Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Тимашёв, Классификация G -многообразий сложности 1, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 2, 127–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/im119>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 17:43:06

УДК 512.745

Д. А. Тимашёв

Классификация G -многообразий сложности 1

Рассматривается задача комбинаторного описания алгебраических многообразий с данным полем рациональных функций, на которых действует алгебраическая группа G . Это прямое обобщение теории торических многообразий. В работе описан общий подход к решению этой задачи и предложено ее решение для многообразий, в которых орбиты общего положения борелевской подгруппы G имеют коразмерность 1 (многообразия сложности 1).

Библиография: 18 наименований.

Введение

Фундаментальная проблема классификации алгебраических многообразий имеет эквивариантный аналог: описание многообразий, на которых действует алгебраическая группа G , с точностью до G -изоморфизма. Бирациональная классификация G -многообразий (с данным полем G -инвариантных функций) может быть получена в терминах когомологий Галуа [2]. Вторая, “регулярная” часть проблемы может быть сформулирована так: описать все G -модели данного функционального поля K , на котором G действует бирациональными автоморфизмами. Принципиальный подход к решению этой проблемы предложили Луна и Вюст [14]. Основные результаты теории Луны–Вюста изложены в §1 настоящей работы.

Наиболее полные результаты получены для редуктивной группы G . По некоторым причинам также естественно ограничиться рассмотрением нормальных многообразий. G -многообразие X с $k(X) = K$ полностью задаётся набором локальных колец $\mathcal{O}_{X,Y}$ G -инвариантных подмногообразий $Y \subseteq X$. Их естественно воспринимать как ростки G -модели X в окрестности G -инвариантного подмногообразия Y (G -ростки). G -росток полностью определяется множеством B -инвариантных дивизоров, содержащих Y (где $B \subseteq G$ – борелевская подгруппа). B -инвариантные дивизоры на G -моделях X поля K можно описать в терминах, зависящих не от X , а только от поля K . В [14] приведены условия, позволяющие в принципе выделить “допустимые” множества B -инвариантных дивизоров (отвечающие некоторым G -росткам). Однако они носят слишком общий характер. Решающую роль здесь играет понятие *сложности* действия $c(K) = \text{tr. deg } K^B$. Как отмечено в [14], классификация может быть в принципе доведена до конца, если $c(K) \leq 1$.

Случай $c(K) = 0$ (сферические многообразия) рассмотрен в [14, §8] (см. также [11] и §1 настоящей работы). Наиболее известный подкласс сферических многообразий – торические многообразия – поддается полному описанию в терминах объектов комбинаторной выпуклой геометрии (многогранные конусы, веера и т.д.), см. [3], [16]. Общий случай весьма похож на торический.

Работа выполнена при финансовой поддержке CRDF, грант № RM1-206, РФФИ, грант №95-01-00783а, и программы “Соросовские аспиранты”, грант №а613-м.

В настоящей работе рассматривается случай $c(K) = 1$. В некоторых частных случаях классификация G -моделей поля K сложности 1 была получена раньше: [14, §9] для $G = \mathrm{SL}_2$, $K = k(\mathrm{SL}_2)$; [15] для $K = k(\mathrm{SL}_2/H)$, где $H \subset \mathrm{SL}_2$ – конечная подгруппа. В общем случае задача распадается на две части: описать “среду обитания” B -инвариантных дивизоров – оказывается, это набор векторных пространств, индексированных точками гладкой проективной кривой, – и дать интерпретацию общих условий из [14], описывающих G -ростки, в терминах выпуклой геометрии этих векторных пространств по аналогии с торическим и сферическим случаем. Это проделано в §2 и §3, 4 соответственно. Основные результаты сформулированы в теоремах 3.1–3.3 и 4.1.

В §5 рассмотрены примеры. Все они, кроме последнего, полностью описывают случай $K = k(G/H)$, где G – группа полупростого ранга 1, H – ее конечная подгруппа. Соответствующие G -многообразия служат “локальными моделями” для действий произвольной редуктивной группы G сложности 1 с плотной G -орбитой [7].

Автор благодарен своему научному руководителю Э. Б. Винбергу за постановку задачи и постоянное внимание к работе, Д. И. Панюшеву, М. Бриону, Ф. Кнопу за полезные обсуждения, а также рецензенту, обратившему его внимание на работу Д. Мамфорда [10, гл. IV], в которой описаны действия сложности 1 алгебраического тора. О том, как результаты Мамфорда соотносятся с результатами данной работы, см. пример 4.1.

Обозначения и соглашения. Все рассматриваемые схемы и (пред)многообразия локально конечного типа над алгебраически замкнутым основным полем k характеристики 0.

$\mathbb{A}^n$ – аффинное, а $\mathbb{P}^n$ – проективное пространства размерности n .

$k[X]$ – алгебра регулярных функций, $k(X)$ – поле рациональных функций на (пред)многообразии X .

G – связная (линейная) алгебраическая группа с касательной алгеброй $\mathfrak{g}$. Начиная с п. 1.2, G предполагается редуктивной односвязного типа.

$B \subseteq G$ – борелевская подгруппа, $U \subseteq B$ – максимальная унипотентная подгруппа.

K – конечно порожденное расширение поля k с бирациональным действием группы G .

$\mathfrak{X}(H)$ – группа характеров алгебраической группы H .

M^H – множество неподвижных элементов при действии группы H на множестве M .

$M_\chi^{(H)}$ – множество (ненулевых) полуинвариантов веса χ в линейном представлении $H : M$.

$k[S]$ – k -алгебра, порожденная множеством S своих элементов (например, полугрупповая алгебра полугруппы S).

$A^\times$ – группа обратимых элементов алгебры A .

QA – поле частных алгебры A .

§1. Теория Луны–Вюста

Теория Луны–Вюста [14] посвящена описанию G -многообразий в данном классе бирациональной G -эквивалентности (с полем рациональных функций K). В этом

параграфе изложены ее основные результаты с некоторыми улучшениями и обобщениями, принадлежащими Кнопу [12] и автору. Теория базируется на следующих основных идеях.

1.1. “Рациональный подход”. Все модели данного функционального поля K можно склеить в одну (нётерову, неотделимую) схему (предмногообразие) $\mathbb{X} = \mathbb{X}(K)$. Точки $\mathbb{X}$ – локальные кольца, являющиеся локализациями конечно порожденных алгебр над k с полем частных K . Базисные открытые множества $\text{Spec } A \subseteq \mathbb{X}$ (все локализации данной алгебры A) задают на $\mathbb{X}$ *топологию Зарисского*. Очевидным образом вводится структурный пучок $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}$. Локальные кольца $\mathcal{O}_{\mathbb{X}, Y}$ точек $Y \in \mathbb{X}$ в смысле этого пучка в точности те, которые участвуют в определении точек $\mathbb{X}$.

Схему $\mathbb{X}$ можно рассматривать как предмногообразие, понимая под точками только замкнутые точки (т. е. поле вычетов $k(x) = \mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_x$ соответствующего локального кольца $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_{\mathbb{X}, x}$ равно k). Незамкнутые схемные точки отождествляются с замкнутыми подмногообразиями $Y \subseteq \mathbb{X}$.

В $\mathbb{X}$ выделяются открытые подмножества $\mathbb{X}^{\text{reg}}, \mathbb{X}^{\text{norm}}, \dots$ гладких, нормальных, $\dots$ точек.

Модель поля K , т. е. многообразие X с $k(X) = K$, с этой точки зрения не что иное, как нётерово отделимое открытое подмножество $X \subseteq \mathbb{X}$.

Группа G действует на $\mathbb{X}$ очевидным образом (действуя на локальные кольца), но это не есть действие в категории схем или предмногообразий. Однако существует наибольшее открытое подмножество $\mathbb{X}_G \subseteq \mathbb{X}$, на котором G действует как алгебраическая группа. Локальные кольца точек $\mathbb{X}_G$ в точности те $\mathcal{O}_x$, для которых отображение $K \rightarrow k(G) \cdot K$, задаваемое действием $G : K$, переводит $\mathcal{O}_{\mathbb{X}, x}$ в $\mathcal{O}_{G \times \mathbb{X}, e \times x}$ (здесь $k(G) \cdot K = Q(k(G) \otimes_k K)$ – свободный композит полей). Это равносильно (при $\text{char } k = 0$) $\mathfrak{g}$ -инвариантности $\mathcal{O}_x$ [14, §1], [2, 1.1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1 [14, 1.5]. Пусть X – открытое подмножество $\mathbb{X}_G$. Тогда GX нётерово (отделимо) в том и только том случае, когда X нётерово (отделимо).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В [14] рассматривался только случай $K^G = k$ (т. е. когда все G -многообразия с полем функций K содержат открытую G -орбиту), однако большинство результатов обобщаются непосредственно.

Обозначим через ${}_G\mathbb{X}$ множество G -инвариантных схемных точек $\mathbb{X}_G$ (т. е. G -инвариантных подмногообразий $Y \subseteq \mathbb{X}_G$, или $(\mathfrak{g}, G)$ -инвариантных локальных колец). Аналогичное обозначение ${}_GX$ используем для любого открытого подмножества $X \subseteq \mathbb{X}_G$. На ${}_G\mathbb{X}$ индуцируется топология Зарисского, открытыми подмножествами которой являются всевозможные множества вида ${}_GX$. Если X G -инвариантно, то X и ${}_GX$ взаимно однозначно определяют друг друга. Если к тому же X – многообразие (т. е. нётерово и отделимо), то элементы ${}_GX$ естественно интерпретировать как ростки G -многообразия X в окрестности G -инвариантного подмногообразия $Y \subseteq X$ (G -ростки). Таким образом, G -росток – это элемент ${}_G\mathbb{X}$, или G -инвариантное подмногообразие $\mathbb{X}_G$, или $(\mathfrak{g}, G)$ -инвариантное локальное кольцо. G -многообразие X такое, что данный G -росток содержится в ${}_GX$, т. е. пересекает X по G -инвариантному подмногообразию Y , называется *геометричес-*

кой реализацией или моделью G -ростка. Любой G -росток допускает геометрическую реализацию [14, п. 2.1].

1.2. B -карты. Начиная с этого момента, группа G предполагается редуктивной, односвязного типа (т.е. прямым произведением тора на односвязную полупростую группу), а все G -модели – нормальными (т.е. лежащими в $\mathbb{X}_G^{\text{norm}}$).

Основным инструментом локального изучения G -многообразий является следующая теорема Сумихиро.

ТЕОРЕМА 1.1 [17], [9]. *Пусть X – нормальное G -многообразие. Любая точка $x \in X$ имеет G -инвариантную окрестность $X_0 \subseteq X$, допускающую эквивариантное локально замкнутое вложение в проективное пространство.*

Таким образом, если мы интересуемся локальными свойствами G -модели X в окрестности точки x или подмногообразия Y , то, заменив X на X_0 , мы можем считать X квазипроективным.

ЛЕММА 1.1 [12, п. 2.10], [11, теорема 1.3]. *Пусть $Y \subseteq X$ – замкнутое G -подмногообразие в нормальном G -многообразии. Тогда существует такое аффинное B -инвариантное открытое подмножество $\overset{\circ}{X} \subseteq X$, что $\overset{\circ}{Y} = \overset{\circ}{X} \cap Y \neq \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать X квазипроективным. Достаточно найти B -полуинвариантный однородный полином F (в однородных координатах), обращающийся в 0 на $\overline{X} \setminus X$, но не на Y (здесь $\overline{X}$ – проективное замыкание X), и положить $\overset{\circ}{X} = \{x \in \overline{X} \mid F(x) \neq 0\}$. Существование F легко следует из полной приводимости G -модулей и теории старшего веса.

Назовем такое $\overset{\circ}{X}$ B -картой (G -ростка $Y \subseteq X$). Вообще, B -картой будем называть любое аффинное B -инвариантное открытое подмножество G -многообразия X . Итак, любой G -росток имеет B -карту $\overset{\circ}{X} \subseteq \mathbb{X}_G^{\text{norm}}$ в любой геометрической реализации. Обратно, любое аффинное B -инвариантное открытое подмножество $\overset{\circ}{X} \subseteq \mathbb{X}_G^{\text{norm}}$ является B -картой в подходящей G -модели (например, в $X = G\overset{\circ}{X}$). Множества ${}_G\overset{\circ}{X}$ образуют базис топологии пространства ${}_G\mathbb{X}$.

1.3. B -полуинварианты, G -нормирования, B -дивизоры. В теории Лунны–Вюста немалую роль играет теория представлений группы G . Поэтому неудивительно, что основные результаты формулируются в терминах B -полуинвариантных и инвариантных объектов.

Пусть X – G -многообразие с $k(X) = K$. Введем следующие обозначения.

$K_B \subseteq K$ – подалгебра рациональных функций с B -инвариантными дивизорами полюсов на X . Из существования B -карты следует $QK_B = K$.

$\Gamma = \Gamma(K)$ – группа весов B -полуинвариантных рациональных функций. Имеется точная последовательность

$$1 \longrightarrow (K^B)^\times \longrightarrow K^{(B)} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 0. \quad (*)$$

$c(X) = c(K) = \text{tr. deg } K^B$ – сложность многообразия X или поля K ; она равна коразмерности B -орбиты общего положения на X .

$r(X) = r(K) = \text{rk } \Gamma - \text{ранг}$ многообразия X или поля K . Сумма $c(X) + r(X)$ равна коразмерности U -орбиты общего положения на X .

$\mathcal{V} = \mathcal{V}(K)$ – множество G -инвариантных дискретных $\mathbb{Q}$ -значных нормирований K/k , ограничение которых на K^B геометрично (т.е. отвечает некоторому простому дивизору в подходящей модели поля K^B). Последнее эквивалентно геометричности самого нормирования на K [12, §4]. Элементы $\mathcal{V}$ назовем *G -нормированиями*.

$\mathcal{D} = \mathcal{D}(K)$ – множество не G -инвариантных простых дивизоров многообразия X . Нормирование, отвечающее дивизору $D \in \mathcal{D}$, обозначим v_D . B -инвариантные, но не G -инвариантные простые дивизоры, т.е. элементы $\mathcal{D}^B$, будем называть *B -дивизорами*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Множества K_B , $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}^B$ не зависят от выбора G -модели X [12, п. 3.4].

Следующий технический результат является основным для сведения различных вопросов к B -полуинвариантам.

ЛЕММА 1.2 [12, п. 3.5]. *Для любого G -нормирования $v \in \mathcal{V}$ и любой рациональной функции $f \in K_B$ существует такая B -полуинвариантная рациональная функция $\bar{f} \in K^{(B)}$, что*

$$\begin{aligned} v(\bar{f}) &= v(f), \\ w(\bar{f}) &\geq w(f) \quad (\forall w \in \mathcal{V}), \\ v_D(\bar{f}) &\geq v_D(f) \quad (\forall D \in \mathcal{D}^B). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 1.1 [12, п. 3.6]. *G -нормирования однозначно определяются ограничением на $K^{(B)}$.*

1.4. Условия допустимости для B -карт. Пусть $\overset{\circ}{X}$ – B -карта. Тогда $A = k[\overset{\circ}{X}]$ – целозамкнутая конечно порожденная алгебра, в частности кольцо Крулля (см. [1, гл. VII, §1]), откуда

$$A = \bigcap_{\overset{\circ}{X}, D} \mathcal{O}_{\overset{\circ}{X}, D} \left(\text{по всем простым дивизорам } D \subset \overset{\circ}{X} \right) = \bigcap_{w \in \mathcal{W}} \mathcal{O}_w \cap \bigcap_{D \in \tilde{\mathcal{R}}} \mathcal{O}_{v_D},$$

где $\mathcal{O}_v$ – кольцо нормирования v , $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}^B$, $\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \sqcup (\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^B)$. Мы можем считать, что группа значений $\forall w \in \mathcal{W}$ есть в точности $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Взяв другую B -карту, мы изменим $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$ на конечное число элементов, т.е. всевозможные $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$ лежат в некотором выделенном классе $\mathfrak{V}$ эквивалентных подмножеств $\mathcal{V} \sqcup \mathcal{D}^B$ и по отношению эквивалентности “отличаются на конечное число элементов”.

