Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Абанин, Ω -ультрараспределения, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 2, 3–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/im1147>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 14:59:13

УДК 517.982

А. В. Абанин

 Ω -ультрасредделения

Разработано обобщение подхода А. Берлинга к построению теории ультрасредделений, в котором преобразование Фурье является основополагающим инструментом. Установлены структурная теорема о представлении ультрасредделений и теорема типа Пэли–Винера–Шварца. Выявлена ключевая роль продолжения весов, задающих пространства и изначально определенных на N -мерном действительном пространстве, в N -мерное комплексное пространство.

Библиография: 27 наименований.

Введение

В теории Л. Шварца (см. [1], а также [2]–[4]) распределения на открытом в $\mathbb{R}^N$ множестве определяются как элементы пространства $\mathcal{D}'(G)$, сопряженного к пространству $\mathcal{D}(G)$ пробных функций. Если вместо $\mathcal{D}(G)$ взять какое-либо его линейное подпространство $\tilde{\mathcal{D}}(G)$ с локально выпуклой топологией, относительно которой $\tilde{\mathcal{D}}(G)$ вложено в $\mathcal{D}(G)$ непрерывно, то $\tilde{\mathcal{D}}'(G)$ будет шире $\mathcal{D}'(G)$ в том смысле, что сужение каждого функционала из $\mathcal{D}'(G)$ на $\tilde{\mathcal{D}}(G)$ будет элементом $\tilde{\mathcal{D}}'(G)$. Это обстоятельство является весомым аргументом для изучения распределений, отличных от классических. При этом элементы $\tilde{\mathcal{D}}'(G)$ называют *ультрасредделениями* (на G).

Большая часть работ, посвященных изучению ультрасредделений, относится к прямым аналогам и обобщениям теории Л. Шварца, когда в качестве пробных рассматриваются функции из $\mathcal{D}(G)$, рост производных которых оценивается с помощью фиксированной числовой последовательности (см. [5]–[10]). Гораздо меньшее развитие получил подход А. Берлинга [11], основанный на том простом наблюдении, что изначально $\mathcal{D}(G)$ можно определить как пространство тех непрерывных функций с компактными носителями в G , преобразования Фурье которых убывают на бесконечности быстрее, чем $(1 + |\xi|)^{-n} = \exp\{-n \ln(1 + |\xi|)\}$ при любом $n \in \mathbb{N}$. А. Берлинг предложил брать вместо $\ln(1 + |\xi|)$ произвольную непрерывную полуаддитивную сверху в $\mathbb{R}^N$ функцию $\omega(\xi)$, подчиненную двум естественным ограничениям. С одной стороны, требуется, чтобы $\ln(1 + |\xi|) = O(\omega(\xi))$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, а с другой – рост ω на бесконечности должен быть не слишком быстрым, чтобы соответствующее пространство пробных функций было нетривиальным. Детальную разработку подхода А. Берлинга при этих ограничениях провел Г. Бьорк [12].

С определенной точки зрения (см. [13], [14]) теория Берлинга–Бьорка оказалась уже, чем теории, предложенные в [5]–[10]. В связи с этим сначала И. Циоранеску и Л. Жидо в [13] для одномерного случая, а затем Р. В. Браун,

Р. Майзе и Б. А. Тейлор в [14] для многомерного разработали две модификации подхода А. Берлинга, которые приводили к теориям ультрасредств, эквивалентным теориям, построенным в [5]–[10]. Суть более общей, чем в [13], модификации из работы [14] сводится к следующим основным моментам:

1) рассматриваются лишь веса вида $\omega(|\xi|)$ (в принципе, исходя из принятой в [13] и [14] классификации теорий ультрасредств по широте, такая возможность содержится еще у Г. Бьорка в [12]);

2) полуаддитивность ω заменяется более слабым условием существования такого $K \geq 1$, что $\omega(s + t) \leq K(\omega(s) + \omega(t) + 1)$ при всех $s, t \geq 0$;

3) от ω требуется дополнительно, чтобы функция $\omega(e^x)$ была выпуклой на $\mathbb{R}$.

По таким весам ω в [14] были построены пространства $\mathcal{D}_\omega(G)$ пробных и $\mathcal{E}_\omega(G)$ всех ультрадифференцируемых в G функций ($\mathcal{E}_\omega(G)$ соответствует пространству $\mathcal{E}(G)$ всех бесконечно дифференцируемых в G функций) и для них получены аналоги основополагающих результатов классической теории распределений. В дальнейшем модель из [14] подтвердила свою плодотворность тем, что в ее рамках удалось провести исследования заверщенного характера по нескольким известным задачам. Последнее касается, например, разрешимости уравнений в частных производных и свертки [15], [16], продолжения функций по Борелю–Уитни [17], [18] и проективного описания индуктивных топологий [19].

По набору входящих в них пространств ультрадифференцируемых функций и ультрасредств шкалы из [5]–[10] и [11]–[14] различны. Они имеют зону пересечения (в нее входят, в частности, $\mathcal{D}(G)$ и $\mathcal{D}'(G)$, а также классы Жевре и сопряженные к ним), не совпадают и ни одна из них не шире другой. Следует отметить, что существенное для используемых в [14] методов требование о выпуклости $\omega(e^x)$ приводит к тому, что пространства $\mathcal{D}_\omega(G)$ и $\mathcal{E}_\omega(G)$ можно описать с помощью оценок на производные входящих в них функций (см. [14, предложение 3.4]). Более того, практически все содержательные результаты получены в [14] за счет этого описания и в его рамках. Таким образом, от идеи А. Берлинга в [14] осталось фактически неиспользуемое изначальное определение пространств пробных функций с помощью оценок их преобразований Фурье.

Цель настоящей статьи – разработка такого обобщения подхода А. Берлинга, в котором преобразование Фурье выступает стержнем всех методов и результатов. Выделим главные, на наш взгляд, моменты предлагаемого обобщения. Построенная в работе шкала пространств, задаваемых последовательностями весов, содержит в качестве частных случаев пространства ультрадифференцируемых функций и ультрасредств из упомянутых выше работ [5]–[14]. Попутно мы избавляемся от одного из традиционных для данного направления постулатов о кольцевой структуре пространств пробных функций. Конечно, ценность представляет не шкала сама по себе, а то обстоятельство, что для входящих в нее пространств удается доказать аналоги основополагающих результатов классической теории распределений. Теорема 1 описывает структуру ультрасредств, теорема 2 устанавливает изоморфизм между пространствами пробных и целых функций, а теорема 3 является обобщением теоремы

Пэли–Винера–Шварца. Все они получены в новой форме. В частности, представление ультрараспределений в структурной теореме 1 дается с помощью интеграла по мерам Радона (ср. с [6, теорема 1] и [10, теоремы 8.1 и 8.7]), а в теореме 2 и предложениях 10 и 11, которые играют ключевую роль в доказательстве теоремы 3, в оценках, задающих соответствующие пространства целых функций, участвуют не сами веса, а их продолжения в $\mathbb{C}^N$ (ср. с [10, теорема 9.1], [12, теорема 1.4.1] и [14, теорема 7.4]). Наличие этого продолжения в описании сопряженного пространства выявляет причину наличия или отсутствия теорем Уитни о продолжении ультрадифференцируемых функций с компакта во все пространство (см. [17], [18]). При этом теоремы 2 и 3 получены для гораздо более широкого класса весов, чем анонсировано в недавней работе автора [20] (где удалось рассмотреть лишь пространства с кольцевой структурой).

§ 1. Пространства пробных Ω-ультрадифференцируемых функций

N-весом будем называть произвольную измеримую по Лебегу локально ограниченную в $\mathbb{R}^N$ функцию $\omega: \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty)$, для которой

$$a_\omega := \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\omega(\xi)} d\lambda_N < \infty, \quad A_\omega := \int_1^\infty \frac{\bar{\omega}(t)}{t^2} dt < \infty. \quad (1)$$

Здесь и далее λ_N – мера Лебега в $\mathbb{R}^N$, $\bar{\omega}(t) := \sup\{\omega(\xi): \|\xi\| \leq t\}$ и $\|\xi\| := \max\{|\xi_1|, \dots, |\xi_N|\}$ для $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$.

С каждым *N*-весом ω и компактом K в $\mathbb{R}^N$ свяжем банахово пространство

$$\mathcal{D}_\omega(K) := \left\{ g \in \mathcal{C}_0(K) \mid \|g\|_\omega := \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} |\hat{g}(\xi)| e^{\omega(\xi)} < \infty \right\},$$

где $\mathcal{C}_0(K)$ – пространство непрерывных в $\mathbb{R}^N$ функций с носителями в K , а $\hat{g}$ – преобразование Фурье функции g . Поскольку норма $\|\cdot\|_\omega$ не зависит от носителя g , то $\mathcal{D}_\omega(K)$ – замкнутое подпространство пространства $\mathcal{D}_\omega(L)$ для любого компакта $L \supset K$.

Будем говорить, что *N*-вес ω подчинен *N*-весу σ и записывать $\omega \prec \sigma$, если имеется такое $C \geq 0$, что $\omega(\xi) \leq \sigma(\xi) + C$ в $\mathbb{R}^N$. Ясно, что если $\omega \prec \sigma$, то $\mathcal{D}_\sigma(K) \hookrightarrow \mathcal{D}_\omega(K)$, где $\hookrightarrow$ – символ непрерывного вложения. Подчиненные друг другу *N*-веса ω и σ называются эквивалентными ($\omega \sim \sigma$). Очевидно, $\mathcal{D}_\omega(K) = \mathcal{D}_\sigma(K)$ для $\omega \sim \sigma$.

Обозначим через $W_N^\uparrow$ (через $W_N^\downarrow$) совокупность всех последовательностей *N*-весов $\Omega = (\omega_n)_{n=1}^\infty$, для которых $\omega_1 \prec \omega_2 \prec \dots$ (соответственно, $\dots \prec \omega_2 \prec \omega_1$). По Ω из $W_N^\uparrow$ (из $W_N^\downarrow$) образуем линейное пространство

$$\mathcal{D}_{(\Omega)}(K) := \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{D}_{\omega_n}(K) \quad \left(\mathcal{D}_{\{\Omega\}}(K) := \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{D}_{\omega_n}(K) \right),$$

которое будем рассматривать вместе с топологией проективного (соответственно, индуктивного) предела пространств $\mathcal{D}_{\omega_n}(K)$ относительно отображений

вложения. Для открытого в $\mathbb{R}^N$ множества G определим пространство

$$\mathcal{D}_\Omega(G) := \bigcup_{K \in G} \mathcal{D}_\Omega(K)$$

и снабдим его топологией индуктивного предела пространств $\mathcal{D}_\Omega(K)$ относительно отображений вложения. Здесь и ниже запись $K \in G$ означает, что K – компакт в $\mathbb{R}^N$, лежащий в G , а Ω пишем без скобок в тех случаях, когда какое-либо утверждение или обозначение касается как $\Omega \in W_N^\uparrow$, так и $\Omega \in W_N^\downarrow$. Функции из $\mathcal{D}_\Omega(G)$ называются *пробными Ω -ультрадифференцируемыми функциями в G* . Нетрудно видеть, что введенные выше пространства отделимы и что в задании $\mathcal{D}_\Omega(G)$ можно ограничиться произвольной последовательностью $(K_j)_{j=1}^\infty$ компактов, исчерпывающей G , т.е. такой, что $K_j \subset \text{int } K_{j+1}$, $j = 1, 2, \dots$, и $\bigcup_{j=1}^\infty K_j = G$. Поскольку при этом $\mathcal{D}_\omega(K_j)$ является топологическим подпространством $\mathcal{D}_\omega(K_{j+1})$ для любого N -веса ω , то и $\mathcal{D}_\Omega(K_j)$ будет топологическим подпространством $\mathcal{D}_\Omega(K_{j+1})$, $j = 1, 2, \dots$. Следовательно, $\mathcal{D}_\Omega(G) = \text{ind}_j \mathcal{D}_\Omega(K_j)$ – отделимый строгий индуктивный предел локально выпуклых пространств $\mathcal{D}_\Omega(K_j)$ (по поводу строгих индуктивных пределов см. [21, гл. VII]). Заметим еще, что в случае $\Omega \in W_N^\downarrow$ имеем

$$\mathcal{D}_{\{\Omega\}}(G) = \text{ind}_j \text{ind}_n \mathcal{D}_{\omega_n}(K_j) = \text{ind}_n \mathcal{D}_{\omega_n}(K_n).$$

Пусть $\Omega = (\omega_n)_{n=1}^\infty$ и $\Sigma = (\sigma_n)_{n=1}^\infty$ – весовые последовательности из $W_N^\uparrow$ (или из $W_N^\downarrow$). Будем говорить, что Ω *подчинена* Σ и записывать $\Omega \prec \Sigma$, если для любого n имеется такое m , что $\omega_n \prec \sigma_m$ (соответственно, $\omega_m \prec \sigma_n$). Подчиненные друг другу последовательности Ω и Σ называются *эквивалентными* ($\Omega \sim \Sigma$). Если $\Omega \prec \Sigma$, то $\mathcal{D}_\Sigma(\cdot) \hookrightarrow \mathcal{D}_\Omega(\cdot)$, а если $\Omega \sim \Sigma$, то $\mathcal{D}_\Sigma(\cdot) = \mathcal{D}_\Omega(\cdot)$. В частности, если $\omega_n \sim \sigma_n$ при всех n , то $\Omega \sim \Sigma$ и, следовательно, $\mathcal{D}_\Sigma(\cdot) = \mathcal{D}_\Omega(\cdot)$. Далее, так как $\Omega = (\omega_n)_{n=1}^\infty \sim (\omega_n + C_n)_{n=1}^\infty$ при любых постоянных $C_n \geq 0$, то, не ограничивая общности, можно считать Ω из $W_N^\uparrow$ (из $W_N^\downarrow$) неубывающими (невозрастающими) по n на $\mathbb{R}^N$. Заметим также, что всякая весовая последовательность эквивалентна любой своей подпоследовательности. Поэтому приводимые ниже ограничения на весовые последовательности можно считать выполненными хотя бы для одной их подпоследовательности. Мы будем пользоваться этим обстоятельством постоянно, чтобы сделать изложение технически более прозрачным.

Выделим некоторые классы в $W_N^\uparrow \cup W_N^\downarrow$, для которых соответствующие пространства пробных функций обладают дополнительными свойствами.

Простейшим условием, вытекающим из формулы $\widehat{\partial_j g}(\xi) = (-i\xi_j)\hat{g}(\xi)$ и обеспечивающим замкнутость пространства $\mathcal{D}_\Omega(\cdot)$ относительно операций частного дифференцирования $g \mapsto \partial_j g$, $j = 1, \dots, N$, и одновременно непрерывность соответствующих операторов из $\mathcal{D}_\Omega(\cdot)$ в $\mathcal{D}_\Omega(\cdot)$, является существование таких $C_n \geq 0$, что

$$\ln(1 + \|\xi\|) \leq |\omega_{n+1}(\xi) - \omega_n(\xi)| + C_n, \quad \xi \in \mathbb{R}^N. \quad (2)$$

Обозначим через $DW_N^\uparrow$ (соответственно, $DW_N^\downarrow$) совокупность всех Ω из $W_N^\uparrow$ (из $W_N^\downarrow$), которые удовлетворяют (2). В соответствии с вышесказанным мы сохраним эти обозначения за классами всех весовых последовательностей, эквивалентных элементам $DW_N^\uparrow$ или $DW_N^\downarrow$. Так же будем поступать и с другими классами, не оговаривая этого дополнительно.

Отметим еще одно обстоятельство. Стандартные рассуждения, основанные на теореме Арцела, показывают, что при $\omega_n \prec \omega_{n+1}$ (соответственно, при $\omega_{n+1} \prec \omega_n$) условие (2) влечет, что $\mathcal{D}_{\omega_{n+1}}(K)$ компактно содержится в (соответственно, содержит) $\mathcal{D}_{\omega_n}(K)$. Поэтому $\mathcal{D}_\Omega(K)$ – (FS)-пространство для $\Omega \in DW_N^\uparrow$ и (DFS)-пространство для $\Omega \in DW_N^\downarrow$ (по поводу (FS)- и (DFS)-пространств см. обзор [22]). Кроме того, в случае, когда $\Omega \in DW_N^\downarrow$, а $(K_j)_{j=1}^\infty$ исчерпывает G , пространство $\mathcal{D}_{\omega_n}(K_n)$ при всех n компактно вложено в $\mathcal{D}_{\omega_{n+1}}(K_{n+1})$, и, значит, $\mathcal{D}_{\{\Omega\}}(G)$ является (DFS)-пространством.

Через $RW_N^\uparrow$ (соответственно, $RW_N^\downarrow$) обозначим семейство тех Ω из $DW_N^\uparrow$ (из $DW_N^\downarrow$), для которых существуют такие $A_n \geq 0$, что при каждом n и всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ выполняется неравенство

$$\omega_n(\xi + \eta) \leq \omega_{n+1}(\xi) + \omega_{n+1}(\eta) + A_n \quad (3)$$

(соответственно, неравенство

$$\omega_{n+1}(\xi + \eta) \leq \omega_n(\xi) + \omega_n(\eta) + A_n). \quad (4)$$

Принадлежность Ω к $RW_N^\uparrow \cup RW_N^\downarrow$ обеспечивает у $\mathcal{D}_\Omega(X)$ структуру кольца относительно операций поточечного сложения и умножения функций. Например, если $\Omega \in RW_N^\uparrow$, $X = K \in \mathbb{R}^N$ и $g_1, g_2 \in \mathcal{D}_{(\Omega)}(K)$, то в силу (2) и (3) при каждом n и всех $\xi \in \mathbb{R}^N$ имеем

$$\begin{aligned} |(\widehat{g_1 g_2})(\xi)| &= \frac{1}{(2\pi)^N} |(\hat{g}_1 * \hat{g}_2)(\xi)| = \frac{1}{(2\pi)^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \hat{g}_1(\xi - \eta) \hat{g}_2(\eta) d\eta \right| \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^N} \|g_1\|_{\omega_{n+1}} \|g_2\|_{\omega_{n+N+2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\omega_{n+1}(\xi - \eta) - \omega_{n+N+2}(\eta)} d\eta \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^N} e^{D_n} \|g_1\|_{\omega_{n+1}} \|g_2\|_{\omega_{n+N+2}} e^{-\omega_n(\xi)} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(1 + \|\eta\|)^{N+1}} d\eta \\ &= \pi^{-N} e^{D_n} \|g_1\|_{\omega_{n+1}} \|g_2\|_{\omega_{n+N+2}} e^{-\omega_n(\xi)}, \end{aligned}$$

где $D_n := A_n + C_{n+1} + \dots + C_{n+N+1}$, а C_j и A_n – постоянные из условий (2) и (3). Поэтому при любом n

$$\|g_1 g_2\|_{\omega_n} \leq \pi^{-N} e^{D_n} \|g_1\|_{\omega_{n+1}} \|g_2\|_{\omega_{n+N+2}} < \infty.$$

Следовательно, $g_1 g_2 \in \mathcal{D}_{(\Omega)}(K)$, что и требовалось проверить.

