Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Кудрявцев, Приближение одного класса функций конечной гладкости другим, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 2, 111–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/im118>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 13:05:03

УДК 517.5

С. Н. Кудрявцев

Приближение одного класса функций конечной гладкости другим

В статье найдены необходимые и достаточные условия для приближения с заданной точностью в интегральной метрике одного класса функций с заданной мажорантой модулей непрерывности старших производных другим.

Библиография: 6 наименований.

Введение

В работе рассматривается задача о точности приближения по норме пространства $L_q(I^d)$ класса функций $F_p^{l,\omega}(I^d)$ классом $F_s^{l',\omega'}(I^d)$, где $F_p^{l,\omega}(I^d)$ ($F_s^{l',\omega'}(I^d)$) состоит из функций, определенных на единичном кубе I^d , обобщенные частные производные до порядка l (l') которых принадлежат $L_p(I^d)$ ($L_s(I^d)$), а модули непрерывности по норме $L_p(I^d)$ ($L_s(I^d)$) производных порядка l (l') в совокупности имеют мажоранту ω (ω'). При некоторых соотношениях между параметрами p, q, s найдены необходимые и достаточные условия для приближения с заданной точностью одного из указанных классов другим.

Настоящая работа продолжает исследования по задаче о точности приближения одного функционального класса другим, проведенные в [1]–[5] и других работах. Полученные в ней результаты представляют собой обобщение соответствующих результатов, установленных в [1], [2], [5] в некоторых частных случаях значений параметров, определяющих функциональные классы и метрику приближения. При этом используемая для их вывода техника существенно отличается от той, которая применялась в [1], [2], [5].

Работа состоит из введения и двух параграфов, в первом из которых найдены достаточные условия для приближения с заданной точностью в метрике $L_q(I^d)$ класса $F_p^{l,\omega}(I^d)$ классом $F_s^{l',\omega'}(I^d)$, а во втором даны необходимые условия для такого приближения, совпадающие по порядку с достаточными при $q, s \leq p$ и $q, s \geq p$.

§1. Достаточные условия для приближения с заданной точностью в метрике $L_q(I^d)$ класса $F_p^{l,\omega}(I^d)$ классом $F_s^{l',\omega'}(I^d)$

1.1. В этом пункте введем некоторые обозначения и определения, а также сформулируем вспомогательные утверждения, доказанные в [6], которые понадобятся для получения основных результатов.

Для $d \in \mathbb{N}$ в пространстве $\mathbb{R}^d$ фиксируем норму

$$\|x\| = \max_{j=1,\dots,d} |x_j|, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Как обычно, через $\mathbb{Z}_+^d$ будем обозначать множество $\{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{Z}^d : \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, d\}$, через $\mathbb{Z}_{+l}^d$, $l \in \mathbb{Z}_+$, обозначим множество $\{\lambda \in \mathbb{Z}_+^d : |\lambda| \leq l\}$, где $|\lambda| = \sum_{j=1}^d \lambda_j$, а через $\mathbb{Z}_{+l}^{\prime d}$ обозначим множество $\{\lambda \in \mathbb{Z}_+^d : |\lambda| = l\}$.

При $l \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$ через $\mathcal{P}_{l,d}$ обозначим пространство вещественных полиномов степени не выше l от d переменных, т.е. пространство всех функций $f: \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ вида

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d} a_\lambda x^\lambda, \quad \text{где } a_\lambda \in \mathbb{R}, \quad x^\lambda = x_1^{\lambda_1} \dots x_d^{\lambda_d}, \quad \lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d.$$

Для измеримого по Лебегу множества $D \subset \mathbb{R}^d$ при $1 \leq p \leq \infty$ через $L_p(D)$, как обычно, обозначается пространство всех вещественных измеримых на D функций f , для которых определена норма

$$\|f\|_{L_p(D)} = \begin{cases} (\int_D |f(x)|^p dx)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sup \text{vrai}_{x \in D} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Для области $D \subset \mathbb{R}^d$ при $1 \leq p \leq \infty$, $l \in \mathbb{Z}_+$ через $W_p^l(D)$ обозначается пространство всех функций $f \in L_p(D)$, для которых для каждого $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d$ обобщенная производная $\mathcal{D}^\lambda f = \frac{\partial^{|\lambda|} f}{\partial x_1^{\lambda_1} \dots \partial x_d^{\lambda_d}}$ принадлежит $L_p(D)$, с нормой

$$\|f\|_{W_p^l(D)} = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d} \|\mathcal{D}^\lambda f\|_{L_p(D)}.$$

Пусть ω – модуль непрерывности, т.е. ω – непрерывная вещественная функция на $[0, \infty)$ такая, что

$$0 = \omega(0) \leq \omega(\delta) \leq \omega(\delta + \sigma) \leq \omega(\delta) + \omega(\sigma) \quad \text{при } \delta, \sigma \in [0, \infty).$$

Тогда для области $D \subset \mathbb{R}^d$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq p \leq \infty$ и ω через $F_p^{l,\omega}(D)$ обозначим множество функций $f \in W_p^l(D)$, для которых выполняется неравенство

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d} \sup_{h \in \mathbb{R}^d} \text{vrai} \frac{1}{\omega(\|h\|)} \|\mathcal{D}^\lambda f(x+h) - \mathcal{D}^\lambda f(x)\|_{L_p(D_h)} \leq 1,$$

где $D_h = \{x \in D : x + th \in D \forall t \in [0, 1]\}$.

Для $l \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$ и измеримого по Лебегу множества Q , лежащего в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^d$, мера которого $\text{mes } Q > 0$, обозначим через $T_Q^{l,d}: W_1^l(D) \mapsto \mathcal{P}_{l,d}$ линейный оператор, определяемый для $f \in W_1^l(D)$ равенством

$$(T_Q^{l,d} f)(x) = \frac{1}{\text{mes } Q} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d} \frac{1}{\lambda!} \int_Q \mathcal{D}^\lambda f(y) (x-y)^\lambda dy,$$

где $\lambda! = \lambda_1! \dots \lambda_d!$, положим также $T_Q^{-1,d} f = 0$, $f \in L_1(Q)$. В рассматриваемой ситуации наряду с оператором $T_Q^{l,d}$ определим линейный оператор $T_Q^{\prime l,d}: W_1^l(D) \mapsto \mathcal{P}_{l,d}$, полагая

$$T_Q^{\prime l,d} f = T_Q^{l,d} f + T_Q^{l-1,d} f - T_Q^{l-1,d} T_Q^{l,d} f, \quad f \in W_1^l(D).$$

Для множеств $D, Q \subset \mathbb{R}^d$ под $D - Q$ понимается множество $\{x - y : x \in D, y \in Q\}$.