Обратно, если $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}^B$ и $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$ принадлежит классу $\mathfrak{V}$, то

$$A = A(\mathcal{R}, \mathcal{W}) = \bigcap_{w \in \mathcal{W}} \mathcal{O}_w \cap \bigcap_{D \in \tilde{\mathcal{R}}} \mathcal{O}_{v_D}$$

– кольцо Крулля. Действительно, для $\forall f \in K$ почти все элементы $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$ (кроме конечного числа) обращаются в 0 на f , так как это верно для подмножества, отвечающего B -карте, а значит, и для любого подмножества из класса $\mathfrak{V}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Здесь и далее мы отождествляем простые дивизоры и соответствующие им нормирования, в том числе в обозначениях. Так, для $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$ мы будем писать $\mathcal{V}_0(f) \geq 0$, если $\forall v \in \mathcal{V}_0$ ($v = v_D$ при $D \in \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{R}$): $v(f) \geq 0$, и т.д.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. $K_B = A(\emptyset, \emptyset)$.

Все нормирования из $\tilde{\mathcal{R}}$ являются существенными для A (см. [14, п.8.5, лемма 3] для случая $K^G = k$; в общем случае доказательство основано на аналогичных идеях с использованием результатов [12, §3]).

Если а) $QA = K$ и б) A конечно порождена, то поскольку A (и все ее локализации) $\mathfrak{g}$ -инвариантна, $\overset{\circ}{X} = \text{Spec } A \subset \mathbb{X}_G^{\text{norm}}$ является B -картой. Следующая теорема дает переформулировку условий а), б) в терминах B -полуинвариантов.

ТЕОРЕМА 1.2.

1) $QA = K$ эквивалентно

$$\forall \mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}, \mathcal{V}_0 \text{ конечно, } \exists f \in K^{(B)} : (\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R})(f) \geq 0, \quad \mathcal{V}_0(f) > 0. \quad (C)$$

2) Все нормирования из $\mathcal{W}$ существенны для A тогда и только тогда, когда

$$\forall w \in \mathcal{W} \exists f \in K^{(B)} : (\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R} \setminus \{w\})(f) \geq 0, \quad w(f) < 0. \quad (W)$$

3) A конечно порождена тогда и только тогда, когда

$$A^U = k[A^{(B)}] \text{ конечно порождена.} \quad (F)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Можно считать $\mathcal{V}_0 = \{v\}$. Если $QA = K$, то $\exists f \in A \subseteq K_B$: $v(f) > 0$. Применяя лемму 1.2, заменяем f на элемент $A^{(B)}$ и получаем (C). Обратно, если верно (C) и $f \in K_B$, то, взяв $\mathcal{V}_0 = \{v \in \mathcal{W} \sqcup \mathcal{R} \mid v(f) \neq 0\}$ и домножив f на соответствующий полуинвариант из $A^{(B)}$ (убив полюса), мы попадем в A , т.е. $K_B \subseteq QA$, откуда $K = QA$.

2) Если $w \in \mathcal{W}$ существенно для A , то $\exists f \in K$: $(\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R} \setminus \{w\})(f) \geq 0$, $w(f) < 0$, и можно снова применить лемму 1.2, получая (W). В другую сторону утверждение очевидно.

3) Пусть X – гладкая G -модель поля K . Возьмем на X эффективный дивизор с носителем $(\mathcal{D}^B \setminus \mathcal{R})$ и соответствующее сечение $\eta \in H^0(X, L)^{(B)}$ линейного расслоения L (допускающего G -линеаризацию согласно [9]). Рассмотрим алгебру $R = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, L^{\otimes n})$. Тогда $A = \bigcup R(\eta^n)\eta^{-n} \subseteq QR$, где $R(\eta^n) = \{\sigma \in H^0(X, L^{\otimes n}) \mid \sigma\eta^{-n} \in A\}$. Поскольку любое G -нормирование на K можно продолжить до G -инвариантного нормирования на QR [12, п.3.2], то $R(\eta^n) = \{\sigma \mid \forall w \in \mathcal{W} : w(\sigma) \geq nw(\eta)\}$ G -инвариантно.

Рассмотрим U -эквивариантный гомоморфизм $\varphi: R[t] \rightarrow QR$, $t \mapsto \eta^{-1}$.

ЛЕММА 1.3. Если $\hat{A} = \bigoplus_{n \geq 0} \hat{A}_n t^n \subseteq R[t]$ – градуированная G -инвариантная подалгебра, содержащая ηt , причем $\varphi(\hat{A}) \subseteq A$, то $\varphi(\hat{A}) = A \iff \varphi(\hat{A}^U) = A^U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(\hat{A}) = A$. Если $\sum \sigma_n t^n \in \hat{A}$, $\varphi(\sum \sigma_n t^n) = \sum \sigma_n \eta^{-n} \in A^U$, то при достаточно большом n_0 $\sum \sigma_n \eta^{-n} = \sum (\sigma_n \eta^{n_0-n}) \eta^{-n_0} = \varphi(\sum \sigma_n t^n (\eta t)^{n_0-n})$ и $\sum \sigma_n t^n (\eta t)^{n_0-n} \in \hat{A}^U$.

Обратно, пусть $\varphi(\hat{A}) \neq A$. U -модуль $A/\varphi(\hat{A})$ содержит ненулевой U -инвариант, являющийся образом $f = \sigma/\eta^n \in A$. Можно считать (при достаточно большом n), что σ задает ненулевой элемент $(R(\eta^n)/\hat{A}_n)^U$, не меняя который, можно изменить σ так, чтобы получить $\sigma \in R(\eta^n)^U$, а значит, $f \in A^U \neq \varphi(\hat{A})^U$. Лемма доказана.

Теперь, если A конечно порождена, то легко построить конечно порожденную градуированную G -алгебру $\hat{A}$, $\varphi(\hat{A}) = A$, откуда $\hat{A}^U$, а значит, и $A^U = \varphi(\hat{A}^U)$ конечно порождена. Обратно, если A^U конечно порождена, то строим конечно порожденную градуированную G -алгебру $\hat{A}$, $\varphi(\hat{A}^U) = A^U$, откуда $A = \varphi(\hat{A})$ конечно порождена.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Условия (W), (F) рассматривались в [14, пп. 8.5, 8.6] для случая $K^G = k$, хотя утверждение 3) было обосновано недостаточно. Условие (C) появилось в [11] в сферическом случае (в [14] более сложное условие).

Итак, для того чтобы пара множеств $\mathcal{W}, \mathcal{R}$ (из класса $\mathfrak{V}$) была допустимой для некоторой B -карты (т.е. соответствовала всем ее B -инвариантным дивизорам), необходимо и достаточно выполнение условий (C), (W), (F).

1.5. G -ростки. Как мы видели в п. 1.2, каждый G -росток пересекает некоторую B -карту. Возникает вопрос: как описать G -росток в терминах комбинаторных данных, задающих B -карту (см. п. 1.4)?

Рассмотрим произвольную геометрическую реализацию G -ростка $Y \subseteq X$. Существует нормирование $v \in \mathcal{V}$, имеющее центр Y (т.е. $\mathcal{O}_v$ доминирует локальное кольцо $\mathcal{O}_{X,Y}$), например, нормирование, отвечающее компоненте исключительного дивизора в нормализованном раздутии X вдоль Y . Совокупность таких v (не зависящую от выбора геометрической реализации) обозначим $\mathcal{S}_Y$ и назовем *носителем* G -ростка.

Если G -росток пересекает B -карту $\overset{\circ}{X}$, то $\overset{\circ}{Y} = Y \cap \overset{\circ}{X}$ является центром любого $v \in \mathcal{S}_Y$, т.е. $v|_{k[\overset{\circ}{X}]} \geq 0$, а идеал $\mathbb{I}(\overset{\circ}{Y}) \triangleleft k[\overset{\circ}{X}]$ задается условием $v > 0$. Обратно, если некоторое G -нормирование $v \in \mathcal{V}$ неотрицательно на $A = k[\overset{\circ}{X}]$, то оно задает G -росток, пересекающий $\overset{\circ}{X}$.

Используем обозначения п. 1.4. Пусть $\mathcal{V}_Y \subseteq \mathcal{W}$, $\mathcal{D}_Y^B \subseteq \mathcal{R}$ — подмножества, отвечающие всем B -инвариантным дивизорам $\overset{\circ}{X}$, содержащим $\overset{\circ}{Y}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2 [12, п. 3.8]. *Пара множеств $\mathcal{V}_Y, \mathcal{D}_Y^B$ однозначно определяет G -росток.*

Доказательство основано на лемме 1.2 и на том, что

$$\mathcal{O}_Y^{(B)} = \left\{ f \in K^{(B)} \mid (\mathcal{V}_Y \sqcup \mathcal{D}_Y^B)(f) \geq 0 \right\}.$$

Переформулируем теперь условия, описывающие G -ростки в данной B -карте, в терминах B -полуинвариантов.

ТЕОРЕМА 1.3. 1) $v \in \mathcal{V}$ имеет центр в $\overset{\circ}{X}$ тогда и только тогда, когда

$$\forall f \in K^{(B)} : (\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R})(f) \geq 0 \implies v(f) \geq 0. \quad (V)$$

2) Пусть $v \in \mathcal{S}_Y$. Нормирование $w \in \mathcal{W}$ принадлежит $\mathcal{V}_Y$ тогда и только тогда, когда

$$\forall f \in K^{(B)} : (\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R})(f) \geq 0, \quad v(f) = 0 \implies w(f) = 0. \quad (V'_w)$$

Аналогично, $D \in \mathcal{R}$ принадлежит $\mathcal{D}_Y^B$ тогда и только тогда, когда

$$\forall f \in K^{(B)} : (\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R})(f) \geq 0, \quad v(f) = 0 \implies v_D(f) = 0. \quad (D'_D)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) v имеет центр тогда и только тогда, когда $v|_A \geq 0$, откуда, очевидно, следует (V). Если же $f \in A$, $v(f) < 0$, то, применяя лемму 1.2, заменяем f на элемент $A^{(B)}$ и видим, что (V) не выполнено.

2) Если $w \in \mathcal{W}$ (или $D \in \mathcal{R}$) принадлежит $\mathcal{V}_Y$ (или $\mathcal{D}_Y^B$), то любая функция $f \in A$, не равная 0 на $\overset{\circ}{Y}$ (т.е. $v(f) = 0$), не равна 0 и на соответствующем B -инвариантном дивизоре $\overset{\circ}{X}$ (т.е. $w(f) = 0$ или $v_D(f) = 0$). При $f \in A^{(B)}$ получаем (V'_w) (или (D'_D)).

Обратно, если $w \notin \mathcal{V}_Y$ (или $D \notin \mathcal{D}_Y^B$), то найдется $f \in A$, равная 0 на соответствующем B -инвариантном дивизоре $\overset{\circ}{X}$ (т.е. $w(f) > 0$ или $v_D(f) > 0$), но не на $\overset{\circ}{Y}$ (т.е. $v(f) = 0$). Снова применяя лемму 1.2, заменяем f на элемент $A^{(B)}$ и видим, что (V'_w) (или (D'_D)) не выполнено.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. Теорема доказана в [14, п. 8.8] в случае $K^G = k$.

Добавим еще, что один и тот же G -росток может иметь много различных B -карт. В частности, можно рассмотреть в $\overset{\circ}{X}$ главное открытое подмножество $\overset{\circ}{X}_f = \{x \mid f(x) \neq 0\}$, $f \in A^{(B)}$, $v(f) = 0$ (чтобы не выкинуть $\overset{\circ}{Y}$), т.е. от алгебры A перейти к локализации A_f . Этому отвечает выкидывание из $(\mathcal{W} \setminus \mathcal{V}_Y) \sqcup (\mathcal{R} \setminus \mathcal{D}_Y^B)$ конечного множества $\mathcal{W}_0 \sqcup \mathcal{R}_0$ тех нормирований, которые положительны на f . Ввиду (V') и (D') это множество может содержать любой конечный набор элементов из $(\mathcal{W} \setminus \mathcal{V}_Y) \sqcup (\mathcal{R} \setminus \mathcal{D}_Y^B)$. В частности, если $(\mathcal{W} \setminus \mathcal{V}_Y) \sqcup (\mathcal{R} \setminus \mathcal{D}_Y^B)$ конечно, то существует минимальная B -карта с $\mathcal{W} = \mathcal{V}_Y$, $\mathcal{R} = \mathcal{D}_Y^B$.

1.6. Резюме: описание G -моделей. Подведем итоги. Как отмечено в п. 1.1, G -модель полностью определяется множеством своих G -ростков ${}_G X$. Назовем множество G -ростков *отделимым*, если носители его элементов попарно не пересекаются.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3 [14, 6.1, 6.2]. *Открытое подмножество $X \subseteq \mathbb{X}_G$ нётерово (отделимо) тогда и только тогда, когда ${}_G X$ нётерово (отделимо).*

Итак, задать нормальную G -модель – все равно, что задать множество ее G -ростков, т.е. пар $(\mathcal{V}_Y, \mathcal{D}_Y^B)$. Таким множеством может быть любая совокупность пар $(\mathcal{V}_Y, \mathcal{D}_Y^B)$ подмножеств $\mathcal{V}$ и $\mathcal{D}^B$, определяемая условиями (V), (V') , (D') , исходя из некоторого конечного набора B -карт, т.е. пар $(\mathcal{W}_\alpha, \mathcal{R}_\alpha)$, удовлетворяющих условиям (C), (W), (F). При этом носители этих ростков должны попарно не пересекаться (так как G -модель должна быть отделимой). Заметим, что набор B -карт можно считать конечным, так как G -модель должна быть нётеровой (т.е. может быть покрыта конечным числом B -карт и их G -разнесений), хотя, конечно, этот набор карт определен не однозначно.

1.7. Пример: сферические многообразия. Многообразие сложности 0 называется *сферическим*. О них см. [14, п. 8.10], [11]. Получим их комбинаторное описание в рамках общей теории.

Ввиду следствия 1.1 и равенства $K^B = k$ G -нормирования отождествляются с линейными функциями на решетке Γ , т.е. $\mathcal{V}$ живет в пространстве $\mathcal{Q} = \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{Q})$ (и образует там выпуклый телесный конус [11, §5], [12, §5]). Множество $\mathcal{Q}^B$ конечно (так как на сферическом многообразии есть плотная B -орбита) и отображается в $\mathcal{Q}$ (не инъективно) путем ограничения на $K^{(B)}$. B -полуинварианты интерпретируются как линейные функционалы на $\mathcal{Q}$.

Класс $\mathfrak{V}$ состоит из конечных множеств.

(C) означает, что элементы $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$ порождают в $\mathcal{Q}$ строго выпуклый конус $\mathcal{C}$, причем ни один из элементов $\mathcal{R}$ не попадает в 0.

(W) означает, что элементы $\mathcal{W}$ в точности образующие тех ребер $\mathcal{C}$, куда не попадают элементы $\mathcal{R}$.

(F) выполнено автоматически: $k[A^{(B)}]$ – полугрупповая алгебра, порожденная полугруппой $\Gamma \cap \mathcal{C}^\vee$ целых точек конечно порожденного конуса $\mathcal{C}^\vee = \{\lambda \in \mathcal{Q}^* \mid \langle \mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}, \lambda \rangle \geq 0\}$, дуального к $\mathcal{C}$.

(V) означает, что $v \in \mathcal{C}$.

(V') и (D') выделяют (элементы $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$, попадающие на) грань $\mathcal{C}_Y \subseteq \mathcal{C}$, содержащую v в своей внутренности. Носитель ростка $\mathcal{S}_Y$ равен $\mathcal{V} \cap \text{int } \mathcal{C}_Y$.

У любого G -ростка существует минимальная B -карта с $\mathcal{C} = \mathcal{C}_Y$. Достаточно рассматривать только такие.