Через V_N обозначим множество всех тех N -весов, для которых имеются такие $q \geq 1$ и $K \geq 0$, что

$$\omega(\xi + \eta) \leq q(\omega(\xi) + \omega(\eta)) + K \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N, \quad (5)$$

$$\ln \|\xi\| = o(\omega(\xi)), \quad \|\xi\| \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Каждый вес $\omega \in V_N$ порождает две последовательности $(n\omega)_{n=1}^\infty$ и $(\omega/n)_{n=1}^\infty$. В силу (5) и (6) первая из них принадлежит $RW_N^\uparrow$, а вторая – $RW_N^\downarrow$. Для пространств пробных ультрадифференцируемых функций, задаваемых $(n\omega)_{n=1}^\infty$ (соответственно, $(\omega/n)_{n=1}^\infty$), будем использовать обозначение $\mathcal{D}_{(\omega)}(\cdot)$ (соответственно, $\mathcal{D}_{\{\omega\}}(\cdot)$). Заметим, что так как $\frac{1}{n}\omega \leq \omega$ при всех n , то $\mathcal{D}_{(\omega)}(\cdot) \hookrightarrow \mathcal{D}_{\{\omega\}}(\cdot)$ для любого веса $\omega \in V_N$. Мы сохраним обозначение $\mathcal{D}_{(\omega)}(\cdot)$ и в случае, когда ω вместо (6) удовлетворяет более мягкому условию $\ln(1 + \|\xi\|) = O(\omega(\xi))$ при $\|\xi\| \rightarrow \infty$.

Пусть U – подмножество всех весов из V_1 , которые являются четными непрерывными на $\mathbb{R}$ и неубывающими на $[0, \infty)$ функциями. Каждая функция $\omega \in U$ при любом $N \in \mathbb{N}$ порождает N -вес $\omega(\|\xi\|)$ из V_N . В дальнейшем мы не будем делать различия между $\omega \in U$ и $\omega(\|\xi\|)$, если это не вызовет недоразумений. Веса из U впредь будем называть *каноническими*. Нетрудно видеть, что для любого канонического веса w пространство $\mathcal{D}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$ инвариантно относительно аффинных преобразований аргументов входящих в него функций.

Как известно (см. [12]), соответствующие $\omega_0(t) := \ln(1 + |t|)$ пространства $\mathcal{D}_{(\omega_0)}(\cdot)$ представляют собой не что иное, как шварцевские пространства пробных функций $\mathcal{D}(\cdot)$. Из (2) следует, что для $\Omega \in DW_N^\uparrow$ имеются такие $B_n \geq 0$, что $n \ln(1 + \|\xi\|) \leq \omega_{n+1}(\xi) + B_n$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^N$ и $n \in \mathbb{N}$. Для $\Omega \in DW_N^\downarrow$ условие (2) влечет, что $\ln(1 + \|\xi\|) = o(\omega_n(\xi))$ на бесконечности ($n = 1, 2, \dots$). Поэтому для произвольной весовой последовательности $\Omega \in DW_N^\uparrow \cup DW_N^\downarrow$ и любого $K \in \mathbb{R}^N$ имеет место непрерывное включение $\mathcal{D}_\Omega(K) \hookrightarrow \mathcal{D}_{(\omega_0)}(K) = \mathcal{D}(K)$, а тогда и $\mathcal{D}_\Omega(G) \hookrightarrow \mathcal{D}_{(\omega_0)}(G) = \mathcal{D}(G)$. Таким образом, шварцевское пространство $\mathcal{D}(X)$ содержит в себе все Ω -ультрадифференцируемые функции на X .

Следующая лемма, как будет ясно из дальнейшего, играет существенную техническую роль в решении многих затрагиваемых в работе задач.

ЛЕММА 1. *Для любой последовательности N -весов $\Omega = (\omega_n)_{n=1}^\infty$ имеется такой канонический вес σ , что $\omega_n(\xi) = o(\sigma(\|\xi\|))$, когда $\|\xi\| \rightarrow \infty$, при всех n . В частности, для любого N -веса ω найдется вес σ из U , для которого $\omega(\xi) = o(\sigma(\|\xi\|))$ при $\|\xi\| \rightarrow \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменив $\omega_n(\xi)$ на $\omega'_n(\xi) := \max\{\omega_1(\xi), \dots, \omega_n(\xi)\}$, можно считать, не ограничивая общности, что Ω не убывает по n .

Выберем $(t_n)_{n=1}^\infty$, $0 = t_0 < t_1 < \dots$, так, чтобы

$$\int_{t_n}^\infty \frac{\bar{\omega}_n(t)}{t^2} dt < \frac{1}{n^3}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Положим $\mu(t) := n\bar{\omega}_n(t) + \ln^2(1 + t)$ при $t \in [t_n, t_{n+1})$, $n = 0, 1, \dots$. Функция μ не убывает на $[0, \infty)$, $\bar{\omega}_n(t) = o(\mu(t))$ и $\ln t = o(\mu(t))$ при $t \rightarrow \infty$. При этом выполнено

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{\mu(t)}{t^2} dt &\leq \sum_{n=0}^\infty \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{n\bar{\omega}_n(t) + \ln^2(1 + t)}{t^2} dt \\ &\leq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} + \int_0^\infty \frac{\ln^2(1 + t)}{t^2} dt < \infty. \end{aligned} \quad (7)$$

Поэтому функция $\sigma(t) := 2 \int_1^\infty \frac{\mu(ts)}{s^3} ds$ принимает всюду на $[0, \infty)$ конечные значения. Проверим, что σ удовлетворяет лемме. Так как μ не убывает на $[0, \infty)$, то и σ не убывает на этом промежутке. Из представления

$$\sigma(t) = 2t^2 \int_t^\infty \frac{\mu(s)}{s^3} ds \quad (8)$$

следует, что σ непрерывна на $[0, \infty)$. Далее,

$$\sigma(t) \geq 2 \int_1^\infty \frac{\mu(t)}{s^3} ds = \mu(t) \quad \text{при всех } t \geq 0.$$

Поэтому $\ln t = o(\sigma(t))$ и $\bar{\omega}_n(t) = o(\sigma(t))$ при $t \rightarrow \infty$. Тем более, на бесконечности $\omega_n(\xi) = o(\sigma(\|\xi\|))$ при каждом n .

Поскольку $\ln t = o(\sigma(t))$ при $t \rightarrow \infty$, то $a_\sigma = 2 \int_0^\infty \exp(-\sigma(t)) dt < \infty$. Учитывая (7) и (8), имеем

$$\int_1^\infty \frac{\sigma(t)}{t^2} dt = 2 \int_1^\infty dt \int_t^\infty \frac{\mu(s)}{s^3} ds = 2 \int_1^\infty \frac{\mu(s)}{s^3} (s-1) ds \leq 2 \int_1^\infty \frac{\mu(s)}{s^2} ds < \infty.$$

Значит, $\sigma(|t|) \in W_1$. Кроме того, из (8) следует, что при всех $t \geq 0$

$$\sigma(2t) = 8t^2 \int_{2t}^\infty \frac{\mu(s)}{s^3} ds \leq 4\sigma(t).$$

Поэтому для любых $s, t \in \mathbb{R}$

$$\sigma(|s+t|) \leq \sigma(2 \max(|s|, |t|)) \leq 4\sigma(\max(|s|, |t|)) \leq 4(\sigma(|s|) + \sigma(|t|)).$$

Таким образом, $\sigma(|t|)$ принадлежит U , и доказательство завершено.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любой последовательности Ω из $W_N^\uparrow \cup W_N^\downarrow$ найдется такой канонический вес σ , что $\mathcal{D}_{(\sigma)}(\cdot) \hookrightarrow \mathcal{D}_\Omega(\cdot)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Omega \in W_N^\uparrow$. По лемме 1 существует такой канонический вес σ , что $\omega_n(\xi) = o(\sigma(\|\xi\|))$ при $\|\xi\| \rightarrow \infty$ для каждого n . Тогда $\mathcal{D}_\sigma(K) \hookrightarrow \mathcal{D}_{\omega_n}(K)$ при любом n , а значит, $\mathcal{D}_\sigma(K) \hookrightarrow \mathcal{D}_\Omega(K)$. Поскольку $\mathcal{D}_{(\sigma)}(K) \hookrightarrow \mathcal{D}_\sigma(K)$, то, тем более, $\mathcal{D}_{(\sigma)}(K) \hookrightarrow \mathcal{D}_\Omega(K)$.

В случае, когда $\Omega \in W_N^\downarrow$, построим по лемме 1 канонический вес σ , для которого $\omega_1(\xi) = o(\sigma(\|\xi\|))$ при $\|\xi\| \rightarrow \infty$. Тогда $\mathcal{D}_\sigma(K) \hookrightarrow \mathcal{D}_{\omega_1}(K)$. Так как $\mathcal{D}_{(\sigma)}(K) \hookrightarrow \mathcal{D}_\sigma(K)$ и $\mathcal{D}_{\omega_1}(K) \hookrightarrow \mathcal{D}_{\{\Omega\}}(K)$, то $\mathcal{D}_{(\sigma)}(K) \hookrightarrow \mathcal{D}_{\{\Omega\}}(K)$.

Итак, для любой последовательности $\Omega \in W_N^\uparrow \cup W_N^\downarrow$ имеется такой вес $\sigma \in U$, что $\mathcal{D}_{(\sigma)}(K) \hookrightarrow \mathcal{D}_\Omega(K)$ для произвольного $K \in \mathbb{R}^N$. Тогда $\mathcal{D}_{(\sigma)}(K) \hookrightarrow \mathcal{D}_\Omega(G)$ для любого открытого в $\mathbb{R}^N$ множества G и всех компактов K в G , а следовательно, и $\mathcal{D}_{(\sigma)}(G) \hookrightarrow \mathcal{D}_\Omega(G)$. Предложение доказано.

Как известно, нетривиальность пространств $\mathcal{D}_\Omega(\cdot)$ и наличие в них срезающих функций и разбиений единицы имеют существенное значение для многих задач и технических построений. По предложению 1 нам достаточно рассмотреть в этом отношении пространства $\mathcal{D}_{(\omega)}(\cdot)$, задаваемые каноническими весами ω .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть ω – канонический вес. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) для любого $\varepsilon > 0$ в $\mathcal{D}_{(\omega)}([- \varepsilon, \varepsilon]^N)$ имеется неотрицательная функция $\eta_{\omega, \varepsilon}$, для которой $\int_{\mathbb{R}^N} \eta_{\omega, \varepsilon}(x) dx = 1$;
- 2) для произвольного $K \Subset \mathbb{R}^N$ и любого $\varepsilon > 0$ существует функция $\eta_{\omega, K, \varepsilon} \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K_{3\varepsilon})$, для которой $0 \leq \eta_{\omega, K, \varepsilon}(x) \leq 1$ на $\mathbb{R}^N$ и $\eta_{\omega, K, \varepsilon}(x) = 1$ на K_ε ; здесь и далее $K_\delta := \{y \in \mathbb{R}^N : \text{dist}(y, K) \leq \delta\}$ – δ -расширение компакта K ;
- 3) если G – открытое в $\mathbb{R}^N$ множество и $(G_n)_{n=1}^\infty$ – его открытое локально конечное покрытие, причем $\overline{G_n} \Subset G$, $n = 1, 2, \dots$, то в $\mathcal{D}_{(\omega)}(G)$ имеется разбиение единицы, подчиненное покрытию $(G_n)_{n=1}^\infty$, т.е. найдутся такие неотрицательные функции $e_n \in \mathcal{D}_{(\omega)}(G_n)$, что $\sum_{n=1}^\infty e_n(x) = 1$ всюду на G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 найдем канонический вес σ , для которого $\omega(t) = o(\sigma(t))$ при $t \rightarrow \infty$. При этом в соответствии с доказательством леммы 1 функцию σ можно выбрать так, чтобы

$$\sigma(s+t) \leq 4(\sigma(s) + \sigma(t)) \quad \forall s, t \in [0, \infty). \quad (9)$$

Воспользовавшись [14, лемма 2.3], нетрудно построить такую функцию $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, для которой $1 \in \text{supp } g \subset [0, \infty)$ и

$$|\hat{g}(\xi)| \leq e^{-\sigma(|\xi|)} \quad \text{на } \mathbb{R}. \quad (10)$$

Положим $f = (\text{Re } g)^2 + (\text{Im } g)^2$. Эта функция также принадлежит $C^\infty(\mathbb{R})$, $1 \in \text{supp } f \subset [0, \infty)$, и по свойствам преобразования Фурье при всех $\xi \in \mathbb{R}$

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{g\bar{g}}(\xi) = \frac{1}{2\pi} (\hat{g} * \hat{\bar{g}})(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\xi - x) \bar{\hat{g}}(-x) dx.$$

С учетом (10) и (9) при всех $\xi \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(\xi)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma(|\xi-x|)-\sigma(|x|)} dx \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma(|x|)} e^{-\frac{1}{2}(\sigma(|\xi-x|)+\sigma(|x|))} dx \leq A e^{-\frac{1}{8}\sigma(|\xi|)}, \end{aligned}$$

где $A = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\sigma(x)} dx < \infty$.

Рассмотрим функцию $\gamma(x) := f(1+x)f(1-x)$. Ясно, что $\gamma(x) \geq 0$ на $\mathbb{R}$, $\gamma(0) \neq 0$, $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $\text{supp } \gamma \subset [-1, 1]$. Повторив по сути те же рассуждения, которые были проведены выше при оценке $|\widehat{f}(\xi)|$, для всех $\xi \in \mathbb{R}$ получим

$$|\widehat{\gamma}(\xi)| = \left| \frac{e^{i\xi}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi - x) \widehat{f}(-x) e^{-2ix} dx \right| \leq B e^{-\frac{1}{64}\sigma(|\xi|)},$$

где $B = \frac{A^2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{16}\sigma(x)} dx < \infty$.

Взяв $\eta_\omega(x_1, \dots, x_n) := a^{-n} \gamma(x_1) \dots \gamma(x_n)$, где $a = \int_{-1}^1 \gamma(x) dx$, получим неотрицательную функцию $\eta_\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, для которой $\int_{\mathbb{R}^N} \eta_\omega(x) dx = 1$. При этом $\hat{\eta}_\omega(\xi_1, \dots, \xi_n) = a^{-n} \widehat{\gamma}(\xi_1) \dots \widehat{\gamma}(\xi_n)$ и, следовательно, всюду в $\mathbb{R}^N$

$$|\hat{\eta}_\omega(\xi)| \leq C e^{-\frac{1}{64}\sigma(\|\xi\|)}, \quad (11)$$

где $C := (B/a)^N < \infty$.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим $\eta_{\omega,\varepsilon}(x) := \varepsilon^{-N} \eta_{\omega}(x/\varepsilon)$, $x \in \mathbb{R}^N$. Тогда

$$\eta_{\omega,\varepsilon}(x) \geq 0 \quad \text{на } \mathbb{R}^N, \quad \text{supp } \eta_{\omega,\varepsilon} \subset [-\varepsilon, \varepsilon]^N, \quad \int_{\mathbb{R}^N} \eta_{\omega,\varepsilon}(x) dx = 1.$$

Кроме того, $\hat{\eta}_{\omega,\varepsilon}(\xi) = \hat{\eta}_{\omega}(\varepsilon\xi)$ на $\mathbb{R}^N$. В силу (9) имеем $\sigma(t) \leq 8^{n_\varepsilon} \sigma(\varepsilon t)$ при всех $t \geq 0$, где $n_\varepsilon := [\log_2^+(1/\varepsilon)] + 1$, $[x]$ – целая часть действительного числа x и $x^+ := \max(0, x)$. Поэтому из (11) при всех $\xi \in \mathbb{R}^N$ имеем

$$|\hat{\eta}_{\omega,\varepsilon}(\xi)| = |\hat{\eta}_{\omega}(\varepsilon\xi)| \leq C e^{-\sigma(\varepsilon\|\xi\|)/64} \leq C e^{-\mu\sigma(\|\xi\|)},$$

где $\mu := 8^{-n_\varepsilon-2}$. Остается вспомнить, что $\omega(t) = o(\sigma(t))$ при $t \rightarrow \infty$, чтобы заключить, что $\eta_{\omega,\varepsilon} \in \mathcal{D}_{(\omega)}([- \varepsilon, \varepsilon]^N)$, и тем самым доказательство утверждения 1) завершено.

Утверждения 2) и 3) следуют из 1) за счет стандартных конструкций. Именно, в качестве $\eta_{\omega,K,\varepsilon}$ достаточно взять свертку $\eta_{\omega,\varepsilon} * \chi_{K_{2\varepsilon}}$, где $\chi_{K_{2\varepsilon}}$ – характеристическая функция компакта $K_{2\varepsilon}$. А чтобы доказать 3), поступаем следующим образом. В силу свойств покрытия $(G_n)_{n=1}^\infty$ имеются такие открытые множества D_n , что $K_n := \overline{D_n} \subset G_n$, $n = 1, 2, \dots$, и $\bigcup_{n=1}^\infty D_n = G$. Выберем ε_n настолько малым, чтобы $3\varepsilon_n$ -расширение K_n лежало в G_n , и положим $g_n := \eta_{\omega,K_n,\varepsilon_n}$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда искомое разбиение единицы образуют функции $e_1 := g_1$, $e_n := (1 - g_1) \dots (1 - g_{n-1})g_n$ при $n \geq 2$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Каковы бы ни были весовая последовательность Ω из $W_N^\uparrow \cup W_N^\downarrow$ и открытое множество $G \subset \mathbb{R}^N$, пространство $\mathcal{D}_\Omega(G)$ нетривиально и в нем имеется разбиение единицы, подчиненное данному открытому локально конечному покрытию G относительно компактными в G подмножествами G_n .*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для произвольных $\Omega \in W_N^\uparrow \cup W_N^\downarrow$, $K \in \mathbb{R}^N$ и $\varepsilon > 0$ в $\mathcal{D}_\Omega(K_{3\varepsilon})$ имеется неотрицательная срезающая функция для K_ε .*

Следствия 1 и 2 вытекают непосредственно из предложений 1 и 2.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть G – открытое множество в $\mathbb{R}^N$, а Ω и Σ – весовые последовательности из $DW_N^\uparrow$ или из $DW_N^\downarrow$, причем $\Omega \prec \Sigma$. Тогда $\mathcal{D}_\Sigma(G)$ – плотное подпространство в $\mathcal{D}_\Omega(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 1 имеется такой канонический вес ω , что $\mathcal{D}_{(\omega)}(G) \hookrightarrow \mathcal{D}_\Sigma(G)$. Поэтому достаточно проверить плотность в $\mathcal{D}_\Omega(G)$ пространства $\mathcal{D}_{(\omega)}(G)$. С этой целью для любого $\varepsilon > 0$ построим функцию $\eta_{\omega,\varepsilon}$, удовлетворяющую требованиям утверждения 1) предложения 2, и рассмотрим $g_\varepsilon := g * \eta_{\omega,\varepsilon}$, где $g \in \mathcal{D}_\Omega(G)$. Так как $\hat{g}_\varepsilon = \hat{g} \hat{\eta}_{\omega,\varepsilon}$ и $\hat{g}$ ограничена в $\mathbb{R}^N$, то $g_\varepsilon \in \mathcal{D}_{(\omega)}(G)$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Дальнейшие рассуждения требуют раздельного рассмотрения случаев $\Omega \in DW_N^\uparrow$ и $\Omega \in DW_N^\downarrow$. В первом из них, воспользовавшись тем, что

$$|1 - \hat{\eta}_{\omega,\varepsilon}(\xi)| = \left| \int_{[-\varepsilon, \varepsilon]^N} \eta_{\omega,\varepsilon}(x) (1 - e^{-i\langle x, \xi \rangle}) dx \right| \leq \varepsilon N \|\xi\|,$$

и условием (2), имеем

$$\|g - g_\varepsilon\|_{\omega_n} = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} |\hat{g}(\xi)| |1 - \hat{\eta}_{\omega, \varepsilon}(\xi)| e^{\omega_n(\xi)} \leq \varepsilon N e^{C_n} \|g\|_{\omega_{n+1}}.$$

Так как $\|g\|_{\omega_{n+1}} < \infty$ при всех n , то отсюда следует, что $g_\varepsilon \rightarrow g$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в $\mathcal{D}_\Omega(G)$. Во втором случае для $g \in \mathcal{D}_{\{\Omega\}}(G)$ имеется n , при котором $\|g\|_{\omega_n} < \infty$, а условие (2) влечет оценку

$$\|g - g_\varepsilon\|_{\omega_{n+1}} \leq \varepsilon N e^{C_n} \|g\|_{\omega_n}.$$

Поэтому $g_\varepsilon \rightarrow g$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в $\mathcal{D}_{\omega_{n+1}}(L)$, где L – произвольный компакт в G , $\text{int } L \supset \text{supp } g$. Тогда $g_\varepsilon \rightarrow g$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в $\mathcal{D}_{\{\Omega\}}(G)$. Следствие доказано.

