Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ха Зуй Банг, Изучение свойств функций из пространства Орлича в зависимости от геометрии их спектра, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 2, 163–198

DOI: <https://doi.org/10.4213/im120>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 13:18:19

УДК 517.9

Ха Зуи Банг

Изучение свойств функций из пространства Орлича в зависимости от геометрии их спектра

Изучается геометрия спектра (носителя преобразования Фурье) функций из пространства Орлича $L_{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ и доказано, в частности, что если $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ и $f(x) \not\equiv 0$, то для любой точки спектра функции f существует последовательность точек с ненулевыми компонентами из ее спектра, стремящихся к ней. Доказывается, что поведение последовательности норм Люксембурга производных функции полностью характеризуется ее спектром. Даются с помощью нового метода неравенства Никольского в норме Люксембурга для функций с произвольным спектром. Полученные результаты применяются для получения теорем типа Пэли–Винера–Шварца для необязательно выпуклых случаев и для изучения некоторых вопросов теории пространств Соболева–Орлича бесконечного порядка, развиваемой в последние годы Ю. А. Дубинским и его учениками.

Библиография: 31 наименование.

Целые функции экспоненциального типа, ограниченные на действительном пространстве $\mathbb{R}^n$, имеют свойства, аналогичные соответствующим свойствам тригонометрических полиномов. В то время как тригонометрические полиномы являются хорошим средством приближения периодических функций, целые функции экспоненциального типа могут служить средством приближения непериодических функций, заданных на n -мерном пространстве.

В данной работе мы изучим некоторые свойства целых функций экспоненциального типа (которые как функции от действительного переменного принадлежат пространству Орлича), обусловленные геометрией их спектра (носителя преобразования Фурье), и дадим некоторые их применения.

Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Тогда ее преобразование Фурье $\hat{f}(\xi)$, вообще говоря, является обобщенной функцией (если $p > 2$), поэтому совершенно неясна геометрия ее спектра. В § 1 мы изучаем геометрию спектра функций пространства Орлича $L_{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ и доказываем, в частности, что если $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, и $f \not\equiv 0$, то для любой точки спектра функции f существует последовательность точек с ненулевыми компонентами из ее спектра, стремящаяся к ней. Это изучение имеет применения в последующих параграфах. В § 2 мы изучаем поведение последовательности норм производных $\|D^{\alpha} f\|_{(\Phi)}$, $\alpha \geq 0$, и показываем, что оно полностью характеризуется спектром функции f . В § 3 с помощью нового метода изучаем неравенства Никольского в норме пространства Орлича для функций с произвольным спектром. Следует отметить, что неравенства Никольского [1], [2], играющие очень важную роль в теории функций и имеющие обширные и важные приложения, были изучены в многочисленных работах (см., например, [1]–[5] и библиографию в [6]). В § 4 мы применим результаты предыдущих параграфов для получения

Работа поддержана Национальной программой естественных наук Вьетнама.

теорем типа Пэли–Винера–Шварца для необязательно выпуклых случаев и для изучения некоторых вопросов теории пространств Соболева–Орлича бесконечно-го порядка, развиваемой в последние годы Ю. А. Дубинским и его учениками.

Пользуясь случаем, автор выражает глубокую благодарность члену-корреспонденту РАН О. В. Бесову за указание на одну неточность в прежнем доказательстве теоремы 1 данной работы.

§ 0. Необходимые сведения

Пусть $\Phi(t): [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$ – произвольная функция Юнга, т.е. $\Phi(0) = 0$, $\Phi(t) \geq 0$, $\Phi(t) \not\equiv 0$ и $\Phi(t)$ выпукла.

Функция

$$\bar{\Phi}(t) = \sup_{s \geq 0} \{ts - \Phi(s)\}$$

называется *дополнительной функцией* к функции Юнга $\Phi(t)$. Тогда $\bar{\Phi}(t)$ также является функцией Юнга. Из определения функции Юнга легко видеть, что $\Phi(t)/t$ не убывает на $[0, +\infty)$ и, подавно, $\Phi(t)$ не убывает.