Условие отделимости означает, что внутренности конусов, отвечающих различным росткам (или картам), не пересекаются внутри $\mathcal{V}$ (т.е. $\mathcal{V} \cap \text{int } \mathcal{C}_1 \cap \text{int } \mathcal{C}_2 = \emptyset$).

Пара $(\mathcal{C}, \mathcal{R})$, где $\mathcal{C}$ – конечно порожденный строго выпуклый конус, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{Q}^B$ отображается в $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ и порождает $\mathcal{C}$ вместе с конечным множеством элементов $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V} \cap \text{int } \mathcal{C} \neq \emptyset$, называется *цветным конусом*, элементы $\mathcal{R}$ – его *красками*. *Грань* цветного конуса – это цветной конус $(\mathcal{C}', \mathcal{R}')$, где $\mathcal{C}'$ – грань $\mathcal{C}$, $\mathcal{V} \cap \text{int } \mathcal{C}' \neq \emptyset$, а $\mathcal{R}'$ состоит из всех элементов $\mathcal{R}$, попадающих в $\mathcal{C}'$.

Итак, G -модель задается конечным множеством цветных конусов, содержащим вместе с каждым конусом все его грани, причем различные конусы пересекаются по граням внутри $\mathcal{V}$. Такой набор цветных конусов называется *цветным веером*.

В случае, когда $G = B$ – тор, получается наиболее известный пример сферических многообразий – торические многообразия. Они задаются веерами конечно порожденных строго выпуклых конусов (слово “цветной” тут излишне, красок нет). О торических многообразиях см. [3], [16]. Их важность заключается в том, что многие геометрические понятия (примыкание орбит, линейные расслоения и т.д.) описываются на языке геометрии конусов и вееров. Аналогии этому существуют и в теории сферических многообразий – см. [11] и библиографию там. Желательно развить такой подход и в более общей ситуации.

§2. G -нормирования и B -дивизоры

Начиная с этого момента, мы предполагаем $s(K) = 1$. Наша цель – дать в рамках общей теории Луны–Вюста комбинаторно-геометрическое описание многообразий сложности 1 (с данным полем рациональных функций K), аналогичное

сферическому случаю (см. п. 1.7). В этом параграфе мы дадим соответствующую интерпретацию основных ингредиентов такого описания – G -нормирований, B -дивизоров, B -полуинвариантов – и опишем методы их вычисления, используемые в примерах.

2.1. “Среда обитания”. Точная последовательность $(*)$ из п. 1.3 расщепляется, т.е. существует вложение $e: \Gamma \rightarrow K^{(B)}$, $\lambda \mapsto e_\lambda$ (B -полуинвариант веса λ). G -нормирование расширения K/k однозначно определяется своим ограничением на $K^{(B)}$, т.е. парой, состоящей из линейного функционала на $e(\Gamma) \cong \Gamma$ и ограничения нормирования на поле K^B . Последнее является полем функций на гладкой проективной кривой C , и задать его нормирование – все равно, что задать точку $x \in C$ и число $\delta = v(t_x)$, где t_x – локальный параметр в x . Если $\delta = 0$, то ограничение v на K^B тривиально (такие нормирования назовем *центральными*), и точку $x \in C$ можно выбирать произвольно.

Итак, множество $\mathcal{V}$ живет в объединении полупространств $\mathcal{Q}_{x,+} \cong \mathbb{Q}_+ \times \mathcal{Q}$, $x \in C$, склеенных по общей граничной гиперплоскости $\mathcal{Q} = \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{Q})$. Такой агрегат назовем *гиперпространством*.

Элемент $v \in \mathcal{V}_x = \mathcal{V} \cap \mathcal{Q}_{x,+}$ задается, таким образом, парой (δ, ℓ) , где $\delta \in \mathbb{Q}_+$ – *подскок* в точке x , $\ell \in \mathcal{Q}$ – *центральная часть*. Множество $\mathcal{V}_x$ – выпуклый телесный конус в $\mathcal{Q}_{x,+}$ [12, §5], его грань $\mathcal{Z} = \mathcal{V} \cap \mathcal{Q}$ – *конус центральных нормирований*.

Имеем также (не обязательно инъективное) отображение $\mathcal{Q}^B \rightarrow \bigcup_{x \in C} \mathcal{Q}_{x,+}$ (ограничение на $K^{(B)}$).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Расщепляющий гомоморфизм $\Gamma \rightarrow K^{(B)}$ определен неоднозначно. Переход от одного расщепления к другому можно рассматривать как “замену координат” в гиперпространстве, которая легко контролируется. Действительно, если e и e' – два расщепляющих гомоморфизма, то при переходе от e к e' подскок не изменяется: $\delta' = \delta$, а центральная часть $v \in \mathcal{V}_x$ претерпевает сдвиг: $\ell' = \ell + \delta \ell_x$, где $\langle \ell_x, \lambda \rangle = v_x \left(\frac{e'_\lambda}{e_\lambda} \right)$. При этом $\sum_{x \in C} \ell_x = 0$ (так как $\deg \text{div} \left(\frac{e'_\lambda}{e_\lambda} \right) = 0$). Обратно, любой такой сбалансированный набор целочисленных сдвигов $\ell_x \in \Gamma^* = \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}) \subset \mathcal{Q}$, $\sum \ell_x = 0$, для которого $\sum_{x \in C} \langle \ell_x, \lambda \rangle x \subset C$ – главный дивизор при $\forall \lambda$, задает переход от одного расщепления к другому: нужно взять в качестве $\left(\frac{e'_\lambda}{e_\lambda} \right)$ рациональные функции на C , имеющие нули (или полюса) порядка $\langle \ell_x, \lambda \rangle$ в $x \in C$. При $C = \mathbb{P}^1$ достаточно выполнения $\sum \ell_x = 0$.

Можно было бы дать и “бескоординатное” определение гиперпространства, но оно более громоздко.

Любой элемент $K^{(B)}$ имеет вид $f = f_0 e_\lambda$, $f_0 \in K^B$, $\lambda \in \Gamma$. Ему сопоставляется набор $\varphi = \{\varphi_x\}$ линейных функционалов на каждом $\mathcal{Q}_{x,+}$: $\langle q, \varphi_x \rangle = \delta v_x(f_0) + \langle \ell, \lambda \rangle$, где $q = (\delta, \ell) \in \mathcal{Q}_{x,+}$, так что их ограничения на общую гиперплоскость $\mathcal{Q}$ совпадают, и $\sum_{x \in C} \langle q_x, \varphi_x \rangle = 0$, где $q_x = (1, 0) \in \mathcal{Q}_{x,+}$ (такая запись подразумевает, что $\langle q_x, \varphi_x \rangle = 0$ почти для всех $x \in C$). Назовем такой набор φ_x и определяемую им функцию *линейным функционалом на гиперпространстве*. B -полуинвариант однозначно (с точностью до умножения на скаляр) определяется своим линейным функционалом. Обратно, любой линейный функционал на гиперпространстве, целочисленный на Γ^* и всех q_x , для которого $\sum_{x \in C} \langle q_x, \varphi_x \rangle \cdot x \subset C$ –

главный дивизор, задает элемент $K^{(B)}$ (при $C = \mathbb{P}^1$ годится любой целочисленный линейный функционал). Множество $\text{Ker } \varphi = \bigcup_{x \in C} \text{Ker } \varphi_x$ назовем *ядром* линейного функционала.

2.2. Квазиоднородный и однопараметрический случаи. Рассмотрим произвольную G -модель X поля K . Имеется рациональное отображение $X \dashrightarrow C$ (рациональный фактор по действию B), разделяющее B -орбиты общего положения. Таким образом, B -орбиты общего положения задают однопараметрическое семейство B -инвариантных дивизоров на X , параметризованных точками открытого подмножества $\overset{\circ}{C} \subseteq C$. Уменьшив $\overset{\circ}{C}$, можно добиться, чтобы дивизоры этого семейства не входили в $\text{div } e_\lambda$, $\lambda \in \Gamma$, и являлись прообразами точек $x \in \overset{\circ}{C}$ с кратностью 1. Соответствующие им нормирования изображаются в гиперпространстве точками $q_x \in \mathcal{Q}_{x,+}$, их совокупность принадлежит классу $\mathfrak{U}$.

Для многообразий сложности 1 имеются две альтернативы.

а) *Квазиоднородный случай:* $K^G = k$. В этом случае любая G -модель X поля K содержит плотную орбиту G/H – минимальную модель.

б) *Однопараметрический случай:* $K^G = K^B$. В этом случае G -орбита общего положения имеет коразмерность 1 и содержит плотную B -орбиту.

Рассмотрим вначале квазиоднородный случай. Многообразие G/H унирационально, следовательно, по теореме Люрота $C = \mathbb{P}^1$. B -дивизору на G/H взаимно однозначно с точностью до умножения на обратимую функцию соответствует B -полуинвариантное сечение однородного линейного расслоения $L_\chi = G *_H k_\chi$, где k_χ – одномерное представление H , отвечающее характеру $\chi \in \mathfrak{X}(H)$. Поскольку $H^0(G/H, L_\chi) \cong k[G]_{-\chi}^{(H)}$, то элементы $D^B(G/H)$ взаимно однозначно соответствуют неразложимым полуинвариантам из $k[G]^{(B \times H)}$, определенным с точностью до умножения на функции, пропорциональные элементам $\mathfrak{X}(G)$ (здесь B действует на аргумент функции левыми сдвигами, а H – правыми). Элементы $k[G]^{(B \times H)}$ можно рассматривать так же, как уравнения прообразов B -дивизоров в группе G , являющейся факториальным многообразием, так как группа G по предположению односвязного типа [9].

Рассмотрим отображение $G/H \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ рациональной факторизации по действию B . Оно задается одномерной линейной системой B -инвариантных дивизоров, т.е. существуют линейное расслоение на G/H и двумерное подпространство его B -полуинвариантных сечений $k[G]_{(\lambda_0, \chi_0)}^{(B \times H)}$, задающее эту линейную систему и состоящее, кроме конечного числа прямых, из неразложимых полуинвариантов, отвечающих B -дивизорам общего положения. Элементы $k[G]_{(\lambda_0, \chi_0)}^{(B \times H)}$ играют роль “однородных координат” на $\mathbb{P}^1$. Назовем неразложимые элементы $k[G]_{(\lambda_0, \chi_0)}^{(B \times H)}$ и соответствующие им B -дивизоры *регулярными*.

Кроме того, существует конечное множество одномерных подпространств $k[G]_{(\lambda, \chi)}^{(B \times H)}$, состоящих из неразложимых полуинвариантов, отвечающих остальным B -дивизорам. Если элемент $k[G]_{(\lambda, \chi)}^{(B \times H)}$ делит некоторый элемент $k[G]_{(\lambda_0, \chi_0)}^{(B \times H)}$, т.е. B -дивизор входит в соответствующий элемент линейной системы (возможно, с кратностью), то назовем такой полуинвариант и B -дивизор *субрегулярными*, в противном случае – *центральными*.

У регулярных B -дивизоров $\delta = 1$ и почти всегда $\ell = 0$.

У субрегулярных B -дивизоров δ равно кратности вхождения соответствующего $(B \times H)$ -полуинвариантного множителя в элемент $k[G]_{(\lambda_0, \chi_0)}^{(B \times H)}$.

У центральных B -дивизоров $\delta = 0$.

Рассмотрим теперь однопараметрический случай.

ЛЕММА 2.1. *В однопараметрическом случае все B -дивизоры центральны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если D – нецентральный B -дивизор, то $\exists f \in K^B = K^G : v_D(f) > 0$, откуда D G -инвариантен. Противоречие.

Следующее утверждение относится как к квазиоднородному, так и к однопараметрическому случаю.

ЛЕММА 2.2 [12, п. 6.2]. *Для $\forall x \in C$ в $\mathcal{Q}_{x,+}$ попадает лишь конечное число B -дивизоров. В частности, центральных B -дивизоров конечное число.*

2.3. Методы вычисления. Описание B -дивизоров в квазиоднородном случае было дано в п. 2.2. Нахождение неразложимых $(B \times H)$ -полуинвариантов, по существу, задача теории представлений (изучение регулярного представления).

Для отыскания G -нормирований в квазиоднородном случае используется метод ростков формальных кривых [14, §4]. Рассмотрим вначале G -нормирования, отвечающие дивизорам с плотной G -орбитой (т.е. поле вычетов $k(v) = \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v$ не имеет инвариантов: $k(v)^G = k$). Все они с точностью до нормировки получают-ся следующим образом. Рассмотрим группу $G(k((t)))$ точек G над полем рядов Лорана. Пусть $x(t) \in G(k((t)))$. Определим для $f \in K = k(G)^H$ нормирование $v_{x(t)}(f) = v_t(f(gx(t)))$, где g – общая точка G (над полем $k(G)$), а $v_t(\cdot)$ – порядок формального ряда. Правую часть равенства можно понимать так же, как $\min_{g \in G} v_t(f(gx(t)))$. Нормирование $v_{x(t)}$ отвечает дивизору с плотной G -орбитой и не изменится, если $x(t)$ домножить слева на элемент $G(k[[t]])$, а справа – на элемент $H(k((t)))$. Используя “разложение Ивасава” [5]:

$$G(k((t))) = G(k[[t]]) \cdot \mathfrak{V}(T) \cdot U(k((t))),$$

где $\mathfrak{V}(T)$ – множество однопараметрических подгрупп максимального тора $T \subseteq B$, мы можем считать $x(t) \in \mathfrak{V}(T) \cdot U(k((t)))$.

G -нормирования, отвечающие дивизорам без плотной G -орбиты, получаются как “пределы” G -нормирований предыдущего типа (см. [14, п. 4.11] и §3).

Предположим теперь, что на поле K действует конечная группа A бирациональных G -автоморфизмов, например, $K = k(G/H)$, H – нормальная подгруппа конечного индекса в $\bar{H} \subseteq G$, $A = \bar{H}/H$ действует на G/H умножениями справа. Пусть для поля K нам известно устройство гиперпространства $\bigcup \mathcal{Q}_{x,+}$, снабженного подмножеством G -нормирований $\mathcal{V} = \bigcup \mathcal{V}_x$ и отображением $\mathcal{Q}^B \rightarrow \bigcup \mathcal{Q}_{x,+}$. Укажем алгоритм получения соответствующего описания для $\bar{K} = K^A$. Все соответствующие объекты для $\bar{K}$ будем обозначать теми же буквами, что и для K , но с чертой (например, $\bar{\mathcal{V}} = \mathcal{V}(\bar{K})$).

Вначале перейдем от решетки Γ к $\bar{\Gamma}$ (подрешетка конечного индекса). При этом $\bar{\mathcal{Q}} = \text{Hom}(\bar{\Gamma}, \mathbb{Q}) \cong \mathcal{Q}$ не изменится, а $\text{Hom}(\bar{\Gamma}, \mathbb{Z}) \subset \bar{\mathcal{Q}}$ увеличится – целых точек станет больше.

Затем произведем в каждом $\mathcal{Q}_{x,+}$ набор сбалансированных целочисленных (в новом смысле) сдвигов (см. замечание 2.1), чтобы от функций $e_\lambda, \lambda \in \bar{\Gamma}$, перейти к $\bar{e}_\lambda \in K^{(B) \times A} = \bar{K}^{(B)}$.

Рассмотрим теперь действие $A : C$. Группа A также действует на гиперпространстве, изоморфно переводя одни $\mathcal{Q}_{x,+}$ в другие, на множестве $\mathcal{V}$, переставляя $\mathcal{V}_x$, и на множестве $\mathcal{D}^B$ – согласованно с действием на $x \in C$. Переход $C \rightarrow \bar{C}$ есть факторизация по действию A .

