Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Крякин, О функциях с ограниченной n -й разностью, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 2, 95–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/im117>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 17:57:33

УДК 517.5

Ю. В. Крякин

О функциях с ограниченной n -й разностью

Найдены точные значения модифицированных констант Уитни для приближения кубическими многочленами. Даны новые оценки констант в случае приближения функции из $C(I^N)$ квазиполиномами.

Библиография: 25 наименований.

§ 1. Введение

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $I = [0, 1]$. Положим

$$\Delta_h^n f(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(x + jh),$$

$$\omega_n(f) = \sup_{x, x+nh \in I} |\Delta_h^n f(x)|.$$

В 1957 г. Х. Уитни доказал следующий фундаментальный результат теории приближений.

ТЕОРЕМА А [1]. *Для любой непрерывной на I функции $f(x)$ и натурального $n \geq 1$ найдутся алгебраический полином $P_{n-1}(x)$ степени не выше $n - 1$ и положительное число W_n такие, что*

$$\sup_{x \in I} |f(x) - P_{n-1}(x)| \leq W_n \omega_n(f).$$

Главное внимание в работе [1] было уделено оценке величин W_n , точные значения которых, следуя Б. Сендову, мы будем называть *константами Уитни*. Их отыскание представляет собой трудную нерешенную задачу. Не существует даже гипотезы об их величине. Поэтому первостепенный интерес представляют оценки констант для конкретных методов приближения. В доказательстве теоремы А сам Уитни применял интерполяционные полиномы по равномерным узлам:

$$P(i/(n-1)) = f(i/(n-1)), \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Его доказательство было сложным и не позволяло дать оценок констант при всех n . Усилия Уитни были сосредоточены на оценках интерполяционных констант W'_n при малых n . Основные результаты работы [1]:

$$1 \leq W'_n, \quad 1/2 \leq W_n < W'_n < \infty,$$

n	...	1	2	3	4	5			
W_n	...	1/2	1/2	8/15	7/10	1/2	3.25	1/2	10.4
W'_n	...	1	1	16/15	14/9	1	3.25	1	10.4

Работа частично поддержана грантом Международного научного фонда.

Одно значение обозначает точную постоянную, пара – найденные Х. Уитни верхние и нижние границы.

Дальнейшее продвижение в получении хороших оценок констант Уитни связано с именем Б. Сендова. Опираясь на компьютерные эксперименты, он в 1982 г. выдвинул гипотезу об ограниченности констант W_n единицей и констант W'_n двойкой [2]. Эти гипотезы выглядели весьма смело, так как существующие к тому времени оценки констант были очень завышены ($W_n < cn^{2n}$ [3]). Прорыв в данном направлении произошел в 1985 г. В течение одного месяца были опубликованы работы [4]–[6], приведшие к доказательству ограниченности констант Уитни величиной, не зависящей от степени приближающего полинома: $W_n < 6$ [7]. При этом использовались модифицированные интерполяционные полиномы, удовлетворяющие условиям

$$R(i/(n+1)) = f(i/(n+1)), \quad i = 1, \dots, n.$$

Дальнейшее развитие темы таково: $W_n < 3$ (независимо Б. Сендов [8], Ю. А. Брудный [9], автор [10]), $W_n < 2$ (автор [11]).

Доказательства Б. Сендова и Ю. А. Брудного не были опубликованы, автор же использовал для получения оценок многочлены, интерполяционные в среднем:

$$\int_0^{i/n} (f(x) - Q_{n-1}(x)) dx = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

При $n = 1, 2$ эти полиномы совпадают с полиномами, ранее применявшимися Э. А. Стороженко [12] для доказательства теоремы Уитни в классах L^p , $p \geq 1$. Использование многочленов Q_{n-1} позволило упростить имеющиеся конструкции и получить новые результаты в близких задачах. Даны новые оценки констант Уитни в интегральной метрике [13], [14], улучшающие оценку Сендова–Такева [15]. Доказано [16], что интерполяционные константы W'_n не превосходят пятерки. Одной из особенностей применения многочленов Q_{n-1} является простота оценок снизу. Константы для интерполяции в среднем $\widetilde{W}_n$ ограничены снизу единицей, и эта оценка точна [11]. Кроме того, оказалось возможным найти значения констант в случае локального приближения многочленами нулевой, первой и второй степеней [17]: $\widetilde{W}_1 = \widetilde{W}_2 = \widetilde{W}_3 = 1$.

Главной целью настоящей работы является получение точного неравенства для локального приближения многочленами третьей степени. Таким образом, наиболее сильный результат на сегодняшний день таков.

ТЕОРЕМА 1. *Для любой непрерывной на I функции $f(x)$ и натурального $n \geq 1$*

$$\sup_{x \in I} |f(x) - Q_{n-1}(x)| \leq \widetilde{W}_n \omega_n(f),$$

$$\widetilde{W}_n \leq \begin{cases} 2, & \text{если } n \geq 5, \\ 1, & \text{если } n \leq 4. \end{cases}$$

Случай $n = 4$, которому в основном посвящена настоящая работа, технически достаточно сложен, поэтому мы сразу опишем идеи, на которые опирается доказательство.