Далее, пусть G – некоторая область в $\mathbb{R}^n$ или тор $\mathbb{T}^n$. Через $L_\Phi(G)$ будем обозначать совокупность всех функций $u(x)$ таких, что ее норма Люксембурга

$$\|u\|_{(\Phi)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_G \Phi \left(\frac{|u(x)|}{\lambda} \right) dx \leq 1 \right\} < \infty.$$

Тогда $L_\Phi(G)$ является банаховым пространством и называется *пространством Орлича*. Норма Люксембурга эквивалентна норме Орлича $\|\cdot\|_\Phi$, причем

$$\|u\|_{(\Phi)} \leq \|u\|_\Phi \leq 2\|u\|_{(\Phi)}.$$

Напомним, что $\|\cdot\|_{(\Phi)} = \|\cdot\|_p$, если $1 \leq p < \infty$ и $\Phi(t) = t^p$, и $\|\cdot\|_{(\Phi)} = \|\cdot\|_\infty$, если $\Phi(t) = 0$ при $0 \leq t \leq 1$ и $\Phi(t) = \infty$ при $t > 1$ (см., например, [7]–[10]).

ЛЕММА 1 [10]. Пусть $u \in L_\Phi(\mathbb{R}^n)$ и $v \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\|u * v\|_\Phi \leq \|u\|_\Phi \|v\|_1.$$

ЛЕММА 2 [10]. Пусть $u \in L_\Phi(G)$ и $v \in L_{\bar{\Phi}}(G)$. Тогда

$$\int_G |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_\Phi \|v\|_{\bar{\Phi}}.$$

Пусть Q – некоторая область в $\mathbb{R}^n$ и $m \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим через $W_{m,2}(Q)$ пространство Соболева, т.е. пополнение $C^m(Q)$ по норме

$$\|f\|_{m,2} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L_2(Q)}^2 \right)^{1/2},$$

а $W_{m,2}^0(Q)$ – пополнение $C_0^\infty(Q)$ по этой норме.

Для $s \in \mathbb{R}$ положим

$$H_{(s)} = \left\{ f \in S' : \|f\|_{(s)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |Ff(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

Тогда имеет место топологическое равенство $H_{(k)} = W_{k,2}(\mathbb{R}^n)$, если $k \in \mathbb{Z}_+$ (см., например, [11]–[13]).

Обозначим через F преобразование Фурье, $\text{sp}(f) = \text{supp } Ff$, $\Delta_\nu = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi_j| \leq \nu_j, j = 1, \dots, n\}$, $D = (D_1, \dots, D_n)$, $D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\nu_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$. Будем считать, что $\frac{0}{0} = 1$ и $\frac{\lambda}{0} = \infty$ для $\lambda > 0$.

§ 1. Геометрия спектра

Изучаем теперь геометрию спектра функций пространства Орлича $L_\Phi(\mathbb{R}^n)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Phi(t) > 0$ для $t > 0$, $f \in L_\Phi(\mathbb{R}^n)$, $f(x) \not\equiv 0$ и $\xi^0 \in \mathbb{R}^n$ – произвольная точка. Тогда распределение Ff не может быть сосредоточенным на гиперплоскостях $\xi_j = \xi_j^0$, $j = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\nu \geq 0$ – такой вектор, что $\xi^0 \in \Delta_\nu$, и функция $\hat{\varphi}(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\hat{\varphi}$ равна единице в некоторой окрестности Δ_ν . Тогда $F^{-1}\hat{\varphi}\hat{f} = \varphi * f \in L_\Phi(\mathbb{R}^n)$ в силу леммы 1. Следовательно, нам достаточно доказать нашу теорему только для функций с ограниченным спектром.