Каждое G -нормирование поля $\bar{K}$ продолжается до G -нормирования поля K [12, п. 3.2]. Прообраз каждого B -дивизора из $\bar{\mathcal{D}}^B$ состоит из одного или нескольких элементов $\mathcal{D}^B$ (возможно, с кратностями). Поэтому гиперпространство $\bigcup \bar{\mathcal{Q}}_{\bar{x},+}$ получается из $\bigcup \mathcal{Q}_{x,+}$ “факторизацией” по действию A , т.е. полупространства $\mathcal{Q}_{x,+}$ для различных x , имеющих один и тот же образ $\bar{x}$, отождествляются; то же для $\mathcal{V}_x$ и $\mathcal{D}^B$. Однако нужно следующее уточнение. Пусть A_* – ядро действия $A : C$ (совпадающее со стабилизатором точки общего положения). Тогда подскок для элементов $\bar{\mathcal{Q}}_{\bar{x},+}$ нужно увеличить в $(A_x : A_*)$ раз по сравнению с $\mathcal{Q}_{x,+}$, где x – (любой) прообраз $\bar{x}$.

§3. B -карты и G -ростки: рациональный случай

В этом параграфе мы предполагаем $C = \mathbb{P}^1$, т.е. поле K^B рационально. Это будет так, если поле K унирационально, например в квазиоднородном случае. Мы дадим описание B -карт и G -ростков в терминах комбинаторной геометрии некоторых объектов в гиперпространстве, аналогичных цветным конусам для сферического случая.

3.1. Общее описание B -карт. Итак, пусть $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R} \in \mathfrak{V}$ и пара множеств $(\mathcal{W}, \mathcal{R})$ задает некоторую B -карту $\overset{\circ}{X} = \text{Spec } A$, $A = A(\mathcal{W}, \mathcal{R})$ (см. п. 1.4). Какие ограничения накладывают на $(\mathcal{W}, \mathcal{R})$ условия (C), (W), (F)?

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Условие (F) выполнено всегда, если только $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R} \in \mathfrak{V}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из описания класса $\mathfrak{V}$ в начале п. 2.2 следует, что почти все нормирования из $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$ (кроме конечного подмножества $\mathcal{W}_0 \sqcup \mathcal{R}_0$) изображаются в гиперпространстве точками $q_x \in \mathcal{Q}_{x,+}$, т.е. равны 0 на $e(\Gamma)$ и дают при ограничении на $K^B = k(\mathbb{P}^1)$ нормирования v_x , отвечающие точкам $x \in \overset{\circ}{\mathbb{P}}^1$ (открытое подмножество $\mathbb{P}^1$). Отсюда следует, что $A^{(B)} = \{f \in K^{(B)} \mid (\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R})(f) \geq 0\} \subseteq k[\overset{\circ}{\mathbb{P}}^1] \cdot e(\Gamma)$. Уменьшив $\overset{\circ}{\mathbb{P}}^1$, если необходимо, мы можем считать, что в каждое $\mathcal{Q}_{x,+}$, $x \in \overset{\circ}{\mathbb{P}}^1$, попадает ровно один элемент $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$ (и изображается там точкой q_x).

Рассмотрим $\mathbb{P}^1$ как проективизацию $\mathbb{A}^2$ и функции из $k(\mathbb{P}^1)$ как рациональные функции степени 0 из $k(\mathbb{A}^2)$. Пусть $\overset{\circ}{\mathbb{A}}^2 \subseteq \mathbb{A}^2$ – открытое подмножество, соответствующее $\overset{\circ}{\mathbb{P}}^1$, а h_x – уравнение прямой в $\mathbb{A}^2$, задающей $x \in \mathbb{P}^1$.

Подалгебра $A^U \subset k[\overset{\circ}{\mathbb{A}}^2] \otimes k[e(\Gamma)]$ порождена полугруппой

$$A^{(B)} = \left\{ f = f_0 e_\lambda \mid f_0 \in k[\overset{\circ}{\mathbb{A}}^2], \deg f_0 = 0, \lambda \in \Gamma, (\mathcal{W}_0 \sqcup \mathcal{R}_0)(f) \geq 0 \right\}.$$

Заменив условие “ $\deg f_0 = 0$ ” на “ f_0 – однородный элемент”, получим определение полугруппы $\hat{A}^{(B)}$, порождающей B -алгебру $\hat{A}$, причем $A^U = \hat{A}_{\deg=0}$. Представив $f_0 = \prod_{x \notin \mathbb{P}^1} h_x^{k_x} \cdot p$, где $p \in k[\mathbb{A}^2]$ – однородный полином, взаимно простой с h_x , перепишем условие $(\mathcal{W}_0 \sqcup \mathcal{R}_0)(f) \geq 0$ в виде $\delta_v k_x + \langle \ell_v, \lambda \rangle \geq 0$ для $\forall v \in \mathcal{W}_0 \sqcup \mathcal{R}_0$, попадающего в $\mathcal{Q}_{x,+}$. Этот конечный набор неравенств задает конечно порожденную подполугруппу в группе

$$\left\{ \prod_{x \notin \mathbb{P}^1} h_x^{k_x} \cdot e_\lambda \mid k_x \in \mathbb{Z}, \lambda \in \Gamma \right\},$$

порождающую, вместе с координатными функциями на $\mathbb{A}^2$, алгебру $\hat{A}$. Следовательно, $\hat{A}$ конечно порождена, и по теореме Гильберта об инвариантах $A^U = (\hat{A})^{k^\times}$ также конечно порождена.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Для случая $K = k(\mathrm{SL}_2)$ предложение доказано в [14, п. 9.2], идея доказательства та же. Само доказательство следует [13], где доказано близкое утверждение: алгебра $k[X]^U$ U -инвариантных функций на унирациональном G -многообразии X сложности 1 конечно порождена.

Остальные условия из пп. 1.4, 1.5 уже могут быть сформулированы в терминах геометрии гиперпространства. Заметим прежде всего, что фигурирующие в условиях (C), (W), (V), (V'), (D') полуинварианты $f \in K^{(B)}$ могут быть без ущерба заменены на f^n , $n \in \mathbb{N}$ (и наоборот, от f^n можно перейти к f), т.е. соответствующие линейные функционалы интересуют нас с точностью до положительного коэффициента пропорциональности. Фактически нам важно знать лишь “положительные и отрицательные полупространства” для данного линейного функционала, т.е. подмножества в гиперпространстве, на которых функционал принимает неотрицательные и неположительные значения.

Функционалы на гиперпространстве бывают двух типов. Первый тип отвечает элементам $f \in K^B$. Соответствующий линейный функционал φ равен 0 на центральной гиперплоскости $\mathcal{Q}$ и почти на всех $\mathcal{Q}_{x,+}$. Кроме того, для конечного непустого набора точек x функционал φ_x принимает положительные значения на $\mathcal{Q}_{x,+}$; то же для отрицательных значений. Обратно, по заданным наборам “положительных и отрицательных” полупространств $\mathcal{Q}_{x,+}$ можно построить соответствующие линейные функционалы. Чтобы определить такой линейный функционал φ однозначно с точностью до пропорциональности, нужно еще задать сбалансированный набор весов полупространств, т.е. определенный с точностью до пропорциональности набор чисел $d_x = \langle \varphi_x, q_x \rangle$, $\sum d_x = 0$.

Функционалы второго типа не равны 0 на $\mathcal{Q}$ и задаются с точностью до пропорциональности набором гиперплоскостей $\mathrm{Ker} \varphi_x$ в каждом $\mathcal{Q}_{x,+}$, имеющих общее пересечение с $\mathcal{Q}$ и содержащих q_x почти для всех x . При этом условие $\sum \langle \varphi_x, q_x \rangle = 0$ можно переформулировать геометрически как условие сбалансированности отклонений этих гиперплоскостей от вертикали: для $\forall \ell \in \mathcal{Q} \setminus \mathrm{Ker} \varphi$, если $p_x = (1, \ell_x) \in (q_x + \mathbb{Q}\ell) \cap \mathrm{Ker} \varphi_x$, то $\sum \ell_x = 0$. Каждый такой набор гиперплоскостей, имеющих общее пересечение с $\mathcal{Q}$, с условием “сбалансированности отклонений от вертикали”, однозначно с точностью до пропорциональности определяет линейный функционал φ 2-го типа. Кроме того, нужно задать “положительные и отрицательные” полупространства относительно φ в каждом $\mathcal{Q}_{x,+}$.

Тип I

Элементы $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$ изображаются точками в гиперпространстве, среди которых имеются $q_x \in \mathcal{Q}_{x,+}$ для почти всех x . В квазиоднородном случае эти q_x представляют элементы $\mathcal{R}$ (регулярные B -дивизоры), а в однопараметрическом – элементы $\mathcal{W}$. Имеется два типа B -карт.

I. Алгебра функций на $\mathring{X}$ имеет нетривиальные B -инварианты: $A^B \neq k$. Это означает, что при некотором x элементы $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$ не попадают в $\mathcal{Q}_{x,+} \setminus \mathcal{Q}$.

II. $A^B = k$, т.е. все $\mathcal{Q}_{x,+}$ содержат элементы $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$ с ненулевым подскоком.

3.2. B -карты и гиперконусы. Рассмотрим множество $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{W}, \mathcal{R})$ элементов гиперпространства, на которых принимают неотрицательные значения все линейные функционалы, неотрицательные на $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$, – “бидуальный” конус к множеству $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$. (Если бы, как в сферическом случае, мы имели дело вместо гиперпространства с конечномерным линейным пространством и конечным множеством $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$, мы получили бы просто конус, порожденный множеством $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$, см. п.1.7.) Множества $\mathcal{C}_x = \mathcal{C} \cap \mathcal{Q}_{x,+}$ и $\mathcal{K} = \mathcal{C} \cap \mathcal{Q}$ – конусы в соответствующих (полу)пространствах, и наша ближайшая цель – описать их устройство.

Для карт типа I, рассматривая линейные функционалы, можно не следить за условием сбалансированности – всегда можно добиться его выполнения, варьируя функционал φ_x на полупространстве $\mathcal{Q}_{x,+}$, не содержащем элементов $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$ с ненулевым подскоком.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\mathcal{Q}_{x_0,+}$ не содержит элементов $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$ с ненулевым подскоком. Тогда для $\forall x \neq x_0$ любой функционал φ_x на полупространстве $\mathcal{Q}_{x,+}$,

$\delta = 1$ $\delta = 0$

Тип II

неотрицательный на элементах $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$, попадающих в $\mathcal{Q}_{x,+}$, продолжается до функционала φ на гиперпространстве, неотрицательного на $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продолжим $\varphi_x|_{\mathcal{Q}}$ до линейных функционалов φ_y на каждом $\mathcal{Q}_{y,+}$, неотрицательных на элементах $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$ так, что почти для всех y $\langle \varphi_y, q_y \rangle = 0$, а затем, варьируя φ_{x_0} , добьемся сбалансированности.

Следовательно, конусы $\mathcal{C}_x$ порождены элементами $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$, попадающими в $\mathcal{Q}_{x,+}$.

Для карт типа II функционалы, неотрицательные на $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$, могут быть лишь типа II, и в игру вступает условие сбалансированности.

Рассмотрим в каждом $\mathcal{Q}_{x,+}$ аффинную гиперплоскость $\mathcal{Q}_{x,1}$, задаваемую условием $\delta = 1$, и отождествим $\mathcal{Q}_{x,1}$ с $\mathcal{Q}$ путем параллельного переноса на вектор q_x . Нецентральный элемент $q \in \mathcal{Q}_{x,+}$ задается точкой пересечения $\mathbb{Q} + q \cap \mathcal{Q}_{x,1}$ и своим подскоком δ . G -нормирования важны нам с точностью до пропорциональности, поэтому нецентральное G -нормирование $v \in \mathcal{V}_x$ можно задавать точкой $\mathbb{Q} + v \cap \mathcal{Q}_{x,1}$, т.е. считать, что v имеет подскок 1. Нецентральные B -дивизоры (точнее, их образы в $\mathcal{Q}_{x,+}$) также удобно задавать точками $\mathcal{Q}_{x,1}$ с указанием подскока.

Таким образом, нецентральные элементы $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$ порождают набор многогранников $q_x + \mathcal{P}_x \subseteq \mathcal{Q}_{x,1}$ (выпуклые оболочки соответствующих точек $\mathcal{Q}_{x,1}$), причем почти все $\mathcal{P}_x = \{0\}$. Рассмотрим многогранник $\mathcal{P} = \sum_x \mathcal{P}_x$. Заметим, что если функционал φ неотрицателен на $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$, то $\forall x \langle \varphi_x, q_x + \mathcal{P}_x \rangle \geq 0 \implies \sum_x \langle \varphi_x, q_x + \mathcal{P}_x \rangle = \sum \langle \varphi_x, q_x \rangle + \sum \langle \varphi, \mathcal{P}_x \rangle = \langle \varphi, \mathcal{P} \rangle \geq 0$.

ЛЕММА 3.2. Пусть все $\mathcal{Q}_{x,+}$ содержат элементы $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$ с ненулевым подскоком. Тогда для любого функционала φ_x на полупространстве $\mathcal{Q}_{x,+}$ (при заданном x), неотрицательного на $\mathcal{P}$, и на элементах $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$, попадающих в $\mathcal{Q}_{x,+}$, найдется функционал $\psi_x \leq \varphi_x$ на $\mathcal{Q}_{x,+}$, продолжающийся до функционала ψ на гиперпространстве, неотрицательного на $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функционал ψ_x строится так: не меняя $\varphi_x|_{\mathcal{Q}}$, поворачиваем гиперплоскость $\text{Кер } \varphi_x$ так, чтобы она стала опорной к $q_x + \mathcal{P}_x$. Продолжим теперь $\psi_x|_{\mathcal{Q}} = \varphi_x|_{\mathcal{Q}}$ до аналогичных опорных функционалов для $q_y + \mathcal{P}_y$ при $\forall y$. Тогда $\forall y \langle \psi_y, q_y + \mathcal{P}_y \rangle \geq 0$ (причем равенство достигается) $\implies \sum_y \langle \psi_y, q_y \rangle + \langle \psi, \mathcal{P} \rangle \geq 0$ (равенство достигается) $\implies \sum_y \langle \psi_y, q_y \rangle \leq 0$, и, увеличив $\langle \psi_y, q_y \rangle$

для некоторых $y \neq x$ (т.е. отодвинув гиперплоскости $\text{Ker } \psi_y$ от опорных), мы добьемся здесь равенства, сохранив неравенства $\langle \psi_y, q_y + \mathcal{P}_y \rangle \geq 0$.

Следовательно, конусы $\mathcal{C}_x$ порождены $\mathcal{P}$ и элементами $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$, попадающими в $\mathcal{Q}_{x,+}$. Формально мы можем считать, что для карт типа I $\mathcal{P}_x = \emptyset$, если $\mathcal{Q}_{x,+}$ не содержит элементов $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$ с ненулевым подскоком, и $\mathcal{P} = \emptyset$.

Условие (C) означает, что все конусы $\mathcal{C}_x$ строго выпуклы (т.е. их общая центральная грань $\mathcal{K}$ строго выпукла), $\mathcal{P} \neq 0$ (для карт типа II) и ни один элемент $\mathcal{R}$ не попадает в 0. Действительно, (C) эквивалентно существованию линейного функционала φ , неотрицательного на $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$ и положительного на элементах $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$, попадающих в $\mathcal{Q}_{x,+}$, для произвольного конечного набора точек x , а значит, и на $\mathcal{P}$ (для карт типа II). Поэтому вышеперечисленные условия (строгая выпуклость и т.д.) необходимы. Они же и достаточны: возьмем линейный функционал на $\mathcal{Q}$, положительный на $\mathcal{K} \setminus \{0\}$, и продолжим его до опорных функционалов φ_x на $\mathcal{Q}_{x,+}$, как в лемме 3.2 (для карт типа I, если $\mathcal{P}_x = \emptyset$, продолжаем на $\mathcal{Q}_{x,+}$ произвольным образом). Если $\mathcal{P} \neq \emptyset$, то $\sum \langle \varphi_x, q_x \rangle < 0$, и, увеличив $\langle \varphi_x, q_x \rangle$ для заданного набора x , мы добьемся сбалансированности, построив требуемый функционал φ . Если же $\exists x_0: \mathcal{P}_{x_0} = \emptyset$, то, увеличив $\langle \varphi_x, q_x \rangle$ для заданного набора x и варьируя φ_{x_0} , мы опять добьемся сбалансированности и построим функционал φ .