Прежде всего скажем несколько слов об асимптотической оценке $\widetilde{W}_n \leq 2$. В ее основе лежит доказательство, восходящее к А. Берлингу, для случая бесконечного отрезка (см. [1]). Главная идея этого доказательства, встречающаяся во всех работах последних лет, может быть охарактеризована словом “усреднение”. Многочлены, интерполяционные в среднем, как нам кажется, являются удобным аппаратом для адекватного выражения этой идеи. С другой стороны, на наш взгляд, для получения точных результатов одной этой идеи не достаточно. При получении точных оценок мы использовали дополнительные рассуждения, восходящие к Уитни и связанные с применением тождеств специального вида. К сожалению, и в работе Уитни, и в нашей работе это сопряжено с большими вычислительными трудностями, и в данный момент не ясно, удастся ли на этом пути продвинуться дальше. Вероятно, требуются новые соображения, которые пока не найдены.

План работы таков. Схема доказательства основного результата приведена в небольшом § 2. Вспомогательные предложения, нужные для этого, отнесены в § 3. Детали доказательства теоремы 1 для малых n приведены в § 4; § 5 посвящен многомерному обобщению теоремы 1.

§ 2. Схема доказательства равенства $\widetilde{W}_n = 1$, $n < 5$

Существенным моментом доказательства является использование конечных разностей

$$\Delta_{h_1, h_2}^n F(x, y) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} F(x + jh_1, y + jh_2)$$

функции

$$F(x, y) = (x - y)^{-1} \int_x^y f(t) dt, \quad F(x, x) = f(x).$$

В силу однородности оценки будем считать

$$\omega_n(f) \leq 1, \quad F(0, i/n) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Для доказательства достаточно предположить, что $f(x) = \sup_{y \in I} |f(y)| > 1$, и показать, что это невозможно при условии (1).

Удобно разделить доказательство на два случая:

- а) точка максимума x лежит около конца отрезка;
- б) точка максимума x отделена от конца отрезка.

Трудным является случай а). Его мы здесь и рассмотрим. Отметим, что в силу симметрии достаточно считать точку x расположенной около левого конца отрезка.

Важное значение в дальнейшем имеет следующая модифицированная разность:

$$R_{\alpha, h} = (f(x) - \Delta_{\alpha x, h}^n F(x, x)) \left(\frac{-x}{h - \alpha x} \right)^{-1}, \quad h = \frac{1-x}{n}, \quad \alpha < \frac{h}{x}.$$

Из условия (1) и леммы 1 (см. § 3) вытекает неравенство, поэтому $\Delta_{\alpha x, h}^n F(x, x) \leq 1$. Следовательно,

$$R_{\alpha, h} < 0. \quad (2)$$

Используя лемму 2 из §3, разложим $R_{\alpha,h}$ на разности малого и большого шага:

$$R_{\alpha,h} = \alpha r_x + r_h, \\ r_x = f(x) - \Delta_{\alpha x,0}^n F(x,x), \quad r_h = (f(x) - \Delta_{0,h}^n F(x,x))(-h/x).$$

Разность большого шага в свою очередь, пользуясь леммой 3, запишем в виде

$$r_h = r_{h,x} + r_{h,h}, \\ r_{h,x} = \sigma_n F(0,x), \quad \sigma_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}, \\ r_{h,h} = \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{n}{j} \frac{n-j}{nj} F\left(\frac{j}{n}, x+jh\right).$$

Экспоненциальная оценка средних внутри отрезка (лемма 4)

$$\left| F\left(\frac{i}{n}, \frac{i}{n} + t\right) \right| \leq \binom{n}{i}^{-1} \exp(nt(\sigma_i - \sigma_{n-i}))$$

влечет неравенство $|r_{h,h}| \leq \sigma_n - 1$ (лемма 5). Таким образом, из (2) следует

$$M_{\alpha}(n) = \alpha r_x + r_{h,x} < \sigma_n - 1. \quad (3)$$

Доказательство основано на тождестве

$$Af(x) = \sum a_i f_i + \sum b_j \Delta_j^n + \sum c_k M_{\alpha(k)}(n), \quad (4)$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям

$$A > \sum |a_i| + \sum |b_j| + (\sigma_n - 1) \sum c_k, \quad c_k > 0. \quad (5)$$

Здесь и ниже $f_i = F\left(\frac{x(i-1)}{2}, \frac{xi}{2}\right)$ – средние значения функции, Δ_j^n – средние значения конечных разностей.

Предположения $f_i < f(x)$, $-1 \leq \Delta_j^n \leq 1 < f(x)$ и условия (3), (5) противоречат равенству (4). Это доказывает теорему 1 в случае а).

