm(k)) : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ ограничен равномерно по ε и k . Таким образом, при достаточно малых ε и k в пространстве $L_2(Q)$ корректно определен ограниченный оператор

$$\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon, k) := \left(I - \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{G}_{n,0}^\pm + k\mathcal{G}_{n,1}^\pm(k)) \right)^{-1}.$$

Из утверждения 2) леммы 7.1 вытекает, что для достаточно малых ε и k оператор $\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon, k)$ ограниченно голоморфен по k и верна равномерная по k сходимость

$$\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon, k) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} I. \quad (7.5)$$

ЛЕММА 7.2. Для достаточно малых ε и k уравнение

$$k \mp \frac{\varepsilon}{2\sqrt{|\dot{D}(\mu_n^\pm)|}} (\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon, k) \mathcal{L}_\varepsilon \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(Q)} = 0 \quad (7.6)$$

имеет единственное решение $k_{\varepsilon,n}^\pm$. Верны асимптотические формулы

$$k_{\varepsilon,n}^\pm = \pm \frac{\varepsilon}{2\sqrt{|\dot{D}(\mu_n^\pm)|}} (\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon, 0) \mathcal{L}_\varepsilon \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(Q)} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)), \quad (7.7)$$

$$k_{\varepsilon,n}^\pm = \varepsilon(k_{n,\varepsilon}^{\pm,1} + \varepsilon k_{n,\varepsilon}^{\pm,2}) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (7.8)$$

где $k_{n,\varepsilon}^{\pm,i}$ из (2.15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку оператор $\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon, k)$ голоморфен по k , то функция $k \mapsto (\phi_n^\pm, \mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon, k) \mathcal{L}_\varepsilon \phi_n^\pm)_{L_2(Q)}$ голоморфна по k для каждого значения ε . Кроме того, в силу (7.5) и равномерной ограниченности оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ эта функция ограничена равномерно по ε и k . Пусть δ – достаточно малое число. Тогда при достаточно малых ε и $|k| = \delta$ выполнена оценка

$$\varepsilon \left| \frac{\pm 1}{2\sqrt{|\dot{D}(\mu_n^\pm)|}} (\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon, k) \mathcal{L}_\varepsilon \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(Q)} \right| < |k|.$$

Отсюда в силу теоремы Руше выводим, что функция

$$k \mapsto k \mp \frac{\varepsilon}{2\sqrt{|\dot{D}(\mu_n^\pm)|}} (\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon, k) \mathcal{L}_\varepsilon \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(Q)}$$

имеет в круге $|k| \leq \delta$ столько же нулей, сколько и функция $k \mapsto k$, т.е. ровно один нуль. Следовательно, для достаточно малых ε уравнение (7.6) в круге $|k| \leq \delta$ имеет единственный корень, который обозначим через $k_{\varepsilon,n}^\pm$.

Из очевидного равенства

$$\frac{\partial \mathcal{A}_n^\pm}{\partial k} (I - \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{G}_{n,0}^\pm + k\mathcal{G}_{n,1}^\pm)) - \varepsilon \mathcal{A}_n^\pm \mathcal{L}_\varepsilon \left(\mathcal{G}_{n,0}^\pm + k \frac{\partial \mathcal{G}_{n,1}^\pm}{\partial k} \right) = 0$$

выводим, что

$$\frac{\partial \mathcal{A}_n^\pm}{\partial k} = \varepsilon \mathcal{A}_n^\pm \mathcal{L}_\varepsilon \left(\mathcal{G}_{n,0}^\pm + k \frac{\partial \mathcal{G}_{n,1}^\pm}{\partial k} \right) \mathcal{A}_n^\pm.$$

Из этой формулы, сходимости (7.5) и утверждения 2) леммы 7.1 вытекает равномерная по ε и k оценка

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{A}_n^\pm}{\partial k} \right\| \leq C\varepsilon.$$

Используя эту оценку и формулу

$$\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon, k) - \mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon, 0) = \int_0^k \frac{\partial \mathcal{A}_n^\pm}{\partial k}(\varepsilon, z) dz,$$