Таким образом, мы приходим к следующему определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *Цветной гиперконус* – это пара $(\mathcal{C}, \mathcal{R})$, где $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}^B$, а $\mathcal{C} = \bigcup_{x \in \mathbb{P}^1} \mathcal{C}_x$ – объединение строго выпуклых конусов $\mathcal{C}_x = \mathcal{C} \cap \mathcal{Q}_{x,+}$, каждый из которых порожден конечным набором элементов $\mathcal{V}$ (и, возможно, некоторыми вершинами многогранника $\mathcal{P}$ – см. ниже) и элементами $\mathcal{R}$, попадающими в $\mathcal{Q}_{x,+}$ (точнее, их образами). При этом все $\mathcal{C}_x$, кроме конечного числа, порождены $\mathcal{K} = \mathcal{C} \cap \mathcal{Q}$ и q_x , ни один элемент $\mathcal{R}$ не попадает в 0 и либо

I. $\exists x \in \mathbb{P}^1: \mathcal{C}_x \subseteq \mathcal{Q}$,

либо

II. $\mathcal{P} = \sum \mathcal{P}_x \subseteq \mathcal{K} \setminus \{0\}$, где $q_x + \mathcal{P}_x$ – выпуклая оболочка множества вершин многогранной области $\mathcal{K}_x = \mathcal{C}_x \cap \mathcal{Q}_{x,1}$.

Элементы $\mathcal{R}$ назовем *красками* гиперконуса.

Будем различать “настоящие” грани $\mathcal{K}$ (не пересекающие $\mathcal{P}$) и “псевдограницы” (пересекающие $\mathcal{P}$). Для гиперконуса типа I $\mathcal{P} = \emptyset$ (так как $\exists x: \mathcal{P}_x = \emptyset$), и все грани настоящие.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Многогранники $\mathcal{P}_x$ и $\mathcal{P}$, введенные в определении, вообще говоря, меньше фигурировавших выше для гиперконусов $(\mathcal{C}, \mathcal{R})$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{W}, \mathcal{R})$.

Условие (W) означает, что элементы $\mathcal{W}$ (попадающие в $\mathcal{Q}_{x,+}$) – в точности образующие тех ребер $\mathcal{C}_x$, куда не попадают элементы $\mathcal{R}$ и $\mathcal{P}$. Действительно, (W) означает, что для $\forall w \in \mathcal{W}$ существует функционал φ , отрицательный на w и неотрицательный на $(\mathcal{W} \setminus \{w\}) \sqcup \mathcal{R}$, а значит, w лежит на ребре одного из $\mathcal{C}_x$, куда не попадают элементы $\mathcal{R}$ и $\mathcal{P}$ ($w \in \mathcal{K} \implies \langle \varphi, \mathcal{P} \rangle \geq 0$). Обратно, для любого такого ребра $\mathbb{Q}_+ w$, $w \in \mathcal{W}$, можно построить функционал φ_x на $\mathcal{Q}_{x,+}$, отрицательный на w и неотрицательный на $\mathcal{P}$ и на элементах $(\mathcal{W} \setminus \{w\}) \sqcup \mathcal{R}$, попадающих в $\mathcal{C}_x$, и применить лемму 3.1 или 3.2 к φ_x и множеству $(\mathcal{W} \setminus \{w\}) \sqcup \mathcal{R}$.

Таким образом, множество $\mathcal{W}$ восстанавливается по гиперконусу $(\mathcal{C}, \mathcal{R})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. *Гипергрань* цветного гиперконуса – это цветной гиперконус $(\mathcal{C}', \mathcal{R}')$, для которого $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cap \text{Кег } \varphi$, где φ – линейный функционал, неотрицательный на $\mathcal{C}$, а $\mathcal{R}'$ – множество элементов $\mathcal{R}$, попадающих в $\text{Кег } \varphi$. Функционал φ назовем *опорным* для гиперграни $(\mathcal{C}', \mathcal{R}')$.

Гиперграни бывают двух типов:

- I. $(\mathcal{C}', \mathcal{R}')$ – гиперконус типа I, а $\mathcal{C}' \cap \mathcal{Q}$ – настоящая грань $\mathcal{K}$;
- II. $(\mathcal{C}', \mathcal{R}')$ – гиперконус типа II, а $\mathcal{C}' \cap \mathcal{Q}$ – псевдогрань $\mathcal{K}$.

В итоге нами получена

ТЕОРЕМА 3.1. *В-карты типа I (типа II) задаются цветными гиперконусами типа I (типа II). Локализации по В-полуинвариантной функции отвечает переход к гиперграни.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как мы видели, пара $(\mathcal{C}, \mathcal{R})$, где $\mathcal{C}$ есть “бидуальное” множество к паре $(\mathcal{W}, \mathcal{R})$, удовлетворяющей (C) и (W), – цветной гиперконус, причем множество $\mathcal{W}$ восстанавливается по нему однозначно. С другой стороны, любой цветной гиперконус $(\mathcal{C}, \mathcal{R})$ есть “бидуальное” множество к паре $(\mathcal{W}, \mathcal{R})$, где $\mathcal{W}$ – множество образующих ребер конусов $\mathcal{C}_x$, не содержащих красок и элементов $\mathcal{P}$. Пара $(\mathcal{W}, \mathcal{R})$, очевидно, удовлетворяет (C) и (W). Утверждение о локализации очевидно (см. п. 1.5).

3.3. G-ростки и грани. Пусть $(\mathcal{C}, \mathcal{R})$ – цветной гиперконус, $v \in \mathcal{V}$.

Условие (V) означает, что $v \in \mathcal{C}$ (по построению $\mathcal{C}$ как “бидуального” множества).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. *Цветной конус* – это пара $(\mathcal{C}', \mathcal{R}')$, где $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{D}^B$ – конечное множество, ни один элемент которого не попадает в 0, а $\mathcal{C}'$ – строго выпуклый конус в некотором $\mathcal{Q}_{x,+}$, порожденный конечным набором элементов $\mathcal{V}$ и множеством $\mathcal{R}'$.

Грань цветного гиперконуса $(\mathcal{C}, \mathcal{R})$ – это либо

- I. цветной конус $(\mathcal{C}', \mathcal{R}')$, для которого $\mathcal{C}'$ – грань одного из $\mathcal{C}_x$, пересекающая $\mathcal{K}$ по настоящей грани, а $\mathcal{R}'$ – множество элементов $\mathcal{R}$, попадающих в $\mathcal{C}'$, либо
- II. гипергрань $(\mathcal{C}', \mathcal{R}')$ типа II.

Внутренность цветного конуса (цветного гиперконуса типа II) $(\mathcal{C}', \mathcal{R}')$ – это множество $\text{int } \mathcal{C}' (= \cup \text{int } \mathcal{C}'_x \cup \text{int } \mathcal{K}' \text{ соответственно})$.

ЛЕММА 3.3. *Грань $(\mathcal{C}', \mathcal{R}')$, для которой $v \in \text{int } \mathcal{C}'$, есть пересечение гиперграней, содержащих v .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\langle \varphi, \mathcal{C} \rangle \geq 0$, $\langle \varphi, v \rangle = 0$, то $\langle \varphi, \mathcal{C}' \rangle = 0$ (для грани типа II $\langle \varphi, \mathcal{K}' \rangle = 0$, а значит, $\forall x \langle \varphi, \mathcal{C}'_x \rangle = 0$). Обратно, для $q \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}'$ легко построить такой функционал φ , что $\langle \varphi, \mathcal{C} \rangle \geq 0$, $\langle \varphi, \mathcal{C}' \rangle = 0$, $\langle \varphi, q \rangle > 0$.

Следовательно, условия (V') и (D') выделяют (элементы $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$, попадающие на) грань $(\mathcal{C}_Y, \mathcal{D}_Y^B)$, содержащую v в своей внутренности.

Носитель соответствующего G-ростка $\mathcal{S}_Y$ равен $\mathcal{V} \cap \text{int } \mathcal{C}_Y$.

В итоге доказана

ТЕОРЕМА 3.2. *G-ростки (пересекающие данную В-карту) задаются цветными конусами или гиперконусами типа II (являющимися гранями данного*

гиперконуса), внутренности которых пересекают $\mathcal{V}$. Присмыканию G -ростков (т.е. включению соответствующих замкнутых подмногообразий в любой модели) отвечает обратное включение цветных (гипер)конусов как граней друг в друга.

G -росток, допускающий карту типа I, назовем G -ростком типа I, а не допускающий карту типа I, – G -ростком типа II. G -ростки типа I (типа II) задаются цветными конусами (гиперконусами типа II соответственно). Ростки типа I характеризуются также конечностью множества $\mathcal{V}_Y \sqcup \mathcal{D}_Y^B$, а ростки типа II – наличием минимальной B -карты.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. В квазиоднородном случае почти всегда $q_x \notin \mathcal{V}_x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует G -нормирование w , отвечающее дивизору с открытой G -орбитой (его можно построить методом ростков формальных кривых, взяв $x(t) \in G(k((t))) \setminus G(k[[t]])H(k((t)))$). Легко построить его геометрическую реализацию, состоящую из двух G -орбит (плотной и коразмерности 1). Возьмем в ней B -карту типа I, пересекающую орбиту коразмерности 1. Для нее $\mathcal{W} = \{w\}$, и единственная грань соответствующего гиперконуса, внутренность которой пересекает $\mathcal{V}$, есть $\mathbb{Q}_+w$. В то же время любой элемент $\mathcal{R}$, попадающий в $q_x \in \mathcal{V}_x$, задает грань $\mathbb{Q}_+q_x$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Нецентральные G -нормирования отвечают дивизорам с открытой G -орбитой; центральные – дивизорам с бесконечным числом G -орбит, кроме собственных граней $\mathcal{Z}' \subset \mathcal{Z}$, для которых $(\mathcal{Z}' + \mathbb{Q}_+q_x) \cap \mathcal{V} = \mathcal{Z}'$ при почти всех x , в квазиоднородном случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть w – нецентральное G -нормирование. Существует гиперконус $(\mathcal{C}, \mathcal{R})$ типа I с $\mathcal{C}_x = \mathbb{Q}_+w$ (для некоторого x). $\mathcal{C}_x$ не содержится ни в какой грани гиперконуса $(\mathcal{C}, \mathcal{R})$, т.е. соответствующий дивизор не имеет собственных G -инвариантных подмногообразий, пересекающих B -карту, отвечающую $(\mathcal{C}, \mathcal{R})$, а значит, содержит плотную G -орбиту.

Аналогично, если $w \in \mathcal{Z}$, то любой гиперконус, имеющий грань $\mathbb{Q}_+w$, имеет бесконечно много граней, содержащих w и q_x (для почти всех x), внутренности которых пересекают $\mathcal{V}$. Исключения возможны лишь в квазиоднородном случае ($q_x \notin \mathcal{V}_x$), когда w попадает на некоторую собственную грань $\mathcal{Z}' \subset \mathcal{Z}$, так что $(\mathcal{Z}' + \mathbb{Q}_+q_x) \cap \mathcal{V} = \mathcal{Z}'$.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. В квазиоднородном случае росток типа I допускает геометрическую реализацию с конечным числом орбит тогда и только тогда, когда $\mathcal{C}_Y \cap \mathcal{Z}$ содержится в одной из граней $\mathcal{Z}$, упомянутых в следствии 3.2 (например, равно $\{0\}$).

3.4. Описание G -моделей. Процедура сборки G -моделей из G -ростков описана в п. 1.6. Нужно лишь перевести ее на язык (гипер)конусов.

ТЕОРЕМА 3.3. Нормальная G -модель задается множеством цветных конусов и гиперконусов типа II, получающимся из конечного набора цветных гиперконусов как множество их всевозможных граней, внутренности которых пересекают $\mathcal{V}$, при условии, что внутренности этих граней попарно не пересекаются внутри $\mathcal{V}$.

По аналогии со сферическим случаем, такую совокупность конусов и гиперконусов типа II можно назвать *цветным веером*.

§4. В-карты и G-ростки: общий случай

В этом параграфе мы обобщим результаты §3 на случай, когда C – произвольная кривая. Мы сохраняем ранее введенные обозначения.

4.1. Линейные функционалы. Вначале разберемся с геометрией гиперпространства. Как и выше, линейные функционалы на гиперпространстве бывают двух типов. Для того чтобы линейный функционал φ задавался элементом $K^{(B)}$, необходимо и достаточно, чтобы дивизор $\sum \langle \varphi_x, q_x \rangle \cdot x$ был главным (в частности, $\sum \langle \varphi_x, q_x \rangle = 0$), см. п. 2.1. Для функционалов типа II это эквивалентно тому, что дивизор $\sum \langle \varphi_x, \ell_x \rangle \cdot x$ главный, где $q_x + \ell_x \in (q_x + \mathbb{Q}\ell) \cap \text{Ker } \varphi_x$, $\ell \in \mathcal{Q} \setminus \text{Ker } \varphi$. При проверке условий (C), (W), (V), (V'), (D') линейные функционалы интересуют нас с точностью до пропорциональности, т.е. достаточно, чтобы дивизор $\sum N \langle \varphi_x, q_x \rangle \cdot x$ был главным для некоторого $N > 0$. Такие линейные функционалы будем называть *допустимыми*.

Пусть φ – произвольный линейный функционал на гиперпространстве, $y \in C$ – произвольная точка. Сколь угодно мало изменив значение $\langle \varphi_y, q_y \rangle$ (не меняя $\varphi|_{\mathcal{Q}}$ и остальных $\langle \varphi_x, q_x \rangle$ и отказавшись временно от условия сбалансированности), мы можем добиться $\sum \langle \varphi_x, q_x \rangle < 0$. Тогда $-\sum N \langle \varphi_x, q_x \rangle x$ – очень обильный дивизор для достаточно большого N (делящегося на достаточно много простых чисел). Пошевелив соответствующее гиперплоское сечение во вложении кривой C в проективное пространство, мы найдем эквивалентный очень обильный дивизор без кратных компонент, не проходящий через любое заданное конечное множество точек C . Он имеет вид $\sum n_x \cdot x$, где $n_x = 0, 1$. Тогда $\sum ((N \langle \varphi_x, q_x \rangle + n_x) x)$ – главный дивизор, и, увеличив на n_x значение функционала $N\varphi$ в q_x , мы получим линейный функционал на гиперпространстве, задаваемый элементом $K^{(B)}$. Поделив его на N , мы получим линейный функционал, значения которого в точках q_x отличаются от $\langle \varphi_x, q_x \rangle$ на n_x/N , т.е. сколь угодно мало. Таким образом, любой линейный функционал φ можно “малым шевелением” (не меняя, в частности, $\varphi_x|_{\mathcal{Q}_{x,+}}$ в любом заданном конечном наборе точек $x \in C$ и уменьшая только в одном $Q_{y,+}$) сделать допустимым. Это рассуждение постоянно используется в дальнейшем.

4.2. В-карты. Пусть $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R} \in \mathfrak{V}$. Мы хотим выяснить, когда пара множеств $(\mathcal{W}, \mathcal{R})$ задает некоторую В-карту, т.е. когда выполняются условия (C), (W), (F).

Рассуждения п. 3.2 сохраняют свою силу, хотя мы вынуждены работать только с допустимыми линейными функционалами. Как и в п. 3.2, можно определить гиперконус $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{W}, \mathcal{R})$ как множество точек гиперпространства, в которых принимают неотрицательные значения все *допустимые* линейные функционалы, неотрицательные на $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$. Условие (C), как и выше, означает, что все $\mathcal{C}_x$ строго выпуклы, $\mathcal{P} \not\equiv 0$, и ни один элемент $\mathcal{R}$ не попадает в 0: необходимость этих условий очевидна, а достаточность следует из того, что мы можем построить требуемый линейный функционал, как в п. 3.2, а затем поправить его “малым шевелением” до допустимого (см. п. 4.1). В этом случае $(\mathcal{C}, \mathcal{R})$ – цветной гиперконус согласно определению 3.1; более того, $\mathcal{C}$ совпадает с множеством $\mathcal{C}(\mathcal{W}, \mathcal{R})$, задаваемым *всеми* линейными функционалами, неотрицательными на $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$ (достаточно рассматривать функционалы, положительные на элементах $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$, попадающих в одно

из $Q_{x,+}$, а такой функционал можно поправить “малым шевелением”, сохраняя неотрицательность на $\mathcal{W} \sqcup \mathcal{R}$).