Конкретный вид тождеств (4) для значений $n = 2, 3, 4$ дан в §4. Там же приведены комментарии по поводу роли слагаемых в правой части тождества.

§3. Вспомогательные предложения

Леммы данного параграфа касаются оценок разностей функций $F(x, y)$. Первая из них говорит о том, что разности сглаженных функций “не превосходят” разности исходных функций.

ЛЕММА 1 [11]. *Имеем*

$$\Delta_{h_1, h_2}^n F(x, y) = \int_0^1 \Delta_{h_1 + t(h_2 - h_1)}^n f(x + t(y - x)) dt.$$

Вторая лемма (проекционное свойство разностей) – следствие соответствующего свойства средних значений.

ЛЕММА 2. *Имеем*

$$\Delta_{u,v}^n F(x, x) = \frac{v}{v-u} \Delta_{0,v}^n F(x, x) + \frac{u}{u-v} \Delta_{u,0}^n F(x, x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся следующим тождеством для средних $F(x, y)$, которое вытекает непосредственно из определения $F(x, y)$:

$$F(x, y) = \frac{z-x}{y-x} F(x, z) + \frac{y-z}{y-x} F(z, y).$$

Раскрывая конечную разность и применяя выписанное тождество к функции под знаком суммы, получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{u,v}^n F(x, x) &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} F(x + ju, x + jv) \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \left\{ \frac{u}{u-v} F(x + ju, x) + \frac{v}{v-u} F(x, x + jv) \right\} \\ &= \frac{v}{v-u} \Delta_{0,v}^n F(x, x) + \frac{u}{u-v} \Delta_{u,0}^n F(x, x). \end{aligned}$$

Третья и четвертая леммы – существенная часть вывода асимптотической оценки $\widehat{W}_n < 2$. Они и пятая лемма используются для доказательства важного неравенства (3).

ЛЕММА 3 [11]. Пусть $F(0, i/n) = 0$, $i = 1, \dots, n$, $x = \frac{1-h}{n}$, $\frac{1}{n+1} < h < \frac{1}{n}$. Тогда

$$f(x) - \Delta_{0,h}^n F(x, x) = \frac{-x}{h} \left\{ \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{n}{j} \frac{n-j}{nj} F\left(\frac{j}{n}, x + jh\right) + \sigma_n F(0, x) \right\}.$$

ЛЕММА 4 [11]. Если $F(0, i/n) = 0$, $i = 1, \dots, n$, $\omega_n(f) \leq 1$, $0 < t \leq 1/n$, то

$$\begin{aligned} \left| F\left(\frac{i}{n}, \frac{i}{n} + t\right) \right| &\leq \binom{n}{i}^{-1} \prod_{j=1}^i \left(1 + \frac{nt}{j}\right) \prod_{j=1}^{n-i} \left(1 - \frac{nt}{j}\right) \\ &\leq \binom{n}{i}^{-1} \exp(nt(\sigma_i - \sigma_{n-i})). \end{aligned}$$

ЛЕММА 5. Пусть $F(0, i/n) = 0$, $i = 1, \dots, n$, $x = (1-h)/n$. Тогда

$$\left| \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{n}{j} \frac{n-j}{nj} F\left(\frac{j}{n}, x + jh\right) \right| \leq \sigma_n - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $n = 2k + 1 \geq 3$ (доказательство при $n = 2k$ проводится аналогично). Нетрудно проверить, что $x + jh = j/n + (n - j)x/n$. Поэтому применение леммы 4 дает

$$\left| \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{n}{j} \frac{n-j}{nj} F\left(\frac{j}{n}, x + jh\right) \right| \leq \sum_{j=1}^{[(n-1)/2]} y_j(x),$$

где

$$y_j(x) = \frac{n-j}{nj} e^{-c_j x} + \frac{j}{n(n-j)} e^{c_j x}, \quad c_j = j(\sigma_{n-j} - \sigma_j).$$

Нетрудно проверить, что $y'_j(x) < 0$ при $e^{c_j x} < (n-j)/j$. Справедливость последнего неравенства следует из оценок

$$\sigma_{n-j} - \sigma_j \leq 2 \ln \left(\frac{n-j}{j} \right), \quad j < \frac{n}{2}, \quad x < \frac{1}{n}.$$

Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{[(n-1)/2]} y_j(x) \leq \sum_{j=1}^{[(n-1)/2]} y_j(0) = \sigma_n - 1.$$

Для получения явного вида функций $M_\alpha(n)$ нам понадобится

ЛЕММА 6. *Имеем*

$$M_\alpha(n) = \alpha \sum_{j=1}^n F(x + \alpha(j-1)x, x + \alpha jx) m_j(n) + \sigma_n F(0, x),$$

где

$$m_i(n) = \sum_{k=i}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{1}{k}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно из определения (см. (3)) вытекает

$$M_\alpha(n) = \alpha r_x + r_{h,x} = \alpha(f(x) - \Delta_{\alpha x,0}^n F(x, x)) + \sigma_n F(0, x).$$