Назовем весовую последовательность Ω из $DW_N^\uparrow$ (из $DW_N^\downarrow$) *правильной*, если при каждом n найдется такой N -вес v_n , что при всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$

$$\omega_n(\xi + \eta) \leq \omega_{n+1}(\xi) + v_n(\eta) \quad (\omega_{n+1}(\xi + \eta) \leq \omega_n(\xi) + v_n(\eta)).$$

Класс всех правильных Ω обозначим через $\mathcal{W}_N^\uparrow$ (соответственно, $\mathcal{W}_N^\downarrow$). Из леммы 1 следует, что для любой последовательности Ω из $\mathcal{W}_N^\uparrow \cup \mathcal{W}_N^\downarrow$ можно указать такой канонический вес v , что при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$

$$\omega_n(\xi + \eta) \leq \omega_{n+1}(\xi) + v(\|\eta\|), \quad \text{если } \Omega \in \mathcal{W}_N^\uparrow,$$

или

$$\omega_{n+1}(\xi + \eta) \leq \omega_n(\xi) + v(\|\eta\|), \quad \text{если } \Omega \in \mathcal{W}_N^\downarrow.$$

Вес v , удовлетворяющий приведенным условиям, будем называть *ассоциированным* с Ω . Ясно, что $RW_N^\uparrow \subset \mathcal{W}_N^\uparrow$, а $RW_N^\downarrow \subset \mathcal{W}_N^\downarrow$. В частности, правильными являются:

1) последовательности из $DW_N^\uparrow \cup DW_N^\downarrow$, состоящие из полуаддитивных сверху функций;

2) $(n\omega)_{n=1}^\infty$ и $(\omega/n)_{n=1}^\infty$, каков бы ни был вес $\omega \in U$.

Как было отмечено выше, из подчинения $\Omega \prec \Sigma$ следует, что $\mathcal{D}_\Sigma(\cdot)$ непрерывно вложено в $\mathcal{D}_\Omega(\cdot)$. Для правильной последовательности Σ справедливо обратное утверждение, доказательство которого проводится по схеме, предложенной Г. Бьорком в случае, когда $\Omega = (n\omega)_{n=1}^\infty$ и $\Sigma = (n\sigma)_{n=1}^\infty$, а ω и σ – полуаддитивные сверху функции из класса V_N (см. [12, теорема 1.3.8]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\Omega \in W_N^\uparrow$ (или $W_N^\downarrow$), а $\Sigma \in \mathcal{W}_N^\uparrow$ (соответственно, $\mathcal{W}_N^\downarrow$). Если $\mathcal{D}_\Sigma(X) \subset \mathcal{D}_\Omega(X)$ хотя бы для одного открытого или компактного подмножества X в $\mathbb{R}^N$ с непустой внутреннейностью, то $\Omega \prec \Sigma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если G открыто, то $\mathcal{D}_\Sigma(G) \subset \mathcal{D}_\Omega(G)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}_\Sigma(K) \subset \mathcal{D}_\Omega(K)$ для любого $K \Subset G$. Поэтому достаточно доказать предложение в случае, когда $X = K$ – компакт в $\mathbb{R}^N$ с непустой внутреннейностью. Без ограничения общности можно считать, что $0 \in \text{int } K$.

Пусть сначала Ω и Σ – последовательности из $W_N^\dagger$ и $\mathcal{W}_N^\dagger$ соответственно. Так как топологии $\mathcal{D}_{(\Sigma)}(K)$ и $\mathcal{D}_{(\Omega)}(K)$ мажорируют топологию поточечной сходимости, то условие $\mathcal{D}_{(\Sigma)}(K) \subset \mathcal{D}_{(\Omega)}(K)$ гарантирует замкнутость графика оператора вложения $\text{id}: \mathcal{D}_{(\Sigma)}(K) \rightarrow \mathcal{D}_{(\Omega)}(K)$. Тогда по теореме Банаха о замкнутом графике этот оператор непрерывен и, следовательно, $\mathcal{D}_{(\Sigma)}(K) \hookrightarrow \mathcal{D}_{(\Omega)}(K)$. Поэтому для любого n существуют m и C_n такие, что

$$\|g\|_{\omega_n} \leq C_n \|g\|_{\sigma_m} \quad \forall g \in \mathcal{D}_{(\Sigma)}(K). \quad (12)$$

В силу правильности Σ имеется такой вес $\sigma \in U$, что для любого n

$$\sigma_n(\xi + \eta) \leq \sigma_{n+1}(\xi) + \sigma(\|\eta\|) \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N. \quad (13)$$

По предложению 2 найдется функция $\eta \in \mathcal{D}_{(\sigma)}(K)$ с $\hat{\eta}(0) = 1$. Рассмотрим при каждом фиксированном $\xi_0 \in \mathbb{R}^N$ функцию $g_{\xi_0}(x) = \eta(x)e^{i\langle x, \xi_0 \rangle}$. Для нее $\hat{g}_{\xi_0}(\xi) = \hat{\eta}(\xi - \xi_0)$, откуда с учетом принадлежности σ классу U следует, что $g_{\xi_0} \in \mathcal{D}_{(\sigma)}(K)$, а тогда $g_{\xi_0} \in \mathcal{D}_{(\Sigma)}(K)$. Имеем

$$\|g_{\xi_0}\|_{\omega_n} = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} |\hat{g}_{\xi_0}(\xi)| e^{\omega_n(\xi)} \geq \hat{g}_{\xi_0}(\xi_0) e^{\omega_n(\xi_0)} = e^{\omega_n(\xi_0)}. \quad (14)$$

С другой стороны, учитывая (13), получим

$$\begin{aligned} \|g_{\xi_0}\|_{\sigma_m} &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} |\hat{\eta}(\xi - \xi_0)| e^{\sigma_m(\xi)} \\ &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} |\hat{\eta}(\xi - \xi_0)| e^{\sigma(\|\xi - \xi_0\|)} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} e^{\sigma_m(\xi) - \sigma(\|\xi - \xi_0\|)} \leq \|\eta\|_{\sigma} e^{\sigma_{m+1}(\xi_0)}. \end{aligned}$$

Подставив эту оценку и (14) в (12), имеем

$$e^{\omega_n(\xi_0)} \leq C_n \|\eta\|_{\sigma} e^{\sigma_{m+1}(\xi_0)}.$$

Поэтому $\omega_n(\xi_0) \leq \sigma_{m+1}(\xi_0) + A_n$, где $A_n := \ln C_n \|\eta\|_{\sigma}$ не зависит от ξ_0 . Значит, $\omega_n \prec \sigma_{m+1}$, а следовательно, и $\Omega \prec \Sigma$.

В случае, когда $\Omega \in W_N^\dagger$, а $\Sigma \in \mathcal{W}_N^\dagger$, доказательство проводится аналогично. Отметим лишь, что вложение $\mathcal{D}_{\{\Sigma\}}(K) \subset \mathcal{D}_{\{\Omega\}}(K)$ влечет непрерывность оператора $\text{id}: \mathcal{D}_{\{\Sigma\}}(K) \rightarrow \mathcal{D}_{\{\Omega\}}(K)$ по теореме Гротендика (см. [23] и [21, теорема 2, с. 230]), а тогда в силу [2, теорема 6.5.1] для любого n имеются такие m и C_n , что $\|g\|_{\omega_m} \leq C_n \|g\|_{\sigma_n}$ для всех g из $\mathcal{D}_{(\sigma_n)}(K)$. Дальнейшие рассуждения не претерпевают существенных изменений. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть Ω и Σ – весовые последовательности из $W_N^\dagger$ или из $\mathcal{W}_N^\dagger$ и одна из них правильна, а X – открытое или компактное подмножество $\mathbb{R}^N$ с непустой внутренностью. Для того чтобы $\mathcal{D}_{\Omega}(X) = \mathcal{D}_{\Sigma}(X)$, необходимо и достаточно, чтобы $\Omega \sim \Sigma$.

ЛЕММА 2. Пусть Ω – правильная весовая последовательность и v – ассоциированный с ней вес. Тогда для любого открытого или компактного в $\mathbb{R}^N$ множества X пространство $\mathcal{D}_{(v)}(X)$ непрерывно вложено в $\mathcal{D}_{\Omega}(X)$, а $\mathcal{D}_{\Omega}(X)$ является топологическим модулем над кольцом $\mathcal{D}_{(v)}(X)$. Кроме того, когда $X = G$ открыто, $\mathcal{D}_{(v)}(G)$ плотно в $\mathcal{D}_{\Omega}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения ассоциированного с $\Omega = (\omega_n)_{n=1}^\infty$ веса v следует, что $\omega_n \prec v$ при всех $n \geq 2$. Отсюда стандартным образом устанавливаем, что $\mathcal{D}_{(v)}(X) \hookrightarrow \mathcal{D}_\Omega(X)$.

Если $\Omega \in \mathcal{W}_N^1$, то подчинения $\omega_n \prec v$, $n \geq 2$, влекут, что $\Omega \prec (nv)_{n=1}^\infty$. Отсюда по следствию 3 заключаем, что $\mathcal{D}_{(v)}(G)$ плотно в $\mathcal{D}_\Omega(G)$. В случае, когда $\Omega \in \mathcal{W}_N^1$, найдем по лемме 1 такой канонический вес w , что $v(t) = o(w(t))$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда, во-первых, $\mathcal{D}_{\{w\}}(G) \subset \mathcal{D}_{(v)}(G)$ и, во-вторых, $\Omega \prec (w/n)_{n=1}^\infty$. Снова применив следствие 3, получаем, что $\mathcal{D}_{(w)}(G)$, а значит, и более широкое подпространство $\mathcal{D}_{(v)}(G)$ плотно в $\mathcal{D}_{\{\Omega\}}(G)$.

Теперь проверим, что $\mathcal{D}_\Omega(X)$ – топологический модуль над кольцом $\mathcal{D}_{(v)}(X)$. Ясно, что достаточно рассмотреть случай, когда $X = K$ – компакт в $\mathbb{R}^N$. Пусть $g \in \mathcal{D}_\Omega(K)$, $\varphi \in \mathcal{D}_{(v)}(K)$. Тогда за счет правильности Ω имеем при всех $\xi \in \mathbb{R}^N$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |\widehat{g\varphi}(\xi)| &= \frac{1}{(2\pi)^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \hat{g}(\xi - \eta) \widehat{\varphi}(\eta) d\eta \right| \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^N} \|g\|_{\omega_{n+1}} \|\varphi\|_{2v} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\omega_{n+1}(\xi - \eta) - 2v(\|\eta\|)} d\eta \\ &\leq \frac{a_v}{(2\pi)^N} \|g\|_{\omega_{n+1}} \|\varphi\|_{2v} e^{-\omega_n(\xi)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для всех $g \in \mathcal{D}_\Omega(K)$ и $\varphi \in \mathcal{D}_{(v)}(K)$

$$\|g\varphi\|_{\omega_n} \leq \frac{a_v}{(2\pi)^N} \|g\|_{\omega_{n+1}} \|\varphi\|_{2v}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (15)$$

В случае, когда $\Omega \in \mathcal{W}_N^1$, аналогичные оценки показывают, что для любых фиксированных $n \in \mathbb{N}$ и $\varphi \in \mathcal{D}_{(v)}(K)$ и всех $g \in \mathcal{D}_{\omega_n}(K)$

$$\|g\varphi\|_{\omega_{n+1}} \leq \frac{a_v}{(2\pi)^N} \|g\|_{\omega_n} \|\varphi\|_{2v}. \quad (16)$$

Из (15) и (16) следует, что $g\varphi \in \mathcal{D}_\Omega(K)$ при произвольных $g \in \mathcal{D}_\Omega(K)$ и $\varphi \in \mathcal{D}_{(v)}(K)$ и что при этом оператор умножения $M_\varphi: g \mapsto g\varphi$ действует из $\mathcal{D}_\Omega(K)$ в $\mathcal{D}_\Omega(K)$ непрерывно. Доказательство завершено.

Для правильных весовых последовательностей Ω справедлив аналог теоремы 1.4.4 из [4] о локальном разбиении пробных Ω -ультрадифференцируемых функций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть Ω – правильная весовая последовательность, $G_1, \dots, G_m$ – открытые в $\mathbb{R}^N$ множества и $G = \bigcup_{j=1}^m G_j$. Тогда для любой функции g из $\mathcal{D}_\Omega(G)$ имеются такие g_j из $\mathcal{D}_\Omega(G_j)$, что $g = \sum_{j=1}^m g_j$. Если g неотрицательна на G , то и g_j можно взять неотрицательными на G_j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится по схеме из [4] с единственным уточнением, что срезающие функции компактов K_j в доказательстве теоремы 1.4.4 из [4] нужно выбрать из $\mathcal{D}_{(v)}(G_j)$, где v – ассоциированный с Ω вес, и воспользоваться тем, что пространства $\mathcal{D}_\Omega(G_j)$ по лемме 2 являются модулями над соответствующими кольцами $\mathcal{D}_{(v)}(G_j)$.

§ 2. Ω-ультрараспределения

Ω-ультрараспределениями на открытом или компактном подмножестве X в $\mathbb{R}^N$ называются элементы пространства $(\mathcal{D}_\Omega(X))'$, топологически сопряженного с $\mathcal{D}_\Omega(X)$.

Для произвольного N -веса ω обозначим через $\mathcal{M}_\omega$ семейство всех мер Радона μ (см. [2, гл. 4]) на $\mathbb{R}^N$, для которых $\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\omega} d|\mu| < \infty$. Для Ω из $W_N^\uparrow$ (из $W_N^\downarrow$) полагаем

$$\mathcal{M}_{(\Omega)} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_{\omega_n} \quad \left(\mathcal{M}_{\{\Omega\}} := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_{\omega_n} \right).$$

Элементы из $\mathcal{M}_\Omega$ впредь будем для краткости называть просто мерами.

Справедлива следующая теорема о представлении Ω-ультрараспределений.

ТЕОРЕМА 1. Пусть последовательность Ω из $DW_N^\uparrow$ или из $DW_N^\downarrow$ состоит из непрерывных весов и выполнено одно из следующих двух предположений:

- 1) X – компактное или открытое в $\mathbb{R}^N$ множество и $\Omega \in DW_N^\downarrow$;
- 2) X – компакт в $\mathbb{R}^N$ и $\Omega \in DW_N^\uparrow$.

Тогда каждый функционал $\varphi \in (\mathcal{D}_\Omega(X))'$ допускает представление

$$\varphi(g) = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{g} d\mu, \quad g \in \mathcal{D}_\Omega(X), \quad (17)$$

где μ – некоторая мера из $\mathcal{M}_\Omega$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно видеть, что, каковы бы ни были весовая последовательность Ω из $DW_N^\uparrow$ или из $DW_N^\downarrow$, компактное или открытое в $\mathbb{R}^N$ множество X и мера μ из $\mathcal{M}_\Omega$, формула

$$\varphi(g) = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{g} d\mu \quad (18)$$

задает линейный непрерывный функционал φ на $\mathcal{D}_\Omega(X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для правильных весовых последовательностей предположение о непрерывности весов излишне. Пусть, например, $\Omega \in \mathcal{W}_N^\uparrow$. Возьмем произвольную неотрицательную функцию η из $\mathcal{C}_0([-1, 1]^N)$, для которой $\int_{\mathbb{R}^N} \eta(t) dt = 1$. Тогда свертки $\sigma_n := \omega_n * \eta$ непрерывны в $\mathbb{R}^N$ и с учетом правильности Ω имеем для них при всех $\xi \in \mathbb{R}^N$

$$\sigma_n(\xi) - \omega_{n+1}(\xi) = \int_{[-1, 1]^N} (\omega_n(\xi - t) - \omega_{n+1}(\xi)) \eta(t) dt \leq v(1),$$

где v – ассоциированный с Ω вес. Аналогично, $\omega_n(\xi) - \sigma_{n+1}(\xi) \leq v(1)$ на $\mathbb{R}^N$. Поэтому σ_n являются N -весами, а $\Sigma := (\sigma_n)_{n=1}^\infty$ эквивалентна Ω . Ясно, что при замене Ω на Σ пространства $\mathcal{D}_{(\Omega)}(\cdot)$, $(\mathcal{D}_{(\Omega)}(\cdot))'$ и $\mathcal{M}_{(\Omega)}$ остаются прежними. Отсюда и следует требуемое. Более того, взяв η не из $\mathcal{C}_0([-1, 1]^N)$, а из $\mathcal{D}([-1, 1]^N)$, можно при необходимости считать веса в правильных последовательностях бесконечно дифференцируемыми в $\mathbb{R}^N$.

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется некоторая подготовка.

По N -весу ω образуем банахово пространство непрерывных на $\mathbb{R}^N$ функций:

$$\mathcal{C}_\omega := \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N) \mid |f|_\omega := \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} |f(\xi)| e^{\omega(\xi)} < \infty \right\},$$

и его подпространство

$$\mathcal{C}_\omega^0 := \{ f \in \mathcal{C}_\omega : f(\xi) e^{\omega(\xi)} \rightarrow 0 \text{ при } \|\xi\| \rightarrow \infty \}.$$

Для Ω из $W_N^\uparrow$ (из $W_N^\downarrow$) определим пространство

$$\mathcal{C}_{(\Omega)} := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_{\omega_n} \quad \left(\mathcal{C}_{\{\Omega\}} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_{\omega_n} \right),$$

наделенное топологией проективного (индуктивного) предела пространств $\mathcal{C}_{\omega_n}$ относительно операций вложения.