Условие (W) означает, как и выше, что элементы $\mathcal{W}$ – в точности образующие тех ребер $\mathcal{C}_x$, куда не попадают элементы $\mathcal{R}$ и $\mathcal{P}$.

Как и в п. 3.2, любая гипергрань $(\mathcal{C}', \mathcal{R}')$ цветного гиперконуса $(\mathcal{C}, \mathcal{R})$ задается опорным функционалом φ (т.е. $\varphi|_{\mathcal{C}} \geq 0$, $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cap \text{Ker } \varphi$), но φ не обязательно допустим (см. предложение 4.1).

В отличие от §3, проверка условия (F) нетривиальна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Следующие условия эквивалентны: условие (F) и*

- 1) *веса элементов $A^{(B)}$ образуют конечно порожденную полугруппу;*
- 2) *все опорные функционалы гиперграней типа II гиперконуса $(\mathcal{C}, \mathcal{R})$ допустимы.*

Такие гиперконусы будем называть *допустимыми*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (F) $\implies$ 1). Очевидно.

1) $\implies$ 2). Любой линейный функционал на $\mathcal{Q}$, неотрицательный на $\mathcal{K}$ и положительный на $\mathcal{P}$, т.е. принадлежащий дуальному конусу $\mathcal{K}^\vee$ за вычетом некоторых граней, можно продолжить до допустимого функционала на гиперпространстве, неотрицательного на $\mathcal{C}$. Такой функционал в некоторой кратности задается элементом $A^{(B)}$. Функционалы, лежащие на оставшихся гранях $\mathcal{K}^\vee$, продолжают (единственным образом) до опорных функционалов гиперграней типа II. Следовательно, для конечной порожденности полугруппы весов $A^{(B)}$ необходимо, чтобы все эти опорные функционалы также были допустимыми.

2) $\implies$ 1). Пусть $S = \Gamma \cap \mathcal{K}^\vee$ – (конечно порожденная) полугруппа целых точек дуального конуса, а Σ – полугруппа весов $A^{(B)}$. Тогда $S \supseteq \Sigma \supseteq N \cdot S$ при достаточно большом N , т.е. алгебра $k[\Sigma]$ цела над конечно порожденной подалгеброй $k[N \cdot S]$ и расширение полей частных $Qk[\Sigma] \supseteq Qk[N \cdot S]$ конечно. Следовательно, алгебра $k[\Sigma]$ конечно порождена [1, гл. V, §3], а значит, и полугруппа Σ конечно порождена.

2) $\implies$ (F). Откажемся временно в определении линейного функционала на гиперпространстве от условия сбалансированности $\sum \langle \varphi_x, q_x \rangle = 0$ (см. п. 2.1). Тогда любой функционал φ , целочисленный на Γ^* и всех q_x , задается элементом $s \cdot e_\lambda \in L_{(C)} \otimes k[\Gamma]$, где $\lambda \in \Gamma$, а $L_{(C)}$ – пространство рациональных сечений обратимого пучка L на C . А именно, $\forall q = (\delta, \ell) \in \mathcal{Q}_{x,+}$: $\langle \varphi_x, q \rangle = \delta v_x(s) + \langle \ell, \lambda \rangle$.

Пусть $f \in A^{(B)}$; ему соответствует функционал φ . Рассмотрим разложение $\varphi = \varphi_0 + \varphi_+$, где функционал φ_+ неотрицателен на всем гиперпространстве, а φ_0 продолжает $\varphi|_{\mathcal{Q}}$ и обладает следующими свойствами: $\varphi_0|_{\mathcal{K}_x} \geq 0$, причем равенство достигается в некоторой точке при $\mathcal{C}_x \neq \mathcal{K}$; $\langle \varphi_0, q_x \rangle < 0$ при $\mathcal{C}_x = \mathcal{K}$; и либо $\sum \langle \varphi_0, q_x \rangle < 0$, либо $\varphi_0 = \varphi$ – опорный функционал гиперграни типа II. Если φ имеет тип I, то такое разложение, очевидно, существует. Пусть φ имеет тип II. Функционал φ_0 легко построить, поворачивая гиперплоскости $\text{Ker } \varphi_x$ до соприкосновения с $\mathcal{K}_x$. Рассмотрим набор граней $\mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{K}_x$, задаваемых условием $\varphi_0 = 0$. Имеется конечное число таких наборов по всевозможным φ_0 . Рассмотрим совокупность функционалов ψ , неотрицательных на $\mathcal{C}$ и равных 0 на $\mathcal{F}_x$ (среди них и φ_0). Их ограничения на $\mathcal{Q}$ образуют конечно порожденный конус $[\bigcup_{x \in C} (\mathcal{K}_x - \mathcal{F}_x)]^\vee$.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ – образующие всех таких конусов, а $\psi_1, \dots, \psi_m$ – соответствующие линейные функционалы на гиперпространстве. Если гиперконус $(\mathcal{C}, \mathcal{R})$

имеет тип I, то, уменьшив $\langle \psi_i, q_y \rangle$ в точках $y \in C$, где $\mathcal{C}_y = \mathcal{K}$, мы добьемся, чтобы $\sum \langle \psi_i, q_x \rangle < 0$. Также для каждой такой точки y добавим к $\{\psi_i\}$ функционал, неположительный на $\mathcal{Q}_{y,+}$ и равный 0 на остальных $\mathcal{Q}_{x,+}$. Если гиперконус имеет тип II, то и так $\sum \langle \psi_i, q_x \rangle \leq 0$, а в случае равенства ψ_i допустим (по условию 2)).

Можно считать функционалы ψ_i целочисленными на Γ^* и всех q_x (заменив на кратные), так что ψ_i задаются элементами $s_i e_{\lambda_i}$, где $s_i \in (L_i^{-1})_{(C)}$, $\deg L_i \geq 0$, и $\deg L_i = 0 \implies L_i = \mathcal{O}_C$ (так как тогда ψ_i допустим).

Заменив функционал φ на кратный, мы можем считать, что φ_0 и φ_+ целочисленны (на Γ^* и всех q_x) и $\varphi_0 = \sum k_i \psi_i$, $k_i \geq 0$. Тогда φ_0 задается мономом $(s_1 e_{\lambda_1})^{k_1} \dots (s_m e_{\lambda_m})^{k_m} \in (L_1^{-k_1} \dots L_m^{-k_m})_{(C)} \otimes k[\Gamma]$, а φ_+ — элементом $H^0(C, L_1^{k_1} \dots L_m^{k_m})$, т.е. f в некоторой степени есть произведение $(s_1 e_{\lambda_1})^{k_1} \dots (s_m e_{\lambda_m})^{k_m}$ и элемента $H^0(C, L_1^{k_1} \dots L_m^{k_m})$. Обратно, любое такое произведение дает элемент $A^{(B)}$.

ЛЕММА 4.1. Алгебра $\bigoplus_{k_1, \dots, k_m \geq 0} H^0(C, L_1^{k_1} \dots L_m^{k_m})$ конечно порождена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть при $i \leq l$ ($> l$) $\deg L_i > 0$ ($= 0$ соответственно). Тогда $\bigoplus H^0(C, L_1^{k_1} \dots L_m^{k_m}) \cong [\bigoplus H^0(C, L_1^{k_1} \dots L_l^{k_l})] \otimes k[\mathbb{A}^{m-l}]$, т.е. можно считать, что все $\deg L_i > 0$. Тогда все линейные расслоения L_i обильны, следовательно, векторное расслоение $E = L_1 \oplus \dots \oplus L_m$ обильно [8] (определение обильного векторного расслоения см. в [8, §2, с. 321]). Значит, линейное расслоение $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_C(E)}(1)$ обильно, где $\mathbb{P}_C(E)$ — проективизация расслоения E [8]. Поэтому алгебра $\bigoplus_{k_1, \dots, k_m \geq 0} H^0(C, L_1^{k_1} \dots L_m^{k_m}) \cong \bigoplus_{k \geq 0} H^0(C, S^k E) \cong \bigoplus_{k \geq 0} H^0(\mathbb{P}_C(E), L^k)$ (см. [6, II.7.11(a)]) конечно порождена.

Алгебра $\hat{A} = \bigoplus_{k_1, \dots, k_m \geq 0} H^0(C, L_1^{k_1} \dots L_m^{k_m})[s_1 e_{\lambda_1}, \dots, s_m e_{\lambda_m}]$ снабжена действием тора $(k^\times)^m$: $t = (t_1, \dots, t_m)$ умножает $H^0(C, L_1^{k_1} \dots L_m^{k_m})$ на $t_1^{k_1} \dots t_m^{k_m}$, а $s_i e_{\lambda_i}$ — на t_i^{-1} . Алгебра $\hat{A}$ конечно порождена, следовательно, по теореме Гильберта об инвариантах алгебра $\hat{A}_0 = (\hat{A})^{(k^\times)^m}$ конечно порождена.

Алгебра A^U цела над $\hat{A}_0$. Покажем, что расширение полей частных конечно.

Во-первых, $Q\hat{A}_0 \supseteq K^B$. Действительно, пусть $f \in K^B$; ему соответствует функционал ψ типа I. Можно найти такой элемент $p \in \hat{A}_0^{(B)}$, задающий функционал $\varphi = \varphi_0 + \varphi_+$, что функционал $\varphi_+ + \psi$ неотрицателен. Тогда $fp \in \hat{A}_0$.

Во-вторых, $\forall \lambda \in \Gamma \exists k > 0$: $e_{k\lambda} \in Q\hat{A}_0$. Действительно, существует элемент $f_0 e_{k\lambda} \in Q\hat{A}_0$, $f_0 \in K^B$, и нужно лишь поделить на f_0 .

Следовательно, расширение полей $QA^U \supseteq Q\hat{A}_0$ конечно, а значит, алгебра A^U конечно порождена [1, гл. V, §3, № 2].

4.3. G-ростки и описание G-моделей. Лемма 3.4 справедлива и в общей ситуации; более того, грань допустимого гиперконуса есть пересечение гиперграней с допустимыми опорными функционалами (следует из предложения 4.1, 2) и возможности поправить опорный функционал гиперграней типа I малым шевелением).

Как и в §3, условие (V) означает, что $v \in \mathcal{C}$, а условия (V') и (D') выделяют грань $(\mathcal{C}_Y, \mathcal{Q}_Y^B)$, содержащую v в своей внутренности.

В итоге мы получаем следующее обобщение теорем 3.1–3.3.

ТЕОРЕМА 4.1. 1) *B -карты задаются допустимыми цветными гиперконусами. Локализации по B -полуинвариантной функции отвечает переход к гиперграниц с допустимым опорным функционалом.*

2) *G -ростки (пересекающие данную B -карту) задаются цветными конусами или допустимыми гиперконусами типа II (являющимися гранями данного гиперконуса), внутренности которых пересекают $\mathcal{V}$. Присоединению G -ростков отвечает обратное включение цветных (гипер)конусов как граней друг в друга.*

3) *Нормальная G -модель задается множеством цветных конусов и допустимых гиперконусов типа II, получающимся из конечного набора допустимых цветных гиперконусов как множество их всевозможных граней, внутренности которых пересекают $\mathcal{V}$, при условии, что внутренности этих граней попарно не пересекаются внутри $\mathcal{V}$.*

ПРИМЕР 4.1. Рассмотрим случай, когда $G = B = T$ – тор. Этот класс примеров относится к однопараметрическому случаю. Можно считать (профакторизовав по ядру действия), что стабилизатор общего положения тривиален. Поскольку тор не имеет нетривиальных когомологий Галуа (теорема 90 Гильберта – см. [2]), бирациональный тип действия тривиален, т.е. (любая) T -модель бирационально изоморфна $T \times C$. Отсюда ясно, что $\mathcal{Q} = \text{Hom}(\mathcal{X}(T), \mathbb{Q})$, $\mathcal{V} = \bigcup \mathcal{Q}_{x,+}$ (так как $\mathcal{V}(T) = \mathcal{Q}$ и $\mathcal{V}_x$ – телесный выпуклый конус для $\forall x \in C$), $\mathcal{Q}^B = \mathcal{Q}^B(T) = \emptyset$. Нормальные T -модели задаются наборами конусов и допустимых гиперконусов типа II (являющихся гранями конечного набора допустимых гиперконусов), внутренности которых попарно не пересекаются (слово “цветной” здесь излишне, красок нет). T -карта $\overset{\circ}{X}$ имеет тип I (II) тогда и только тогда, когда $\overset{\circ}{X} // T \subset C$ – открытое подмножество ($\overset{\circ}{X} // T$ – точка). Если все ростки T -модели имеют тип I, то морфизмы факторизации ее T -карт можно склеить в регулярное отображение $X \rightarrow C$, разделяющее T -орбиты общего положения. Такие T -модели были классифицированы в [11, гл. IV] в рамках теории тороидальных вложений (о которой см. [11, гл. II]). Конусы из соответствующего тороидальному вложению X конического комплекса – это в точности конусы, задающие T -ростки согласно теореме 4.1, за исключением конусов над точками $x \in C$ общего положения.

§5. Примеры

В заключительном параграфе мы рассмотрим некоторые примеры описания многообразий сложности 1. Все они относятся к квазиоднородному случаю, т.е. поле K равно $k(G/H)$ с естественным действием G . В каждом из примеров будут указаны:

– неразложимые полуинварианты из $k[G]^{(B \times H)}$ (точнее, их бивеса $(\lambda, \chi) \in \mathcal{X}(B \times H)$), т.е. конечное множество субрегулярных и центральных полуинвариантов и двумерное подпространство $k[G]_{(\lambda_0, \chi_0)}^{(B \times H)}$, заполненное регулярными полуинвариантами. Буквой F обозначим (произвольный) фиксированный регулярный полуинвариант из $k[G]_{(\lambda_0, \chi_0)}^{(B \times H)}$, соответствующую ему точку на $\mathbb{P}^1$ назовем *выделенной*;

– гиперпространство $\bigcup_{x \in \mathbb{P}^1} \mathcal{Q}_{x,+}$ вместе с конусами G -нормирований $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{Q}_{x,+}$ (на рисунках мы будем их заштриховывать) и образами B -дивизоров (на рисунках

мы будем их изображать светлыми кружками $\circ$). При этом, начиная с п. 5.7, мы будем придерживаться соглашений п. 3.2, т.е. описывать гиперпространство набором гиперплоскостей $\mathcal{Q}_{x,1}$ вместе с центральной гиперплоскостью $\mathcal{Q}$, нецентральные G -нормирования – многогранными областями $\mathcal{V}_x \cap \mathcal{Q}_{x,1} \subseteq \mathcal{Q}_{x,1}$, а нецентральные B -дивизоры – точками $\mathcal{Q}_{x,1}$ с указанием подскока. G -нормирования (и их изображения в гиперпространстве) вычисляются комбинацией метода ростков формальных кривых и факторизации по конечной группе автоморфизмов (см. п. 2.3).

Кроме того, в примерах 5.1–5.6 будут классифицированы все виды G -ростков и описаны соответствующие цветные (гипер)конусы. В общем случае удовлетворился принципиальной ясностью ситуации (см. §3).

5.1. $G = \mathrm{SL}_2$, $H = \{e\}$. Этот пример подробно разобран в [14, §9]. Элементы группы G – матрицы

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12} = 1,$$

B состоит из верхнетреугольных матриц ($g_{21} = 0$). Группа $\mathfrak{X}(B)$ порождается фундаментальным весом ω , $\omega(g) = g_{11}$ для $g \in B$.