Нетрудно проверить, что первое слагаемое равно

$$\begin{aligned} & \alpha \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \binom{n}{j} F(x(1 + \alpha j), x) \\ &= \alpha \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \binom{n}{j} \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j F(x + \alpha(k-1)x, x + \alpha kx) \\ &= \alpha \sum_{j=1}^n F(x + \alpha(j-1)x, x + \alpha jx) m_j(n). \end{aligned}$$

§ 4. Доказательство основного результата

4.1. Доказательство основного результата в случае точки максимума около левого конца отрезка. В данном пункте приведены конкретные тождества типа (4). Их вид сильно усложняется при переходе от $n = 2$ к $n = 4$. Идею получения этих тождеств и их смысл удобно проследить, начав со сравнительно простого случая $n = 2$.

ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ. СЛУЧАЙ $n = 2$. Для $x \in [0, 1/3]$

$$f(x) = \frac{1}{12}(f_5 + f_6) - \frac{1}{2}\Delta_{x,0}^2 F(0, x) + \frac{1}{3}M_1(2).$$

КОММЕНТАРИЙ. Величина

$$\Delta_{x,0}^2 F(0, x) = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) - 2f(x)$$

служит для создания в правой части значения $f(x)$. Дополнительные слагаемые f_1, f_2, f_3, f_4 уничтожаются с помощью функции

$$M_1(2) = f(x) - \Delta_{x,0}^2 F(x, x) + \sigma_2 F(0, x) = \frac{3}{4}(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) - \frac{1}{4}(f_5 + f_6).$$

Выполнение условий (5) очевидно.

ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ. СЛУЧАЙ $n = 3$. Для $x \in [0, 1/6]$, $f_0 = f(0)$

$$Af(x) = \sum_{i=0}^{12} a_i f_i + \sum_{j=1}^4 b_j \Delta_j^3 + cM_1(3),$$

$$A = 56.571, \quad c = 12,$$

$$a = [4/3; 0; 0; 0; 21.143; 0.714; 0.714; 0; 0; 0; -0.444; -0.444; -0.444],$$

$$b = [-22/7; 22/7; -88/7; -4/3],$$

$$\Delta_1^3 = \Delta_{x/2,0}^3 F(x/2, x), \quad \Delta_2^3 = \Delta_{x/2,0}^3 F(0, x),$$

$$\Delta_3^3 = \Delta_{x,x/2}^3 F(0, x/2), \quad \Delta_4^3 = \Delta_{2x,3x/2}^3 F(0, 0).$$

КОММЕНТАРИЙ. Существенным в формуле является выбор конечных разностей. Их узлы изображены на рис. 1.

Интерпретация функций разностей такова: $\Delta_1^3, \Delta_2^3, \Delta_3^3$ нужны для создания доминирующего коэффициента у $f(x)$. Величины $\Delta_4^3, M_1(3)$ “отвечают” за погашение возникших средних значений.

ЗАМЕЧАНИЕ. Другая форма вывода теоремы 1 для $n = 3$ дана в [17]. Приведенные здесь доказательства короче и служат введением к случаю $n = 4$.

Рис. 1

ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ. СЛУЧАЙ $n = 4$. Для $x \in [0, 1/12]$

$$Af(x) = \sum_{i=1}^{22} a_i f_i + \sum_{j=1}^{12} b_j \Delta_j^4 + \sum_{k=1}^4 c_k M_{(k+1)/2}(4),$$

$$A = 1348,$$

$$a = [-0.02; 0.02; 313.37; 309.91; 0; 0.09; -0.04; 0.09; 3.53; -0.18; -0.03; 0.03; -12.78; -16.72; 0.01; 0; -0.82; -0.012; 1.69; 0.87; 1.69; 2.51],$$

$$b = [103.55; -181.61; -34.84; -47.58; -1.90; 36.60; -36.81; 9.08; -4.09; 2.52; -0.82; 0.82],$$

$$c = 24 \cdot [1.549; 5.382; 1.073; 0.563],$$

$$\Delta_1^4 = \Delta_{x/2,0}^4 F(0, x), \quad \Delta_2^4 = \Delta_{x,x/2}^4 F(0, x/2),$$

$$\Delta_3^4 = \Delta_{x/2,x/2}^4 F(x/2, 0), \quad \Delta_4^4 = \Delta_{x,x}^4 F(x/2, 0), \quad \Delta_5^4 = \Delta_{3x/2,3x/2}^4 F(x/2, 0),$$

$$\Delta_6^4 = \Delta_{x/2,x/2}^4 F(x, x/2), \quad \Delta_7^4 = \Delta_{x,x}^4 F(x, x/2), \quad \Delta_8^4 = \Delta_{3x/2,3x/2}^4 F(x, x/2),$$

$$\Delta_9^4 = \Delta_{x/2,x/2}^4 F(7x/2, 3x),$$

$$\Delta_{10}^4 = \Delta_{x/2,x/2}^4 F(10x, 19x/2), \quad \Delta_{11}^4 = \Delta_{x,x}^4 F(10x, 19x/2),$$

$$\Delta_{12}^4 = \Delta_{x/2,x/2}^4 F(16x, 31x/2).$$

КОММЕНТАРИЙ. Усложнение формулы по сравнению с $n = 3$ бросается в глаза. Используются четыре функции $M_\alpha(n)$, кроме того увеличено число конечных разностей. Их теперь двенадцать. Пути разделенных разностей показаны на рис. 2.