ЛЕММА 1.1.1. Пусть $l \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, D – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ и $Q \subset D$ – измеримое по Лебегу множество, для которого $\text{mes } Q > 0$. Тогда для $f \in W_p^l(D)$ и $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d$ справедливо равенство

$$\mathcal{D}^\lambda T_Q'^{l,d} f = T_Q'^{l-|\lambda|,d} \mathcal{D}^\lambda f. \quad (1.1.1)$$

ТЕОРЕМА 1.1.2. Пусть $l \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$. Пусть еще D – область в $\mathbb{R}^d$, звездная относительно компакта $Q \subset D$, такова, что существуют $\rho, \sigma, \delta > 0$, для которых выполняются условия

$$\sup_{z \in D-Q} \|z\| \leq \rho\delta, \quad \text{mes } Q \geq \sigma\delta^d.$$

Тогда существует константа $c_1(l, d, \rho, \sigma) > 0$ такая, что для $f \in W_p^l(D)$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \|f - T_Q'^{l,d} f\|_{L_p(D)} &\leq c_1 \delta^{l-d/p} \\ &\times \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d} \left(\int_{D-Q} \int_{Q \cap D_\xi} |\mathcal{D}^\lambda f(\eta + \xi) - \mathcal{D}^\lambda f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

$$\begin{aligned} \|f - T_Q'^{l,d} f\|_{L_\infty(D)} &\leq c_1 \delta^l \\ &\times \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d} \sup_{\xi \in D-Q} \|\mathcal{D}^\lambda f(\eta + \xi) - \mathcal{D}^\lambda f(\eta)\|_{L_\infty(Q \cap D_\xi)}. \end{aligned} \quad (1.1.2')$$

Для формулировки теоремы 1.1.3 понадобятся следующие обозначения. Через $I^d \subset \mathbb{R}^d$ обозначим куб

$$I^d = \{x \in \mathbb{R}^d : 0 < x_j < 1, j = 1, \dots, d\}.$$

Для $r, d \in \mathbb{N}$ через $\mathcal{N}_r^d$ обозначим множество мультииндексов

$$\mathcal{N}_r^d = \{\nu \in \mathbb{Z}^d : 0 \leq \nu_j \leq r-1, j = 1, \dots, d\}.$$

Для $k \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathcal{N}_{2^k}^d$ определим кубы

$$\begin{aligned} Q_{k,\nu}^d &= \{x \in \mathbb{R}^d : 2^{-k}\nu_j < x_j < 2^{-k}(\nu_j + 1), j = 1, \dots, d\}, \\ Q_{k,\nu}'^d &= \left\{x \in \mathbb{R}^d : 2^{-k} \left(\nu_j + \frac{1}{4}\right) \leq x_j \leq 2^{-k} \left(\nu_j + \frac{3}{4}\right), j = 1, \dots, d\right\}, \end{aligned}$$

а через $\chi_{k,\nu}^d$ обозначим характеристическую функцию множества $Q_{k,\nu}^d$.

Для $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$ определим линейный оператор $U_k^{l,d} : W_1^l(I^d) \mapsto L_\infty(I^d)$, полагая

$$U_k^{l,d} f = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{2^k}^d} T_{Q_{k,\nu}'^d}^{l,d}(f) \chi_{k,\nu}^d, \quad f \in W_1^l(I^d).$$

ТЕОРЕМА 1.1.3. Пусть $l \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$, $1 \leq p, q \leq \infty$ и модуль непрерывности ω таковы, что при $p < q$ существует константа $c_2(l, d, p, q, \omega) > 0$ такая, что для $\delta \in [0, 1]$ соблюдается неравенство

$$\int_0^1 t^{l-d/p+d/q-1} \omega(\delta t) dt \leq c_2 \omega(\delta). \quad (1.1.3)$$

Тогда существует константа $c_3(l, d, p, q, \omega) > 0$ такая, что для $f \in F_p^{l, \omega}(I^d)$ при $k \in \mathbb{Z}_+$ выполняется неравенство

$$\|f - U_k^{l, d} f\|_{L_q(I^d)} \leq c_3 2^{-k(l-(d/p-d/q)_+)} \omega(2^{-k}), \quad (1.1.4)$$

где, как обычно, $t_+ = \frac{1}{2}(t + |t|)$.

Существенную роль в доказательстве основного результата § 1 играет

ТЕОРЕМА 1.1.4. Пусть $l \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d$, $\rho > 0$. Тогда существует семейство констант

$$\{c_4(l, d, \lambda, \rho) > 0, l \in \mathbb{Z}_+, d \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d, \rho > 0\}$$

такое, что для любого ограниченного измеримого по Лебегу множества $Q \subset \mathbb{R}^d$, для любого $\delta > 0$ и любого $x^0 \in \mathbb{R}^d$ таких, что $x^0 + \delta I^d \subset Q$, можно построить линейный оператор $P_{Q, \delta, x^0}^{l, d}: L_1(Q) \mapsto \mathcal{P}_{l, d}$, обладающий следующими свойствами:

1) для любого измеримого по Лебегу множества $D \subset \mathbb{R}^d$ такого, что $\sup_{x \in D} \|x - x^0\| \leq \rho \delta$ для $f \in L_p(Q)$ при $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{D}^\lambda P_{Q, \delta, x^0}^{l, d} f\|_{L_q(D)} \leq c_4 \delta^{-|\lambda|-d/p+d/q} \|f\|_{L_p(Q)}; \quad (1.1.5)$$

2) для $f \in \mathcal{P}_{l, d}$ имеет место равенство

$$P_{Q, \delta, x^0}^{l, d} (f|_Q) = f. \quad (1.1.6)$$

1.2. В этом пункте доказывается основное утверждение §1.

ТЕОРЕМА 1.2.1. Пусть $l, l' \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$, $1 \leq p, q, s \leq \infty$ и модули непрерывности ω, ω' таковы, что $l' > l$, при $p < q$ соблюдается условие (1.1.3), а при $s < q$ имеет место включение

$$t^{l'-d/s+d/q-1} \omega'(t) \in L_1([0, 1]). \quad (1.2.1)$$

Пусть еще $K = F_p^{l, \omega}(I^d)$, $K' = F_s^{l', \omega'}(I^d)$, $X = L_q(I^d)$. Тогда существуют константы $\varepsilon_1(l, d, p, q, \omega) > 0$, $c_5(l, d, p, q, \omega) > 0$ и $c_6(l, l', d, p, q, s, \omega) > 0$ такие, что если $\varepsilon < \varepsilon_1$ и

$$r_\omega^{l-(d/p-d/q)_+}(\varepsilon) < r_{\omega'}^{l'-(d/p-d/q)_+ + (d/p-d/s)_+}(c_6 \varepsilon), \quad (1.2.2)$$

то

$$\sup_{f \in K} \inf_{g \in K'} \|f - g\|_X \leq c_5 \varepsilon, \quad (1.2.3)$$

где $r_\omega^\alpha(\varepsilon) = \min\{r \in \mathbb{N} : r^{-\alpha} \omega(r^{-1}) \leq \varepsilon\}$.

Доказательство теоремы 1.2.1 опирается на лемму 1.2.2, для формулировки которой введем следующие обозначения.

Для $k \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$ через $\mathcal{N}'_{2^k d}$ обозначим множество мультииндексов

$$\mathcal{N}'_{2^k d} = \{\nu \in \mathbb{Z}^d : -1 \leq \nu_j \leq 2^k, j = 1, \dots, d\}$$

и каждому $\nu' \in \mathcal{N}'_{2^k d}$ сопоставим $\nu = \nu(\nu') \in \mathcal{N}_{2^k d}$, полагая

$$\nu_j = \begin{cases} \nu'_j, & \text{если } 0 \leq \nu'_j \leq 2^k - 1, \\ 0, & \text{если } \nu'_j = -1, \\ 2^k - 1, & \text{если } \nu'_j = 2^k, \quad j = 1, \dots, d. \end{cases}$$

Далее, взяв неотрицательную функцию $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ такую, что $\psi(x) = 1$ при $x \in I^d$ и $\psi(x) = 0$ при $x \notin \{y \in \mathbb{R}^d : -\frac{1}{4} < y_j < \frac{5}{4}, j = 1, \dots, d\}$, положим

$$g(x) = \psi(x) \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^d} \psi(x - \nu) \right)^{-1}$$