Субрегулярных и центральных полуинвариантов нет, регулярные полуинварианты заполняют двумерное подпространство $k[G]_\omega^{(B)}$, порожденное функциями $f_0(g) = g_{21}$, $f_\infty(g) = g_{22}$.

Группа Γ равна $\mathfrak{X}(B) = \mathbb{Z}\omega$, $e_\omega = F \in k[G]_\omega^{(B)}$.

Всякое G -нормирование, отвечающее дивизору с плотной G -орбитой, пропорционально $v_{x(t)}$, где $x(t) = \begin{pmatrix} t^p & u(t) \\ 0 & t^{-p} \end{pmatrix} \in G(k((t)))$, $p \in \mathbb{Z}$, $u(t) \in k((t))$, $v_t(u(t)) = q$, причем можно считать $q \leq -p$ (см. п. 2.3). Рассмотрим число

$$d = v_{x(t)}(\alpha f_0 + \beta f_\infty) = v_t((\alpha t^p + \beta u(t))g_{21} + \beta t^{-p}g_{22}).$$

Возможны варианты:

$$p \leq q \implies \begin{cases} d = p, & v_t(\alpha t^p + \beta u(t)) = p \\ d \in (p, -p], & v_t(\alpha t^p + \beta u(t)) > p \end{cases} \implies \delta \in (0, -2p]$$

(подскок в $x \in \mathbb{P}^1$, отвечающей $\alpha f_0 + \beta f_\infty$, для которой $v_t(\alpha t^p + \beta u(t)) > p$), $\langle \ell, \omega \rangle = v_{x(t)}(e_\omega) = p$ (или $p + \delta$, если подскок в выделенной точке);

$$p > q \implies \begin{cases} d = q, & \beta \neq 0 \\ d = p, & \beta = 0 \end{cases} \implies \delta = p - q$$

(подскок в $x \in \mathbb{P}^1$, отвечающей f_0), $\langle \ell, \omega \rangle = q$ (или $q + \delta$).

Отождествляя функционал ℓ с числом $\langle \ell, \omega \rangle$, мы видим, что множество G -нормирований с подскоком в точке x , отвечающих дивизорам с плотной G -орбитой, задается неравенствами $\delta > 0$, $2\ell + \delta \leq 0$ (или $2\ell - \delta \leq 0$, если x – выделенная точка), а значит, конус $\mathcal{V}_x$ задается неравенством $2\ell + \delta \leq 0$ (или $2\ell - \delta \leq 0$). В итоге получаем следующее изображение гиперпространства:

Точка общего положения (т.о.п.)

Выделенная точка

(точками обозначаются элементы $\Gamma^* \times \mathbb{Z}_+ \subset \mathcal{Q}_{x,+}$).

Используя результаты §3, нетрудно получить полное описание всевозможных видов G -ростков в этом случае (обозначения для различных видов G -ростков взяты из [14, §9]).

Ростки типа I задаются цветными конусами (заштрихованы на следующем рисунке, краски изображены темными кружками $\bullet$, точку $x \in \mathbb{P}^1$, для которой цветной конус содержится в $\mathcal{Q}_{x,+}$, можно считать невыделенной за счет “замены координат” – см. замечание 2.1):

C

AB

B₊

Ростки типа II задаются цветными гиперконусами типа II (заштрихованы на следующем рисунке, краски изображены темными кружками)

A_l

$x_i, i = 1, \dots, l$

т. о. п.

Выделенная точка

При этом суммарное отклонение ребер конусов $\mathcal{C}_x \subseteq \mathcal{Q}_{x,+}$ от вертикали должно быть направлено в ту же сторону, что и луч $\mathcal{K}$, т.е. $\sum \ell_x \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$, где ℓ_x – проекция на $\mathcal{Q}$ точки пересечения соответствующего ребра $\mathcal{C}_x$ с $\mathcal{Q}_{x,1}$. Это означает: $\ell_{x_1} < -1$ для типа A_1 ; ℓ_{x_1} или $\ell_{x_2} < -1/2$ для типа A_2 ; $\ell_{x_1} > -1$ для типов B_- и B_0 .

B -карты, пересекающие G -ростки типа B_0 , являются G -инвариантными (так как пересекают все B -дивизоры) и исчерпывают аффинные G -модели поля K (аффинные SL_2 -вложения, см. [4]).

5.2. $G = SL_2$, $H = Z_m$ – циклическая группа. Будем использовать обозначения предыдущего пункта. H вложена в G как подгруппа диагональных матриц, порожденная элементом $h = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$, где ε – примитивный корень степени m из 1. $\mathfrak{X}(H)$ изоморфна Z_m и состоит из характеров $h \mapsto \varepsilon^k$, которые мы будем обозначать просто ε^k (мультипликативная запись, в отличие от аддитивной для элементов $\mathfrak{X}(B)$). Положим

$$\bar{m} = \begin{cases} m, & m \text{ нечетно,} \\ m/2, & m \text{ четно.} \end{cases}$$

Субрегулярные полуинварианты – f_0, f_∞ с бивесами $(\omega, \varepsilon), (\omega, \varepsilon^{-1})$ соответственно.

Регулярные полуинварианты заполняют двумерное подпространство $k[G]_{(\bar{m}\omega, \varepsilon^{\bar{m}})}^{(B \times H)} \ni f_0^{\bar{m}}, f_\infty^{\bar{m}}$;

$$\Gamma = \begin{cases} \mathbb{Z}\omega, & m \text{ нечетно,} & e_\omega = \frac{F}{(f_0 f_\infty)^{\frac{m-1}{2}}}, \\ \mathbb{Z} \cdot 2\omega, & m \text{ четно,} & e_{2\omega} = \frac{F^2}{(f_0 f_\infty)^{\frac{m}{2}-1}}. \end{cases}$$

Гиперпространство выглядит так:

причем решетка Γ^* отождествляется с $\mathbb{Z}$ при $2 \nmid m$ и с $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ при $2 \mid m$.

Цветные (гипер)конусы, изображающие ростки, аналогичны 5.1 (и обозначаются так же). Имеются следующие ограничения: для типа A_1 $\ell_{x_1} < -\frac{1}{2} - \frac{1}{2\bar{m}}$ (если $x_1 = x_0$ или $x_1 = x_\infty$) или $\ell_{x_1} < -\frac{1}{\bar{m}}$ (иначе); для типа A_2 ℓ_{x_1} или $\ell_{x_2} < -\frac{1}{2}$ (если $x_1 = x_0$, $x_2 = x_\infty$), или $\ell_{x_1} + \ell_{x_2} < -\frac{1}{2} - \frac{1}{2\bar{m}}$ (если одна из $x_i = x_0, x_\infty$), или $\ell_{x_1} + \ell_{x_2} < -\frac{1}{\bar{m}}$ (если $x_i \neq x_0, x_\infty$); для типов B_-, B_0 $\ell_{x_1} > -\frac{1}{2} - \frac{1}{2\bar{m}}$ и $x_1 = x_0$ или $x_1 = x_\infty$ (кроме случая $\bar{m} = 1$, тогда x_1 любая).

В следующих четырех примерах $G = \mathrm{SL}_2$, H – бинарная группа правильного многогранника. При $k = \mathbb{C}$ $\mathbb{P}^1$ можно отождествить со сферой Римана S^2 , на которой $\mathrm{SU}_2 \subset \mathrm{SL}_2$ действует посредством эпиморфизма $\mathrm{SU}_2 \rightarrow \mathrm{SO}_3$. Тогда H – полный прообраз группы симметрий правильного многогранника, вписанного в S^2 . Его вершины, середины ребер и центры граней (точнее, их проекции на S^2) образуют три орбиты $H : \mathbb{P}^1$ с нетривиальным стабилизатором. Соответствующие точки $\mathbb{P}^1/H$ обозначим x_v, x_p, x_g , а произведения линейных форм на $\mathbb{P}^1$ (т.е. элементов $k[G]_{(\lambda_0, \chi_0)}^{(B \times H)}$), отвечающих точкам каждой орбиты, – f_v, f_p, f_g .

Полупространство $\mathcal{Q}_{x,+}$ в точке $x \neq x_v, x_p, x_g$ (точка общего положения) устроено так же, как и для подгруппы Z_m при четном m , т.е. имеет вид

причем решетка Γ^* отождествляется с $\mathbb{Z}$. Этот рисунок мы в дальнейшем будем опускать, изображая только $\mathcal{Q}_{x,+}$ в точках $x = x_v, x_p, x_g$.

5.3. $G = \mathrm{SL}_2$, $H = \tilde{D}_m$ – бинарная группа диэдра. Группа H порождается элементами $h = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$, где ε – примитивный корень степени $2m$ из 1, и $r =$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Характер из $\mathfrak{X}(H)$ задается парой значений $h \mapsto \varepsilon^k$, $r \mapsto i^l$ (где $i = \sqrt{-1}$).

Субрегулярные полуинварианты – это $f_\Gamma = f_0 f_\infty$, $f_p = f_0^m - (-i f_\infty)^m$, $f_b = f_0^m + (-i f_\infty)^m$ с бивесами $(2\omega, (1, -1))$, $(m\omega, (-1, -i^m))$, $(m\omega, (-1, i^m))$ соответственно.

Регулярные полуинварианты заполняют двумерное подпространство $k[G]_{(2m\omega, (1, (-1)^m))}^{(B \times H)} \ni f_\Gamma^m, f_p^2, f_b^2, 4(-i)^m f_\Gamma^m + f_p^2 - f_b^2 = 0$;

$$\Gamma = \mathbb{Z} \cdot 2\omega, \quad e_{2\omega} = \frac{f_b f_p}{f_\Gamma^{m-1}}.$$

Гиперпространство выглядит так:

Имеются следующие ограничения для гиперконусов, изображающих ростки типа II: для типа A_1 $\ell_{x_1} < -1$ (если $x_1 = x_\Gamma$) или $\ell_{x_1} < 1 - \frac{2}{m}$ (если $x_1 = x_p$ или x_b); типы B_- , B_0 отсутствуют.

5.4. $G = \mathrm{SL}_2$, $H = \tilde{T}$ – бинарная группа тетраэдра. Характер из $\mathfrak{X}(H)$ задается значением $h \mapsto \varepsilon^k$ (где ε – примитивный корень степени 3 из 1) на элементе $h \in \tilde{T}$ 3-го порядка, поворачивающем тетраэдр на угол $\frac{2\pi}{3}$ относительно оси, соединяющей данную вершину и центр противоположной грани.

Субрегулярные полуинварианты – это f_b, f_p, f_Γ с бивесами $(4\omega, \varepsilon)$, $(6\omega, 1)$, $(4\omega, \varepsilon^{-1})$.

Регулярные полуинварианты заполняют двумерное подпространство $k[G]_{(12\omega, 1)}^{(B \times H)} \ni f_b^3, f_p^2, f_\Gamma^3, f_b^3 + f_p^2 + f_\Gamma^3 = 0$;

$$\Gamma = \mathbb{Z} \cdot 2\omega, \quad e_{2\omega} = \frac{f_b f_\Gamma}{f_p}.$$

Гиперпространство выглядит так:

Гиперконусы типов B_- , B_0 отсутствуют, других ограничений нет.

5.5. $G = \mathrm{SL}_2$, $H = \tilde{C}$ – бинарная группа куба. Характер из $\mathfrak{X}(H)$ задается значением $h \mapsto \pm 1$ на элементе $h \in \tilde{C}$ 4-го порядка, поворачивающем куб на угол π относительно оси, соединяющей середины противоположных ребер.

Субрегулярные полуинварианты – это f_b, f_p, f_Γ с бивесами $(8\omega, 1)$, $(12\omega, -1)$, $(6\omega, -1)$.

Регулярные полуинварианты заполняют двумерное подпространство $k[G]_{(24\omega, 1)}^{(B \times H)} \ni f_b^3, f_p^2, f_\Gamma^4, f_b^3 + f_p^2 + f_\Gamma^4 = 0$;

$$\Gamma = \mathbb{Z} \cdot 2\omega, \quad e_{2\omega} = \frac{f_b f_\Gamma}{f_p}.$$

Гиперпространство выглядит так:

Гиперконусы типов B_- , B_0 отсутствуют, других ограничений нет.

5.6. $G = \mathrm{SL}_2$, $H = \tilde{I}$ – бинарная группа икосаэдра. $\mathfrak{X}(H) = \{1\}$.

Субрегулярные полуинварианты – это f_b, f_p, f_Γ с бивесами $(12\omega, 1)$, $(30\omega, 1)$, $(20\omega, 1)$.

Регулярные полуинварианты заполняют двумерное подпространство $k[G]_{(60\omega, 1)}^{(B \times H)} \ni f_b^5, f_p^2, f_\Gamma^3, f_b^5 + f_p^2 + f_\Gamma^3 = 0$;

$$\Gamma = \mathbb{Z} \cdot 2\omega, \quad e_{2\omega} = \frac{f_b f_\Gamma}{f_p}.$$

Гиперпространство выглядит так:

Гиперконусы типов B_- , B_0 отсутствуют, других ограничений нет.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Циклические группы и бинарные группы многогранников исчерпывают с точностью до сопряженности все конечные подгруппы $H \subset \mathrm{SL}_2$ (только для конечной подгруппы $c(\mathrm{SL}_2/H) = 1$). Эти примеры рассмотрены впервые в [15]. Заметим также, что аффинные G -модели существуют, только если H – циклическая подгруппа, что согласуется с [4].

В примерах 5.7–5.13 рассматривается случай, когда $G = \mathrm{SL}_2 \times Z$ – группа полупростого ранга 1 (Z – центральный тор). Соответствующие G -многообразия служат “локальными моделями” для произвольных многообразий сложности 1 с плотной орбитой в том же смысле, в каком торические многообразия служат локальными моделями для сферических [7].

Заметим, что если G_1/H_1 , G_2/H_2 – два однородных пространства, $c(G_1/H_1) = 1$, $c(G_2/H_2) = 0$, то гиперпространство для $G_1/H_1 \times G_2/H_2$ получается из гиперпространства для G_1/H_1 прямым произведением на $\mathcal{Q}_2 = \mathrm{Hom}(\Gamma(G_2/H_2), \mathbb{Q})$, множество G -нормирований – прямым произведением множества $\mathcal{V}_1$ G -нормирований $k(G_1/H_1)$ на конус G -нормирований $\mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{Q}_2$, множество B -дивизоров – добавлением B -дивизоров G_2/H_2 , лежащих в $\mathcal{Q}_2$. Поэтому достаточно рассмотреть “неразложимые” пары $H \subseteq G$.

Как устроены подгруппы $H \subseteq G = G_1 \times G_2$? Обозначим $\pi_i: G \rightarrow G_i$ каноническую проекцию. Имеются точные последовательности

$$e \rightarrow H_i = H \cap G_i \rightarrow H \rightarrow \pi_j(H) \rightarrow e,$$

$$e \rightarrow H_1 \times H_2 \rightarrow H \rightarrow \overline{H} \cong \pi_j(H)/H_j \rightarrow e, \quad \{i, j\} = \{1, 2\},$$

т.е. $G/H \cong (G_1/H_1 \times G_2/H_2)/\overline{H}$, где $\overline{H}$ действует диагональным образом.

В нашем случае ($G_1 = \mathrm{SL}_2$, $G_2 = Z$) можно считать, что $H_2 = \{e\} \implies H_1 \triangleleft H \cong \pi_1(H)$, $\overline{H} \cong H/H_1 \cong \pi_2(H)$ абелева. Неразложимость означает, что $\overline{H}$ не лежит в собственном подторе Z . Как мы увидим, отсюда следует $\dim Z \leq 2$. Случай $\dim Z = 0$, $\overline{H} = \{e\}$ рассмотрен выше (примеры 5.1–5.6).