Выбор направлений разностей, увеличение числа и выбор величин $M_\alpha(n)$ представляли главную трудность, которую пришлось преодолевать при переходе от значения $n = 3$ к значению $n = 4$. Сущность возникающей задачи, как нам кажется, прояснится, если мы рассмотрим ее в двойственных терминах, в терминах

Рис. 2

коэффициентов разностей. Используя обычные обозначения

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) dx,$$

запишем функции Δ_j^n , M_α в виде

$$\Delta_j^n = \tilde{\Delta}_j^n * f, \quad M_\alpha = \tilde{M}_\alpha(n) * f(x).$$

Тождество (4) можно рассматривать теперь как “хорошее” приближение дельта-функции точки x функциями $\tilde{\Delta}_j^n$, $\tilde{M}_\alpha(n)$. Выпишем величины $\tilde{\Delta}_j^n$, $\tilde{M}_\alpha$ в явном виде. Лемма 6 дает

$$M_\alpha(n) = \alpha \sum_{j=1}^n F(x + \alpha(j-1)x, x + \alpha jx) m_j(n) + \sigma_n F(0, x).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \tilde{M}_\alpha(n) &= \tilde{r}_x \left(\frac{t-x}{2\alpha} \right) + \tilde{r}_{x,h}(t), \\ \tilde{r}_x(t) &= \frac{1}{x} \sum_{i=1}^n m_i(n) \chi_i(t), \quad \tilde{r}_{x,h}(t) = \frac{1}{x} (\chi_1(t) + \chi_2(t)) \sigma_n, \end{aligned}$$

где $\chi_i(t)$ – характеристическая функция интервала $I_i = (x(i-1)/2, xi/2)$, $m_i(n) = \sum_{k=i}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} 1/k$.

Аналогично,

$$\tilde{\Delta}_j^n = \frac{2}{x} \sum_{i=1}^m d_{ij}(n) \chi_i(t) + d_{0,j} \delta(x).$$

При $n = 4$ матрица d имеет вид

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.5 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.5 & 0 & 6 & -4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 6 & -4 & 0 & -4 & 6 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 6 & 0 & -4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.667 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.333 & 0 & -4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 6 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вернемся теперь к тождеству (4) и укажем на роли его различных частей. В основном тождестве

$$A\delta(x) = \sum a_i \chi_i + \sum b_j \tilde{\Delta}_j^4 + \sum c_k \tilde{M}_{\alpha(k)}(4).$$

Сумма $S_1 = \sum_{j=1}^2 b_j \tilde{\Delta}_j^4$ создает большой коэффициент у дельта-функции $\delta(x)$ в правой части; сумма $S_2 = \sum_{j=3}^{12} b_j \tilde{\Delta}_j^4$ сглаживает возникающие дополнительные слагаемые; сумма $S_3 = \sum c_k \tilde{M}_{\alpha(k)}(4)$ гасит дополнительные слагаемые; величина $\sum a_i \chi_i$ характеризует ошибку приближения дельта-функции “коэффициентами конечных разностей”. Сказанное иллюстрируют рис. 3–5.

4.2. Доказательство основного результата в случае точки максимума, отделенной от конца отрезка. Прежде всего отметим, что достаточно ограничиться предположением $x \in [0, 1/n]$. Для $x \in [1/n, 1 - 1/n]$ доказательство получено в [11].

Основой дальнейших рассуждений является лемма 4.

и) Начнем с простейшего значения $n = 2$. Предполагая, что $\max |f(y)| = f(x) > 1$, $x \in [1/3, 1/2]$, $\omega(f) \leq 1$, из тождества

$$\Delta_{0,x}^2 F(x, 0) = 2F(0, 2x) - 2f(x)$$

с учетом того, что $|\Delta_{0,x}^2 F(x, 0)| \leq 1$ (лемма 1), получаем

$$F(0, 2x) \geq \frac{1}{2} f(x) > \frac{1}{2}. \quad (6)$$

Рис. 3. Сумма S_1 Рис. 4. Сумма $S_1 + S_2$ Рис. 5. Сумма $S_1 + S_2 + S_3$

С другой стороны, принимая во внимание равенство $F(0, 1/2) = 0$ и условие $x \in [1/3, 1/2]$, имеем $F(0, 2x) \leq F(1/2, 2x)$. Применение леммы 5 дает

$$F\left(\frac{1}{2}, 2x\right) = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + t\right) \leq \frac{1}{2}(1 + 2t)(1 - 2t) < \frac{1}{2},$$

