Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Никулин, Конечность числа арифметических групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 1, 55–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/im1148>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 13:38:17

УДК 512.817.72+512.817.6

В. В. Никулин

Конечность числа арифметических групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского

После результатов, полученных автором (1980, 1981) и Э.Б. Винбергом (1981), конечность числа максимальных арифметических групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского не была известна только в размерностях $2 \leq n \leq 9$. Недавно (2005) Д. Д. Лонг, К. Маклахан и А. В. Рид доказали конечность в размерности 2 и И. Агол доказал конечность в размерности 3. Используя эти результаты в размерностях 2 и 3, здесь мы доказываем конечность в оставшихся размерностях $4 \leq n \leq 9$. Методы автора (1980, 1981) более чем достаточны, чтобы доказать это очень коротким и очень простым рассуждением.

Библиография: 11 наименований.

§ 1. Введение

Имеются только три типа односвязных полных римановых многообразий постоянной кривизны: сферы, евклидовы пространства и пространства Лобачевского. Дискретные группы, порожденные отражениями (в гиперплоскостях этих пространств), были определены Коксетером. Он же классифицировал их на сферах и в евклидовых пространствах [6].

В пространствах Лобачевского имеются два типа дискретных групп, порожденных отражениями: арифметические и произвольные. Предмет настоящей статьи – конечность числа максимальных арифметических групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского. Предполагается, что кривизна равна -1 .

Прежде всего, напомним известные результаты о классификации арифметических групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского.

В работе [2] Э.Б. Винберг (1967) сформулировал и доказал критерий арифметичности для дискретных групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского в терминах их фундаментальных камер. В частности, им было введено понятие основного поля такой группы. Оно является чисто вещественным полем алгебраических чисел конечной степени над $\mathbb{Q}$. Арифметическая группа, порожденная отражениями, является подгруппой конечного индекса группы автоморфизмов гиперболической квадратичной формы над кольцом целых алгебраических чисел этого поля. Таким образом, имеются два важных целочисленных параметра, связанных с арифметической группой,

Работа выполнена при поддержке грантом Великобритании EPSRC EP/D061997/1.

порожденной отражениями: размерность $n \geq 2$ пространства Лобачевского и степень $N \geq 1$ основного поля над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

В работе [8] автор доказал (1980), что число максимальных арифметических групп, порожденных отражениями, конечно при фиксированных параметрах n и N . Кроме того, число основных полей фиксированной степени N также конечно. В [9] автор доказал (1981), что существует такая константа N_0 , что размерность $n \leq 9$, если степень $N \geq N_0$. Таким образом, число максимальных арифметических групп, порожденных отражениями, конечно в каждой размерности $n \geq 10$ пространства Лобачевского.

В работах [3], [4] Э. Б. Винберг доказал (1981), что $n < 30$. Таким образом, число максимальных арифметических групп, порожденных отражениями, конечно для всех размерностей $n \geq 10$ пространств Лобачевского в совокупности.

В результате в проблеме конечности числа арифметических групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского оставался открытым вопрос лишь об ограниченности степени N основного поля в пространствах Лобачевского размерностей $2 \leq n \leq 9$.

По поводу этих результатов см. также доклады [5] и [10] на международных конгрессах математиков.

В течение почти 25 лет в этой области не было получено никаких новых общих результатов, но недавно такие важные результаты были опубликованы.

В работе [7] Д. Д. Лонг, К. Маклахлан и А. В. Рид доказали (2005), что число максимальных арифметических групп, порожденных отражениями, конечно в размерности $n = 2$. Более общим образом доказана конечность числа максимальных арифметических фуксовых групп рода 0.

В работе [1] И. Агол (2005) доказал, что число максимальных арифметических групп, порожденных отражениями, конечно в размерности $n = 3$.

Таким образом, конечность числа максимальных арифметических групп, порожденных отражениями, оставалась недоказанной только в размерностях $4 \leq n \leq 9$. Цель настоящей короткой статьи – показать, что методы, разработанные автором в работах [8], [9], более чем достаточны для того, чтобы вывести это из доказанной конечности для размерностей $n = 2$ и $n = 3$. Со всем не используется та важная часть этих методов, которая необходима для ограничения размерности пространства Лобачевского.