выводим, что

$$\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon, k) = \mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon, 0) + \mathcal{O}(\varepsilon|k|).$$

Подставим это равенство в уравнение (7.6); тогда получим

$$\begin{aligned} k_{\varepsilon,n}^\pm \mp \frac{\varepsilon}{2\sqrt{|\dot{D}(\mu_n^\pm)|}} (\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon, 0) \mathcal{L}_\varepsilon \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(Q)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2 |k_{\varepsilon,n}^\pm|) &= 0, \\ k_{\varepsilon,n}^\pm (1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) &= \pm \frac{\varepsilon}{2\sqrt{|\dot{D}(\mu_n^\pm)|}} (\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon, 0) \mathcal{L}_\varepsilon \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(Q)}. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения следует асимптотика (7.7).

В силу определения оператора $\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon, k)$ выполнено равенство

$$\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon, k) = I + \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon \mathcal{G}_{n,0}^\pm + \mathcal{O}(\varepsilon^2 + \varepsilon|k|). \quad (7.9)$$

Подставляя равенство (7.9) в асимптотику (7.7), получаем

$$k_{\varepsilon,n}^\pm = \varepsilon(k_{n,\varepsilon}^{\pm,1} + \varepsilon k_{n,\varepsilon}^{\pm,2}) + \mathcal{O}(\varepsilon^3 + \varepsilon^2 |k_{\varepsilon,n}^\pm|).$$

Для завершения доказательства теперь осталось лишь воспользоваться оценкой $k_{\varepsilon,n}^\pm = \mathcal{O}(\varepsilon)$, вытекающей из (7.7).

§ 8. Доказательство теорем 2.7, 2.8

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.7. Используем подход, предложенный в [10], который является модификацией принципа Бирмана–Швингера. Пусть $\lambda = \mu_n^\pm \mp k^2$ – собственное значение оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, лежащее в малой окрестности точки $\mu_n^\pm$. Тогда соответствующая собственная функция ψ удовлетворяет уравнению (7.2) с $f = \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon \psi$, а также условиям (5.16), где $\operatorname{Re} \varkappa_n^\pm(k) > 0$. Последнее неравенство в силу равенства (5.15) эквивалентно неравенству $\operatorname{Re} k > 0$. В силу утверждения 1) леммы 7.1 заключаем, что $\psi = \mathcal{G}_n^\pm(k)f$. Применим к обеим частям этого равенства оператор $\varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon$; тогда получим следующее уравнение для функции f :

$$f - \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon \mathcal{G}_n^\pm(k)f = 0. \quad (8.1)$$

Оператор $\mathcal{L}_\varepsilon \mathcal{G}_n^\pm(k)$, как следует из утверждения 1) леммы 7.1 и равномерной ограниченности оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$, является ограниченным оператором в $L_2(Q)$. Поэтому уравнение (8.1) можно рассматривать как уравнение в этом пространстве.

Если f – нетривиальное решение уравнения (8.1) для некоторого k , то функция $\psi := \mathcal{G}_n^\pm(k)f$ – нетривиальное решение уравнения

$$\left(-\frac{d}{dx}p\frac{d}{dx} + q - \varepsilon\mathcal{L}_\varepsilon - \mu_n^\pm \pm k^2\right)\psi = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (8.2)$$

ведущее себя на бесконечности согласно (7.3), (7.4). Данная функция будет элементом пространства $W_2^2(\mathbb{R})$, если и только если $\operatorname{Re} k > 0$. Следовательно, число $\lambda = \mu_n^\pm \mp k^2$ будет собственным значением оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, если и только если $\operatorname{Re} k > 0$. Таким образом, задача о нахождении собственных значений оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, стремящихся к $\mu_n^\pm$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, сводится к задаче об определении тех значений k при $\operatorname{Re} k > 0$, для которых уравнение (8.1) имеет нетривиальные решения.