что противоречит (6).

ii) Рассуждения при $n = 3$ проводятся аналогично. Предположим, что $\max|f(y)| = f(x) > 1$, $x \in [1/6, 1/3]$. Ограниченность модуля разностей $\Delta_{0,x}^3 F(x, 0)$ единицей (лемма 1) и оценка для средних значений леммы 4 приводят к противоречию. Действительно, из леммы 1 следует

$$\Delta_{0,x}^3 F(x, 0) = F(x, 0) - 3f(x) + 3F(x, 2x) - F(x, 3x) \geq -1. \quad (7)$$

Рис. 6

Оценим слагаемые в данном неравенстве, пользуясь леммой 4. Среднее по интервалу $(0, x)$ не превосходит $(1 - 3x)(1 - 3x/2)(1 - x) < 1/3$.

Для среднего по интервалу $(x, 2x)$ справедлива оценка

$$|F(x, 2x)| \leq \max(|F(x, 1/3)|, |F(1/3, 2x)|).$$

Средние по интервалам $(x, 1/3)$, $(1/3, 2x)$ оцениваются с помощью леммы 4:

$$\begin{aligned} \left| F\left(x, \frac{1}{3}\right) \right| &< \frac{1}{3}(1+t)(1-t) \left(1 - \frac{t}{2}\right) < \frac{1}{3}, \\ \left| F\left(\frac{1}{3}, 2x\right) \right| &< \frac{1}{3}(1+t) \left(1 + \frac{t}{2}\right) (1-t) < \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Таким образом, $|F(x, 2x)| < 5/12$. Точно такая оценка имеет место и для величины $F(x, 3x)$. Полученные неравенства противоречат условию (7).

iii) При $n = 4$, $x \in [1/12, 1/4]$ доказательство сложнее. Рассмотрим две возможности:

а) $x \in [1/8, 1/4]$; б) $x \in [1/12, 1/8]$.

а) Ограниченность единиц модуля $\Delta_{x/2,0}^4 F(0, x)$ дает

$$\frac{1}{2}f_1 - \frac{7}{2}(f_2 + f_3) + 6f(x) + \frac{1}{2}f_4 \leq 1. \quad (8)$$

Так как f_1, f_4 не превосходят $\max|f(y)| = f(x) > 1$, то для получения противоречия с (8) достаточно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 7. В сделанных предположениях $|f_2 + f_3| < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим два случая: 1) $x \in [1/8, 1/6]$; 2) $x \in [1/6, 1/4]$.

Рис. 7. $x \in [1/8, 1/6]$

В случае 1) (рис. 7) доказательство следует из условия $F(0, 1/4) = 0$, которое можно записать в виде $f_1 + f_2 + f_3 + f_* = 0$, и следующих следствий леммы 4:

$$|f_1| < \exp\left(-\frac{1}{4}\sigma_4\right) < 0.65, \quad |f_*| < \frac{1}{4} \exp\left(\frac{1}{4}(\sigma_3 - \sigma_1)\right) < 0.35.$$

В случае 2) доказательство аналогично.

б) Пусть $x \in [1/12, 1/8]$. Здесь доказательство напоминает доказательство при x около конца отрезка. Решающими являются тождество

$$Af(x) = \sum_{i=1}^{15} a_i f_i + \sum_{j=1}^{10} b_j \Delta_j^4,$$

$$A = 29.63,$$

$$\mathbf{a} = [7.72; 5.91; 5.71; 5.13; 4.27; 5.41; -1.56; -0.47; \\ 0.08; -2.52; -0.02; 0.66; -0.9; 0.92; 0.61],$$

$$\mathbf{b} = [2.31; -3.94; -1.31; -2.52; -1.1; -0.04; -1.99; -1.03; -0.61; 0.11],$$

условия

$$f(x) > f_i, \quad |\Delta_i^4| \leq 1$$

и следующая

ЛЕММА 8. *Имеем*

$$\left| \sum_{i=1}^6 a_i f_i \right| \leq 6f(x), \quad \left| \sum_{i=7}^{15} a_i f_i \right| \leq 8f(x), \quad \left| \sum_{j=1}^{10} b_j \right| < 15.$$

Рис. 8. $1/4 \in I_6$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим вначале, что $x \in [1/12, 1/10]$. Тогда $1/4 \in I_6$ (рис. 8). Условие $\int_0^{1/4} f(x) dx = 0$ позволяет записать выражение $\sum_{i=1}^6 a_i f_i$ в виде

$$\sum_{i=1}^6 a_i f_i = \sum_{i=1}^5 a_i^* f_i + \text{hvest},$$

где $\mathbf{a}^* = \mathbf{a} - \mathbf{5.7} = [2.02; 0.21; 0.01; -0.57; -1.43]$; величина

$$\text{hvest} = a_6 f_6 - 5.7 \frac{2}{x} \int_{5x/2}^{1/4} f(t) dt$$

не превосходит по модулю

$$0.29 \frac{2}{x} \left| \int_{5x/2}^{1/4} f(t) dt \right| + 5.41 \frac{2}{x} \left| \int_{1/4}^{2x} f(t) dt \right|.$$