и определим систему функций $\{g_{k,\nu}^d, k \in \mathbb{Z}_+, d \in \mathbb{N}, \nu \in \mathbb{Z}^d\}$ так:

$$g_{k,\nu}^d(x) = g(2^k x - \nu).$$

Наконец, для $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathcal{N}_{2^k d}$ через $S_{k,\nu}^{l,d}$ обозначим оператор

$$S_{k,\nu}^{l,d} = P_{Q,\delta,x^0}^{l,d} \quad \text{при } Q = Q_{k,\nu}^d, \quad \delta = 2^{-k}, \quad x^0 = 2^{-k} \nu.$$

Определим для $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$ линейный оператор $E_k^{l,d} : L_1(I^d) \mapsto C^\infty(\mathbb{R}^d)$, полагая

$$E_k^{l,d} f = \sum_{\nu' \in \mathcal{N}'_{2^k d}} S_{k,\nu(\nu')}^{l,d}(f) g_{k,\nu'}^d, \quad f \in L_1(I^d).$$

ЛЕММА 1.2.2. Пусть $l, m \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$, $1 \leq p, q, s \leq \infty$ и модуль непрерывности ω таковы, что $m \leq l$ и при $p < q$ существует константа $c_2(l - m, d, p, q, \omega) > 0$ такая, что для $\delta \in [0, 1]$ соблюдается неравенство

$$\int_0^1 t^{l-m-d/p+d/q-1} \omega(\delta t) dt \leq c_2 \omega(\delta). \quad (1.2.4)$$

Тогда существуют константы $c_7(l, d, p, q, \omega, m) > 0$, $c_8(l, d, p, s, \lambda) > 0$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \mathbb{Z}_{+l}^d$, такие, что для $f \in F_p^{l,\omega}(I^d)$ при $k \geq 2$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \mathbb{Z}_{+l}^d$ имеют место неравенства

$$\|f - E_k^{l,d} f\|_{W_q^m(I^d)} \leq c_7 \cdot 2^{-k(l-m-(d/p-d/q)_+)} \omega(2^{-k}), \quad (1.2.5)$$

$$\|\mathcal{D}^\lambda E_k^{l,d} f\|_{L_s(I^d)} \leq c_8 \cdot 2^{-k(l-|\lambda|-(d/p-d/s)_+)} \omega(2^{-k}). \quad (1.2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что в условиях леммы справедливо включение $F_p^{l,\omega}(I^d) \subset W_q^m(I^d)$.

В самом деле, если $q \leq p$, то это очевидно в силу неравенства Гёльдера. Если же $q > p$, то, учитывая, что для $f \in F_p^{l,\omega}(I^d)$ при $\lambda \in \mathbb{Z}_{+m}^d$ производная $\mathcal{D}^\lambda f \in F_p^{l-|\lambda|,\omega}(I^d)$, а также то обстоятельство, что в виду (1.2.4)

$$\int_0^1 t^{l-|\lambda|-d/p+d/q-1} \omega(\delta t) dt \leq \int_0^1 t^{l-m-d/p+d/q-1} \omega(\delta t) dt \leq c_2 \omega(\delta),$$

$$\delta \in [0, 1], \quad \lambda \in \mathbb{Z}_{+m}^d, \quad (1.2.7)$$

закключаем (см. теорему 1.1.3), что $F_p^{l,\omega}(I^d) \subset W_q^m(I^d)$.

Доказательство оценок (1.2.5), (1.2.6) проведем при $q \neq \infty$ и $s \neq \infty$. Однако при несущественной корректировке в выкладках оно сохраняет свою силу и при $q = \infty$, $s = \infty$.

Для вывода оценок (1.2.5), (1.2.6) нам понадобятся следующие свойства рассматриваемых нами объектов, установленные в [6].

Для $x \in I^d$, $\varkappa \in \mathbb{Z}_+^d$

$$\sum_{\nu \in \mathcal{N}'_{2^k}{}^d} \mathcal{D}^\varkappa g_{k,\nu}^d(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } \varkappa = 0, \\ 0 & \text{при } \varkappa \neq 0, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}_+. \quad (1.2.8)$$

Обозначая через $|M|$ число элементов множества M , имеем

$$\left| \left\{ \nu' \in \mathbb{Z}^d : \text{supp } g_{k,\nu'}^d \cap Q_{k,\nu}^d \neq \emptyset \right\} \right| \leq 3^d, \quad \nu \in \mathcal{N}_{2^k}^d. \quad (1.2.9)$$

Для $d \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{Z}_+^d$ существует константа $c_9(d, \mu) > 0$ такая, что при $k \in \mathbb{Z}_+$, $\nu \in \mathbb{Z}^d$ для всех $x \in \mathbb{R}^d$ выполняется неравенство

$$|\mathcal{D}^\mu g_{k,\nu}^d(x)| \leq c_9 2^{k|\mu|}. \quad (1.2.10)$$

При $k \geq 2$, $d \in \mathbb{N}$ для $\nu \in \mathcal{N}_{2^k}^d$ через $y_{k,\nu}^d$ обозначим точку, у которой при $j = 1, \dots, d$ координата

$$(y_{k,\nu}^d)_j = \begin{cases} 2^{-k}(\nu_j - 1) & \text{при } 1 \leq \nu_j \leq 2^k - 2, \\ 1 - 3 \cdot 2^{-k} & \text{при } \nu_j = 2^k - 1, \\ 0 & \text{при } \nu_j = 0, \end{cases}$$

и определим куб $D_{k,\nu}^d \subset I^d$, полагая

$$D_{k,\nu}^d = y_{k,\nu}^d + 3 \cdot 2^{-k} \cdot I^d.$$

Тогда при $k \geq 2$, $d \in \mathbb{N}$ для $x \in I^d$ справедливо неравенство

$$\left| \left\{ \nu \in \mathcal{N}_{2^k}^d : x \in D_{k,\nu}^d \right\} \right| \leq 6^d. \quad (1.2.11)$$

При $k \geq 2$, $d \in \mathbb{N}$ для $\nu \in \mathcal{N}_{2^k}^d$, $\nu' \in \mathcal{N}_{2^k}^{'d}$ таких, что $Q_{k,\nu}^d \cap \text{supp } g_{k,\nu'}^d \neq \emptyset$, имеет место включение

$$Q_{k,\nu(\nu')}^d \subset D_{k,\nu}^d. \quad (1.2.12)$$

Обозначим еще для $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d$ через $\mathbb{Z}_+^d(\lambda)$ множество мультииндексов

$$\mathbb{Z}_+^d(\lambda) = \{\mu \in \mathbb{Z}_+^d : \mu_j \leq \lambda_j, j = 1, \dots, d\}$$

и для $\mu \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda)$ $C_\lambda^\mu = \frac{\lambda!}{\mu!(\lambda-\mu)!}$.