Положим $\hat{h}(\xi) = \hat{f}(\xi - \xi^0)$. Тогда $h(x) = e^{i\xi^0 x} f(x)$ принадлежит $L_\Phi(\mathbb{R}^n)$ и обладает ограниченным спектром.

Нам осталось доказать, что распределение $\hat{h}(\xi)$ не может быть сосредоточенным на гиперплоскостях $\xi_j = 0$, $j = 1, \dots, n$. Докажем методом от противного. Пусть распределение $\hat{h}(\xi)$ сосредоточено на гиперплоскостях $\xi_j = 0$, $j = 1, \dots, n$. Тогда положим для каждого $j = 1, \dots, n$

$$G_j = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_i \neq 0, i \in I \setminus \{j\}\},$$

где $I = \{1, \dots, n\}$. Тогда G_j открыто. Для каждой функции $\psi(\xi)$ из $C_0^\infty(G_j)$ распределение $\psi(\xi)\hat{h}(\xi)$ сосредоточено на гиперплоскости $\xi_j = 0$. Следовательно, учитывая одно замечание о теореме 2.3.5, упомянутое в примере 5.1.2 из [12], получим

$$F^{-1}(\psi\hat{h})(x) = \sum_{l=0}^N g_l(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)(-ix_j)^l, \quad (1)$$

где N – порядок распределения $\hat{h}(\xi)$ ($N < \infty$, так как $\text{supp } \hat{h}$ компактно) и $\hat{g}_l(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n)$, $0 \leq l \leq N$, – распределения с компактным носителем.

Из леммы 3, формулируемой позже, имеем для некоторого $C > 0$

$$C^{-1} \|F^{-1}(\psi\hat{h})\|_\infty \leq \|F^{-1}(\psi\hat{h})\|_{(\Phi)} = \|F^{-1}\psi * h\|_{(\Phi)} \leq 2 \|F^{-1}\psi\|_1 \|h\|_{(\Phi)} < \infty.$$

Следовательно, равенство (1) возможно, лишь когда $N = 0$. Отсюда функция $F^{-1}(\psi\hat{h})(x)$ не зависит от x_j .

Далее, $F^{-1}(\psi\hat{h})(x) \in L_{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ в силу леммы 1. Следовательно, по определению

$$\int_{\mathbb{R}^n} (|F^{-1}(\psi\hat{h})(x)|/\lambda) dx < \infty \quad (2)$$

для некоторого $\lambda > 0$. Отсюда получим

$$\Phi(|F^{-1}(\psi\hat{h})(x)|/2\lambda) \equiv 0. \quad (3)$$

Действительно, пусть

$$\Phi(|F^{-1}(\psi\hat{h})(x^0)|/2\lambda) > 0$$

для некоторой точки x^0 . Из неубываемости $\Phi(t)$ и непрерывности $F^{-1}(\psi\hat{h})(x)$ следует, что для некоторого $\delta > 0$

$$\Phi(|F^{-1}(\psi\hat{h})(x^0)|/2\lambda) \geq \delta$$

в некоторой окрестности точки x^0 . Это противоречит (2), так как $F^{-1}(\psi\hat{h})(x)$ не зависит от x_j .

Из (3) и предположения $\Phi(t) > 0$, $t > 0$, вытекает $F^{-1}(\psi\hat{h})(x) \equiv 0$. Отсюда из произвольности $\psi(\xi) \in C_0^\infty(G_j)$ следует, что распределение $\hat{h}(\xi)$ должно быть сосредоточенным на плоскостях $\xi_i = \xi_j = 0$, $i, j \in I$, $i \neq j$.

Положим теперь для $i, j \in I$, $i \neq j$,

$$G_{ij} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_l \neq 0, \quad l \in I \setminus \{i, j\}\}.$$

Тогда G_{ij} открыто. Повторяя рассуждения, проведенные для случая G_j , легко доказать, что распределение $\psi(\xi)\hat{h}(\xi)$ тождественно равно нулю для любой функции $\psi \in C_0^\infty(G_{ij})$. Тем самым мы доказали, что $\hat{h}(\xi)$ сосредоточено на плоскостях $\xi_{i_1} = \xi_{i_2} = \xi_{i_3} = 0$, $i_1, i_2, i_3 \in I$.