Более точно, мы показываем, что если число максимальных арифметических групп, порожденных отражениями, конечно в размерностях 2 и 3, то из результатов, полученных в работах [8], [9], вытекает ограниченность степени основного поля в размерностях $4 \leq n \leq 9$. Из результатов, полученных в [8], отсюда вытекает конечность числа максимальных арифметических групп, порожденных отражениями, в этих размерностях.

В результате завершается доказательство конечности числа максимальных арифметических групп, порожденных отражениями, во всех пространствах Лобачевского в совокупности.

Предварительный вариант настоящей статьи опубликован как препринт [11].

§ 2. Конечность числа максимальных арифметических групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского размерностей $4 \leq n \leq 9$

В приводимом ниже доказательстве мы используем модель Клейна пространства Лобачевского $\mathcal{L}$ размерности n , связанную с вещественной гиперболической формой сигнатуры $(1, n)$. Тогда конечный выпуклый многогранник $\mathcal{M}$ в $\mathcal{L}$ определяется множеством векторов $P(\mathcal{M})$ с квадратом -2 этой формы, перпендикулярных гиперплоскостям $\mathcal{H}_\delta$, $\delta \in P(\mathcal{M})$, граней старшей (т. е. коразмерности один) размерности многогранника $\mathcal{M}$ и направленных наружу от $\mathcal{M}$. Тогда число $\delta \cdot \delta'$ для $\delta, \delta' \in P(\mathcal{M})$ определяет угол или расстояние между соответствующими гиперплоскостями $\mathcal{H}_\delta, \mathcal{H}_{\delta'}$. В частности, данные гиперплоскости перпендикулярны, если и только если $\delta \cdot \delta' = 0$. Множество $P(\mathcal{M})$ определяет матрицу Грама $(\delta \cdot \delta')$, $\delta, \delta' \in P(\mathcal{M})$, многогранника $\mathcal{M}$ и эквивалентную ей диаграмму Грама $\Gamma(P(\mathcal{M}))$, вершинами которой являются элементы $P(\mathcal{M})$, и две различные вершины $\delta, \delta' \in P(\mathcal{M})$ соединяются ребром веса $\delta \cdot \delta'$, если $\delta \cdot \delta' \neq 0$. Это определяет компоненты связности множества $P(\mathcal{M})$ и его подмножеств (более подробно об этом см. [2], а также [8], [9]).

Цель настоящей работы – доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.1. *В пространствах Лобачевского размерностей $4 \leq n \leq 9$ степень основного поля арифметических групп, порожденных отражениями, ограничена.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся индукцией по размерности n пространства Лобачевского.

Для $n = 2$ число максимальных арифметических групп, порожденных отражениями, конечно в силу [7]. Тогда, очевидно, ограничена и степень основного поля арифметических групп, порожденных отражениями, в данной размерности.

Для $n = 3$ число максимальных арифметических групп, порожденных отражениями, конечно в силу [1], степень основного поля таких групп также ограничена.

Предположим, что степень основного поля арифметических групп, порожденных отражениями, ограничена во всех размерностях, не превосходящих $n - 1$, пространств Лобачевского, где $n \geq 4$. Докажем это для n .

Пусть G – арифметическая группа, порожденная отражениями, в размерности n . Пусть $\mathcal{M}$ – фундаментальная камера группы G . Хорошо известно, что камера $\mathcal{M}$ ограничена (компактна), если основное поле отлично от $\mathbb{Q}$. Поэтому далее будем предполагать, что камера $\mathcal{M}$ ограничена. Пусть $P(\mathcal{M})$ – множество векторов с квадратом -2 , перпендикулярных граням старшей размерности камеры $\mathcal{M}$ и направленных наружу. Напомним, что многогранник $\mathcal{M}$ имеет острые углы, и поэтому $\delta \cdot \delta' \geq 0$ для различных $\delta, \delta' \in P(\mathcal{M})$.