Согласно утверждению 2) леммы 7.1 уравнение (8.1) можно переписать в виде

$$f - \frac{\varepsilon}{k}\mathcal{L}_\varepsilon\mathcal{G}_{n,-1}^\pm f - \varepsilon\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{G}_{n,0}^\pm + k\mathcal{G}_{n,1}(k))f = 0.$$

Применим к этому уравнению оператор $\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon, k)$; тогда получим

$$f \mp \frac{\varepsilon(f, \phi_n^\pm)_{L_2(Q)}}{2k\sqrt{|\dot{D}(\mu_n^\pm)|}}\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon, k)\mathcal{L}_\varepsilon\phi_n^\pm = 0. \quad (8.3)$$

Пусть f – нетривиальное решение уравнения (8.1). Тогда $(f, \phi_n^\pm)_{L_2(Q)} \neq 0$, так как иначе из (8.3) следует, что $f \equiv 0$. Учитывая этот факт, умножим уравнение (8.3) на $\phi_n^\pm$ скалярно в $L_2(Q)$; тогда получим уравнение (7.6). Таким образом, значения параметра k , при которых уравнение (8.2) имеет нетривиальное решение, являются корнями уравнения (7.6). При $k = k_{\varepsilon,n}^\pm$ уравнение (8.3) и, следовательно, уравнение (8.1) имеют решение

$$f_{\varepsilon,n}^\pm = \varepsilon\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon, k_{\varepsilon,n}^\pm)\mathcal{L}_\varepsilon\phi_n^\pm.$$

Это утверждение легко проверить, подставляя $f_{\varepsilon,n}^\pm$ в (8.3) и учитывая (7.6). Соответствующее решение уравнения (8.2) дается равенством

$$\psi_{\varepsilon,n}^\pm = \varepsilon\mathcal{G}_n^\pm(k_{\varepsilon,n}^\pm)\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon, k_{\varepsilon,n}^\pm)\mathcal{L}_\varepsilon\phi_n^\pm. \quad (8.4)$$

Данное решение нетривиально, так как в силу утверждения 2) леммы 7.1, соотношений (7.9), (7.6) и равномерной по ε ограниченности оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ в норме $W_2^2(\alpha_1, \alpha_2)$ выполнено равенство (2.16). Следовательно, $f_{\varepsilon,n}^\pm \neq 0$. Из (8.3) также следует, что все решения уравнения (8.1) при $k = k_{\varepsilon,n}^\pm$ пропорциональны $f_{\varepsilon,n}^\pm$, а потому решение $f_{\varepsilon,n}^\pm$ единственно с точностью до умножения на константу. Таким образом, для достаточно малых ε существует единственная точка k в малой окрестности нуля, для которой уравнение (8.1) имеет нетривиальное решение. Данное значение параметра k является корнем уравнения (7.6). Функция $\psi_{\varepsilon,n}^\pm$ будет собственной функцией оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ только в случае $\operatorname{Re} k_{\varepsilon,n}^\pm > 0$. В противном случае оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ не имеет собственных значений, сходящихся к $\mu_n^\pm$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ имеет не более одного собственного значения, сходящегося к $\mu_n^\pm$, которое в случае существования является простым и определяется равенством

$\lambda_{\varepsilon,n}^{\pm} = \mu_n^{\pm} \mp (k_{\varepsilon,n}^{\pm})^2$. Из (7.7) вытекает, что неравенство $\operatorname{Re} k_{\varepsilon,n}^{\pm} > 0$ выполнено, если имеет место (2.10). Если же имеет место одно из соотношений (2.11), (2.12), то данное неравенство не выполнено, и в этом случае оператор $\mathcal{H}_{\varepsilon}$ не имеет собственных значений, сходящихся к $\mu_n^{\pm}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Если неравенство $\operatorname{Re} k_{\varepsilon,n}^{\pm} > 0$ выполнено, то асимптотики для собственного значения $\lambda_{\varepsilon,n}^{\pm}$ немедленно следуют из (7.7), (7.8). Для соответствующей собственной функции в этом случае верно разложение (2.16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.8. Как было установлено в доказательстве теоремы 2.7, достаточным условием существования собственного значения является неравенство (2.10), а достаточным условием отсутствия его – одно из соотношений (2.11), (2.12). Из асимптотики (7.8) следует, что достаточным условием выполнения неравенства (2.10) является оценка (2.17), а достаточным условием выполнения (2.11) или (2.12) – оценка (2.18).