Повторяя рассуждения, приведенные выше, еще $k-3$ раз, выводим, что распределение $\hat{h}(\xi)$ сосредоточено в точке $\xi_1 = \dots = \xi_n = 0$, т.е. $h(x)$ – полином, что возможно лишь когда $h(x) \equiv 0$. Это противоречит условию теоремы. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 и ее доказательства вытекают следующие результаты.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\Phi(t) > 0$, $t > 0$, $f \in L_{\Phi}(\mathbb{R}^n)$, $f(x) \not\equiv 0$ и $\xi^0 \in \text{sp}(f)$. Тогда существует последовательность точек спектра $\text{sp}(f)$ с ненулевыми компонентами, сходящаяся к ξ^0 .

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\Phi(t) > 0$, $t > 0$, $f \in L_{\Phi}(\mathbb{R}^n)$, $f(x) \not\equiv 0$ и $\xi^0 \in \text{sp}(f)$ – произвольная точка. Тогда ограничение распределения $\hat{f}(\xi)$ на любую окрестность ξ^0 также не может быть сосредоточенным на гиперплоскостях $\xi_j = \xi_j^0$, $j = 1, \dots, n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Предположение $\Phi(t) > 0$, $t > 0$, в утверждении теоремы 1 нельзя снять, ибо в противном случае $L_{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ содержит все постоянные функции.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $1 \leq p < \infty$, $f(x) \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $f(x) \not\equiv 0$ и $\text{sp}(f)$ ограничен. Тогда в силу теоремы 1 распределение $\hat{f}(\xi)$ не может быть сосредоточенным на гиперплоскостях $\xi_j = \xi_j^0$, $j = 1, \dots, n$, где ξ^0 есть произвольная точка. В то же время $\hat{f}(\xi)$ может быть сосредоточенным на сфере. Действительно, пусть $n = 3$ и $f(x) = \frac{\sin|x|}{|x|}$. Тогда, как известно (см. [14]),

$$\text{sp}(f) = \{\xi : |\xi| = 1\},$$

и, как легко показать, $f(x) \in L_p(\mathbb{R}^n)$ для любого $p > 3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть $\Phi(t) > 0$ для $t > 0$, $f \in L_\Phi(\mathbb{R}^n)$, $f(x) \not\equiv 0$ и $\xi^0 \in \text{sp}(f)$ – произвольная точка. Тогда с помощью ортогонального преобразования координат можно доказать, что ограничение $\hat{f}(\xi)$ на любую окрестность точки ξ^0 не может быть сосредоточенным на любом конечном числе плоских гиперплоскостей.

§ 2. Поведение последовательности норм производных

Пусть K – некоторое компактное множество в $\mathbb{R}^n$ и $\Phi(t)$ – произвольная функция Юнга. Обозначим

$$\mathfrak{M}_{K\Phi} = \{f(x) \in L_\Phi(\mathbb{R}^n) : \text{supp } Ff \subset K\}.$$

Исследуем сначала некоторые свойства пространств $\mathfrak{M}_{K\Phi}$.