Теперь для $f \in F_p^{l,\omega}(I^d)$ при $\lambda \in \mathbb{Z}_{+m}^d$ и $k \geq 2$, учитывая (1.2.8), имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{D}^\lambda f - \mathcal{D}^\lambda E_k^{l,d} f \right\|_{L_q(I^d)} \leq \left\| \mathcal{D}^\lambda f - U_k^{l-|\lambda|,d} \mathcal{D}^\lambda f \right\|_{L_q(I^d)} \\ & + \left\| U_k^{l-|\lambda|,d} \mathcal{D}^\lambda f - \sum_{\nu' \in \mathcal{N}_{2^k}^{'d}} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda)} C_\lambda^\mu \mathcal{D}^\mu S_{k,\nu(\nu')}^{l,d}(f) \cdot \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{k,\nu'}^d \right\|_{L_q(I^d)} \\ & = \left\| \mathcal{D}^\lambda f - U_k^{l-|\lambda|,d} \mathcal{D}^\lambda f \right\|_{L_q(I^d)} \\ & + \left\| \sum_{\mu \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda)} C_\lambda^\mu \cdot \sum_{\nu' \in \mathcal{N}_{2^k}^{'d}} (U_k^{l-|\mu|,d} \mathcal{D}^\mu f - \mathcal{D}^\mu S_{k,\nu(\nu')}^{l,d} f) \cdot \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{k,\nu'}^d \right\|_{L_q(I^d)} \\ & \leq \left\| \mathcal{D}^\lambda f - U_k^{l-|\lambda|,d} \mathcal{D}^\lambda f \right\|_{L_q(I^d)} \\ & + \sum_{\mu \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda)} C_\lambda^\mu \cdot \left\| \sum_{\nu' \in \mathcal{N}_{2^k}^{'d}} (U_k^{l-|\mu|,d} \mathcal{D}^\mu f - \mathcal{D}^\mu S_{k,\nu(\nu')}^{l,d} f) \cdot \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{k,\nu'}^d \right\|_{L_q(I^d)}. \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

С учетом (1.2.7), (1.1.3) из (1.1.4) вытекает, что

$$\left\| \mathcal{D}^\lambda f - U_k^{l-|\lambda|,d} \mathcal{D}^\lambda f \right\|_{L_q(I^d)} \leq c_{10} \cdot 2^{-k(l-|\lambda|-(d/p-d/q)_+)} \omega(2^{-k}). \quad (1.2.14)$$

Продолжая оценку правой части (1.2.13), получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{\nu' \in \mathcal{N}_{2^k}^{'d}} (U_k^{l-|\mu|,d} \mathcal{D}^\mu f - \mathcal{D}^\mu S_{k,\nu(\nu')}^{l,d} f) \cdot \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{k,\nu'}^d \right\|_{L_q(I^d)}^q \\ & = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{2^k}^d} \int_{Q_{k,\nu}^d} \left| \sum_{\substack{\nu' \in \mathcal{N}_{2^k}^{'d}: \\ Q_{k,\nu}^d \cap \text{supp } g_{k,\nu'}^d \neq \emptyset}} \left(T_{Q_{k,\nu}^d}^{l-|\mu|,d} \mathcal{D}^\mu f - \mathcal{D}^\mu S_{k,\nu(\nu')}^{l,d} f \right) \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{k,\nu'}^d \right|^q dx \\ & \leq \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{2^k}^d} \left(\sum_{\substack{\nu' \in \mathcal{N}_{2^k}^{'d}: \\ Q_{k,\nu}^d \cap \text{supp } g_{k,\nu'}^d \neq \emptyset}} \left\| (T_{Q_{k,\nu}^d}^{l-|\mu|,d} \mathcal{D}^\mu f - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \mathcal{D}^\mu S_{k,\nu(\nu')}^{l,d} f) \cdot \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{k,\nu'}^d \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)} \right)^d. \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

Применяя (1.1.1) и (1.2.10), находим

$$\begin{aligned}
& \left\| \left(T_{Q'_{k,\nu}}'^{l-|\mu|,d} \mathcal{D}^\mu f - \mathcal{D}^\mu S_{k,\nu(\nu')}^{l,d} f \right) \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{k,\nu'}^d \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)} \\
&= \left\| \left(\mathcal{D}^\mu T_{Q'_{k,\nu}}'^{l,d} f - \mathcal{D}^\mu S_{k,\nu(\nu')}^{l,d} f \right) \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{k,\nu'}^d \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)} \\
&\leq c_{11} \cdot 2^{k|\lambda-\mu|} \left\| \mathcal{D}^\mu T_{Q'_{k,\nu}}'^{l,d} f - \mathcal{D}^\mu S_{k,\nu(\nu')}^{l,d} f \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)}, \\
&\quad \nu \in \mathcal{N}_{2^k}^d, \quad \nu' \in \mathcal{N}_{2^k}'^d : Q_{k,\nu}^d \cap \text{supp } g_{k,\nu'}^d \neq \emptyset.
\end{aligned} \tag{1.2.16}$$

Пользуясь (1.1.6), (1.1.5), (1.2.12), (1.1.2) и неравенством Гёльдера, выводим для $\nu \in \mathcal{N}_{2^k}^d$, $\nu' \in \mathcal{N}_{2^k}'^d : Q_{k,\nu}^d \cap \text{supp } g_{k,\nu'}^d \neq \emptyset$:

$$\begin{aligned}
& \left\| \mathcal{D}^\mu T_{Q'_{k,\nu}}'^{l,d} f - \mathcal{D}^\mu S_{k,\nu(\nu')}^{l,d} f \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)} = \left\| \mathcal{D}^\mu S_{k,\nu(\nu')}^{l,d} \left(T_{Q'_{k,\nu}}'^{l,d} f - f \right) \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)} \\
&\leq c_{12} \cdot 2^{k(|\mu|+d/p-d/q)} \left\| f - T_{Q'_{k,\nu}}'^{l,d} f \right\|_{L_p(Q_{k,\nu(\nu')}^d)} \\
&\leq c_{12} \cdot 2^{k(|\mu|+d/p-d/q)} \left\| f - T_{Q'_{k,\nu}}'^{l,d} f \right\|_{L_p(D_{k,\nu}^d)} \\
&\leq c_{13} \cdot 2^{-k(l-|\mu|-2d/p+d/q)} \\
&\quad \times \sum_{\varkappa \in \mathbb{Z}_{+l}^d} \left(\int_{(D_{k,\nu}^d - Q_{k,\nu}^d) \cap (D_{k,\nu}^d)_\xi} \int_{(Q_{k,\nu}^d)' \cap (D_{k,\nu}^d)_\xi} |\mathcal{D}^\varkappa f(\eta + \xi) - \mathcal{D}^\varkappa f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p} \\
&\leq c_{13} \cdot 2^{-k(l-|\mu|-2d/p+d/q)} \\
&\quad \times \sum_{\varkappa \in \mathbb{Z}_{+l}^d} \left(\int_{\|\xi\| \leq 3 \cdot 2^{-k}} \int_{(D_{k,\nu}^d)_\xi} |\mathcal{D}^\varkappa f(\eta + \xi) - \mathcal{D}^\varkappa f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p} \\
&\leq c_{14} \cdot 2^{-k(l-|\mu|-2d/p+d/q)} \\
&\quad \times \left(\int_{\|\xi\| \leq 3 \cdot 2^{-k}} \int_{(D_{k,\nu}^d)_\xi} \sum_{\varkappa \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\mathcal{D}^\varkappa f(\eta + \xi) - \mathcal{D}^\varkappa f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p}.
\end{aligned} \tag{1.2.17}$$

Объединяя оценки (1.2.15), (1.2.17), (1.2.16), принимая во внимание (1.2.9) и используя неравенство Гёльдера с показателем $p/q \leq 1$, а также (1.2.11), мы получим при $q \geq p$ неравенство