В заключение выясним поведение функции $\psi_{\varepsilon,n}^{\pm}$ на бесконечности. Эта функция удовлетворяет равенствам (7.3), (7.4), а потому при x , лежащих правее множества Q , выполнено соотношение

$$\psi_{\varepsilon,n}^{\pm}(x) = c(\varepsilon) e^{-\kappa_n^{\pm}(k_{\varepsilon,n}^{\pm})} \Phi_{n,2}^{\pm}(x, k_{\varepsilon,n}^{\pm}),$$

где

$$c(\varepsilon) = \frac{\tau_n^{\pm}}{\rho_n^{\pm}(k_{\varepsilon,n}^{\pm}) - (\rho_n^{\pm}(k_{\varepsilon,n}^{\pm}))^{-1}} \int_{\mathbb{R}} \varphi_{n,1}^{\pm}(t, k_{\varepsilon,n}^{\pm}) g_{\varepsilon,n}^{\pm}(t) dt.$$

Из равенства $\varphi_{n,1}^{\pm}(\cdot, k_{\varepsilon,n}^{\pm}) = \phi_n^{\pm}(\cdot) + \mathcal{O}(|k_{\varepsilon,n}^{\pm}|)$, асимптотики (5.14) и уравнения (7.6) выводим:

$$\begin{aligned} c(\varepsilon) &= \pm \frac{\varepsilon}{2\sqrt{|\dot{D}(\mu_n^{\pm})|k_{\varepsilon,n}^{\pm}}(1 + \mathcal{O}(|k_{\varepsilon,n}^{\pm}|))} \\ &\quad \times \left((\phi_n^{\pm}, \mathcal{A}_n^{\pm}(\varepsilon, k_{\varepsilon,n}^{\pm}) \mathcal{L}_{\varepsilon} \phi_n^{\pm})_{L_2(Q)} + \mathcal{O}(|k_{\varepsilon,n}^{\pm}|) \right) \\ &= \left(\pm \frac{\varepsilon}{2\sqrt{|\dot{D}(\mu_n^{\pm})|k_{\varepsilon,n}^{\pm}}} (\phi_n^{\pm}, \mathcal{A}_n^{\pm}(\varepsilon, k_{\varepsilon,n}^{\pm}) \mathcal{L}_{\varepsilon} \phi_n^{\pm})_{L_2(Q)} + \mathcal{O}(\varepsilon|k_{\varepsilon,n}^{\pm}|) \right) \\ &\quad \times (1 + \mathcal{O}(|k_{\varepsilon,n}^{\pm}|)) = 1 + \mathcal{O}(|k_{\varepsilon,n}^{\pm}|). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\psi_{\varepsilon,n}^{\pm}(x) = (1 + \mathcal{O}(|k_{n,\varepsilon}^{\pm}|)) e^{-\kappa_n^{\pm}(k_{n,\varepsilon}^{\pm})x} \Phi_{n,2}^{\pm}(x, k_{n,\varepsilon}^{\pm}), \quad (8.5)$$

если x лежит правее множества Q . Аналогично доказывается, что

$$\psi_{\varepsilon,n}^{\pm}(x) = (1 + \mathcal{O}(|k_{n,\varepsilon}^{\pm}|)) e^{\kappa_n^{\pm}(k_{n,\varepsilon}^{\pm})x} \Phi_{n,1}^{\pm}(x, k_{n,\varepsilon}^{\pm}), \quad (8.6)$$

если x лежит левее множества Q .

§ 9. Примеры

В настоящем параграфе мы приведем некоторые примеры оператора $\mathcal{L}_{\varepsilon}$. Далее через Q обозначен некоторый заданный конечный интервал.