Следуя работам [8], [9], рассмотрим грань старшей размерности $\mathcal{H}_e \cap \mathcal{M}$, $e \in P(\mathcal{M})$, выпуклого ограниченного многогранника $\mathcal{M}$, которая имеет мини-

мальность 14 (она определяет узкую часть многогранника $\mathcal{M}$ [9, § 4, п. 2]). Обозначим через $P(\mathcal{M}, e)$ множество всех $\delta \in P(\mathcal{M})$ таких, что гиперплоскость $\mathcal{H}_\delta$ пересекает гиперплоскость $\mathcal{H}_e$ (хорошо известно, что тогда $\mathcal{H}_e \cap \mathcal{H}_\delta \cap \mathcal{M}$ является гранью коразмерности два многогранника $\mathcal{M}$, если $\delta \neq e$). То, что грань $\mathcal{H}_e \cap \mathcal{M}$ имеет минимальность 14, означает, что

$$\delta \cdot \delta' < 14 \quad \forall \delta, \delta' \in P(\mathcal{M}, e). \quad (2.1)$$

Если $\mathcal{H}_\delta \perp \mathcal{H}_e$ (эквивалентно, $\delta \cdot e = 0$) для всех $\delta \in P(\mathcal{M}, e) - \{e\}$, то, очевидно, грань $\mathcal{H}_e \cap \mathcal{M}$ является фундаментальной камерой для арифметической группы, порожденной отражениями, в $\mathcal{H}_e$ размерности $n - 1$ с тем же самым основным полем. По предположению индукции оно имеет ограниченную степень.

Таким образом, мы можем предполагать, что существует вектор $f \in P(\mathcal{M}, e) - \{e\}$ такой, что $f \cdot e > 0$ (эквивалентно, f и e соединяются ребром в диаграмме Грама многогранника $\mathcal{M}$). Рассмотрим грань $\mathcal{H}_e \cap \mathcal{H}_f \cap \mathcal{M}$ коразмерности два многогранника $\mathcal{M}$. Обозначим через $P(\mathcal{M}, e, f)$ множество всех $\delta \in P(\mathcal{M})$ таких, что гиперплоскость $\mathcal{H}_\delta$ пересекает подпространство $\mathcal{H}_e \cap \mathcal{H}_f$ коразмерности два (хорошо известно, что тогда $\mathcal{H}_e \cap \mathcal{H}_f \cap \mathcal{H}_\delta \cap \mathcal{M}$ – грань коразмерности три многогранника $\mathcal{M}$, если δ отличен от e и f). Если $\mathcal{H}_\delta \perp \mathcal{H}_e \cap \mathcal{H}_f$ (эквивалентно, $\delta \cdot e = \delta \cdot f = 0$) для всех $\delta \in P(\mathcal{M}, e, f) - \{e, f\}$, то, очевидно, грань $\mathcal{H}_e \cap \mathcal{H}_f \cap \mathcal{M}$ коразмерности два многогранника $\mathcal{M}$ является фундаментальной камерой арифметической группы, порожденной отражениями, размерности $n - 2 \geq 2$ с тем же самым основным полем. По предположению индукции оно имеет ограниченную степень.

Таким образом, мы можем предполагать, что существует вектор $g \in P(\mathcal{M}, e, f) - \{e, f\}$ такой, что гиперплоскость $\mathcal{H}_g$ не перпендикулярна подпространству $\mathcal{H}_e \cap \mathcal{H}_f$. Это означает, что либо $g \cdot e > 0$, либо $g \cdot f > 0$. Таким образом, диаграмма Грама элементов e, f, g связна, и их матрица Грама отрицательно определена.

Рассмотрим (одномерное) ребро r грани $\mathcal{H}_e \cap \mathcal{H}_f \cap \mathcal{M}$ многогранника $\mathcal{M}$, которое заканчивается на гиперплоскости $\mathcal{H}_g$. Таким образом, одна (из двух) вершин ребра r содержится в $\mathcal{H}_g$, но другая – не содержится (эквивалентно, ребро r не содержится в гиперплоскости $\mathcal{H}_g$). Существование такого ребра очевидно.