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{\nu' \in \mathcal{N}_{2^k}'^d} \left(T_k^{l-|\mu|,d} \mathcal{D}^\mu f - \mathcal{D}^\mu S_{k,\nu(\nu')}^{l,d} f \right) \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{k,\nu'}^d \right\|_{L_q(I^d)}^q \\
&\leq \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{2^k}^d} \left(\sum_{\{\nu' \in \mathcal{N}_{2^k}'^d : Q_{k,\nu}^d \cap \text{supp } g_{k,\nu'}^d \neq \emptyset\}} c_{15} \cdot 2^{-k(l-|\lambda|-2d/p+d/q)} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_{\|\xi\| \leq 3 \cdot 2^{-k}} \int_{(D_{k,\nu}^d)_\xi} \sum_{\varkappa \in \mathbb{Z}_{+l}^{l,d}} |\mathcal{D}^\varkappa f(\eta + \xi) - \mathcal{D}^\varkappa f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p} \Big)^q \\
& \leq (c_{16} \cdot 2^{-k(l-|\lambda|-2d/p+d/q)})^q \\
& \times \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{2^k}^d} \left(\int_{\|\xi\| \leq 3 \cdot 2^{-k}} \int_{D_{k,\nu}^d \cap I_\xi^d} \sum_{\varkappa \in \mathbb{Z}_{+l}^{l,d}} |\mathcal{D}^\varkappa f(\eta + \xi) - \mathcal{D}^\varkappa f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{q/p} \\
& \leq (c_{16} \cdot 2^{-k(l-|\lambda|-2d/p+d/q)})^q \\
& \times \left(\int_{\|\xi\| \leq 3 \cdot 2^{-k}} \int_{I_\xi^d} \left(\sum_{\nu \in \mathcal{N}_{2^k}^d} \chi_{D_{k,\nu}^d}(\eta) \right) \right. \\
& \times \left. \left(\sum_{\varkappa \in \mathbb{Z}_{+l}^{l,d}} |\mathcal{D}^\varkappa f(\eta + \xi) - \mathcal{D}^\varkappa f(\eta)|^p \right) d\eta d\xi \right)^{q/p} \\
& \leq (c_{16} \cdot 2^{-k(l-|\lambda|-2d/p+d/q)})^q \\
& \times \left(\int_{\|\xi\| \leq 3 \cdot 2^{-k}} \int_{I_\xi^d} 6^d \sum_{\varkappa \in \mathbb{Z}_{+l}^{l,d}} |\mathcal{D}^\varkappa f(\eta + \xi) - \mathcal{D}^\varkappa f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{q/p} \\
& \leq (c_{17} \cdot 2^{-k(l-|\lambda|-d/p+d/q)} \omega(2^{-k}))^q. \tag{1.2.18}
\end{aligned}$$

Из (1.2.13), (1.2.14) и (1.2.18) вытекает, что при $q \geq p$ для $f \in F_p^{l,\omega}(I^d)$, $\lambda \in \mathbb{Z}_{+m}^d$, $k \geq 2$ выполняется неравенство

$$\|\mathcal{D}^\lambda f - \mathcal{D}^\lambda E_k^{l,d} f\|_{L_q(I^d)} \leq c_{18} \cdot 2^{-k(l-|\lambda|-d/p+d/q)} \omega(2^{-k}),$$

и, значит, имеет место (1.2.5).

Если же $q < p$, то $W_p^m(I^d) \subset W_q^m(I^d)$, и для $f \in F_p^{l,\omega}(I^d)$ с учетом доказанного справедлива оценка

$$\|f - E_k^{l,d} f\|_{W_q^m(I^d)} \leq \|f - E_k^{l,d} f\|_{W_p^m(I^d)} \leq c_7 2^{-kl} \cdot \omega(2^{-k}),$$

что совпадает с (1.2.5) и при $q < p$.

Для получения неравенства (1.2.6) для $f \in F_p^{l,\omega}(I^d)$ при $k \geq 2$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \mathbb{Z}_{+l}^d$ в силу (1.2.8) имеем

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{D}^\lambda E_k^{l,d} f\|_{L_s(I^d)} &= \left\| \sum_{\nu' \in \mathcal{N}_{2^k}^{l,d}} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda)} C_\lambda^\mu \mathcal{D}^\mu S_{k,\nu(\nu')}^{l,d}(f) \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{k,\nu'}^d \right\|_{L_s(I^d)} \\
&= \left\| \sum_{\mu \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda) \cap \mathbb{Z}_{+l}^d} C_\lambda^\mu \sum_{\nu' \in \mathcal{N}_{2^k}^{l,d}} \mathcal{D}^\mu S_{k,\nu(\nu')}^{l,d}(f) \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{k,\nu'}^d \right\|_{L_s(I^d)} \\
&= \left\| \sum_{\mu \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda) \cap \mathbb{Z}_{+l}^d} C_\lambda^\mu \sum_{\nu' \in \mathcal{N}_{2^k}^{l,d}} (\mathcal{D}^\mu S_{k,\nu(\nu')}^{l,d}(f) - U_k^{l-|\mu|,d} \mathcal{D}^\mu f) \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{k,\nu'}^d \right\|_{L_s(I^d)}
\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{\mu \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda) \cap \mathbb{Z}_{+l}^d} C_\lambda^\mu \left\| \sum_{\nu' \in \mathcal{N}_{2^k}^{l,d}} \left(U_k^{l-|\mu|,d} \mathcal{D}^\mu f - \mathcal{D}^\mu S_{k,\nu(\nu')}^{l,d}(f) \right) \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{k,\nu'}^d \right\|_{L_s(I^d)}. \quad (1.2.19)$$

Полагая в (1.2.15)–(1.2.18) значение $q = s$ и соединяя эти оценки с (1.2.19), приходим к (1.2.6) при $s \geq p$. С помощью неравенства Гёльдера и оценки (1.2.6), установленной при $s = p$, убеждаемся в справедливости (1.2.6) и при $s < p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2.1. Прежде всего отметим, что соблюдение условий теоремы 1.2.1, в частности соотношения (1.1.3), влечет соблюдение условий леммы 1.2.2 при $m = 0$, а (1.2.1) обеспечивает включение $K' \subset X$.

Теперь определим ε_1 равным $\min\{n^{-(l-(d/p-d/q)_+)} \cdot \omega(n^{-1}) : n = 1, 2, 3\}$ и для $\varepsilon < \varepsilon_1$ положим

$$r = r_\omega^{l-(d/p-d/q)_+}(\varepsilon). \quad (1.2.20)$$

Последнее определение корректно, поскольку в силу (1.1.3) верно равенство

$$\inf\{n^{-(l-(d/p-d/q)_+)} \cdot \omega(n^{-1}) : n \in \mathbb{N}\} = 0.$$

Выберем натуральное $k \geq 2$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$2^{k-1} < r \leq 2^k. \quad (1.2.21)$$

Это возможно, ибо $\varepsilon < \varepsilon_1$.

Из (1.2.5), (1.2.20) и (1.2.21) находим, что для $f \in K$ справедливо неравенство

$$\|f - E_k^{l,d} f\|_X \leq c_7 \cdot 2^{-k(l-(d/p-d/q)_+)} \omega(2^{-k}) \leq c_5 r^{-(l-(d/p-d/q)_+)} \omega(r^{-1}) \leq c_5 \varepsilon.$$

Поэтому для получения (1.2.3) достаточно показать, что существует константа $c_6 > 0$ такая, что выполнение условия (1.2.2) влечет включение $E_k^{l,d} f \in K'$ для $f \in K$.