ЛЕММА 3. Пусть Ω – последовательность из $DW_N^\uparrow$ или из $DW_N^\downarrow$, состоящая из непрерывных весов. Тогда для каждого функционала $\varphi \in \mathcal{C}'_\Omega$ найдется такая мера Радона $\mu \in \mathcal{M}_\Omega$, что справедливо представление

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu, \quad f \in \mathcal{C}_\Omega.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем билинейную форму $\langle f, \mu \rangle := \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu$ ради краткости записи, определенную для всех тех пар функций f из $\mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ и мер Радона μ на $\mathbb{R}^N$, для которых f интегрируема по мере μ .

Рассмотрим пространство

$$\mathcal{C}^0 := \{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N) : f(\xi) \rightarrow 0 \text{ при } \|\xi\| \rightarrow \infty \},$$

наделенное нормой $\|f\| := \sup\{|f(\xi)| : \xi \in \mathbb{R}^N\}$. Как известно (см. [2, с. 410]), любой линейный непрерывный на $\mathcal{C}^0$ функционал φ допускает представление $\varphi(f) = \langle f, \mu \rangle$, $f \in \mathcal{C}^0$, где μ – ограниченная мера Радона на $\mathbb{R}^N$, т.е. $\int_{\mathbb{R}^N} d|\mu| < \infty$. Отсюда, используя то, что для непрерывного N -веса ω справедливы равенства

$$\mathcal{C}_\omega^0 = \{ f e^{-\omega} : f \in \mathcal{C}^0 \}, \quad \mathcal{C}^0 = \{ f e^{\omega} : f \in \mathcal{C}_\omega^0 \},$$

закключаем, что любой функционал φ из $(\mathcal{C}_\omega^0)'$ допускает представление $\varphi(f) = \langle f, \mu \rangle$, $f \in \mathcal{C}_\omega^0$, где μ – некоторая мера из $\mathcal{M}_\omega$.

Для $\Omega \in DW_N^\uparrow$ и $\varphi \in \mathcal{C}'_{(\Omega)}$ имеются такие n и $A > 0$, что $|\varphi(f)| \leq A|f|_{\omega_n}$ для всех $f \in \mathcal{C}_{(\Omega)}$. Поскольку $\Omega \in DW_N^\uparrow$, то $\mathcal{C}_{\omega_{k+1}}^0 \subset \mathcal{C}_{\omega_{k+1}} \subset \mathcal{C}_{\omega_k}^0$ при всех k , и, значит, $\mathcal{C}_{(\Omega)} = \bigcap_{k \geq 1} \mathcal{C}_{\omega_k}^0$. Поэтому $\mathcal{C}_{(\Omega)}$ является линейным подпространством в $\mathcal{C}_{\omega_n}^0$. Продолжив φ с $\mathcal{C}_{(\Omega)}$ на $\mathcal{C}_{\omega_n}^0$ по теореме Хана–Банаха, получим функционал $\tilde{\varphi} \in (\mathcal{C}_{\omega_n}^0)'$, для которого в соответствии с отмеченным выше имеется такая мера μ из $\mathcal{M}_{\omega_n} \subset \mathcal{M}_{(\Omega)}$, что $\tilde{\varphi}(f) = \langle f, \mu \rangle$ для всех $f \in \mathcal{C}_{\omega_n}^0$, а тогда $\varphi(f) = \langle f, \mu \rangle$ при всех $f \in \mathcal{C}_{(\Omega)}$.

Рассмотрим теперь $\Omega \in DW_N^\downarrow$ и $\varphi \in \mathcal{C}'_{\{\Omega\}}$. Поскольку для таких Ω при каждом фиксированном n имеют место вложения $\mathcal{C}_{\omega_n} \hookrightarrow \mathcal{C}_{\omega_{n+1}}^0 \hookrightarrow \mathcal{C}_{\omega_{n+1}}$, то $\mathcal{C}_{\{\Omega\}} = \text{ind}_n \mathcal{C}_{\omega_n}^0$. Поэтому для любого n существует $C_n > 0$ такое, что $|\varphi(f)| \leq C_n \|f\|_{\omega_n}$ для всех $f \in \mathcal{C}_{\omega_n}^0$. Значит, сужение φ на $\mathcal{C}_{\omega_n}^0$ – элемент $(\mathcal{C}_{\omega_n}^0)'$, и, следовательно, существует такая мера Радона $\mu \in \mathcal{M}_{\omega_n}$, что $\varphi(f) = \langle f, \mu \rangle$ для всех $f \in \mathcal{C}_{\omega_n}^0$. Остается заметить, что поскольку $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{C}_{\omega_n}$ при любом n , то найденная мера μ не зависит от n . Лемма доказана.

Перед формулировкой следующей леммы отметим некоторые топологические свойства пространства $\mathcal{C}_{\{\Omega\}}$. Так как при каждом $n \in \mathbb{N}$, любом $\xi \in \mathbb{R}^N$ и всех $f \in \mathcal{C}_{\omega_n}$ справедливо неравенство $|f(\xi)| \leq \|f\|_{\omega_n}$, то топология $\mathcal{C}_{\{\Omega\}}$ мажорирует топологию поточечной сходимости в $\mathbb{R}^N$. Отсюда следует, что $\mathcal{C}_{\{\Omega\}}$ отделимо и что шары $B_{\omega_n} := \{f \in \mathcal{C}_{\omega_n} : \|f\|_{\omega_n} \leq 1\}$ замкнуты в $\mathcal{C}_{\{\Omega\}}$. Поэтому $\mathcal{C}_{\{\Omega\}}$ представляет собой регулярный индуктивный предел (см. [24, теорема 1]) последовательности $(\mathcal{C}_{\omega_n})_{n=1}^\infty$ нормированных пространств, в котором $(nB_{\omega_n})_{n=1}^\infty$ образует фундаментальную систему ограниченных множеств. Тем более, оно относится к классу (DF)-пространств (см. [23, теорема 9] или [25, теорема 25.16]).

ЛЕММА 4. Пусть Ω – весовая последовательность из $DW_N^\uparrow \cup DW_N^\downarrow$, K – компактное, а G – открытое подмножество в $\mathbb{R}^N$. Тогда преобразование Фурье $\mathcal{F} : g \mapsto \hat{g}$ является топологическим изоморфизмом из $\mathcal{D}_\Omega(K)$ в $\mathcal{C}_\Omega$, а для $\Omega \in DW_N^\downarrow$ еще и из $\mathcal{D}_{\{\Omega\}}(G)$ в $\mathcal{C}_{\{\Omega\}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Инъективность преобразования Фурье следует из того, что для $g \in \mathcal{D}_\Omega(\cdot)$ справедлива формула обращения Фурье

$$g(x) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{g})(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{g}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi.$$

Для $\Omega \in DW_N^\uparrow$ и $\mathcal{F} : \mathcal{D}_\Omega(K) \longrightarrow \mathcal{C}_\Omega$ утверждение леммы тривиально, так как при всех $g \in \mathcal{D}_\Omega(K)$ и $n \in \mathbb{N}$

$$|\mathcal{F}(g)|_{\omega_n} = \|g\|_{\omega_n}, \quad (19)$$

причем $(\|\cdot\|_{\omega_n})_{n=1}^\infty$ и $(\|\cdot\|_{\omega_n})_{n=1}^\infty$ – наборы преднорм, задающие топологии в $\mathcal{C}_\Omega$ и $\mathcal{D}_\Omega(K)$ соответственно.

Пусть теперь $\Omega \in DW_N^\downarrow$. Из равенств (19), которые в данной ситуации имеют место при любом $n \in \mathbb{N}$ и всех $g \in \mathcal{D}_{\omega_n}(K)$, следует, что $\mathcal{F}$ действует непрерывно из $\mathcal{D}_{\omega_n}(K)$ в $\mathcal{C}_{\omega_n}$ при каждом n , а значит, и из $\mathcal{D}_{\{\Omega\}}(K)$ в $\mathcal{C}_{\{\Omega\}}$. Далее, если B – произвольное ограниченное в $\mathcal{C}_{\{\Omega\}}$ множество, то в соответствии со сказанным выше найдется такое n , что $B \subset nB_{\omega_n}$, т.е. $\|f\|_{\omega_n} \leq n$ для $f \in B$. Тогда для $g \in \mathcal{F}^{-1}(B)$ имеем из (19), что $\|g\|_{\omega_n} \leq n$. Поэтому $\mathcal{F}^{-1}(B)$ – ограниченное множество в $\mathcal{D}_{\omega_n}(K)$ и, тем более, в $\mathcal{D}_{\{\Omega\}}(K)$. Таким образом, $\mathcal{F} : \mathcal{D}_{\{\Omega\}}(K) \longrightarrow \mathcal{C}_{\{\Omega\}}$ – линейное непрерывное инъективное отображение (DFS)-пространства $\mathcal{D}_{\{\Omega\}}(K)$ в (DF)-пространство $\mathcal{C}_{\{\Omega\}}$. При этом полный прообраз каждого ограниченного в $\mathcal{C}_{\{\Omega\}}$ множества ограничен в $\mathcal{D}_{\{\Omega\}}(K)$.

Следовательно, для отображения $\mathcal{F}: \mathcal{D}_{\{\Omega\}}(K) \longrightarrow \mathcal{C}_{\{\Omega\}}$ выполнены все предположения леммы из [26], в соответствии с которой $\mathcal{F}^{-1}$ – непрерывное отображение из пространства $\mathcal{F}(\mathcal{D}_{\{\Omega\}}(K))$, наделенного индуцированной из $\mathcal{C}_{\{\Omega\}}$ топологией, на $\mathcal{D}_{\{\Omega\}}(K)$. Тем самым, $\mathcal{F}$ – изоморфизм из $\mathcal{D}_{\{\Omega\}}(K)$ в $\mathcal{C}_{\{\Omega\}}$. Изоморфность действия $\mathcal{F}$ из $\mathcal{D}_{\{\Omega\}}(G)$ в $\mathcal{C}_{\{\Omega\}}$ проверяется аналогично, если вспомнить, что $\mathcal{D}_{\{\Omega\}}(G)$ – (DFS)-пространство, являющееся индуктивным пределом пространств $\mathcal{D}_{\omega_n}(K_n)$, где $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ – исчерпывающая G последовательность компактов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $X = K$, $\Omega \in DW_N^{\uparrow} \cup DW_N^{\downarrow}$ и $\varphi \in (\mathcal{D}_{\Omega}(K))'$. Рассмотрим функционал $\Phi := \varphi \circ \mathcal{F}^{-1}$, определенный на подпространстве $\mathcal{F}(\mathcal{D}_{\Omega}(K))$ пространства $\mathcal{C}_{\Omega}$. Так как по лемме 4 $\mathcal{F}$ – изоморфизм $\mathcal{D}_{\Omega}(K)$ на $\mathcal{F}(\mathcal{D}_{\Omega}(K))$, то Φ – линейный непрерывный функционал на $\mathcal{F}(\mathcal{D}_{\Omega}(K))$. Продолжив его на все $\mathcal{C}_{\Omega}$, получим функционал $\tilde{\Phi}$ из $\mathcal{C}'_{\Omega}$. По лемме 3 имеется такая мера $\mu \in \mathcal{M}_{\Omega}$, что $\tilde{\Phi}(f) = \langle f, \mu \rangle$ при всех $f \in \mathcal{C}_{\Omega}$. Подставив в последнее равенство $f = \mathcal{F}(g) = \hat{g}$, где $g \in \mathcal{D}_{\Omega}(K)$ произвольно, получим искомое представление (17). В случае, когда $X = G$ и $\Omega \in DW_N^{\downarrow}$, доказательство не претерпевает существенных изменений. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть G – открытое в $\mathbb{R}^N$ множество и Ω – последовательность из $DW_N^{\uparrow}$, состоящая из непрерывных весов, или произвольная последовательность из $\mathcal{W}_N^{\uparrow}$. Тогда для любого функционала φ из $(\mathcal{D}_{(\Omega)}(G))'$ и любого компактного или открытого относительно компактного подмножества X в G существует такая мера $\mu \in \mathcal{M}_{(\Omega)}$, что равенство (18) справедливо для всех $g \in \mathcal{D}_{(\Omega)}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает непосредственно из непрерывности функционала φ на $\mathcal{D}_{(\Omega)}(G) = \text{ind}_{K \in G} \mathcal{D}_{(\Omega)}(K)$, теоремы 1 и замечания 2.

Перед тем как привести еще одно следствие из теоремы 1, заметим, что Ω -ультрараспределения, задаваемые по правильным Ω , однозначно определяются своими локальными данными. Именно, если $\varphi \in (\mathcal{D}_{\Omega}(G))'$ таково, что для каждой точки $x \in G$ имеется такая ее окрестность U_x , что $\varphi(g) = 0$ для всех $g \in \mathcal{D}_{\Omega}(U_x)$, то $\varphi = 0$. Как и в случае распределений Шварца, это вытекает из предложения 4 (см. [4, теорема 2.2.1]). Отсюда следует, в частности, что если носители функции $g \in \mathcal{D}_{\Omega}(G)$ и ультрараспределения $\varphi \in (\mathcal{D}_{\Omega}(G))'$ не пересекаются, то $\varphi(g) = 0$. Носитель $\text{supp } \varphi$ ультрараспределения φ на $\mathcal{D}_{\Omega}(G)$ определяется при этом стандартно как дополнение до G множества тех $x \in G$, для которых имеется такая окрестность U_x , что $\varphi(g) = 0$ для всех $g \in \mathcal{D}_{\Omega}(U_x)$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть G – открытое в $\mathbb{R}^N$ множество и Ω – весовая последовательность из $\mathcal{W}_N^{\uparrow}$. Тогда для любого функционала φ из $(\mathcal{D}_{(\Omega)}(G))'$, имеющего компактный носитель, существует такая мера μ из $\mathcal{M}_{(\Omega)}$, что представление (18) справедливо всюду на $\mathcal{D}_{(\Omega)}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K := \text{supp } \varphi$, v – ассоциированный с Ω канонический вес. Возьмем компакт L в G так, чтобы $K \subset \text{int } L$. По предложению 2 имеется такая функция χ из $\mathcal{D}_{(v)}(G)$, что $\chi|_L = 1$. Тогда $g = \chi g + (1 - \chi)g$

для $g \in \mathcal{D}_{(\Omega)}(G)$, причем обе функции в правой части принадлежат $\mathcal{D}_{(\Omega)}(G)$ и носитель $(1 - \chi)g$ не пересекает K . Поэтому $\varphi(g) = \varphi(\chi g)$ для любой функции g из $\mathcal{D}_{(\Omega)}(G)$. Учитывая, что $L_1 := \text{supp } \chi g \subset \text{supp } \chi \Subset G$, и применяя следствие 5, найдем меру μ из $\mathcal{M}_{(\Omega)}$, для которой равенство (18) выполняется на $\mathcal{D}_{(\Omega)}(L_1)$. По определению $\mathcal{M}_{(\Omega)}$ имеется такое n , что $A_n := \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\omega_n} d|\mu| < \infty$, а из определения правильности Ω и ассоциированного с ней веса v следует, что существует такая постоянная B_n , что при всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$

$$\omega_n(\xi) \leq \omega_{n+N+2}(\eta) + v(\|\xi - \eta\|) - (N+1) \ln(1 + \|\eta\|) + B_n.$$

Поэтому

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{\chi}(\xi - \eta)| d|\mu_\xi| \leq \|\chi\|_v \int_{\mathbb{R}^N} e^{-v(\|\xi - \eta\|)} d|\mu_\xi| \leq \frac{A_n e^{B_n} \|\chi\|_v}{(1 + \|\eta\|)^{N+1}} e^{\omega_{n+N+2}(\eta)}.$$

Тогда для $\nu(\eta) := \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\chi}(\xi - \eta) d\mu_\xi$ справедлива оценка

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\omega_{n+N+2}(\eta)} |\nu(\eta)| d\eta \leq 2^N A_n e^{B_n} \|\chi\|_v < \infty$$

и, следовательно, мера $d\nu_\eta := \frac{1}{(2\pi)^N} \nu(\eta) d\eta$ принадлежит $\mathcal{M}_{(\Omega)}$. Наконец, после элементарных преобразований имеем для всех g из $\mathcal{D}_{(\Omega)}(G)$

$$\begin{aligned} \varphi(g) &= \varphi(\chi g) = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\chi g}(\xi) d\mu_\xi = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} (\widehat{\chi} * \widehat{g})(\xi) d\mu_\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} d\mu_\xi \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\chi}(\xi - \eta) \widehat{g}(\eta) d\eta = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{g}(\eta) d\nu_\eta, \end{aligned}$$

и доказательство завершено.

§ 3. Ω-ультрадифференцируемые функции

Пусть ω – N -вес. Положим

$$\mathcal{D}_\omega := \bigcup_{L \in \mathbb{R}^N} \mathcal{D}_\omega(L)$$

и образуем для любого фиксированного компакта K из $\mathbb{R}^N$ пространство

$$\mathcal{E}_\omega(K) := \{f \in \mathcal{C}(K) \mid \exists g \in \mathcal{D}_\omega, g|_K = f\},$$

снабженное нормой

$$\|f\|_{\omega, K} := \inf\{\|g\|_\omega \mid g \in \mathcal{D}_\omega, g|_K = f\}.$$

Это действительно норма на $\mathcal{E}_\omega(K)$, так как из формулы обращения Фурье следует, что для любой функции g из $\mathcal{D}_\omega$

$$\max_{x \in \mathbb{R}^N} |g(x)| \leq \frac{a_\omega}{(2\pi)^N} \|g\|_\omega,$$

и, следовательно,

$$\max_{x \in K} |f(x)| \leq \frac{a_\omega}{(2\pi)^N} \|f\|_{\omega, K}, \quad f \in \mathcal{E}_\omega(K).$$

Для весовой последовательности Ω из $W_N^\dagger$ (из $W_N^\dagger$) определим пространство

$$\mathcal{E}_{(\Omega)}(K) := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_{\omega_n}(K) \quad \left(\mathcal{E}_{\{\Omega\}}(K) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_{\omega_n}(K) \right),$$

наделенное топологией, задаваемой набором норм $(\|\cdot\|_{\omega_n, K})_{n=1}^{\infty}$ (соответственно, топологией $\text{ind}_n \mathcal{E}_{\omega_n}(K)$ относительно отображений вложения).