9.1. Дифференциальный оператор второго порядка. Пусть

$$\mathcal{L}_\varepsilon := b_2(x, \varepsilon) \frac{d^2}{dx^2} + b_1(x, \varepsilon) \frac{d}{dx} + b_0(x, \varepsilon),$$

где $b_i \in L_\infty(Q)$ – комплекснозначные функции такие, что $\text{supp } b_i(\cdot, \varepsilon) \subseteq Q$ и нормы $\|b_i(\cdot, \varepsilon)\|_{L_\infty(Q)}$ ограничены равномерно по ε . Оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ удовлетворяет оценке (2.4), а потому в силу теоремы 2.5 в данном случае непрерывный спектр оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ не содержит вложенных собственных значений. Первообразные функций b_i , q , p , а также функция r непрерывны и являются функциями с ограниченной вариацией (см., например, [8, гл. VI, § 1, 2]). Используя этот факт и применяя теорему единственности задачи Коши из [11, гл. 1, § 3, п. 3], нетрудно доказать, что каждое собственное значение оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ является простым. Существование и асимптотики собственных значений, сходящихся к краям невырожденных лагун в непрерывном спектре, описываются теоремами 2.7, 2.8.

В частном случае $b_1 = b_2 \equiv 0$ коэффициент $k_{\varepsilon, n}^{\pm, 1}$ имеет вид

$$k_{n, \varepsilon}^{\pm, 1} = \pm \frac{(b_0 \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(Q)}}{2\sqrt{|\dot{D}(\mu_n^\pm)|}}. \quad (9.1)$$

Если b_0 не зависит от ε и $\text{Re } b_0 \neq 0$, $\text{Re } b_0 \geq 0$, то этот коэффициент также не зависит от ε и $k_{n, \varepsilon}^{+, 1} > 0$, $k_{n, \varepsilon}^{-, 1} < 0$. В этом случае применима теорема 2.8, где выполнена оценка (2.17) для $k_{n, \varepsilon}^{+, 1} + \varepsilon k_{n, \varepsilon}^{+, 2}$ с функцией $C(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}$ и оценка (2.18) для $k_{n, \varepsilon}^{-, 1} + \varepsilon k_{n, \varepsilon}^{-, 2}$ с функцией $C(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}$. Следовательно, собственные значения существуют только возле правых концов невырожденных лагун, и их асимптотики определяются формулой (2.14). Если $\text{Re } b_0 \neq 0$ и $\text{Re } b_0 \leq 0$, то $k_{n, \varepsilon}^{+, 1} < 0$, $k_{n, \varepsilon}^{-, 1} > 0$, и в этом случае собственные значения существуют только возле левых концов невырожденных лагун. В силу (2.14) и (9.1) в данном частном случае асимптотики этих собственных значений имеют вид

$$\lambda_{\varepsilon, n}^\pm = \mu_n^\pm \mp \varepsilon^2 \frac{(b_0 \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(Q)}^2}{4|\dot{D}(\mu_n^\pm)|} + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

9.2. Интегральный оператор. Пусть

$$(\mathcal{L}_\varepsilon u)(x) := \int_Q L_\varepsilon(x, y) u(y) dy,$$

где $\text{supp } L_\varepsilon(\cdot, y) \subseteq Q$, и верна равномерная по ε оценка

$$\int_{Q \times Q} |L_\varepsilon(x, y)|^2 dx dy \leq C.$$

Оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ ограничен равномерно по ε как оператор в $L_2(Q)$, а потому для него выполнено предположение п. 2) теоремы 2.5 с $a_\varepsilon \equiv 0$. Следовательно, непрерывный спектр оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ не содержит вложенных собственных значений. Коэффициент $k_{n, \varepsilon}^{\pm, 1}$ из (2.14) определяется формулой

$$k_{n, \varepsilon}^{\pm, 1} = \pm \int_{Q \times Q} L_\varepsilon(x, y) \phi_n^\pm(x) \phi_n^\pm(y) dx dy.$$