Покажем это. В силу (1.2.6), (1.2.21), (1.2.20) и (1.2.2) для $f \in K$ при $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l'}^d$ имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^\lambda E_k^{l,d} f\|_{L_s(I^d)} &\leq c_{19} \cdot 2^{-k(l-l'-(d/p-d/s)_+)} \omega(2^{-k}) \\ &\leq c_{20} r^{-(l-l'-(d/p-d/s)_+)} \omega(r^{-1}) = c_{20} r^{-(l-(d/p-d/q)_+)} \omega(r^{-1}) \\ &\quad \times \left(r^{-(l'-(d/p-d/q)_+ + (d/p-d/s)_+)} \omega'(r^{-1}) \right)^{-1} \cdot \omega'(r^{-1}) \\ &\leq c_{20} \varepsilon \left(r^{-(l'-(d/p-d/q)_+ + (d/p-d/s)_+)} \omega'(r^{-1}) \right)^{-1} \cdot \omega'(r^{-1}) \\ &< c_{20} \varepsilon (c_6 \varepsilon)^{-1} \omega'(r^{-1}) = \frac{c_{20}}{c_6} \omega'(r^{-1}), \end{aligned}$$

а при $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l'+1}^d$ имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^\lambda E_k^{l,d} f\|_{L_s(I^d)} &\leq c_{21} \cdot 2^{-k(l-l'-1-(d/p-d/s)_+)} \omega(2^{-k}) \\ &\leq c_{22} r \cdot r^{-(l-l'-(d/p-d/s)_+)} \omega(r^{-1}) \leq \frac{c_{23}}{c_6} r \omega'(r^{-1}). \end{aligned}$$

Из последних двух оценок видно (см. доказательство леммы 4.4 в [6]), что константу c_6 можно выбрать так, что для $f \in K$ функция $E_k^{l,d} f \in K'$.

§ 2. Необходимые условия для приближения с заданной точностью в метрике $L_q(I^d)$ класса $F_p^{l,\omega}(I^d)$ классом $F_s^{l',\omega'}(I^d)$

2.1. В этом пункте приведем вспомогательные утверждения, которые потребуются для доказательства основного результата § 2.

Как обычно, обозначим для $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$ через l_p^m пространство $\mathbb{R}^m$ с фиксированной в нем нормой

$$\|x\|_{l_p^m} = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^m |x_j|^p \right)^{1/p} & \text{при } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{j=1,\dots,m} |x_j| & \text{при } p = \infty. \end{cases}$$

ЛЕММА 2.1.1. Пусть $d \in \mathbb{N}$ и функция $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ такова, что $\varphi \not\equiv 0$ и ее носитель $\text{supp } \varphi \subset I^d$. Пусть еще для $m \in \mathbb{N}$ $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m^{d,\varphi}$ – линейная оболочка системы функций

$$\{\varphi(mx - \nu), \nu \in \mathcal{N}_m^d\},$$

$J_m = J_m^{d,\varphi}: \mathbb{R}^{m^d} \mapsto \mathcal{L}_m^{d,\varphi}$ – линейный оператор, определяемый равенством

$$J_m \beta = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_m^d} \beta_\nu \varphi(mx - \nu), \quad \beta = \{\beta_\nu \in \mathbb{R}, \nu \in \mathcal{N}_m^d\}.$$

Тогда:

- 1) для любого $m \in \mathbb{N}$ система функций $\{\varphi(mx - \nu), \nu \in \mathcal{N}_m^d\}$ линейно независима и J_m суть линейный изоморфизм $\mathbb{R}^{m^d}$ на $\mathcal{L}_m$;
- 2) для любого $r: 1 \leq r \leq \infty$, существует константа $c_{24}(r, d, \varphi) > 0$ такая, что для любых $m \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}^{m^d}$ справедливо равенство

$$\|J_m \beta\|_{L_r(I^d)} = c_{24} m^{-d/r} \|\beta\|_{l_r^{m^d}}; \quad (2.1.1)$$

- 3) для любых $l \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq p \leq \infty$ существует константа $c_{25}(l, d, p, \varphi) > 0$ такая, что при любом модуле непрерывности ω и любом $m \in \mathbb{N}$ имеет место включение

$$J_m \left(\{ \beta \in \mathbb{R}^{m^d} : \|\beta\|_{l_p^{m^d}} \leq c_{25} m^{-l+d/p} \omega(m^{-1}) \} \right) \subset F_p^{l,\omega}(I^d). \quad (2.1.2)$$

Доказательство леммы 2.1.1 не составляет труда.

ЛЕММА 2.1.2. Пусть $l' \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$ и функция $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ такова, что $\varphi \not\equiv 0$, ее носитель $\text{supp } \varphi \subset I^d$, и для любого полинома $f \in \mathcal{P}_{l',d}$ выполняется равенство

$$\int_{I^d} \varphi(y) f(y) dy = 0.$$

Тогда существует семейство констант $\{c_{26}(l', d, q, \varphi) > 0, 1 \leq q \leq \infty\}$ и последовательность линейных операторов $\pi_m = \pi_m^{l',d,\varphi}: L_1(I^d) \mapsto \mathcal{L}_m^{d,\varphi}$, $m \in \mathbb{N}$ (см. лемму 2.1.1), такие, что:

1) при $t \in \mathbb{N}$ для $f \in \mathcal{L}_m$ справедливо равенство

$$\pi_m f = f; \quad (2.1.3)$$

2) при $t \in \mathbb{N}$ для любой функции f вида $f = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_m^d} f_\nu h_{m,\nu}^d$, где $f_\nu \in \mathcal{P}_{l',d}$, $h_{m,\nu}^d$ – характеристическая функция множества $m^{-1}\nu + m^{-1}I^d$, $\nu \in \mathcal{N}_m^d$, имеет место равенство

$$\pi_m f = 0; \quad (2.1.4)$$

3) при $t \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$ для $f \in L_q(I^d)$ соблюдается неравенство

$$\|\pi_m f\|_{L_q(I^d)} \leq c_{26} \|f\|_{L_q(I^d)}. \quad (2.1.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбрав константу $c = c(d, \varphi)$ так, чтобы для функции $\psi = c\varphi$ выполнялось равенство

$$\int_{I^d} \varphi(y) \psi(y) dy = 1,$$

определим при $t \in \mathbb{N}$ линейный оператор $\pi_m: L_1(I^d) \mapsto \mathcal{L}_m$, полагая для $f \in L_1(I^d)$ значение

$$(\pi_m f)(x) = m^d \sum_{\nu \in \mathcal{N}_m^d} \left(\int_{I^d} f(y) \psi(my - \nu) dy \right) \varphi(mx - \nu).$$

Проверка соотношений (2.1.3)–(2.1.5) проводится посредством несложных выкладок.