Для правильных Ω пространство $\mathcal{E}_{(\Omega)}(K)$ относится к классу (FS)-пространств, а $\mathcal{E}_{\{\Omega\}}(K)$ – (DFS)-пространств. В самом деле, пусть Ω принадлежит, например, $\mathcal{W}_N^\dagger$ и v – ассоциированный с ней вес. Рассмотрим произвольную последовательность $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ элементов единичного шара пространства $\mathcal{E}_{\omega_{n+2}}(K)$. По определениям этого пространства и нормы в нем найдутся $g_m \in \mathcal{D}_{\omega_{n+2}}$ такие, что $g_m|_K = f_m$ и $\|g_m\|_{\omega_{n+2}} \leq 2$, $m = 1, 2, \dots$. В соответствии с предложением 2 имеется функция χ из $\mathcal{D}_{(v)}(\mathbb{R}^N)$, $\chi|_K = 1$, а из оценки (15), примененной при $n+1$ вместо n , следует, что последовательность $(\chi g_m)_{m=1}^{\infty}$ ограничена в $\mathcal{D}_{\omega_{n+1}}(L)$, где $L := \text{supp } \chi$. Так как $\mathcal{D}_{\omega_{n+1}}(L)$ вложено компактно в $\mathcal{D}_{\omega_n}(L)$, то найдется подпоследовательность $(\chi g_{m_s})_{s=1}^{\infty}$, сходящаяся в $\mathcal{D}_{\omega_n}(L)$ к некоторой функции g . Положим $g|_K =: f$. Тогда $f \in \mathcal{E}_{\omega_n}(K)$, $f - f_m = (g - \chi g_m)|_K$ и

$$\|f - f_{m_s}\|_{\omega_n, K} \leq \|g - \chi g_{m_s}\|_{\omega_n} \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty.$$

Поэтому $f_{m_s} \rightarrow f$ в $\mathcal{E}_{\omega_n}(K)$. Значит, $\mathcal{E}_{\omega_{n+2}}(K)$ компактно вложено в $\mathcal{E}_{\omega_n}(K)$ при каждом n , и, следовательно, $\mathcal{E}_{(\Omega)}(K)$ – (FS)-пространство. Случай $\Omega \in \mathcal{W}_N^\dagger$ рассматривается аналогично.

Пусть $\Omega \in W_N^\dagger \cup W_N^\dagger$, G – открытое в $\mathbb{R}^N$ множество. Пространство

$$\mathcal{E}_\Omega(G) := \{f \in \mathcal{C}(G) : f|_K \in \mathcal{E}_\Omega(K) \ \forall K \Subset G\},$$

наделенное топологией $\text{proj}_{K \Subset G}(\mathcal{E}_\Omega(K), \rho_K)$, где $\rho_K : f \mapsto f|_K$, называется *пространством Ω -ультрадифференцируемых на G функций*. Нетрудно видеть, что в задании $\mathcal{E}_\Omega(G)$ и топологии в нем можно ограничиться любой исчерпывающей G последовательностью компактов. Отметим, что $\mathcal{E}_\Omega(G)$ содержит в себе $\mathcal{D}_\Omega(G)$ и не сводится к нему, поскольку $\mathcal{E}_\Omega(G)$ принадлежат все ненулевые постоянные, не входящие в $\mathcal{D}_\Omega(G)$. Кроме того, из определений $\mathcal{E}_\Omega(G)$ и топологии в нем за счет простых рассуждений следует, что $\mathcal{D}_\Omega(G) \hookrightarrow \mathcal{E}_\Omega(G)$.

Ясно, что если $\Omega \prec \Sigma$, то $\mathcal{E}_\Sigma(G) \hookrightarrow \mathcal{E}_\Omega(G)$. Поэтому если $\Omega \sim \Sigma$, то $\mathcal{E}_\Sigma(G) = \mathcal{E}_\Omega(G)$. Далее, из равенства

$$\mathcal{D}_\Omega(G) = \{f \in \mathcal{E}_\Omega(G) : \text{supp } f \Subset G\},$$

справедливого для любой весовой последовательности Ω , по предложению 3 и следствию 4 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. 1) Пусть Ω – произвольная весовая последовательность, а Σ – правильная. Если $\mathcal{E}_\Sigma(G) \subset \mathcal{E}_\Omega(G)$ хотя бы для одного открытого в $\mathbb{R}^N$ множества G , то $\Omega \prec \Sigma$.

2) Пусть одна из весовых последовательностей Ω или Σ правильна. Для того чтобы $\mathcal{E}_\Omega(G) = \mathcal{E}_\Sigma(G)$ для некоторого (для любого) открытого в $\mathbb{R}^N$ множества G , необходимо и достаточно, чтобы $\Omega \sim \Sigma$.

Для веса ω из V_N через $\mathcal{E}_{(\omega)}(G)$ (через $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(G)$) будем обозначать пространство $\mathcal{E}_{(\Omega)}(G)$ (соответственно, $\mathcal{E}_{\{\Omega\}}(G)$), задаваемое весовой последовательностью $\Omega = (n\omega)_{n=1}^\infty$ (соответственно, $\Omega = (\omega/n)_{n=1}^\infty$). Отметим, что для канонического веса w пространство $\mathcal{E}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$ инвариантно относительно аффинных преобразований координат, является кольцом и содержит срезающую функцию произвольного компакта, поскольку $\mathcal{D}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$ обладает этими свойствами.

Отметим некоторые топологические свойства $\mathcal{E}_\Omega(G)$ в случае правильных Ω . Ниже $(K_m)_{m=1}^\infty$ – исчерпывающая G последовательность компактов. Ясно, что пространство $\mathcal{E}_\Omega(G)$ изоморфно пределу проективной последовательности $(\mathcal{E}_\Omega(K_m), \rho_m^{m+1})_{m=1}^\infty$, где $\rho_m^{m+1}: f \in \mathcal{E}_\Omega(K_{m+1}) \mapsto f|_{K_m} \in \mathcal{E}_\Omega(K_m)$ (по поводу спектров локально выпуклых пространств см. обзор [22]). Поскольку для Ω из $\mathcal{W}_N^\dagger$ пространства $\mathcal{E}_{(\Omega)}(K_m)$ принадлежат классу (FS), то тогда и само $\mathcal{E}_{(\Omega)}(G)$ также будет пространством того же класса. Пусть теперь $\Omega \in \mathcal{W}_N^\dagger$ и K – произвольный компакт в G . По определению $\mathcal{E}_{\{\Omega\}}(K)$ для любой функции f из этого пространства найдутся $n \in \mathbb{N}$ и $g \in \mathcal{D}_{\omega_n}$, $g|_K = f$. Построив по ассоциированному с Ω весу v функцию $\chi \in \mathcal{D}_{(v)}(G)$, $\chi|_K = 1$, получим, что $g\chi \in \mathcal{D}_{\omega_{n+1}}(L)$, где $L := \text{supp } \chi \Subset G$, и что $(g\chi)|_K = f$. Так как $\mathcal{D}_{\omega_{n+1}}(L) \subset \mathcal{D}_{\{\Omega\}}(G) \subset \mathcal{E}_{\{\Omega\}}(G)$, то отсюда следует, что $\rho_K(\mathcal{E}_{\{\Omega\}}(G))$ – плотное подпространство в $\mathcal{E}_{\{\Omega\}}(K)$. Поэтому для $\Omega \in \mathcal{W}_N^\dagger$ спектр $(\mathcal{E}_{\{\Omega\}}(K_m), \rho_m^{m+1})_{m=1}^\infty$ является приведенным. Таким образом, $\mathcal{E}_{\{\Omega\}}(G)$ для $\Omega \in \mathcal{W}_N^\dagger$ изоморфно пределу приведенной проективной последовательности (DFS)-пространств.

Укажем еще одно удобное в ряде вопросов описание топологии в $\mathcal{E}_\Omega(G)$.

Обозначим через Q_Ω семейство преднорм, задающее топологию в пространстве $\mathcal{D}_\Omega(\mathbb{R}^N)$. Не ограничивая общности, можно считать, что для любых q_1, q_2 из Q_Ω имеются $q_3 \in Q_\Omega$ и $C > 0$ такие, что

$$\max(q_1(g), q_2(g)) \leq C q_3(g) \quad \forall g \in \mathcal{D}_\Omega(\mathbb{R}^N).$$

Из того что $\mathcal{D}_\Omega(\mathbb{R}^N)$ – строгий индуктивный предел пространств $\mathcal{D}_\Omega(K)$, когда K пробегает компакты в $\mathbb{R}^N$, следует, что для любого компактного или открытого в $\mathbb{R}^N$ множества X это же семейство Q_Ω (точнее, семейство сужений $q \in Q_\Omega$ на $\mathcal{D}_\Omega(X)$) задает исходную топологию в $\mathcal{D}_\Omega(X)$. По лемме 2 и определению $\mathcal{E}_\Omega(G)$ для любой правильной последовательности Ω и произвольного ассоциированного с ней веса v пространство $\mathcal{E}_\Omega(G)$ является модулем над кольцом $\mathcal{D}_{(v)}(G)$ и, более того, для любой фиксированной функции $\chi \in \mathcal{D}_{(v)}(G)$ оператор умножения $f \mapsto \chi f$ действует непрерывно из $\mathcal{E}_\Omega(G)$ в $\mathcal{D}_\Omega(G)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть Ω – правильная весовая последовательность, v – ассоциированный с Ω вес, G – открытое в $\mathbb{R}^N$ множество. Тогда семейство

преднорм

$$\{q(\chi f), f \in \mathcal{E}_\Omega(G) : q \in Q_\Omega, \chi \in \mathcal{D}_{(v)}(G)\} \quad (20)$$

задает исходную топологию в $\mathcal{E}_\Omega(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через τ и t соответственно исходную топологию в $\mathcal{E}_\Omega(G)$ и топологию, задаваемую в нем набором преднорм (20).

Пусть p – непрерывная преднорма на $\mathcal{E}_\Omega(G)$. Так как $\mathcal{E}_\Omega(G)$ – проективный предел семейства пространств $\{\mathcal{E}_\Omega(K) : K \Subset G\}$ относительно операций сужения ρ_K , то найдется такой компакт $K \subset G$, что $p(f) = 0$, если носитель функции f из $\mathcal{E}_\Omega(G)$ не пересекает K . Возьмем компакт $L \subset G$ такой, чтобы $K \subset \text{int } L$, и построим в соответствии с предложением 2 функцию χ из $\mathcal{D}_{(v)}(G)$, для которой $\chi|_L = 1$. Тогда χf и $(1 - \chi)f$ принадлежат $\mathcal{E}_\Omega(G)$ для любой функции f из $\mathcal{E}_\Omega(G)$ и при этом $K \cap \text{supp}((1 - \chi)f) = \emptyset$. Поэтому $p(f) = p(\chi f)$ при всех $f \in \mathcal{E}_\Omega(G)$. Далее, так как $\mathcal{D}_\Omega(G) \hookrightarrow \mathcal{E}_\Omega(G)$, то найдутся такие $q \in Q_\Omega$ и $C > 0$, что $p(g) \leq Cq(g)$ при всех $g \in \mathcal{D}_\Omega(G)$. Применив это неравенство к функции χf , которая принадлежит $\mathcal{D}_\Omega(G)$, какова бы ни была f из $\mathcal{E}_\Omega(G)$, получим, что $p(f) = p(\chi f) \leq Cq(\chi f)$ при всех $f \in \mathcal{E}_\Omega(G)$. Отсюда следует, что t мажорирует τ .

Проверка того, что τ мажорирует t , проводится для пространств $\mathcal{E}_{(\Omega)}(G)$ и $\mathcal{E}_{\{\Omega\}}(G)$ по одинаковой схеме с незначительными техническими различиями. Поэтому мы ограничимся рассмотрением случая $\mathcal{E}_{(\Omega)}(G)$.

Пусть $\chi \in \mathcal{D}_{(v)}(G)$ и $q \in Q_{(\Omega)}$. Положим $K := \text{supp } \chi$. Для f из $\mathcal{E}_{(\Omega)}(G)$ рассмотрим функцию χf . Продолжив ее на $\mathbb{R}^N \setminus G$ нулем, получим элемент из $\mathcal{C}_0(K)$. По определению $\mathcal{E}_{(\Omega)}(G)$ для любого n имеется $g \in \mathcal{D}_{\omega_{n+1}}$, $g|_K = f|_K$. При этом для любой такой функции g верно равенство $\chi f = \chi g$, а тогда и $\widehat{\chi f} = \widehat{\chi g}$. Отсюда в соответствии с оценкой (15) имеем

$$\|\chi f\|_{\omega_n} = \|\chi g\|_{\omega_n} \leq \frac{a_v}{(2\pi)^N} \|\chi\|_{2v} \|g\|_{\omega_{n+1}}. \quad (21)$$

Поэтому $\chi f \in \mathcal{D}_{\omega_n}(K)$ при любом $n \in \mathbb{N}$ и, следовательно, $\chi f \in \mathcal{D}_{(\Omega)}(K)$. Далее, так как $Q_{(\Omega)}$ задает в пространстве $\mathcal{D}_{(\Omega)}(K)$ его исходную топологию, то имеются такие n и $C > 0$, что $q(\chi f) \leq C\|\chi f\|_{\omega_n}$ при всех $f \in \mathcal{E}_{(\Omega)}(G)$. Учитывая (21), имеем тогда, что при всех $g \in \mathcal{D}_{\omega_{n+1}}$, $g|_K = f|_K$, выполнено

$$q(\chi f) \leq \frac{Ca_v}{(2\pi)^N} \|\chi\|_{2v} \|g\|_{\omega_{n+1}}.$$

Поэтому для всех $f \in \mathcal{E}_{(\Omega)}(G)$ выполнено

$$q(\chi f) \leq \frac{Ca_v}{(2\pi)^N} \|\chi\|_{2v} \|f\|_{\omega_{n+1}, K},$$

и, значит, τ мажорирует t . Доказательство завершено.

Из предложения 6 непосредственно вытекают такие два следствия.

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть Ω , v и G – те же, что и в предложении 6. Тогда пространство $\mathcal{D}_{(v)}(G)$, а тем более $\mathcal{D}_\Omega(G)$, плотно в $\mathcal{E}_\Omega(G)$.

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть Ω – правильная весовая последовательность, G – открытое в $\mathbb{R}^N$ множество и φ – элемент из $(\mathcal{E}_\Omega(G))'$. Тогда $\varphi(f) = 0$ для любой функции f из $\mathcal{E}_\Omega(G)$, $\text{supp } f \cap \text{supp } \varphi = \emptyset$.

Кроме того, из предложения 6 за счет прямых рассуждений, основанных на определении проективного спектра, получаем

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть Ω , v и G – те же, что и в предложении 6. Пусть, далее, $(K_n)_{n=1}^\infty$ – последовательность компактов, $\overline{\text{int } K_n} = K_n$, исчерпывающая G , а функции χ_n из $\mathcal{D}_{(v)}(K_n)$ таковы, что $\chi_n = 1$ на K_{n-1} и $0 \leq \chi_n \leq 1$ на $\mathbb{R}^N$ при каждом n (считаем, что $K_0 = \emptyset$). Тогда оператор

$$L: f \in \mathcal{E}_\Omega(G) \mapsto (f\chi_n)_{n=1}^\infty \in \prod_{n=1}^\infty \mathcal{D}_\Omega(X_n)$$

является топологическим изоморфизмом между $\mathcal{E}_\Omega(G)$ и пределом проективного спектра $\text{proj}_n(\mathcal{D}_\Omega(X_n), \varphi_n^{n+1})$, где $X_n = K_n$ или $X_n = \text{int } K_n$, а $\varphi_n^{n+1}: g \in \mathcal{D}_\Omega(X_{n+1}) \mapsto \chi_n g \in \mathcal{D}_\Omega(X_n)$ при всех n .

Как и в классическом случае распределений Шварца, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть Ω – правильная весовая последовательность, G – открытое в $\mathbb{R}^N$ множество. Ультрараспределение φ из $(\mathcal{D}_\Omega(G))'$ продолжается до элемента из $(\mathcal{E}_\Omega(G))'$ в том и только в том случае, когда оно имеет компактный носитель.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть v – ассоциированный с Ω канонический вес.

Если $\varphi \in (\mathcal{E}_\Omega(G))'$, то по предложению 6 существуют $q \in Q_\Omega$, $C > 0$ и $\chi \in \mathcal{D}_{(v)}(G)$ такие, что $|\varphi(f)| \leq Cq(\chi f)$ для всех $f \in \mathcal{E}_\Omega(G)$. Отсюда следует, что для любой точки $\xi \in G \setminus \text{supp } \chi$ и какой-либо ее окрестности $U_\xi \subset G \setminus \text{supp } \chi$ при всех g из $\mathcal{D}_\Omega(U_\xi)$ справедливо равенство $\varphi(g) = 0$. Поэтому $\text{supp } \varphi \subset \text{supp } \chi \Subset G$.

Обратно, если $\varphi \in (\mathcal{D}_\Omega(G))'$ и $K := \text{supp } \varphi \Subset G$, то возьмем компакт $L \subset G$ такой, чтобы $K \subset \text{int } L$, и построим по предложению 2 функцию χ из $\mathcal{D}_{(v)}(G)$ с $\chi|_L = 1$. Положим $\Phi(f) := \varphi(\chi f)$ для $f \in \mathcal{E}_\Omega(G)$. Так как $\varphi \in (\mathcal{D}_\Omega(G))'$, то существуют такие $q \in Q_\Omega$ и $C > 0$, что $|\varphi(g)| \leq Cq(g)$ для всех g из $\mathcal{D}_\Omega(G)$. Тогда $|\Phi(f)| \leq Cq(\chi f)$ для всех f из $\mathcal{E}_\Omega(G)$ и, значит, по предложению 6 функционал Φ принадлежит $(\mathcal{E}_\Omega(G))'$. При этом так как $K \cap \text{supp } ((1 - \chi)g) = \emptyset$ для любой функции g из $\mathcal{D}_\Omega(G)$, то $\Phi(g) = \varphi(\chi g) = \varphi(\chi g + (1 - \chi)g) = \varphi(g)$. Предложение доказано.

Пусть w – канонический вес. Обозначим через $\mathcal{S}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$ пространство всех f из $C^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$, для которых $\hat{f}$ принадлежит $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ и при каждом $n \in \mathbb{N}$

$$\|f\|_{w,n} := \max_{|\alpha| \leq n} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (|f^{(\alpha)}(x)| + |\hat{f}^{(\alpha)}(x)|) e^{nw(x)} < \infty.$$

Наделим $\mathcal{S}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$ топологией, задаваемой набором норм $(\|\cdot\|_{w,n})_{n=1}^\infty$. В случае, когда w – полуаддитивный сверху канонический вес, это пространство было введено в [12]. Там же отмечено (см. предложение 1.8.2), что для

$w(x) = \ln(1 + \|x\|)$ оно совпадает с пространством $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ быстро убывающих функций. В следующем предложении собраны некоторые нужные нам свойства $\mathcal{S}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Для любого канонического веса w :*

- 1) $\mathcal{S}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$ – топологическое кольцо относительно операции поточечного умножения;
- 2) $\mathcal{D}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$ непрерывно вложено в $\mathcal{S}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$ и плотно в нем;
- 3) преобразование Фурье – топологический изоморфизм $\mathcal{S}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$ на себя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится точно так же, как и в [12, п. 1.8]. Следует лишь вместо полуаддитивности w сверху использовать условие (5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Пусть Ω – правильная весовая последовательность и v – ассоциированный с ней вес. Тогда пространство $\mathcal{S}_{(v)}(\mathbb{R}^N)$ непрерывно вложено в $\mathcal{E}_\Omega(\mathbb{R}^N)$ и плотно в нем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть q – произвольная преднорма из Q_Ω , а ψ – любая функция из $\mathcal{D}_{(v)}(\mathbb{R}^N)$. По предложению 8 имеем $\psi f \in \mathcal{D}_{(v)}(\text{supp } \psi)$ при всех $f \in \mathcal{S}_{(v)}(\mathbb{R}^N)$. Тогда, поскольку $\mathcal{D}_{(v)}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathcal{D}_\Omega(\mathbb{R}^N)$ по лемме 2, найдутся $n \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ такие, что

$$q(\psi f) \leq C \|\psi f\|_{nv}, \quad f \in \mathcal{S}_{(v)}(\mathbb{R}^N).$$

Далее, в соответствии с утверждениями 1), 2) предложения 8 существуют такие $m \in \mathbb{N}$ и $A > 0$, что

$$\|\psi f\|_{nv} \leq \|\psi f\|_{v,n} \leq A \|\psi\|_{v,m} \|f\|_{v,m}, \quad f \in \mathcal{S}_{(v)}(\mathbb{R}^N).$$

Поэтому

$$q(\psi f) \leq AC \|\psi\|_{v,m} \|f\|_{v,m}, \quad f \in \mathcal{S}_{(v)}(\mathbb{R}^N).$$

Отсюда по предложению 6 следует, что $\mathcal{S}_{(v)}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathcal{E}_{(v)}(\mathbb{R}^N)$. Так как вес ω_n подчинен v при любом $n \in \mathbb{N}$, то $\mathcal{E}_{(v)}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathcal{E}_\Omega(\mathbb{R}^N)$, а значит, $\mathcal{S}_{(v)}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathcal{E}_\Omega(\mathbb{R}^N)$. Кроме того, по следствию 7 пространство $\mathcal{D}_{(v)}(\mathbb{R}^N)$ и, тем более, пространство $\mathcal{S}_{(v)}(\mathbb{R}^N)$ плотны в $\mathcal{E}_\Omega(\mathbb{R}^N)$. Предложение доказано.