В частности, если $L_\varepsilon(x, y) = \overline{\beta b(x)}b(y)$, $\text{supp } b \subseteq Q$, $b \in L_2(Q)$, $\beta \in \mathbb{C}$ – некоторая константа, то формулы для коэффициентов $k_{n,\varepsilon}^{\pm,i}$ принимают вид

$$k_{n,\varepsilon}^{\pm,1} = \pm \frac{\beta |(b, \phi_n^\pm)_{L_2(Q)}|^2}{2\sqrt{|\dot{D}(\mu_n^\pm)|}}, \quad k_{n,\varepsilon}^{\pm,2} = k_{n,\varepsilon}^{\pm,1} \int_{Q \times Q} G_n^\pm(x, y) \overline{b(x)}b(y) dx dy. \quad (9.2)$$

В случае $(b, \phi_n^\pm)_{L_2(Q)} \neq 0$ коэффициенты $k_{n,\varepsilon}^{\pm,1}$ не зависят от ε и применима теорема 2.8 при $C(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}$. Согласно этой теореме собственные значения существуют только возле правых концов невырожденных лагун в случае $\text{Re } \beta > 0$ и возле левых концов в случае $\text{Re } \beta < 0$. Асимптотики этих собственных значений определяются формулой (2.14) и в силу (9.2) имеют следующий вид:

$$\lambda_{\varepsilon,n}^\pm = \mu_n^\pm \mp \varepsilon^2 \frac{\beta^2 |(b, \phi_n^\pm)_{L_2(Q)}|^4}{4|\dot{D}(\mu_n^\pm)|} \left(1 + 2\varepsilon \int_{Q \times Q} G_n^\pm(x, y) \overline{b(x)}b(y) dx dy \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

9.3. Линейный функционал. Пусть

$$\mathcal{L}_\varepsilon u := b_\varepsilon l_\varepsilon u,$$

где b_ε – комплекснозначная функция такая, что $\text{supp } b_\varepsilon \subseteq Q$ и норма $\|b_\varepsilon\|_{L_2(Q)}$ ограничена равномерно по ε . Через l_ε обозначен функционал из $W_2^2(Q)$ в $\mathbb{C}$, ограниченный равномерно по ε . В таком случае оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$, определенный выше, удовлетворяет всем необходимым требованиям. Как показывает пример из § 5 существуют функция b_ε и функционал l_ε , для которых оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ имеет вложенные собственные значения. Вместе с тем, если l_ε является функционалом из $W_2^1(Q)$ в $\mathbb{C}$, ограниченным равномерно по ε , то оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ удовлетворяет условию п. 2) теоремы 2.5 с $a_\varepsilon = 0$, и в этом случае оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ не имеет собственных значений, вложенных в непрерывный спектр.

Оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ в настоящем примере конечномерен, что позволяет в явном виде найти функцию $\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon, 0)\mathcal{L}_\varepsilon \phi_n^\pm$:

$$\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon, 0)\mathcal{L}_\varepsilon \phi_n^\pm = \frac{b_\varepsilon l_\varepsilon \phi_n^\pm}{1 - \varepsilon l_\varepsilon \mathcal{G}_{n,0}^\pm b_\varepsilon},$$

откуда следует, что

$$(\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon, 0)\mathcal{L}_\varepsilon \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(Q)} = \frac{(b_\varepsilon, \phi_n^\pm)_{L_2(Q)} l_\varepsilon \phi_n^\pm}{1 - \varepsilon l_\varepsilon \mathcal{G}_{n,0}^\pm b_\varepsilon}. \quad (9.3)$$

Отсюда в силу теоремы 2.7 выводим, что собственное значение $\lambda_{\varepsilon,n}^\pm$ существует, если $\pm \text{Re}(b_\varepsilon, \phi_n^\pm)_{L_2(Q)} l_\varepsilon \phi_n^\pm > 0$, и отсутствует, если $\pm \text{Re}(b_\varepsilon, \phi_n^\pm)_{L_2(Q)} l_\varepsilon \phi_n^\pm < 0$ или $(b_\varepsilon, \phi_n^\pm)_{L_2(Q)} l_\varepsilon \phi_n^\pm = 0$. В случае существования асимптотика собственного значения $\lambda_{\varepsilon,n}^\pm$ определяется равенствами (2.13) и (9.3):