ЛЕММА 2.1.3. Для $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p, q, s \leq \infty$, $\delta \in (0, 1)$ при $p \geq q, s$ или $p \leq q, s$ справедливо неравенство

$$\sup_{\{x \in \mathbb{R}^n: \|x\|_{l_p^n} \leq 1\}} \inf_{\{y \in \mathbb{R}^n: \|y\|_{l_s^n} \leq \delta n^{(1/s-1/p)+}\}} \|x - y\|_{l_q^n} \geq (1 - \delta) n^{(1/q-1/p)+}. \quad (2.1.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала получим оценку (2.1.6) в случае, когда $p \geq q, s$. В этом случае, полагая $\xi = (n^{-1/p}, \dots, n^{-1/p})$, видим, что $\|\xi\|_{l_p^n} = 1$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} & \sup_{\{x \in \mathbb{R}^n: \|x\|_{l_p^n} \leq 1\}} \inf_{\{y \in \mathbb{R}^n: \|y\|_{l_s^n} \leq \delta n^{(1/s-1/p)+}\}} \|x - y\|_{l_q^n} \\ & \geq \inf_{\{y \in \mathbb{R}^n: \|y\|_{l_s^n} \leq \delta n^{1/s-1/p}\}} \|\xi - y\|_{l_q^n}. \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Используя неравенство Гёльдера, получаем, что для $y \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\|y\|_{l_s^n} \leq \delta n^{1/s-1/p}$, выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^n y_j \leq n^{1-1/s} \|y\|_{l_s^n} \leq n^{1-1/s} \delta n^{1/s-1/p} = \delta n^{1-1/p}. \quad (2.1.8)$$

Снова пользуясь неравенством Гёльдера, находим, что для $y \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\|\xi - y\|_{l_q^n} < (1 - \delta)n^{1/q-1/p}$, выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (y_j - \xi_j) &= - \sum_{j=1}^n (\xi_j - y_j) \geq -n^{1-1/q} \|\xi - y\|_{l_q^n} \\ &> -n^{1-1/q} (1 - \delta)n^{1/q-1/p} = -(1 - \delta)n^{1-1/p}, \end{aligned}$$

откуда

$$\sum_{j=1}^n y_j > \sum_{j=1}^n \xi_j - (1 - \delta)n^{1-1/p} = n \cdot n^{-1/p} - (1 - \delta)n^{1-1/p} = \delta n^{1-1/p}. \quad (2.1.9)$$

Сопоставляя (2.1.8) и (2.1.9), заключаем, что

$$\left\{ y \in \mathbb{R}^n : \|y\|_{l_s^n} \leq \delta n^{1/s-1/p} \right\} \cap \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \|\xi - y\|_{l_q^n} < (1 - \delta)n^{1/q-1/p} \right\} = \emptyset.$$

Отсюда вытекает, что для любого $y \in \mathbb{R}^n$ такого, что $\|y\|_{l_s^n} \leq \delta n^{1/s-1/p}$, имеет место неравенство

$$\|\xi - y\|_{l_q^n} \geq (1 - \delta)n^{1/q-1/p},$$

и, следовательно,

$$\inf_{\{y \in \mathbb{R}^n : \|y\|_{l_s^n} \leq \delta n^{1/s-1/p}\}} \|\xi - y\|_{l_q^n} \geq (1 - \delta)n^{1/q-1/p}. \quad (2.1.10)$$

Соединяя (2.1.7) с (2.1.10), приходим к (2.1.6) при $p \geq q, s$.

Теперь установим оценку (2.1.6) в случае, когда $p \leq q, s$.

Полагая в этой ситуации $\xi = (1, 0, \dots, 0)$, имеем

$$\begin{aligned} &\sup_{\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_{l_p^n} \leq 1\}} \inf_{\{y \in \mathbb{R}^n : \|y\|_{l_s^n} \leq \delta n^{(1/s-1/p)+}\}} \|x - y\|_{l_q^n} \\ &\geq \inf_{\{y \in \mathbb{R}^n : \|y\|_{l_s^n} \leq \delta\}} \|\xi - y\|_{l_q^n} = \inf_{\{y \in \mathbb{R}^n : \|y\|_{l_s^n} \leq \delta\}} \left(|1 - y_1|^q + \sum_{j=2}^n |y_j|^q \right)^{1/q} \\ &\geq \inf_{\{y \in \mathbb{R}^n : \|y\|_{l_s^n} \leq \delta\}} |1 - y_1| \geq \inf_{\{y \in \mathbb{R}^n : \|y\|_{l_s^n} \leq \delta\}} (1 - |y_1|) \\ &\geq \inf_{\{y \in \mathbb{R}^n : \|y\|_{l_s^n} \leq \delta\}} (1 - \|y\|_{l_s^n}) \geq 1 - \delta, \end{aligned}$$

что приводит к (2.1.6) при $p \leq q, s$.

2.2. В этом пункте будет доказано основное утверждение § 2.

ТЕОРЕМА 2.2.1. В условиях теоремы 1.2.1 при $p \geq q, s$ или $p \leq q, s$ существуют константы $c_{27}(l, l', d, p, q, s) > 0$ и $c_{28}(l, l', d, p, q, s) > 0$ такие, что если для $\varepsilon > 0$ соблюдается условие

$$r_\omega^{l-(d/p-d/q)+} (c_{27}\varepsilon) > r_{\omega'}^{l'-(d/p-d/q)++(d/p-d/s)+} (\varepsilon), \quad (2.2.1)$$

то

$$\sup_{f \in K} \inf_{g \in K'} \|f - g\|_X \geq c_{28}\varepsilon. \quad (2.2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что множество

$$\{m \in \mathbb{N} : m^{-(l'-(d/p-d/q)_++(d/p-d/s)_+)} \omega'(m^{-1}) \leq \varepsilon\} \neq \emptyset.$$

Положим

$$r = r_{\omega'}^{l'-(d/p-d/q)_++(d/p-d/s)_+}(\varepsilon) \quad (2.2.3)$$

и выберем $k \in \mathbb{Z}_+$ так, чтобы удовлетворить соотношению

$$2^k \leq r < 2^{k+1}. \quad (2.2.4)$$

Рассмотрим подпространство $\mathcal{L}_{2^k}^{d,\varphi}$ и операторы $J_{2^k}^{d,\varphi}, \pi_{2^k}^{l',d,\varphi}$, соответствующие функции φ , удовлетворяющей условиям лемм 2.1.1, 2.1.2. Тогда в силу (2.1.5), (2.1.4) для $f \in K, g \in K'$ имеем

$$\begin{aligned} \|f - g\|_{L_q(I^d)} &\geq c_{29} \|\pi_{2^k} f - \pi_{2^k} g\|_{L_q(I^d)} \\ &= c_{29} \|\pi_{2^k} f - \pi_{2^k}(g - U_k^{l',d} g)\|_{L_q(I^d)}. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Но для $g \in F_s^{l',\omega'}(I^d)$ в виду (2.1.5) и (1.1.4) справедливо неравенство

$$\|\pi_{2^k}(g - U_k^{l',d} g)\|_{L_s(I^d)} \leq c_{30} \|g - U_k^{l',d} g\|_{L_s(I^d)} \leq c_{31} 2^{-kl'} \cdot \omega'(2^{-k}),$$

а поэтому для $f \in K, g \in K'$ получаем

$$\|\pi_{2^k} f - \pi_{2^k}(g - U_k^{l',d} g)\|_{L_q(I^d)} \geq \inf_{\{h \in \mathcal{L}_{2^k} : \|h\|_{L_s(I^d)} \leq c_{31} 2^{-kl'} \cdot \omega'(2^{-k})\}} \|\pi_{2^k} f - h\|_{L_q(I^d)}.$$

Соединяя эту оценку с (2.2.5), приходим к выводу, что для $f \in K, g \in K'$ выполняется неравенство

$$\|f - g\|_{L_q(I^d)} \geq c_{29} \cdot \inf_{\{h \in \mathcal{L}_{2^k} : \|h\|_{L_s(I^d)} \leq c_{31} 2^{-kl'} \cdot \omega'(2^{-k})\}} \|\pi_{2^k} f - h\|_{L_q(I^d)},$$

и, следовательно, для $f \in K$ верно неравенство

$$\inf_{g \in K'} \|f - g\|_{L_q(I^d)} \geq c_{29} \cdot \inf_{\{h \in \mathcal{L}_{2^k} : \|h\|_{L_s(I^d)} \leq c_{31} 2^{-kl'} \cdot \omega'(2^{-k})\}} \|\pi_{2^k} f - h\|_{L_q(I^d)}. \quad (2.2.6)$$