Применение леммы 4 к каждому из слагаемых дает

$$\text{hvest} < 0.29 \cdot \frac{1}{2} + 5.41 \cdot \frac{1}{4} < 1.5.$$

Так как $\sum_{i=1}^5 |a_i^*| + 1.5 < 6$, то первое неравенство леммы доказано. Второе неравенство вытекает из оценок $\sum_{i=7}^{15} |a_i| < 8$, $|f_i| < f(x)$, третье неравенство очевидно.

Доказательство при $x \in [1/10, 1/8]$, $1/4 \in I_5$ проводится аналогично.

§ 5. Приложение. Приближение квазиполиномами

Данный параграф посвящен переносу теоремы 1 на многомерный случай. Впервые многомерные обобщения теоремы Уитни появились в работах [18], [19]. Доказательства проводились как в классах C , так и в L^p , $p \geq 1$. Случай пространств $L^p(I^N)$ был исследован Э. А. Стороженко [20], [21]. Доказательства теоремы в L^p , $0 < p < 1$, основанные на других идеях, предложены В. Поповым и П. Петрушевым [22], Э. А. Стороженко и автором [23]. В работах Б. Сендова и М. Такева [24], [25] было доказано, что в случае приближения квазиполиномами в $C(I^N)$ константы не зависят от степени приближающего многочлена. Здесь мы улучшаем оценки Сендова–Такева и получаем точные результаты для приближения квазиполиномами степени не выше 4.

Пусть $\mathbb{R}^N$ – N -мерное евклидово пространство, $I^N = [0, 1]^N$ – единичный куб в нем. Элементы $\mathbb{R}^N$ будем обозначать $x = (x_1, \dots, x_N)$, $y = (y_1, \dots, y_N)$, ... и писать $x \leq y$, если соответствующие неравенства выполняются по координатам; под $x \cdot y$ подразумевается вектор с координатами $x_i y_i$.

Положим

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n_1} f_{1,i}(\hat{x}_1) x_1^i + \dots + \sum_{i=0}^{n_N} f_{N,i}(\hat{x}_N) x_N^i,$$

где $f_{k,i}(\hat{x}_j)$ – непрерывная функция переменных $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_N$;

$$\Delta_h^n f(\mathbf{x}) = \Delta_{h_1 e_1}^{n_1} \dots \Delta_{h_N e_N}^{n_N} f(\mathbf{x}),$$

где e_i – единичный координатный вектор.

Для непрерывной в I^N функции обозначим через Q_{n-1} квазиполином, удовлетворяющий условиям

$$\int_{j/n_i}^{(j+1)/n_i} (f(\mathbf{x}) - Q_{n-1}(\mathbf{x})) dx_i = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 0, \dots, n_i - 1.$$

Конструктивное определение Q_{n-1} дано в [24], [25].

ТЕОРЕМА 2. Для $f \in C(I^N)$

$$\sup_{\mathbf{x} \in I^N} |f(\mathbf{x}) - Q_{n-1}(\mathbf{x})| \leq \widetilde{W}_n(N) \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{h} \in I^N} |\Delta_h^n f(x)|$$

с

$$\widetilde{W}_n(N) \leq \widetilde{W}_{n_1} \dots \widetilde{W}_{n_N} \leq \begin{cases} 2^N, & \text{если } \mathbf{n} \geq \mathbf{5}, \\ 1, & \text{если } \mathbf{n} \leq \mathbf{4}. \end{cases}$$

Доказательство проводится итерацией одномерного результата, методом математической индукции. Предположим, что теорема справедлива в $\mathbb{R}^{N-1}$. Полагая $g = f - Q_{n-1}$ и учитывая, что $\Delta_{\mathbf{h}}^{\mathbf{n}} f(\mathbf{x}) = \Delta_{\mathbf{h}}^{\mathbf{n}} g(\mathbf{x})$, получаем

$$\sup_{\mathbf{x}} |g(\mathbf{x})| = g(\hat{x}_N^0, x_N^0) \leq \widetilde{W}_{n_2} |\Delta_{h_N^* e_N}^{n_N} g(\hat{x}_N^0, x_N^*)|.$$

Опираясь на предположение индукции, заканчиваем доказательство:

$$\begin{aligned} \sup_{\hat{x}_N} |\Delta_{h_N^* e_N}^{n_N} g(\hat{x}_N, x_N^*)| &= \sup_{\hat{x}_N} |G(\hat{x}_N, x_N^*)| \\ &\leq \widetilde{W}_{n_1} \dots \widetilde{W}_{n_{N-1}} |\Delta_{h_1^* e_1}^{n_1} \dots \Delta_{h_{N-1}^* e_{N-1}}^{n_{N-1}} G(\hat{x}_N^*, x_N^*)| \\ &= \widetilde{W}_{n_1} \dots \widetilde{W}_{n_{N-1}} |\Delta_{\mathbf{h}^*}^{\mathbf{n}} f(\mathbf{x}^*)|. \end{aligned}$$