§ 4. Продолжение весов в $\mathbb{C}^N$ и преобразование Фурье–Лапласа пробных функций

С каждым N -весом ω свяжем его продолжение в $\mathbb{C}^N$, задаваемое формулой

$$P_\omega(\zeta) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\omega(\xi + t\eta)}{1 + t^2} dt, \quad \zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}^N.$$

При $N = 1$, сделав замену $\xi + t\eta = u$, получим

$$P_\omega(\xi + i\eta) = \frac{|\eta|}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\omega(u)}{(u - \xi)^2 + \eta^2} du, \quad \xi + i\eta \in \mathbb{C}, \quad \eta \neq 0.$$

Следовательно, в одномерном случае P_ω совпадает с интегралом Пуассона от ω и является гармонической функцией в верхней и нижней полуплоскостях.

Отметим некоторые простейшие свойства P_ω .

В силу ограничений (1) на N -вес функция P_ω принимает всюду в $\mathbb{C}^N$ конечные значения. Очевидно также, что $P_\omega(\zeta) \geq 0$ и $P_\omega(\zeta) = P_\omega(\bar{\zeta})$ для всех $\zeta \in \mathbb{C}^N$.

Покажем, что при любом фиксированном $\eta \in \mathbb{R}^N$ функция $P_\omega(\cdot + i\eta)$ является N -весом. В соответствии с интегральным неравенством Иенсена для выпуклых функций имеем

$$e^{-P_\omega(\xi+i\eta)} = \exp\left(-\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\omega(\xi+t\eta)}{1+t^2} dt\right) \leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\omega(\xi+t\eta)}}{1+t^2} dt.$$

Отсюда следует, что при всех $\eta \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-P_\omega(\xi+i\eta)} d\xi &\leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^N} d\xi \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\omega(\xi+t\eta)}}{1+t^2} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1+t^2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\omega(\xi+t\eta)} d\xi = a_\omega. \end{aligned} \quad (22)$$

Далее, положим $\bar{P}_{\omega,\eta}(r) := \sup_{\|\xi\| \leq r} P_\omega(\xi + i\eta)$. Имеем

$$\bar{P}_{\omega,\eta}(r) \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\bar{\omega}(r+t\|\eta\|)}{1+t^2} dt \leq \bar{\omega}(r(1+\|\eta\|)) + \frac{2}{\pi} \int_r^\infty \frac{\bar{\omega}(r+t\|\eta\|)}{t^2} dt.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{\bar{P}_{\omega,\eta}(r)}{r^2} dr &\leq A_\omega(1+\|\eta\|) + \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{dr}{r^2} \int_r^\infty \frac{\bar{\omega}(r+t\|\eta\|)}{t^2} dt \\ &\leq A_\omega(1+\|\eta\|) + \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{\bar{\omega}(t(1+\|\eta\|))}{t^2} dt \leq A_\omega\left(1+\frac{2}{\pi}\right)(1+\|\eta\|) < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, $P_\omega(\cdot + i\eta)$ удовлетворяет условиям (1), что и требовалось проверить.

Обозначим через $\mathcal{H}(\mathbb{C}^N)$ пространство всех целых в $\mathbb{C}^N$ функций и определим по ω и $K \in \mathbb{R}^N$ его подпространство

$$\mathcal{H}_\omega^-(K) := \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^N) \mid |f|_{\omega,K}^- := \sup_{\zeta \in \mathbb{C}^N} \frac{|f(\zeta)|}{e^{h_K(\operatorname{Im} \zeta) - P_\omega(\zeta)}} < \infty \right\},$$

где $h_K(y) := \max_{x \in K} \langle x, y \rangle$ – опорная функция компакта K . Мы будем рассматривать $\mathcal{H}_\omega^-(K)$ с нормой $|\cdot|_{\omega,K}$, относительно которой оно является банаховым.

ТЕОРЕМА 2. Пусть K – выпуклый компакт в $\mathbb{R}^N$, а ω – N -вес. Тогда преобразование Фурье–Лапласа функций

$$g \mapsto (\mathcal{F}g)(\zeta) := \hat{g}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^N} g(x) e^{-i\langle x, \zeta \rangle} dx, \quad \zeta \in \mathbb{C}^N,$$

устанавливает топологический изоморфизм между $\mathcal{D}_\omega(K)$ и $\mathcal{H}_\omega^-(K)$. Более того, оно сохраняет норму, т. е. $|\hat{g}|_{\omega,K}^- = \|g\|_\omega$ для любой функции g из $\mathcal{D}_\omega(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g \in \mathcal{D}_\omega(K)$. Тогда $g \in \mathcal{C}_0(K)$ и $\hat{g} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^N)$, причем

$$|\hat{g}(\zeta)| \leq \lambda_N(K) \max_{x \in K} |g(x) e^{-i\langle x, \zeta \rangle}| \leq \lambda_N(K) \|g\| e^{h_K(\operatorname{Im} \zeta)}, \quad (23)$$

где $\|g\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |g(x)|$. Зафиксируем любое $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}^N$ и рассмотрим функцию $\hat{g}(\xi + w\eta)$ одной комплексной переменной $w = u + iv \in \mathbb{C}$. Из соотношения (23) следует, что при всех $v \geq 0$ и $u \in \mathbb{R}$

$$|\hat{g}(\xi + w\eta)| \leq \lambda_N(K) \|g\| e^{vh_K(\eta)}.$$

Учитывая это неравенство и применяя к целой функции $\hat{g}(\xi + w\eta)$ принцип Фрагмена–Линделёфа (см. [27, теорема 6.5.4] или [12, лемма 1.4.2]), при $v \geq 0$ имеем

$$\ln |\hat{g}(\xi + w\eta)| \leq \frac{v}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\ln |\hat{g}(\xi + t\eta)|}{(t - u)^2 + v^2} dt + vh_K(\eta).$$

Положив здесь $w = i$, получим

$$\begin{aligned} \ln |\hat{g}(\zeta)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\ln |\hat{g}(\xi + t\eta)|}{1 + t^2} dt + h_K(\eta) \\ &\leq -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\omega(\xi + t\eta)}{1 + t^2} dt + \ln \|g\|_\omega + h_K(\eta) = -P_\omega(\zeta) + h_K(\eta) + \ln \|g\|_\omega. \end{aligned}$$

Отсюда $|\hat{g}|_{\omega, K}^- \leq \|g\|_\omega$. Поэтому преобразование Фурье–Лапласа – линейный непрерывный оператор из $\mathcal{D}_\omega(K)$ в $\mathcal{H}_\omega^-(K)$. Инъективность этого оператора следует из справедливости для функций из $\mathcal{D}_\omega(K)$ формулы обращения Фурье.

Пусть теперь $f \in \mathcal{H}_\omega^-(K)$. Тогда

$$|f(\zeta)| \leq |f|_{\omega, K}^- e^{h_K(\operatorname{Im} \zeta) - P_\omega(\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^N, \quad (24)$$

и, следовательно,

$$|f(\xi)| \leq |f|_{\omega, K}^- e^{-\omega(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^N. \quad (25)$$

Поскольку ω удовлетворяет (1), то $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$, а тогда

$$g(x) := \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi \quad (26)$$

– непрерывная в $\mathbb{R}^N$ функция. Стандартные рассуждения, основанные на том, что $f(\zeta) e^{i\langle x, \zeta \rangle}$ – целая в $\mathbb{C}^N$ функция, показывают, что при любом $\eta \in \mathbb{R}^N$

$$g(x) = \frac{e^{-\langle x, \eta \rangle}}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(\xi + i\eta) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Тогда, учитывая (22) и (24), при всех x и η из $\mathbb{R}^N$ имеем

$$|g(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^N} |f|_{\omega, K}^- e^{h_K(\eta) - \langle x, \eta \rangle} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-P_\omega(\xi + i\eta)} d\xi \leq \frac{a_\omega}{(2\pi)^N} |f|_{\omega, K}^- e^{h_K(\eta) - \langle x, \eta \rangle}.$$

Отсюда в силу выпуклости K получаем, что $g(x) = 0$ вне K . Из соотношения (26) следует, что $\hat{g}(\xi) = f(\xi)$ на $\mathbb{R}^N$, а значит, $\hat{g}(\zeta) = f(\zeta)$ всюду в $\mathbb{C}^N$. Таким образом, $\mathcal{F}g = f$, причем (25) влечет, что $\|g\|_\omega \leq |f|_{\omega, K}^- = |\hat{g}|_{\omega, K}^-$. Поэтому оператор $\mathcal{F}^{-1}: \mathcal{H}_\omega^-(K) \rightarrow \mathcal{D}_\omega(K)$ непрерывен и $\|g\|_\omega = |\hat{g}|_{\omega, K}^-$ для всех g из $\mathcal{D}_\omega(K)$. Теорема доказана.

Для $\Omega = (\omega_n)_{n=1}^\infty$ из $W_N^\uparrow$ (из $W_N^\downarrow$) и $K \in \mathbb{R}^N$ положим

$$\mathcal{H}_{(\Omega)}^-(K) := \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{H}_{\omega_n}^-(K) \quad \left(\mathcal{H}_{\{\Omega\}}^-(K) := \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{H}_{\omega_n}^-(K) \right)$$

и наделим это пространство топологией проективного (индуктивного) предела банаховых пространств $\mathcal{H}_{\omega_n}^-(K)$ относительно операций вложения. Для открытого в $\mathbb{R}^N$ множества G образуем пространство $\mathcal{H}_\Omega^-(G) := \bigcup_{K \in G} \mathcal{H}_\Omega^-(K)$ и снабдим его топологией индуктивного предела пространств $\mathcal{H}_\Omega^-(K)$ относительно отображений вложения.

СЛЕДСТВИЕ 10. Пусть Ω – весовая последовательность из $W_N^\uparrow \cup W_N^\downarrow$, X – открытое или компактное выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^N$. Оператор преобразования Фурье–Лапласа является топологическим изоморфизмом между $\mathcal{D}_\Omega(X)$ и $\mathcal{H}_\Omega^-(X)$.

В случае, когда Ω – правильная весовая последовательность, а X – открытое в $\mathbb{R}^N$ выпуклое множество, пространство $\mathcal{H}_\Omega^-(X)$ в следствии 10 можно описать без использования продолжения весов в $\mathbb{C}^N$. Чтобы доказать это, нам потребуется

ЛЕММА 5. Пусть N -весовые функции ω и σ таковы, что для некоторого канонического веса v

$$\omega(\xi + \eta) \leq \sigma(\xi) + v(\|\eta\|) \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N. \quad (27)$$

Тогда для любых ξ и η из $\mathbb{R}^N$ справедливы оценки

$$P_\omega(\xi + i\eta) \leq \sigma(\xi) + \gamma(\|\eta\|), \quad P_\sigma(\xi + i\eta) \geq \omega(\xi) - \gamma(\|\eta\|),$$

где $\gamma(r) = o(r)$ при $r \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При любом $r > 0$

$$\int_0^\infty \frac{v(tr)}{1+t^2} dt \leq \frac{\pi}{4} v(r) + r \int_r^\infty \frac{v(t)}{r^2+t^2} dt \leq \frac{\pi}{4} v(r) + r \int_r^\infty \frac{v(t)}{t^2} dt.$$

Из неубывания функции v и сходимости интеграла $\int_1^\infty \frac{v(t)}{t^2} dt$ следует, что $v(r) = o(r)$ при $r \rightarrow \infty$, а поэтому и

$$\delta(r) := \int_0^\infty \frac{v(tr)}{1+t^2} dt = o(r) \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

В силу (27) при всех ξ и η из $\mathbb{R}^N$ имеем

$$\begin{aligned} P_\omega(\xi + i\eta) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\omega(\xi + t\eta)}{1+t^2} dt \leq \sigma(\xi) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{v(t\|\eta\|)}{1+t^2} dt = \sigma(\xi) + \frac{2}{\pi} \delta(\|\eta\|), \\ P_\sigma(\xi + i\eta) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sigma(\xi + t\eta)}{1+t^2} dt \geq \omega(\xi) - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{v(t\|\eta\|)}{1+t^2} dt = \omega(\xi) - \frac{2}{\pi} \delta(\|\eta\|). \end{aligned}$$

Остается положить $\gamma = \frac{2}{\pi} \delta$, чтобы получить нужные оценки. Лемма доказана.

Для N -веса ω и компакта $K \subset \mathbb{R}^N$ положим

$$\tilde{\mathcal{H}}_{\omega}^{-}(K) := \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^N) \mid \left| \tilde{f} \right|_{\omega, K}^{-} := \sup_{\zeta \in \mathbb{C}^N} \frac{|f(\zeta)|}{e^{h_K(\operatorname{Im} \zeta) - \omega(\operatorname{Re} \zeta)}} < \infty \right\}.$$

С каждой весовой последовательностью $\Omega = (\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ из $W_N^{\uparrow}$ (из $W_N^{\downarrow}$) свяжем пространство

$$\tilde{\mathcal{H}}_{(\Omega)}^{-}(K) := \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{H}}_{\omega_n}^{-}(K) \quad \left(\tilde{\mathcal{H}}_{\{\Omega\}}^{-}(K) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{H}}_{\omega_n}^{-}(K) \right),$$

наделенное топологией проективного (индуктивного) предела последовательности банаховых пространств $(\tilde{\mathcal{H}}_{\omega_n}^{-}(K))_{n=1}^{\infty}$ относительно отображений вложения. Для открытого в $\mathbb{R}^N$ множества G определим пространство $\tilde{\mathcal{H}}_{\Omega}^{-}(G) := \bigcup_{K \Subset G} \tilde{\mathcal{H}}_{\Omega}^{-}(K)$ и снабдим его топологией индуктивного предела семейства пространств $\{\tilde{\mathcal{H}}_{\Omega}^{-}(K) : K \Subset G\}$ относительно операторов вложения.

СЛЕДСТВИЕ 11. Для правильной весовой последовательности Ω и открытого выпуклого в $\mathbb{R}^N$ множества G преобразование Фурье–Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между $\mathcal{D}_{\Omega}(G)$ и $\tilde{\mathcal{H}}_{\Omega}^{-}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, например, $\Omega \in \mathcal{W}_{\mathcal{N}}^{\uparrow}$. По определению правильности Ω и лемме 5 при всех ξ и η из $\mathbb{R}^N$ и каждом $n \geq 2$ имеем

$$\omega_{n-1}(\xi) - \gamma(\|\eta\|) \leq P_{\omega_n}(\xi + i\eta) \leq \omega_{n+1}(\xi) + \gamma(\|\eta\|),$$

где $\gamma(\|\eta\|) = o(\|\eta\|)$ при $\|\eta\| \rightarrow \infty$. Тогда для любых компактов K, L и M , $K \subset \operatorname{int} L \subset L \subset \operatorname{int} M \subset M \subset G$, имеется такое $C > 0$, что для всех $\xi + i\eta \in \mathbb{C}^N$ выполнено

$$h_K(\eta) - \omega_{n+1}(\xi) - C \leq h_L(\eta) - P_{\omega_n}(\xi + i\eta) \leq h_M(\eta) - \omega_{n-1}(\xi) + C.$$

Отсюда следует, что пространства $\tilde{\mathcal{H}}_{(\Omega)}^{-}(G)$ и $\mathcal{H}_{(\Omega)}^{-}(G)$ совпадают как множества и топологически. Остается применить следствие 10, чтобы завершить доказательство.

§ 5. Преобразование Фурье–Лапласа функционалов

Для того чтобы ввести преобразование Фурье–Лапласа функционалов на пространствах Ω -ультрадифференцируемых функций и установить его простейшие свойства, а также для технических целей нам потребуются некоторые вспомогательные результаты.

ЛЕММА 6. Для любого N -веса ω и компакта K в $\mathbb{R}^N$ пространство $\mathcal{E}_{\omega}(K)$ содержит сужения на K всех экспонент $e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle}$, $\zeta \in \mathbb{C}^N$. При этом если N -вес σ и канонический вес v таковы, что справедливо условие (27), то

$$\|e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle}\|_K \leq C_{\varepsilon} e^{h_K(\operatorname{Im} \zeta) + \varepsilon \|\operatorname{Im} \zeta\| + P_{\sigma}(-\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^N, \quad (28)$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно, а C_{ε} зависит лишь от $\varepsilon > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 2 построим $\chi \in \mathcal{D}_{(v)}(K_\varepsilon)$ так, чтобы $\chi|_K = 1$, и рассмотрим функцию $\chi_\zeta(x) := \chi(x)e^{-i\langle x, \zeta \rangle}$, $\zeta \in \mathbb{C}^N$. В силу (27) $\omega(u) \leq \sigma(-\xi - t\eta) + v(\|u + \xi + t\eta\|)$ при любых u, ξ, η из $\mathbb{R}^N$ и t из $\mathbb{R}$. Поэтому

$$\omega(u) \leq P_\sigma(-\zeta) + P_v(u + \zeta) \quad \forall u \in \mathbb{R}^N, \quad \zeta \in \mathbb{C}^N. \quad (29)$$

В силу теоремы 2 имеется такое $C_\varepsilon > 0$, что всюду на $\mathbb{C}^N$

$$|\widehat{\chi}(z)| \leq C_\varepsilon e^{h_K(\operatorname{Im} z) + \varepsilon \|\operatorname{Im} z\| - P_v(z)}.$$

Учитывая равенство $\widehat{\chi}_\zeta(u) = \widehat{\chi}(u + \zeta)$ и неравенство (29), заключаем тогда, что при всех $\zeta \in \mathbb{C}^N$

$$\begin{aligned} \|\chi_\zeta\|_\omega &= \sup_{u \in \mathbb{R}^N} |\widehat{\chi}_\zeta(u)| e^{\omega(u)} \leq e^{P_\sigma(-\zeta)} \sup_{u \in \mathbb{R}^N} |\widehat{\chi}(\zeta + u)| e^{P_v(\zeta + u)} \\ &\leq C_\varepsilon e^{h_K(\operatorname{Im} \zeta) + \varepsilon \|\operatorname{Im} \zeta\| + P_\sigma(-\zeta)}. \end{aligned}$$

Значит, χ_ζ принадлежит $\mathcal{D}_\omega(K_\varepsilon) \subset \mathcal{D}_\omega$, и при этом $\chi_\zeta|_K = e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle}|_K$. Отсюда следует, что $e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle}|_K \in \mathcal{E}_\omega(K)$, а из оценки $\|\chi_\zeta\|_\omega$ – нужная нам оценка (28).