$$\lambda_{\varepsilon,n}^\pm = \mu_n^\pm \mp \frac{\varepsilon^2}{4|\dot{D}(\mu_n^\pm)|} \frac{(b_\varepsilon, \phi_n^\pm)_{L_2(Q)}^2 (l_\varepsilon \phi_n^\pm)^2}{(1 - \varepsilon l_\varepsilon \mathcal{G}_{n,0}^\pm b_\varepsilon)^2} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)),$$

$$\lambda_{\varepsilon,n}^\pm = \mu_n^\pm \mp \frac{\varepsilon^2}{4|\dot{D}(\mu_n^\pm)|} (b_\varepsilon, \phi_n^\pm)_{L_2(Q)}^2 (l_\varepsilon \phi_n^\pm)^2 (1 - 2\varepsilon l_\varepsilon \mathcal{G}_{n,0}^\pm b_\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

Список литературы

1. И. М. Глазман, *Прямые методы спектрального качественного анализа сингулярных дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1963; англ. пер.: I. M. Glazman, *Direct methods of qualitative spectral analysis of singular differential operators*, Daniel Davey & Co., Inc., New York, 1966.
2. M. S. P. Eastham, *The spectral theory of periodic differential equations*, Texts in Mathematics, Scottish Academic Press, Edinburgh, 1973.
3. Ф. С. Рофе-Бекетов, “Признак конечности числа дискретных уровней, вносимых в лакуны непрерывного спектра возмущениями периодического потенциала”, *Докл. АН СССР*, **156**:3 (1964), 515–518; англ. пер.: F. S. Rofe-Beketov, “A test for the finiteness of the number of discrete levels introduced into the gaps of a continuous spectrum by perturbations of a periodic potential”, *Sov. Math. Dokl.*, **5** (1964), 689–692.
4. В. А. Желудев, “О собственных значениях возмущенного оператора Шрёдингера с периодическим потенциалом”, *Проблемы матем. физики*, **2** (1967), 108–123.
5. В. А. Желудев, “О возмущении спектра одномерного самосопряженного оператора Шрёдингера с периодическим потенциалом”, *Проблемы матем. физики*, **3** (1968), 31–48; англ. пер.: V. A. Zheludev, “Perturbations of the spectrum of the Schrödinger operator with a complex periodic potential”, *Spectral Theory*, **3** (1969), 25–41.
6. F. Gesztesy, B. Simon, “A short proof of Zheludev’s theorem”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **335**:1 (1993), 329–340.
7. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972; пер. с англ.: T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **132**, Springer-Verlag, New York, 1966.
8. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1981; англ. пер. 2-го изд.: A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Introductory real analysis*, Dover Publications, Inc., New York, 1975.
9. Е. Санчес-Паленсия, *Неоднородные среды и теория колебаний*, Мир, М., 1984; пер. с англ.: E. Sánchez-Palencia, *Nonhomogeneous media and vibration theory*, Lecture Notes in Phys., **127**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1980.
10. Р. Р. Гадыльшин, “О локальных возмущениях оператора Шрёдингера на оси”, *ТМФ*, **132**:1 (2002), 97–104; англ. пер.: R. R. Gadyl’shin, “Local perturbations of the Schrödinger operator on the axis”, *Theoret. and Math. Phys.*, **132**:1 (2002), 976–982.
11. А. Ф. Филиппов, *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*, Наука, М., 1981; англ. пер.: A. F. Filippov, *Differential equations with discontinuous right-hand sides*, Mathematics and Its Applications: Soviet Series, **18**, Kluwer, Dordrecht, 1988.

Д. И. БОРИСОВ (D. I. BORISOV)

Башкирский государственный педагогический университет

им. М. Акмуллы

E-mail: borisovdi@yandex.ru

Поступило в редакцию

25.08.2006

24.03.2008

Р. Р. ГАДЫЛЬШИН (R. R. GADYL'SHIN)

Башкирский государственный педагогический университет

им. М. Акмуллы

E-mail: gadylshin@yandex.ru