Будем обозначать поле функций, группу весов, полуинварианты, точки на $\mathbb{P}^1$ и т.д. для однородного пространства G/H теми же буквами, что и соответствующие объекты для $G/H_1 = \mathrm{SL}_2/H_1 \times Z$, но с чертой наверху. Пусть ω_1 – фундаментальный вес SL_2 , $\omega_2, \omega_3, \dots$ – базисные веса тора Z . Для тройки $(H_1, H, \overline{H})$ возможны следующие варианты.

5.7. $(Z_k, Z_m, Z_{m/k})$. Субрегулярные $(B \times H)$ -полуинварианты – это $\bar{f}_0 = f_0$, $\bar{f}_\infty = f_\infty$ с бивесами (ω_1, ε) , $(\omega_1, \varepsilon^{-1})$ (где ε – примитивный корень степени m из 1). Положим $\Phi = f_0^{\bar{k}}$.

Образующие $e(\Gamma)$: $e_{\omega_1} = \frac{\Phi}{(f_0 f_\infty)^{\frac{k-1}{2}}}$ (или $e_{2\omega_1} = \frac{\Phi^2}{(f_0 f_\infty)^{\frac{k}{2}-1}}$), e_{ω_2} имеют

H -веса $\varepsilon^k, \varepsilon^{-k}$.

Образующие $\bar{e}(\bar{\Gamma})$:

$$\bar{e}_{\omega_1} = e_{\omega_1} \times \frac{f_\infty^{\frac{\bar{k} m/k+1}{2}}}{f_0^{\frac{\bar{k} m/k+1}{2}}}, \quad \bar{e}_{\omega_2} = e_{\omega_2} \times \frac{f_0^{\frac{\bar{k} m/k+1}{2}}}{f_\infty^{\frac{\bar{k} m/k+1}{2}}} \quad \text{при } 2 \nmid m;$$

$$\bar{e}_{2\omega_1} = e_{2\omega_1} \times \frac{f_\infty^{\bar{k}}}{f_0^{\bar{k}}}, \quad \bar{e}_{\omega_1+\omega_2} = e_{\omega_1+\omega_2}, \quad \bar{e}_{2\omega_2} = e_{2\omega_2} \times \frac{f_0^{\bar{k}}}{f_\infty^{\bar{k}}} \quad \text{при } 2 \nmid k, 2 \mid m;$$

$$\bar{e}_{2\omega_1} = e_{2\omega_1} \times \frac{f_\infty^{\bar{k}}}{f_0^{\bar{k}}}, \quad \bar{e}_{\omega_2} = e_{\omega_2} \times \frac{f_0^{\bar{k}}}{f_\infty^{\bar{k}}} \quad \text{при } 2 \mid k.$$

Гиперпространство выглядит так:

5.8. $(Z_m, \tilde{D}_m, Z_4)$, m нечетно. Субрегулярные $(B \times H)$ -полуинварианты – это $\bar{f}_\Gamma = f_0 f_\infty$, $\bar{f}_\text{p} = f_0^m - (-i f_\infty)^m$, $\bar{f}_\text{в} = f_0^m + (-i f_\infty)^m$ с бивесами $(2\omega_1, (1, -1))$, $(m\omega_1, (-1, -i^m))$, $(m\omega_1, (-1, i^m))$.

Образующие $e(\Gamma)$: $e_{\omega_1} = \frac{f_0^m + (-i f_\infty)^m}{(f_0 f_\infty)^{\frac{m-1}{2}}}$, e_{ω_2} имеют H -веса $(-1, i)$, $(-1, -i)$.

Образующие $\bar{e}(\bar{\Gamma})$: $\bar{e}_{2\omega_1} = e_{2\omega_1} \times \frac{f_0^m - (-i f_\infty)^m}{f_0^m + (-i f_\infty)^m}$, $\bar{e}_{\omega_1 + \omega_2} = e_{\omega_1 + \omega_2}$, $\bar{e}_{2\omega_2} = e_{2\omega_2} \times \frac{f_0^m + (-i f_\infty)^m}{f_0^m - (-i f_\infty)^m}$.

Гиперпространство выглядит так:

(над точкой общего положения гиперплоскость $\mathcal{Q}_{x,1}$ устроена так же, как в примере 5.7, рисунок не приводится).

5.9. $(Z_m, \tilde{D}_m, V_4)$, m **четно**. Субрегулярные $(B \times H)$ -полуинварианты такие же, как в п. 5.8.

Образующие $e(\Gamma)$: $e_{2\omega_1} = f_0 f_\infty$, e_{ω_2} , e_{ω_3} имеют H -веса $(1, -1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$.

Образующие $\bar{e}(\bar{\Gamma})$:

$$\begin{aligned}\bar{e}_{2\omega_1} &= e_{2\omega_1} \times \frac{(f_0^m - (-if_\infty)^m)(f_0^m + (-if_\infty)^m)}{f_0^m f_\infty^m}, \\ \bar{e}_{\omega_2} &= e_{\omega_2} \times \frac{(f_0^m - (-if_\infty)^m)(f_0^m + (-if_\infty)^m)}{f_0^m f_\infty^m}, \\ \bar{e}_{\omega_3} &= e_{\omega_3} \times \frac{(f_0^{m/2} - i(-if_\infty)^{m/2})(f_0^{m/2} + i(-if_\infty)^{m/2})}{f_0^{m/2} f_\infty^{m/2}}.\end{aligned}$$

Гиперпространство выглядит так:

Т. О. П.

Здесь нужно пояснение: в этом (и только в этом) примере $\dim Z = 2$, поэтому картинки на самом деле не двумерные, а *трехмерные* – вертикальная ось отвечает

за две координатные функции ω_2, ω_3 . В остальных примерах нашей серии гиперплоскости $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{Q}_{x,1}$ над точками общего положения устроены так же, как в этом примере (только на этот раз они двумерны), рисунки не приводятся.

5.10. $(Z_{2m}, \tilde{D}_m, Z_2)$. Субрегулярные $(B \times H)$ -полуинварианты такие же, как в п. 5.8.

Образующие $e(\Gamma)$: $e_{2\omega_1} = f_0 f_\infty$, e_{ω_2} имеют H -веса $(1, -1)$, $(1, -1)$.

Образующие $\bar{e}(\bar{\Gamma})$:

$$\bar{e}_{2\omega_1} = e_{2\omega_1} \times \frac{(f_0^m - (-if_\infty)^m)(f_0^m + (-if_\infty)^m)}{f_0^m f_\infty^m}, \quad \bar{e}_{\omega_2} = e_{\omega_2} \times \frac{f_0^m + (-if_\infty)^m}{f_0^m - (-if_\infty)^m}.$$

Гиперпространство выглядит так:

5.11. $(\tilde{D}_{m/2}, \tilde{D}_m, Z_2)$, m **четно**. Субрегулярные $(B \times H)$ -полуинварианты – это $\bar{f}_\Gamma = f_\Gamma$, $\bar{f}_P = f_P f_B$, $\bar{f}_B = f_P^2 + f_B^2$ с бивесами $(2\omega_1, (1, -1))$, $(m\omega_1, (-1, -i^m))$, $(m\omega_1, (-1, i^m))$.

Образующие $e(\Gamma)$: $e_{2\omega_1} = \frac{f_B f_P}{f_\Gamma^{m/2-1}}$, e_{ω_2} имеют H -веса $(1, -1)$, $(1, -1)$.

Образующие $\bar{e}(\bar{\Gamma})$: $\bar{e}_{2\omega_1} = e_{2\omega_1} \times \frac{f_P^2 + f_B^2}{f_\Gamma^{m/2}}$, $\bar{e}_{\omega_2} = e_{\omega_2} \times \frac{f_P^2 + f_B^2}{f_\Gamma^{m/2}}$.

Гиперпространство выглядит так:

5.12. $(\tilde{D}_2, \tilde{T}, Z_3)$. Субрегулярные $(B \times H)$ -полуинварианты – это $\bar{f}_B = f_\Gamma^2 + \varepsilon f_B^2 + \varepsilon^2 f_P^2$, $\bar{f}_\Gamma = f_\Gamma^2 + \varepsilon^2 f_B^2 + \varepsilon f_P^2$, $\bar{f}_P = f_\Gamma f_P f_B$ (где ε – примитивный корень степени 3 из 1) с бивесами $(4\omega_1, \varepsilon)$, $(4\omega_1, \varepsilon^{-1})$, $(6\omega_1, 1)$.

Образующие $e(\Gamma)$: $e_{2\omega_1} = \frac{f_B f_P}{f_\Gamma}$ (не H -полуинвариант), e_{ω_2} (имеет H -вес ε).

Образующие $\bar{e}(\bar{\Gamma})$:

$$\bar{e}_{2\omega_1} = e_{2\omega_1} \times \frac{(f_\Gamma^2 + \varepsilon f_B^2 + \varepsilon^2 f_P^2)(f_\Gamma^2 + \varepsilon^2 f_B^2 + \varepsilon f_P^2)}{f_B^2 f_P^2}, \quad \bar{e}_{\omega_2} = e_{\omega_2} \times \frac{f_\Gamma^2 + \varepsilon f_B^2 + \varepsilon^2 f_P^2}{f_\Gamma^2 + \varepsilon^2 f_B^2 + \varepsilon f_P^2}.$$

Гиперпространство выглядит так:

5.13. $(\tilde{T}, \tilde{C}, Z_2)$. Субрегулярные $(B \times H)$ -полуинварианты – это $\bar{f}_B = f_B f_\Gamma$, $\bar{f}_P = f_B^3 - f_\Gamma^3$, $\bar{f}_\Gamma = f_P$ с бивесами $(8\omega_1, 1)$, $(12\omega_1, -1)$, $(6\omega_1, -1)$.

Образующие $e(\Gamma)$: $e_{2\omega_1} = \frac{f_B f_\Gamma}{f_P}$, e_{ω_2} имеют H -веса $(-1, -1)$.

Образующие $\bar{e}(\bar{\Gamma})$: $\bar{e}_{2\omega_1} = e_{2\omega_1} \times \frac{f_P^2}{f_B^3 - f_\Gamma^3}$, $\bar{e}_{\omega_2} = e_{\omega_2} \times \frac{f_P^2}{f_B^3 - f_\Gamma^3}$.

Гиперпространство выглядит так:

5.14. $G = \text{SL}_3$, $H = T$ – **максимальный тор**. Группа G состоит из матриц

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}, \quad \det g = 1,$$

B состоит из верхнетреугольных, T – из диагональных матриц. Группа $\mathfrak{X}(B)$ порождается фундаментальными весами $\omega_1(g) = g_{11}$, $\omega_2(g) = g_{11}g_{22} \forall g \in B$. $\mathfrak{X}(H)$ порождается весами $\varepsilon_i(g) = g_{ii} \forall g \in H$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$. Обозначим: $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$ – простые корни, $\rho = \omega_1 + \omega_2 = \alpha_1 + \alpha_2$.

Субрегулярные полуинварианты – это $f_i(g) = g_{3i}$, $\tilde{f}_i(g) = \begin{vmatrix} g_{2j} & g_{2k} \\ g_{3j} & g_{3k} \end{vmatrix}$, где (i, j, k) – циклическая перестановка $(1, 2, 3)$, с бивесами $(\omega_2, \varepsilon_i)$, $(\omega_1, -\varepsilon_i)$.

Регулярные полуинварианты заполняют двумерное подпространство $k[G]_{(\rho, 0)}^{(B \times H)} \ni f_i \tilde{f}_i$, $f_1 \tilde{f}_1 + f_2 \tilde{f}_2 + f_3 \tilde{f}_3 = 0$.

Γ совпадает с решеткой корней, $e_{\alpha_1} = \frac{\tilde{f}_1 \tilde{f}_2 \tilde{f}_3}{F}$, $e_{\alpha_2} = \frac{f_1 f_2 f_3}{F}$.

Всякое G -нормирование, отвечающее дивизору с плотной G -орбитой, пропорционально $v_{x(t)}$, где

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & t^p & u(t) \\ 0 & 1 & t^q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

причем можно считать $p, q, d = v_t(u(t)) \leq 0$.

Вычисляя аналогично 5.1 значения $v_{x(t)}(\alpha_1 f_1 \tilde{f}_1 + \alpha_2 f_2 \tilde{f}_2 + \alpha_3 f_3 \tilde{f}_3)$, мы видим, что множество G -нормирований с подскоком в точке x , отвечающих дивизорам с плотной G -орбитой, задается неравенствами $a_1, a_2 \leq 0 \leq \delta$ (если $x = x_i$ – точка, отвечающая $f_i \tilde{f}_i$) или $a_1, a_2 \leq -2\delta \leq 0$ (если x – выделенная точка), или $a_1, a_2 \leq -\delta \leq 0$ (если x – точка общего положения), причем $\delta = 0 \implies a_1$ или $a_2 = 0$, где a_i – координаты в разложении центральной части нормирования по базису $\omega_i^\vee \in \Gamma^*$, дуальному к α_i . Значит, конус $\mathcal{V}_x$ задается теми же неравенствами без ограничений при $\delta = 0$.

Гиперпространство выглядит так:

Глядя на рисунок, можно увидеть, например, что не существует G -инвариантной B -карты, кроме той, для которой $\mathcal{W} = \emptyset$, и соответствующий гиперконус пересекается с $\mathcal{V}$ по $\{0\}$. Это значит, что G/H не может быть вложена в качестве незамкнутой орбиты в аффинное G -многообразие (хорошо известный факт).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Множество инвариантных нормирований для SL_3/T вычислено в [18] (в несколько иных терминах).

Список литературы

1. Бурбаки Н. Коммутативная алгебра. М.: Мир, 1971.
2. Винберг Э. Б., Попов В. Л. Теория инвариантов // Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. Фунд. напр. Т. 55. М.: ВИНТИ, 1989. С. 137–309.
3. Данилов В. И. Геометрия торических многообразий // УМН. 1978. Т. 33. № 2. С. 85–134.
4. Попов В. Л. Квазиоднородные аффинные алгебраические многообразия группы $\mathrm{SL}(2)$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37. № 4. С. 792–832.
5. Спрингер Т. А. Линейные алгебраические группы // Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. Фунд. напр. Т. 55. М.: ВИНТИ, 1989. С. 1–136.
6. Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981.

7. *Brion M.* Parametrization and embeddings of a class of homogeneous spaces // Contemporary Mathematics. 1992. V. 131. № 3. P. 353–360.
8. *Hartshorn R.* Ample vector bundles // Publ. Math. IHES. 1966. № 29. P. 63–94.
9. *Knop F., Kraft H., Luna D., Vust Th.* Local properties of algebraic group actions // Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie / Eds. H. Kraft, P. Slodowy, T. A. Springer. DMV Seminar 13. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1989. P. 77–88.
10. *Kempf G., Knudson F., Mumford D., Saint-Donat B.* Toroidal embeddings. I // Lect. Notes Math. 1973. V. 339. P. 209.
11. *Knop F.* The Luna–Vust theory of spherical embeddings // Proc. of the Hyderabad Conf. on Algebraic Groups. Madras: Manoj Prakashan, 1991. P. 225–249.
12. *Knop F.* Über Bewertungen, welche unter einer reduktiven Gruppe invariant sind // Math. Ann. 1993. V. 295. P. 333–363.
13. *Knop F.* Über Hilbert vierzehntes problem für Varietäten mit Kompliziertheit eins // Math. Zeit. 1993. V. 213. P. 33–36.
14. *Luna D., Vust Th.* Plongements d’espaces homogenes // Comment. Math. Helv. 1983. V. 58. P. 186–245.
15. *Moser-Jauslin L.* Normal embeddings of $SL(2)/\Gamma$: Thesis. Geneva, 1987.
16. *Oda T.* Convex bodies and algebraic geometry: an introduction to the theory of toric varieties. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
17. *Sumihiro H.* Equivariant completion // J. Math. Kyoto Univ. 1974. V. 14. № 1. P. 1–28.
18. *Wargane B.* Détermination des valuations invariantes de $SL(3)/T$: Thèse. Grenoble, 1982.

Московский государственный университет
 Механико-математический факультет, кафедра высшей алгебры
 Москва, 119899
 e-mail: timashev@mech.math.msu.su

Поступило в редакцию
 17.V.1996