Остается заметить, что для любого N -веса ω имеется такой канонический вес w , что $\omega(x) \leq w(\|x\|)$ на $\mathbb{R}^N$. Тогда при некотором $A > 0$

$$\omega(x + y) \leq w(\|x + y\|) \leq w(\|x\| + \|y\|) \leq A(w(\|x\|) + w(\|y\|) + 1), \quad x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Положив $\sigma(x) := A(w(\|x\|) + 1)$ и $v(x) := Aw(\|x\|)$, получим, что для N -веса σ и канонического веса v справедливо (27). В силу первой части доказательства отсюда следует, что сужения всех экспонент $e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle}$ на K принадлежат $\mathcal{E}_\omega(K)$. Доказательство завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из леммы 6 следует, что для любой весовой последовательности Ω и любого компактного или открытого в $\mathbb{R}^N$ множества X все экспоненты вида $e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle}$ содержатся в $\mathcal{E}_\Omega(X)$.

ЛЕММА 7. Пусть w – канонический вес, χ – неотрицательная функция из $\mathcal{D}_{(w)}([-1, 1]^N)$, для которой $\int_{\mathbb{R}^N} \chi(x) dx = 1$. Тогда функции $g_{\varepsilon, \zeta}(t) := \widehat{\chi}(\varepsilon t) e^{-i\langle t, \zeta \rangle}$ содержатся в $\mathcal{E}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$ при любых $\varepsilon > 0$ и $\zeta \in \mathbb{C}^N$ и сходятся к $e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle}$ в $\mathcal{E}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по ζ на любом компакте из $\mathbb{C}^N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что для канонического веса w пространство $\mathcal{E}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$ инвариантно относительно аффинных преобразований координат. Поэтому для проверки принадлежности функций $g_{\varepsilon, \zeta}$ пространству $\mathcal{E}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$ достаточно рассмотреть случай $\varepsilon = 1$.

Пусть $\psi \in \mathcal{D}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$, $A := \max_{t \in \operatorname{supp} \psi} \|t\|$ и $K := \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| \leq A + 1\}$. По следствию 11 при любом $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$|\widehat{\psi}(z)| \leq |\widehat{\psi}|_{n, K}^- e^{(A+1)\|\operatorname{Im} z\| - nw(\|\operatorname{Re} z\|)}, \quad z \in \mathbb{C}^N. \quad (30)$$

Поэтому при всех $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^N$ и $\zeta \in \mathbb{C}^N$

$$\begin{aligned} |(\widehat{\psi g_{1,\zeta}})(x)| &= |(\widehat{\psi \check{\chi}})(x + \zeta)| = |(\widehat{\psi} * \check{\chi})(x + \zeta)| \leq \int_{[-1,1]^N} \chi(t) |\widehat{\psi}(x + \zeta + t)| dt \\ &\leq \max_{\|t\| \leq 1} |\widehat{\psi}(x + \zeta + t)| \leq |\widehat{\psi}|_{nw,K}^- e^{(A+1)\|\operatorname{Im} \zeta\| - nw((\|x\| - \|\zeta\| - 1)^+)} \end{aligned}$$

где $\check{\chi}(t) := \chi(-t)$. Отсюда с учетом свойств канонических весов следует, что $\psi g_{1,\zeta} \in \mathcal{D}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$ при всех $\psi \in \mathcal{D}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$, а значит, $g_{1,\zeta} \in \mathcal{E}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$.

Аналогично, при всех $x \in \mathbb{R}^N$ и $\zeta \in \mathbb{C}^N$ для $f_\zeta := e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle}$ имеем

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}[\psi(g_{\varepsilon,\zeta} - f_\zeta)](x)| &= \left| \int_{[-1,1]^N} \chi(t) (\widehat{\psi}(x + \zeta + \varepsilon t) - \widehat{\psi}(x + \zeta)) dt \right| \\ &\leq \max_{\|t\| \leq 1} |\widehat{\psi}(x + \zeta + \varepsilon t) - \widehat{\psi}(x + \zeta)|. \end{aligned}$$

Поскольку $\widehat{\psi}$ – целая в $\mathbb{C}^N$ функция, то при $\|t\| \leq 1$ и $\varepsilon \in (0, 1]$

$$|\widehat{\psi}(x + \zeta + \varepsilon t) - \widehat{\psi}(x + \zeta)| \leq 2^N \varepsilon \max\{|\widehat{\psi}(z)| : \|z - x - \zeta\| \leq 2\}.$$

Отсюда, применив (30), получим

$$|\widehat{\psi}(x + \zeta + \varepsilon t) - \widehat{\psi}(x + \zeta)| \leq 2^N \varepsilon |\widehat{\psi}|_{nw,K}^- e^{(A+1)(\|\operatorname{Im} \zeta\| + 2) - nw((\|x + \operatorname{Re} \zeta\| - 2)^+)}.$$

В силу свойств канонического веса найдется такое $s \in \mathbb{N}$, что при любых $x \in \mathbb{R}^N$ и $\zeta \in \mathbb{C}^N$

$$w(\|x\|) \leq s(w((\|x + \operatorname{Re} \zeta\| - 2)^+) + w(\|\operatorname{Re} \zeta\|) + 1).$$

Поэтому, учитывая приведенные выше оценки, при любом $n \in \mathbb{N}$ и всех $\zeta \in \mathbb{C}^N$ имеем

$$\|\psi(g_{\varepsilon,\zeta} - f_\zeta)\|_{nw} \leq 2^N \varepsilon |\widehat{\psi}|_{nsw,K}^- e^{(A+1)(\|\operatorname{Im} \zeta\| + 2) + ns(w(\|\operatorname{Re} \zeta\|) + 1)}.$$

Поэтому $\psi(g_{\varepsilon,\zeta} - f_\zeta) \rightarrow 0$ в пространстве $\mathcal{D}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по ζ на любом компакте в $\mathbb{C}^N$ для каждой функции ψ из $\mathcal{D}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$. Остается применить предложение 6, чтобы сделать вывод о том, что $g_{\varepsilon,\zeta} \rightarrow f_\zeta$ в $\mathcal{E}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по ζ на любом компакте в $\mathbb{C}^N$. Лемма доказана.

Пусть K – компакт в $\mathbb{R}^N$. Для N -веса ω введем банахово пространство целых в $\mathbb{C}^N$ функций:

$$\mathcal{H}_\omega^+(K) := \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^N) \mid |f|_{\omega,K}^+ := \sup_{\zeta \in \mathbb{C}^N} \frac{|f(\zeta)|}{e^{h_K(\operatorname{Im} \zeta) + P_\omega(-\zeta)}} < \infty \right\}.$$

Для $\Omega = (\omega_n)_{n=1}^\infty$ из $W_N^\dagger$ (из $W_N^\downarrow$) определим пространство

$$\mathcal{H}_{(\Omega)}^+(K) := \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{H}_{\omega_n}^+(K) \quad \left(\mathcal{H}_{\{\Omega\}}^+(K) := \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{H}_{\omega_n}^+(K) \right)$$

и наделим его топологией индуктивного предела последовательности пространств $(\mathcal{H}_{\omega_n}^+(K))_{n=1}^\infty$ относительно отображений вложения (соответственно, топологией, задаваемой набором норм $(|\cdot|_{\omega_n, K}^+)_{n=1}^\infty$). Отметим, что если $\Omega \in DW_N^\uparrow$, то $\mathcal{H}_{\{\Omega\}}^+(K)$ – (DFS)-пространство, а если $\Omega \in DW_N^\downarrow$, то $\mathcal{H}_{\{\Omega\}}^+(K)$ – (FS)-пространство.

Как обычно, через E'_b будем обозначать пространство линейных непрерывных функционалов на локально выпуклом пространстве E , наделенное топологией сильного сопряженного.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть K – компакт в $\mathbb{R}^N$, Ω – правильная весовая последовательность из $\mathcal{W}_N^\uparrow$ или из $\mathcal{W}_N^\downarrow$. Преобразование Фурье–Лапласа функционалов

$$\varphi \longmapsto \mathcal{F}[\varphi](\zeta) \equiv \widehat{\varphi}(\zeta) := \varphi(e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle}|_K)$$

– линейный непрерывный оператор из $(\mathcal{E}_\Omega(K))'_b$ в $\mathcal{H}_\Omega^+(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Сначала проверим, что для любого функционала φ из $(\mathcal{E}_\Omega(K))'$ его преобразование Фурье–Лапласа – целая в $\mathbb{C}^N$ функция.

Поскольку операция сужения $\rho_K: f \mapsto f|_K$ действует линейно и непрерывно из $\mathcal{E}_\Omega(\mathbb{R}^N)$ в $\mathcal{E}_\Omega(K)$, то $\varphi \circ \rho_K$ принадлежит $(\mathcal{E}_\Omega(\mathbb{R}^N))'$. По предложению 7 сужение $\varphi \circ \rho_K$ на $\mathcal{D}_\Omega(\mathbb{R}^N)$ задает Ω -ультрараспределение Φ , имеющее компактный носитель. Ясно, что этот носитель содержится в K . Обозначим через w ассоциированный с Ω канонический вес и построим по предложению 2 две неотрицательные функции $\chi \in \mathcal{D}_{(w)}([-1, 1]^N)$, $\int_{\mathbb{R}^N} \chi(x) dx = 1$, и $\psi \in \mathcal{D}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$, $\psi|_L = 1$, где компакт L в $\mathbb{R}^N$ взят так, что $\text{int } L \supset K$. По следствию 8 при любом $\zeta \in \mathbb{C}^N$

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= (\varphi \circ \rho_K)(e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle}) = (\varphi \circ \rho_K)(\psi e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle}) = \Phi(\psi e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle}), \\ &(\varphi \circ \rho_K)(\widehat{\chi}(\varepsilon \cdot) e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle}) = \Phi(\psi \widehat{\chi}(\varepsilon \cdot) e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle}). \end{aligned}$$

Так как по лемме 7 функция $\widehat{\chi}(\varepsilon \cdot) e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится к $e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle}$ в $\mathcal{E}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$ и, тем более, в $\mathcal{E}_\Omega(\mathbb{R}^N)$ равномерно на компактах из $\mathbb{C}^N$, то из последних двух равенств следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\Phi(\psi \widehat{\chi}(\varepsilon \cdot) e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle}) \rightarrow \varphi(\zeta) \quad \text{равномерно на компактах в } \mathbb{C}^N. \quad (31)$$

Далее, воспользовавшись теоремой 1 и следствием 6, найдем такую меру Радона μ из $\mathcal{M}_\Omega$, что

$$\Phi(g) = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{g} d\mu \quad \forall g \in \mathcal{D}_\Omega(\mathbb{R}^N).$$

Отсюда при любых $\varepsilon > 0$ и $\zeta \in \mathbb{C}^N$

$$\Phi(\psi \widehat{\chi}(\varepsilon \cdot) e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle}) = (2\pi)^N \int_{[-1, 1]^N \times \mathbb{R}^N} \chi(t) \widehat{\psi}(x + \zeta + \varepsilon t) d\lambda_N(t) d\mu(x).$$

Поскольку $\widehat{\psi}$ – целая в $\mathbb{C}^N$ функция, принадлежащая по следствию 11 пространству $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \widetilde{\mathcal{H}}_{nw}^-(\mathbb{R}^N)$, то $\Phi(\psi \widehat{\chi}(\varepsilon \cdot) e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle})$ также принадлежит $\mathcal{H}(\mathbb{C}^N)$.

Остается воспользоваться (31), чтобы сделать вывод о том, что и $\widehat{\varphi}$ – целая в $\mathbb{C}^N$ функция.

Продолжим доказательство, считая для определенности, что Ω принадлежит $\mathcal{W}_N^\uparrow$. Из непрерывности φ на $\mathcal{E}_{(\Omega)}(K)$ следует, что существует такое $n \in \mathbb{N}$, что

$$|\varphi(f)| \leq \|\varphi\|_n^* \|f\|_{\omega_n, K}, \quad f \in \mathcal{E}_{(\Omega)}(K),$$

где $\|\varphi\|_n^* := \sup\{|\varphi(f)| : f \in \mathcal{E}_{(\Omega)}(K), \|f\|_{\omega_n, K} \leq 1\} < \infty$. Подставив сюда вместо f сужение экспоненты f_ζ на K и воспользовавшись тем, что w – ассоциированный с Ω вес, получим по лемме 6, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $C_\varepsilon > 0$, что

$$|\widehat{\varphi}(\zeta)| \leq \|\varphi\|_n^* C_\varepsilon e^{h_K(\operatorname{Im} \zeta) + \varepsilon \|\operatorname{Im} \zeta\| + P_{\omega_{n+1}}(-\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^N. \quad (32)$$

Так же, как в доказательстве теоремы 2, возьмем любое $\zeta = \xi + i\eta$ из $\mathbb{C}^N$ и рассмотрим целую функцию $\widehat{\varphi}(\xi + z\eta)$ одной комплексной переменной z . Из (32) следует, что при $\varepsilon = 1$ и $z = x \in \mathbb{R}^N$

$$\ln |\widehat{\varphi}(\xi + x\eta)| \leq \ln(\|\varphi\|_n^* C_1) + \omega_{n+1}(-\xi - x\eta).$$

Тогда в соответствии с принципом Фрагмена–Линделёфа [27, теорема 6.5.4] при всех $z = x + iy$, $y \neq 0$, имеем

$$\ln |\widehat{\varphi}(\xi + z\eta)| \leq \ln(\|\varphi\|_n^* C_1) + \frac{|y|}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\omega_{n+1}(-\xi - t\eta)}{(t - x)^2 + y^2} dt + \Delta|y|, \quad (33)$$

где

$$\Delta := \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi r} \int_0^\pi \ln |\widehat{\varphi}(\xi + \eta r e^{i\theta})| \cdot \sin \theta d\theta.$$

Заметим, что так как w – канонический вес, то при некотором $K \geq 1$

$$w(s + t) \leq K(w(s) + w(t) + 1) \quad \forall s, t \geq 0.$$

Кроме того, поскольку w ассоциирован с Ω , то $\omega_{n+1}(h) \leq w(h) + A_n$ на $\mathbb{R}^N$, где $A_n := \omega_{n+2}(0)$. Значит, при любых $r > 0$ и $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} P_{\omega_{n+1}}(-\xi - \eta r e^{i\theta}) - A_n &\leq P_w(-\xi - \eta r e^{i\theta}) \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{w(\|\xi\| + r\|\eta\| + tr\|\eta\|)}{1 + t^2} dt \\ &\leq K \left(w(\|\xi\| + r\|\eta\|) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{w(tr\|\eta\|)}{1 + t^2} dt + 1 \right). \end{aligned}$$

По тем же соображениям, что и в лемме 5, получаем

$$w(\|\xi\| + r\|\eta\|) = o(r), \quad \int_0^\infty \frac{w(tr\|\eta\|)}{1 + t^2} dt = o(r) \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Поэтому $P_{\omega_{n+1}}(-\xi - \eta r e^{i\theta}) = o(r)$ при $r \rightarrow \infty$ равномерно по $\theta \in [0, 2\pi]$. Воспользовавшись (32), получим тогда, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\Delta \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi r} \int_0^\pi \left((rh_K(\eta) + \varepsilon r\|\eta\|) \sin^2 \theta + P_{\omega_{n+1}}(-\xi - \eta r e^{i\theta}) \sin \theta \right) d\theta = h_K(\eta) + \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\Delta \leq h_K(\eta)$, и тогда, положив $z = i$ в (33), имеем

$$|\widehat{\varphi}(\zeta)| \leq C_1 \|\varphi\|_n^* e^{h_K(\operatorname{Im} \zeta) + P_{\omega_{n+1}}(-\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^N,$$

или

$$|\widehat{\varphi}|_{\omega_{n+1}, K}^+ \leq C_1 \|\varphi\|_n^*, \quad \varphi \in (\mathcal{E}_{(\Omega)}(K))',$$

где C_1 , как мы знаем, от φ не зависит. Отсюда с учетом первой части доказательства и того, что $\mathcal{E}_{(\Omega)}(K)$ – (FS)-пространство, следует, что преобразование Фурье–Лапласа функционалов действует непрерывно из $(\mathcal{E}_{(\Omega)}(K))'_b$ в $\mathcal{H}_{(\Omega)}^+(K)$. Его линейность очевидна. Случай $\Omega \in \mathcal{W}_N^\downarrow$ рассматривается аналогично. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Пусть K – выпуклый компакт в $\mathbb{R}^N$, Ω – правильная весовая последовательность из $\mathcal{W}_N^\uparrow$ или из $\mathcal{W}_N^\downarrow$. Для любой функции f из $\mathcal{H}_{\Omega}^+(K)$ найдется Ω -ультрараспределение с носителем в K , преобразование Фурье–Лапласа которого совпадает с f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся рассмотрением Ω из $\mathcal{W}_N^\uparrow$, поскольку для Ω из $\mathcal{W}_N^\downarrow$ доказательство проводится аналогично с естественными техническими изменениями. Пусть $f \in \mathcal{H}_{(\Omega)}^+(K)$. Тогда при некотором $n \in \mathbb{N}$

$$|f(\zeta)| \leq |f|_{\omega_n, K}^+ e^{h_K(\operatorname{Im} \zeta) + P_{\omega_n}(-\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^N. \quad (34)$$

Так как $\Omega \in \mathcal{W}_N^\uparrow \subset DW_N^\uparrow$, то всюду на $\mathbb{R}^N$

$$\omega_n(\xi) \leq \omega_{n+m}(\xi) - m \ln(1 + \|\xi\|) + \ln C_{n,m}, \quad (35)$$

где $C_{n,m} > 0$ – некоторая постоянная, а $m \in \mathbb{N}$ произвольно. Из неравенств (34) и (35) следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(-\xi)| e^{-\omega_{n+N+1}(\xi)} d\lambda_N \leq 2^N C_{n, N+1} |f|_{\omega_n, K}^+ < \infty.$$

Значит, $(2\pi)^{-N} f(-\xi) d\lambda_N$ – мера Радона из $\mathcal{M}_{(\Omega)}$, а потому формула

$$\varphi(g) := \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{g}(\xi) f(-\xi) d\lambda_N \quad (36)$$

задает (Ω) -ультрараспределение.