Теорема 2 уточняет результаты Ю. А. Брудного [19] ($W_n < n^{Nn}$), Б. Сендова и М. Такева [24] ($W_n(2) < 49$), М. Такева [25] ($W_n(N) < N!6^N$). Так же, как и в одномерном случае, нетрудно показать, что константы теоремы 2 при $\mathbf{n} \leq 4$ точны. Пример дает сглаженная дельта-функция вершины куба I^N . Независимость констант Уитни от размерности пространства при $\mathbf{n} \geq 5$ – нерешенная задача. Также не исследован случай приближения функций нескольких переменных полиномами. На наш взгляд, доказательство многомерной теоремы Уитни для полиномов с хорошими оценками констант, например, не зависящими от степени приближающего полинома, представляет собой весьма трудную задачу.

Список литературы

1. Whitney H. On function with bounded n -th differences // J. Mat. Pure et Appl. 1955. V. 36. P. 67–95.
2. Sendov B. On the constants of H. Whitney // C. R. Acad. Bul. Sci. 1982. V. 35. P. 424–431.
3. Брудный Ю. А. Об одной теореме локальных наилучших приближений // Уч. зап. Казанского ун-та. 1964. Т. 124. № 6. С. 43–49.
4. Ivanov K., Takev M. $O(n \ln(n))$ bounds of constants of H. Whitney // C. R. Acad. Bul. Sci. 1985. V. 38. № 10. P. 1129–1131.
5. Vinev P. $O(n)$ bounds of Whitney constants // C. R. Acad. Bul. Sci. 1985. V. 38. № 10. P. 1315–1317.
6. Sendov B. The constants of H. Whitney are bounded // C. R. Acad. Bul. Sci. 1985. V. 38. № 10. P. 1299–1303.
7. Sendov B. On the theorem and constants of H. Whitney // Constr. Approx. 1987. V. 3. P. 1–11.
8. Sendov B., Popov V. The average moduli of smoothness. Wiley & Sons, 1988.
9. Брудный Ю. А. Константы Уитни: Тез. докладов. Современные проблемы теории функций. Баку, 1989.
10. Крякин Ю. В. О константах Уитни // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 2. С. 155–157.
11. Крякин Ю. В. О теореме и константах Уитни // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 3. С. 25–40.
12. Стороженко Э. А. Приближение функций интерполяционными в среднем сплайнами // Изв. вузов. Математика. 1976. Т. 176. № 12. С. 82–95.
13. Kryakin Yu. V. On the theorem of H. Whitney in Spaces L_p // Math. Balk. 1990. V. 4. № 3. P. 258–271.
14. Крякин Ю. В., Коваленко Л. Г. О теореме Уитни в L_p // Изв. вузов. Математика. 1992. № 1. С. 69–77.

15. *Sendov B., Takev M.* The theorem of Whitney for integral norm // C. R. Acad. Bul. Sci. 1985. V. 38. № 10. P. 1199–1302.
16. *Крякин Ю. В., Takev M. Д.* Об интерполяционных константах Уитни // Матем. заметки. 1995.
17. *Крякин Ю. В.* О точных константах в теореме Уитни // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 1. С. 34–51.
18. *Брудный Ю. А.* Многомерный аналог одной теоремы Уитни // Матем. сб. 1970. Т. 82. № 2. С. 175–191.
19. *Брудный Ю. А.* Приближение функций n переменных квазимногочленами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34. № 3. С. 568–585.
20. *Стороженко Э. А.* Приближение алгебраическими многочленами функций класса L^p , $0 < p < 1$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 41. № 3. С. 652–662.
21. *Стороженко Э. А., Освальд П.* Теорема Джексона в пространствах $L^p(\mathbb{R}^k)$, $0 < p < 1$ // Сиб. матем. журнал. 1976. Т. 19. № 4. С. 888–901.
22. *Popov V., Petrushev P.* Rational Approximation of Real Functions // Encyclopedia of Mathematics and its Applications. V. 28. Cambridge University Press, 1988.
23. *Крякин Ю. В., Стороженко Э. А.* О теореме Уитни в L_p -метрике // Матем. сб. 1995. № 3.
24. *Sendov B., Takev M.* A Theorem of Whitney's type in $\mathbb{R}^2$ // PLISKA Studia mathematica bulgarica. 1991. V. 11. P. 78–85.
25. *Takev M.* A theorem of Whitney type in $\mathbb{R}^n$ // Constructive theory of functions '87. 1988. P. 441–447.

Поступило в редакцию
27.IV.1995