Применяя (2.1.2), (2.2.6), (2.1.3) и (2.1.1), выводим

$$\begin{aligned} \sup_{f \in K} \inf_{g \in K'} \|f - g\|_{L_q(I^d)} &\geq \sup_{\left\{ \beta \in \mathbb{R}^{2^{kd}} : \|\beta\|_{l_p^{2^{kd}}} \leq c_{25} 2^{-kl+kd/p} \omega(2^{-k}) \right\}} \inf_{g \in K'} \|J_{2^k} \beta - g\|_{L_q(I^d)} \\ &\geq c_{29} \cdot \sup_{\left\{ \beta \in \mathbb{R}^{2^{kd}} : \|\beta\|_{l_p^{2^{kd}}} \leq c_{25} 2^{-kl+kd/p} \omega(2^{-k}) \right\}} \inf_{\left\{ h \in \mathcal{L}_{2^k} : \|h\|_{L_s(I^d)} \leq c_{31} 2^{-kl'} \omega'(2^{-k}) \right\}} \|\pi_{2^k} J_{2^k} \beta - h\|_{L_q(I^d)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c_{29} \cdot \sup_{\left\{ \beta \in \mathbb{R}^{2^{kd}} : \|\beta\|_{l_p^{2kd}} \leq c_{25} 2^{-kl+kd/p} \omega(2^{-k}) \right\}} \inf_{\left\{ h \in \mathcal{L}_{2^k} : \|h\|_{L_s(I^d)} \leq c_{31} 2^{-kl'} \omega'(2^{-k}) \right\}} \|J_{2^k} \beta - h\|_{L_q(I^d)} \\
&= c_{32} 2^{-kl+kd/p} \omega(2^{-k}) \\
&\quad \times \sup_{\left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2^{kd}} : \|\xi\|_{l_p^{2kd}} \leq 1 \right\}} \inf_{\left\{ \theta \in \mathcal{L}_{2^k} : \|\theta\|_{L_s(I^d)} \leq c_{33} 2^{-kl'} \right\}} \|J_{2^k} \xi - \theta\|_{L_q(I^d)} \\
&\quad \times \omega'(2^{-k}) (2^{-kl+kd/p} \omega(2^{-k}))^{-1} \\
&= c_{32} 2^{-kl+kd/p} \omega(2^{-k}) \\
&\quad \times \sup_{\left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2^{kd}} : \|\xi\|_{l_p^{2kd}} \leq 1 \right\}} \inf_{\left\{ \eta \in \mathbb{R}^{2^{kd}} : \|\eta\|_{l_s^{2kd}} \leq c_{34} 2^{-kl'+kd/s} \right\}} \|J_{2^k} \xi - J_{2^k} \eta\|_{L_q(I^d)} \\
&\quad \times \omega'(2^{-k}) (2^{-kl+kd/p} \omega(2^{-k}))^{-1} \\
&= c_{35} 2^{-kl+kd/p-kd/q} \omega(2^{-k}) \\
&\quad \times \sup_{\left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2^{kd}} : \|\xi\|_{l_p^{2kd}} \leq 1 \right\}} \inf_{\left\{ \eta \in \mathbb{R}^{2^{kd}} : \|\eta\|_{l_s^{2kd}} \leq c_{34} 2^{-kl'+kd/s} \right\}} \|\xi - \eta\|_{l_q^{2kd}}. \quad (2.2.7)
\end{aligned}$$

Используя (2.2.4), (2.2.3) и (2.2.1), находим

$$\begin{aligned}
&c_{34} 2^{-kl'+kd/s} \omega'(2^{-k}) (2^{-kl+kd/p} \cdot \omega(2^{-k}))^{-1} \\
&= c_{34} 2^{-kl'+(kd/p-kd/q)_+ - kd/p+kd/s} \cdot \omega'(2^{-k}) \\
&\quad \times (2^{-kl+(kd/p-kd/q)_+} \cdot \omega(2^{-k}))^{-1} \\
&= c_{34} 2^{-kl'+(kd/p-kd/q)_+ - (kd/p-kd/s)_+} \cdot \omega'(2^{-k}) \\
&\quad \times (2^{-kl+(kd/p-kd/q)_+} \cdot \omega(2^{-k}))^{-1} 2^{kd(s-kd/p)_+} \\
&\leq c_{36} r^{-l'+(d/p-d/q)_+ - (d/p-d/s)_+} \cdot \omega'(r^{-1}) \\
&\quad \times (r^{-l+(d/p-d/q)_+} \cdot \omega(r^{-1}))^{-1} 2^{kd(1/s-1/p)_+} \\
&\leq c_{36} \varepsilon (r^{-l+(d/p-d/q)_+} \cdot \omega(r^{-1}))^{-1} 2^{kd(1/s-1/p)_+} \\
&< c_{36} \varepsilon (c_{27} \varepsilon)^{-1} \cdot 2^{kd(1/s-1/p)_+} = \frac{1}{2} 2^{kd(1/s-1/p)_+}, \quad (2.2.8)
\end{aligned}$$

если положить $c_{27} = 2c_{36}$.

Из (2.2.7), принимая во внимание (2.2.8), получаем

$$\begin{aligned}
&\sup_{f \in K} \inf_{g \in K'} \|f - g\|_X \geq c_{35} 2^{-kl+kd/p-kd/q} \cdot \omega(2^{-k}) \\
&\quad \times \sup_{\left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2^{kd}} : \|\xi\|_{l_p^{2kd}} \leq 1 \right\}} \inf_{\left\{ \eta \in \mathbb{R}^{2^{kd}} : \|\eta\|_{l_s^{2kd}} \leq \frac{1}{2} 2^{kd(1/s-1/p)_+} \right\}} \|\xi - \eta\|_{l_q^{2kd}}. \quad (2.2.9)
\end{aligned}$$

Подставляя в (2.2.9) оценку (2.1.6) при $n = 2^{kd}$, $\delta = \frac{1}{2}$ и снова обращаясь к (2.2.4), (2.2.3), (2.2.1), приходим к (2.2.2).

СЛЕДСТВИЕ. В условиях теоремы 2.2.1 если для $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\sup_{f \in K} \inf_{g \in K'} \|f - g\|_X \leq c_{28}\varepsilon,$$

то

$$r_{\omega}^{l-(d/p-d/q)+}(c_{27}\varepsilon) \leq r_{\omega'}^{l'-(d/p-d/q)++(d/p-d/s)+}(\varepsilon),$$

если входящие в последнее неравенство величины определены.

Список литературы

1. Тиман А. Ф. Деформация метрических пространств и некоторые связанные с ней вопросы теории функций // УМН. 1965. Т. 20. № 2. С. 53–87.
2. Корнейчук Н. П. Неравенства для дифференцируемых периодических функций и наилучшее приближение одного класса функций другим // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36. № 2. С. 423–434.
3. Арестов В. В., Габушин В. Н. О приближении классов дифференцируемых функций // Матем. заметки. 1971. Т. 9. № 2. С. 105–112.
4. Субботин Ю. Н. Связь сплайн-приближений с задачей приближения класса классом // Матем. заметки. 1971. Т. 9. № 5. С. 501–510.
5. Кудрявцев С. Н. Некоторые задачи теории приближений для одного класса функций конечной гладкости // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 2. С. 3–20.
6. Кудрявцев С. Н. Восстановление функций вместе с их производными по значениям функций в заданном числе точек // Изв. АН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 6. С. 79–104.

Поступило в редакцию
31.VIII.1995