Пусть $P(r)$ – множество всех таких $\delta \in P(\mathcal{M})$, что гиперплоскость $\mathcal{H}_\delta$ содержит хотя бы одну из двух вершин ребра r . Поскольку $r \subset \mathcal{H}_e \cap \mathcal{M}$, то $P(r) \subset P(\mathcal{M}, e)$, и тогда $P(r)$ определяет реберный многогранник минимальности 14 в силу (2.1) и согласно определению из [9, § 2, п. 2]. Данный реберный многогранник определяет основное поле $\mathbb{K}$ группы G . Элементы $e, f, g \in P(r)$ имеют связную диаграмму Грама, и их гиперплоскости содержат одну и ту же вершину ребра r , но все ребро r не содержится в гиперплоскости $\mathcal{H}_g$ в силу нашей конструкции. Это показывает, что гиперболическая (т.е. с гиперболической матрицей Грама) компонента связности диаграммы Грама $\Gamma(P(r))$ данного реберного многогранника отлична от каждой из диаграмм Γ_1, Γ_2 и Γ_3

теоремы 2.3.1 из [9]. Тогда в силу той же самой теоремы 2.3.1 из [9] степень $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$ ограничена эффективной константой $N(14)$ данной теоремы. Это завершает доказательство.

Как объяснялось во введении, это завершает доказательство конечности числа максимальных арифметических групп, порожденных отражениями, во всех пространствах Лобачевского в совокупности.

ТЕОРЕМА 2.2. *Имеется лишь конечное число максимальных арифметических групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского размерностей $n \geq 2$ в совокупности.*

Их число конечно в каждой размерности $n \geq 4$ (автор). Они не существуют в размерностях $n \geq 30$ (Э. Б. Винберг). Их число конечно в размерности $n = 2$ (Д. Д. Лонг, К. Маклахлан и А. В. Рид). Их число конечно в размерности $n = 3$ (И. Агол).

Список литературы

1. I. Agol, “Finiteness of arithmetic Kleinian reflection groups”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, v. 2 (Madrid, 2006), 951–960; [arXiv.org: math.GT/0512560](https://arxiv.org/math.GT/0512560).
2. Э. Б. Винберг, “Дискретные группы, порожденные отражениями в пространствах Лобачевского”, *Матем. сб.*, **72(114)** (1967), 471–488; англ. пер.: È. B. Vinberg, “Discrete groups generated by reflections in Lobachevskii spaces”, *Math. USSR-Sb.*, **1:3** (1967), 429–444.
3. Э. Б. Винберг, “Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского большой размерности”, *Функц. анализ и его прил.*, **15:2** (1981), 67–68; англ. пер.: È. B. Vinberg, “Absence of crystallographic groups of reflections in Lobachevskii spaces of large dimension”, *Funct. Anal. Appl.*, **15:2** (1981), 128–130.
4. Э. Б. Винберг, “Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского большой размерности”, *Тр. ММО*, **47** (1984), 68–102; англ. пер.: È. B. Vinberg, “The absence of crystallographic groups of reflections in Lobachevsky spaces of large dimension”, *Trans. Mosc. Math. Soc.*, **1985** (1985), 75–112.
5. È. B. Vinberg, “Discrete reflection groups in Lobachevsky spaces”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, v. 1 (Warsaw, 1983), PWN, Warsaw, 593–601.
6. H. S. M. Coxeter, “Discrete groups generated by reflections”, *Ann. of Math.* (2), **35:3** (1934), 588–621.
7. D. D. Long, C. Maclachlan, A. W. Reid, “Arithmetic Fuchsian groups of genus zero”, *Pure Appl. Math. Q.*, **2:2** (2006), 569–599.
8. В. В. Никулин, “Об арифметических группах, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44:3** (1980), 637–669; англ. пер.: V. V. Nikulin, “On arithmetic groups generated by reflections in Lobachevsky spaces”, *Math. USSR-Izv.*, **16:3** (1981), 573–601.

9. В. В. Никулин, “О классификации арифметических групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45**:1 (1981), 113–142; англ. пер.: V. V. Nikulin, “Classification of arithmetic groups generated by reflections in Lobachevsky spaces”, *Math. USSR-Izv.*, **18**:1 (1982), 99–123.
10. V. V. Nikulin, “Discrete reflection groups in Lobachevsky spaces and algebraic surfaces”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, v. 1 (Berkeley, 1986), 654–671.
11. V. V. Nikulin, *Finiteness of the number of arithmetic groups generated by reflections in Lobachevsky spaces*, [arXiv.org:math.AG/0609256](https://arxiv.org/abs/math/0609256).

В. В. Никулин (V. V. NIKULIN)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

The University of Liverpool

E-mail: vnikulin@liv.ac.uk

Поступило в редакцию

14.09.2006