По классической схеме проверяем, что $\operatorname{supp} \varphi \subset K$. Именно, пусть $x_0 \in G \setminus K$ и $\delta > 0$ настолько мало, что куб $B := \{x \in \mathbb{R}^N : \|x - x_0\| \leq \delta\}$ содержится в $G \setminus K$. По теореме 2 для любой функции g из $\mathcal{D}_{(\Omega)}(B)$ при каждом $l \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$|\hat{g}(\zeta)| \leq \|g\|_{\omega_l} e^{h_B(\operatorname{Im} \zeta) - P_{\omega_l}(\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^N. \quad (37)$$

Поскольку для $\omega_0(\xi) = \ln(1 + \|\xi\|)$

$$P_{\omega_0}(\zeta) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1 + \|\xi + t\eta\|)}{1 + t^2} dt \geq \frac{1}{4} \ln(1 + \|\zeta\|), \quad \zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}^N,$$

то неравенство (35) влечет, что при любом $m \in \mathbb{N}$

$$P_{\omega_n}(\zeta) \leq P_{\omega_{n+m}}(\zeta) - \frac{m}{4} \ln(1 + \|\zeta\|) + \ln C_{n,m}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^N.$$

Тогда из оценок (34) и (37) следует, что при всех $\zeta \in \mathbb{C}^N$

$$|f(-\zeta)g(\zeta)| \leq C_{n,4N+4} |f|_{\omega_n, K}^+ \|g\|_{\omega_{n+4N+4}} e^{h_K(-\operatorname{Im} \zeta) + h_B(\operatorname{Im} \zeta)} \frac{1}{(1 + \|\zeta\|)^{N+1}}.$$

Учитывая, что $f(-\zeta)g(\zeta)$ – целая в $\mathbb{C}^N$ функция, имеем отсюда и из (36), что при любом $\eta \in \mathbb{R}^N$

$$\varphi(g) := \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{g}(\xi + i\eta) f(-\xi - i\eta) d\xi,$$

а тогда

$$|\varphi(g)| \leq \frac{1}{\pi^N} C_{n,4N+4} |f|_{\omega_n, K}^+ \|g\|_{\omega_{n+4N+4}} e^{h_K(-\eta) + h_B(\eta)}.$$

Так как выпуклые компакты K и B не пересекаются, то найдется такое $\eta_0 \in \mathbb{R}^N$, что $h_K(-\eta_0) + h_B(\eta_0) < 0$. Тогда, взяв $\eta = t\eta_0$ в последней оценке для $|\varphi(g)|$ и устремив t к $+\infty$, получим, что $\varphi(g) = 0$. Значит, $\operatorname{supp} \varphi \subset K$.

В соответствии с предложением 7 функция φ продолжается до функционала Φ из $(\mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R}^N))'$ (по следствию 7 это продолжение единственно). Нам остается проверить, что $\hat{\Phi} = f$.

По предложению 9 и его доказательству

$$\mathcal{S}_{(w)}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathcal{E}_{(w)}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathcal{E}_{\Omega}(\mathbb{R}^N).$$

Поэтому сужение Φ на $\mathcal{S}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$ – элемент из $(\mathcal{S}_{(w)}(\mathbb{R}^N))'$. Непосредственная проверка по определению показывает, что правая часть равенства (36) задает линейный непрерывный функционал ψ на $\mathcal{S}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$. При этом в силу (36) имеем $\Phi = \psi$ на $\mathcal{D}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$. Так как по предложению 8 пространство $\mathcal{D}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$ плотно в $\mathcal{S}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$, то $\Phi = \psi$ всюду на $\mathcal{S}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$.

Теперь возьмем неотрицательную функцию χ из $\mathcal{D}_{(w)}([-1, 1]^N)$, для которой $\int_{\mathbb{R}^N} \chi(t) dt = 1$. По утверждению 2) предложения 8 имеем $\chi \in \mathcal{S}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$, а по лемме 7 функция $\hat{\chi}(\varepsilon \cdot) e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится в $\mathcal{E}_{(w)}(\mathbb{R}^N)$ к $e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle}$ при любом $\zeta \in \mathbb{C}^N$. Учитывая все сказанное выше, имеем при любом $\zeta \in \mathbb{C}^N$

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(\zeta) &= \Phi(e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(\hat{\chi}(\varepsilon \cdot) e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi(\hat{\chi}(\varepsilon \cdot) e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle}) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[-1, 1]^N} \chi(x) f(\zeta + \varepsilon x) dx = f(\zeta). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Для открытого в $\mathbb{R}^N$ множества G и весовой последовательности Ω из $W_N^\dagger$ или из $W_N^\downarrow$ образуем линейное пространство $\mathcal{H}_\Omega^+(G) := \bigcup_{K \in G} \mathcal{H}_\Omega^+(K)$ и снабдим его топологией индуктивного предела семейства пространств $\{\mathcal{H}_\Omega^+(K) : K \in G\}$ относительно операций вложения.

Как и выше для других пространств, в задании $\mathcal{H}_\Omega^+(G)$ и его топологии можно ограничиться любой исчерпывающей G последовательностью компактов. Поэтому для Ω из $DW_N^\uparrow$ или из $DW_N^\downarrow$, как нетрудно убедиться, $\mathcal{H}_{(\Omega)}^+(G)$ является (DFS)-пространством, а $\mathcal{H}_{\{\Omega\}}^+(G)$ представляет собой отделимый индуктивный предел возрастающей последовательности (FS)-пространств. Отсюда, в частности, следует, что $\mathcal{H}_\Omega^+(G)$ относится к классу отделимых ультраборнологических пространств.

ТЕОРЕМА 3. *Для любой выпуклой области G в $\mathbb{R}^N$ и правильной весовой последовательности Ω из $\mathcal{W}_N^\uparrow$ или из $\mathcal{W}_N^\downarrow$ преобразование Фурье–Лапласа функционалов – топологический изоморфизм из $(\mathcal{E}_\Omega(G))'_b$ на $\mathcal{H}_\Omega^+(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\varphi \in (\mathcal{E}_\Omega(G))'$. Тогда найдется такой компакт K в G , что $\varphi \circ \rho_K$ – линейный непрерывный функционал на $\mathcal{E}_\Omega(K)$. По предложению 10

$$\widehat{\varphi} = \widehat{\varphi \circ \rho_K} \in \mathcal{H}_\Omega^+(K) \subset \mathcal{H}_\Omega^+(G).$$

Таким образом, преобразование Фурье–Лапласа функционалов $\mathcal{F}$ действует из $(\mathcal{E}_\Omega(G))'_b$ в $\mathcal{H}_\Omega^+(G)$. Линейность оператора $\mathcal{F}: (\mathcal{E}_\Omega(G))'_b \rightarrow \mathcal{H}_\Omega^+(G)$ очевидна. Установим его непрерывность. Напомним, что в соответствии с результатами, полученными в § 3, $\mathcal{E}_{(\Omega)}(G)$ является (FS)-пространством, а $\mathcal{E}_{\{\Omega\}}(G)$ изоморфно пределу приведенного проективного спектра последовательности (DFS)-пространств. Поэтому $(\mathcal{E}_{(\Omega)}(G))'_b$ является (DFS)-пространством, а $(\mathcal{E}_{\{\Omega\}}(G))'_b$ – индуктивным пределом последовательности (FS)-пространств (см. [22, § 2]). В любом случае $(\mathcal{E}_\Omega(G))'_b$ – отделимое ультраборнологическое пространство. Значит, для проверки непрерывности оператора $\mathcal{F}: (\mathcal{E}_\Omega(G))'_b \rightarrow \mathcal{H}_\Omega^+(G)$ по теореме Гротендика [23] (см. также [21, с. 230]) достаточно установить замкнутость его графика.

Пусть сеть $(\varphi_\alpha, \widehat{\varphi}_\alpha)_{\alpha \in A}$ сходится в произведении $(\mathcal{E}_\Omega(G))'_b \times \mathcal{H}_\Omega^+(G)$ к элементу (φ, h) . Тогда $(\varphi_\alpha(f))_{\alpha \in A}$ сходится к $\varphi(f)$ для любой функции $f \in \mathcal{E}_\Omega(G)$. Подставив $f = f_\zeta$, получим, что $\widehat{\varphi}_\alpha(\zeta) \rightarrow \widehat{\varphi}(\zeta)$ для любого $\zeta \in \mathbb{C}^N$. С другой стороны, так как топология пространства $\mathcal{H}_\Omega^+(G)$ мажорирует в нем топологию поточечной сходимости, то $\widehat{\varphi}_\alpha(\zeta) \rightarrow h(\zeta)$ в $\mathbb{C}^N$. Значит, $h = \widehat{\varphi}$, и, следовательно, график оператора $\mathcal{F}: (\mathcal{E}_\Omega(G))'_b \rightarrow \mathcal{H}_\Omega^+(G)$ замкнут, что и требовалось показать.

2) Докажем инъективность оператора $\mathcal{F}: (\mathcal{E}_\Omega(G))'_b \rightarrow \mathcal{H}_\Omega^+(G)$. Пусть функционал φ из $(\mathcal{E}_\Omega(G))'_b$ таков, что $\widehat{\varphi}(\zeta) = 0$ в $\mathbb{C}^N$. По предложению 7 сужение φ на $\mathcal{D}_\Omega(G)$ – Ω-ультрасраспределение с компактным носителем $K \subset G$. Поэтому в силу следствия 6 имеется такая мера μ из $\mathcal{M}_\Omega$, для которой равенство (18) справедливо для всех g из $\mathcal{D}_\Omega(G)$.

Построим по предложению 2 функцию χ из $\mathcal{D}_{(v)}(G)$ с $\chi|_{K_\varepsilon} = 1$, где v – ассоциированный с Ω канонический вес, а $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Применяя следствие 8 и представление (18), всюду на $\mathbb{C}^N$ имеем

$$0 = \widehat{\varphi}(\zeta) = \varphi(e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle}) = \varphi(\chi e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle}) = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\chi}(\zeta + u) d\mu_u.$$

Отсюда, еще раз используя следствие 8 и представление (18), заключаем, что для всех $g \in \mathcal{D}_\Omega(G)$

$$\begin{aligned}\varphi(g) &= \varphi(\chi g) = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\chi g}(\xi) d\mu_\xi = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} (\widehat{\chi} * \widehat{g})(\xi) d\mu_\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{g}(\eta) d\eta \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\chi}(\xi - \eta) d\mu_\xi = 0.\end{aligned}$$

Законность изменения порядка интегрирования обосновывается так же, как и в следствии 6. Остается применить следствие 7, в соответствии с которым $\varphi = 0$.

3) Теперь проверим, что $\mathcal{F}((\mathcal{E}_\Omega(G))') = \mathcal{H}_\Omega^+(G)$. Возьмем любую функцию f из $\mathcal{H}_\Omega^+(G)$. Для нее найдется такой выпуклый компакт $K \subset G$, что $f \in \mathcal{H}_\Omega^+(K)$. По предложению 11 имеется Ω -ультрасредпределение φ с носителем в K , для которого $\widehat{\varphi} = f$. По предложению 7 функция φ продолжается до элемента из $(\mathcal{E}_\Omega(G))'$, что и требовалось показать.

4) Итак, $\mathcal{F}$ – линейный непрерывный взаимно однозначный оператор, действующий из $(\mathcal{E}_\Omega(G))'_b$ на $\mathcal{H}_\Omega^+(G)$. Как известно, $(\mathcal{E}_\Omega(G))'_b$ – (DFS)-пространство, $(\mathcal{E}_{\{\Omega\}}(G))'_b$ – индуктивный предел последовательности (FS)-пространств, а $\mathcal{H}_\Omega^+(G)$ является отделимым ультраборнотопологическим пространством. Поэтому к оператору $\mathcal{F}: (\mathcal{E}_\Omega(G))'_b \rightarrow \mathcal{H}_\Omega^+(G)$ применима уже использованная выше теорема Гротендика из [23], в соответствии с которой этот оператор является открытым, а значит, в конечном итоге, топологическим изоморфизмом из $(\mathcal{E}_\Omega(G))'_b$ на $\mathcal{H}_\Omega^+(G)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для N -веса ω и компакта $K \subset \mathbb{R}^N$ положим

$$\widetilde{\mathcal{H}}_\omega^+(K) := \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^N) \mid |\widetilde{f}|_{\omega, K}^+ := \sup_{\zeta \in \mathbb{C}^N} \frac{|f(\zeta)|}{e^{h_K(\operatorname{Im} \zeta) + \omega(-\operatorname{Re} \zeta)}} < \infty \right\}.$$

С каждой весовой последовательностью $\Omega = (\omega_n)_{n=1}^\infty$ из $W_N^\uparrow$ (из $W_N^\downarrow$) свяжем пространство

$$\widetilde{\mathcal{H}}_{(\Omega)}^+(K) := \bigcup_{n=1}^\infty \widetilde{\mathcal{H}}_{\omega_n}^+(K) \quad \left(\widetilde{\mathcal{H}}_{\{\Omega\}}^+(K) := \bigcap_{n=1}^\infty \widetilde{\mathcal{H}}_{\omega_n}^+(K) \right),$$

наделенное топологией индуктивного (проективного) предела последовательности банаховых пространств $(\widetilde{\mathcal{H}}_{\omega_n}^+(K))_{n=1}^\infty$ относительно отображений вложения. Для открытого в $\mathbb{R}^N$ множества G определим пространство $\widetilde{\mathcal{H}}_\Omega^+(G) := \bigcup_{K \Subset G} \widetilde{\mathcal{H}}_\Omega^+(K)$ и снабдим его топологией индуктивного предела семейства пространств $\{\widetilde{\mathcal{H}}_\Omega^+(K) : K \Subset G\}$ относительно операторов вложения.

Как и в следствии 11, устанавливаем, что для правильных Ω весовые системы

$$\begin{aligned}&\{h_K(\operatorname{Im} \zeta) + \omega_n(-\operatorname{Re} \zeta) : K \Subset G, n \in \mathbb{N}\}, \\ &\{h_K(\operatorname{Im} \zeta) + P_{\omega_n}(-\zeta) : K \Subset G, n \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

эквивалентны в том смысле, что каждый вес первой системы мажорируется некоторым весом второй системы вместе с аддитивной постоянной, и наоборот. Поэтому $\tilde{\mathcal{H}}_{\Omega}^{+}(G)$ совпадает с $\mathcal{H}_{\Omega}^{+}(G)$ и, следовательно, в теореме 3 можно вместо $\mathcal{H}_{\Omega}^{+}(G)$ взять $\tilde{\mathcal{H}}_{\Omega}^{+}(G)$.

Список литературы

1. L. Schwartz, *Théorie des distributions*. I, II, Actualités Sci. Ind., Hermann, Paris, 1950, 1951.
2. Р. Эдвардс, *Функциональный анализ. Теория и приложения*, Мир, М., 1969; пер. с англ.: R. E. Edwards, *Functional analysis. Theory and applications*, Holt, Rinehart and Winston, New York–Toronto–London, 1965.
3. В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1988.
4. Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*. I: *Теория распределений и анализ Фурье*, Мир, М., 1986; пер. с англ.: L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators*. I: *Distribution theory and Fourier analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **256**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
5. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции*, вып. 2, Физматгиз, М., 1958.
6. C. Roumieu, “Sur quelques extensions de la notion de distribution”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **77**:1 (1960), 41–121.
7. C. Roumieu, “Ultra-distributions définies sur $\mathbb{R}^n$ et sur certaines classes de variétés différentiables”, *J. Anal. Math.*, **10** (1962), 153–192.
8. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, т. 1, Мир, М., 1971; пер. с франц.: J.-L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. 1, Dunod, Paris, 1968.
9. Chin Ch'èng Chou, *La transformation de Fourier complexe et l'équation de convolution*, Lecture Notes in Math., **325**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1973.
10. H. Komatsu, “Ultradistributions, I. Structure theorems and a characterization”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA, Math.*, **20** (1973), 25–105.
11. A. Beurling, “Quasi-analyticity and general distributions. Lectures 4 and 5”, *Amer. Math. Soc.*, Summer Inst., Stanford, 1961.
12. G. Björck, “Linear partial differential operators and generalized distributions”, *Ark. Mat.*, **6**:4–5 (1966), 351–407.
13. I. Cioranescu, L. Zsidó, “ ω -ultradistributions and their applications to operator theory”, *Spectral Theory* (Warsaw, 1977), **8**, Banach Center Publ., Warsaw, 1982, 77–220.
14. R. W. Braun, R. Meise, B. A. Taylor, “Ultradifferentiable functions and Fourier analysis”, *Results Math.*, **17**:3–4 (1990), 206–237.
15. R. W. Braun, R. Meise, D. Vogt, “Characterization of the linear partial differential operators with constant coefficients which are surjective on nonquasianalytic classes of Roumieu type on $\mathbb{R}^N$ ”, *Math. Nachr.*, **168** (1994), 19–54.
16. T. Meyer, “Surjectivity of convolution operators on spaces of ultradifferentiable functions of Roumieu type”, *Studia Math.*, **125**:2 (1997), 101–129.
17. J. Bonet, R. W. Braun, R. Meise, B. A. Taylor, “Whitney’s extension theorem for nonquasianalytic classes of ultradifferentiable functions”, *Studia Math.*, **99**:2 (1991), 155–184.
18. A. V. Abanin, “On Whitney’s extension theorem for spaces of ultradifferentiable functions”, *Math. Ann.*, **320**:1 (2001), 115–126.
19. J. Bonet, R. Meise, “Ultradistributions of Roumieu type and projective descriptions”, *J. Math. Anal. Appl.*, **255**:1 (2001), 122–136.

20. А. В. Абанин, “Пространства Ω -ультрадифференцируемых функций и Ω -ультрасредств”, *Докл. РАН*, **401**:6 (2005), 727–730; англ. пер.: A. V. Abanin, “Spaces of Ω -ultradifferentiable functions and Ω -ultradistributions”, *Dokl. Math.*, **71**:2 (2005), 260–263.
21. А. П. Робертсон, В. Дж. Робертсон, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1967; пер. с англ.: A. P. Robertson, W. J. Robertson, *Topological vector spaces*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, **53**, Cambridge University Press, New York, 1964.
22. В. В. Жаринов, “Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS ”, *УМН*, **34**:4 (1979), 97–131; англ. пер.: V. V. Zharinov, “Compact families of locally convex topological vector spaces, Fréchet–Schwartz and dual Fréchet–Schwartz spaces”, *Russian Math. Surveys*, **34**:4 (1979), 105–143.
23. А. Гротендик, “О пространствах (F) и (DF) ”, *Математика*, **2**:3 (1958), 81–127; пер. с франц.: A. Grothendieck, “Sur les espaces (F) et (DF) ”, *Summa Brasil. Math.*, **3** (1954), 57–123.
24. Б. М. Макаров, “Об индуктивных пределах нормированных пространств”, *Вестник ЛГУ*, **20**:13 (1965), 50–58.
25. R. Meise, D. Vogt, *Einführung in die Funktionalanalysis*, Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik, **62**, Vieweg, Braunschweig, 1992.
26. А. Баернштейн II, “Representation of holomorphic functions by boundary integrals”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **160** (1971), 27–37.
27. R. P. Boas, *Entire functions*, Academic Press, New York, 1954.

А. В. АБАНИН (A. V. ABANIN)
Ростовский государственный университет
E-mail: abanin@math.rsu.ru

Поступило в редакцию
04.09.2006