ЛЕММА 3. *Имеют место следующие непрерывные вложения:*

$$\mathfrak{M}_{K1} \subset \mathfrak{M}_{K\Phi} \subset \mathfrak{M}_{K\infty}, \quad (4)$$

где

$$\mathfrak{M}_{Kp} = \{f(x) \in L_p(\mathbb{R}^n) : \text{supp } Ff \subset K\}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\hat{\varphi}$ равна единице в некоторой окрестности K и $f \in \mathfrak{M}_{K\Phi}$. Тогда $\hat{f} = \hat{\varphi}\hat{f}$. Отсюда и из леммы 1 следует, что

$$|\varphi * f(x)| = \left| \int \varphi(y)f(x-y) dy \right| \leq \|\varphi\|_{\overline{\Phi}} \|f\|_{(\Phi)}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Следовательно,

$$\|f\|_\infty = \|\varphi * f\|_\infty \leq \|\varphi\|_{\overline{\Phi}} \|f\|_{(\Phi)}.$$

Тем самым мы доказали правую часть (4), причем можно выбрать константу

$$M_1 = \inf \{ \|\varphi\|_{\overline{\Phi}} : \hat{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \hat{\varphi} = 1 \text{ в некоторой окрестности } K \}.$$

Пусть теперь $g \in \mathfrak{M}_{K1}$ и $K \subset \Delta_\nu$. Тогда из неравенства Никольского следует, что

$$\|g\|_\infty \leq 2^n (\nu_1 \dots \nu_n) \|g\|_1.$$

Положим

$$H = \inf \left\{ M > 0 : \Phi \left(\frac{1}{M} \right) \leq \frac{\|g\|_\infty}{\|g\|_1} \right\}.$$

Тогда для любого $\epsilon > 0$ имеем

$$\int \Phi \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_\infty(H + \epsilon)} \right) dx \leq \Phi \left(\frac{1}{H + \epsilon} \right) \frac{\|g\|_1}{\|g\|_\infty} \leq 1,$$

ибо, очевидно, $\Phi(\lambda t) \leq \lambda \Phi(t)$, если $0 \leq \lambda \leq 1$. Отсюда получим

$$\|g\|_{(\Phi)} \leq H \|g\|_\infty.$$

Для доказательства непрерывности вложения выберем такую функцию $\hat{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, что $\hat{\varphi} = 1$ в некоторой окрестности компакта K . Тогда из доказанной правой части (4) вытекает, что

$$\|g\|_{(\Phi)} = \|g * \varphi\|_{(\Phi)} \leq 2\|g\|_1 \|\varphi\|_\Phi < \infty.$$

Ясно, что $\|\varphi\|_\Phi < \infty$. Отсюда константу вложения можно определить следующей величиной:

$$2 \inf \{ \|\varphi\|_\Phi : \hat{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \hat{\varphi} = 1 \text{ в некоторой окрестности } K \}.$$

Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $\Phi(t) > 0$ для $t > 0$. Тогда

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad (5)$$

для всех $f \in \mathfrak{M}_{K\Phi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K \subset \Delta_\nu$. Докажем методом от противного. Допустим, что существуют функция $f \in \mathfrak{M}_{\nu\Phi}$, константа $c > 0$ и последовательность точек $|x^m| \rightarrow \infty$ такие, что

$$|f(x^m)| \geq 2c, \quad m = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Не теряя общности, можем считать, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|) dx < \infty \quad (7)$$

и $|x_1^m| \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$. Из леммы 1, из равенства

$$f(x) - f(x^m) = \int_{x_1^m}^{x_1} \frac{\partial}{\partial t_1} f(t) dt$$

и неравенства Бернштейна–Никольского [2] вытекает

$$|f(x) - f(x^m)| \leq \nu_1 \|f\|_\infty |x_1 - x_1^m| \quad (8)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $m \geq 1$.

Положим $r = c/\nu_1 \|f\|_\infty$; получим из (6), (8)

$$|f(x)| \geq c \quad \text{для} \quad |x_1 - x_1^m| \leq r \quad \text{и} \quad m \geq 1. \quad (9)$$

С другой стороны, не теряя общности, можем считать, что

$$x_1^{m+1} - x_1^m \geq r, \quad m \geq 1.$$

Следовательно, из (7) и (9) имеем

$$\begin{aligned} \infty &> \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|) dx \geq \sum_{m=1}^{\infty} \int_{|x-x^m| \leq r} \Phi(|f(x)|) dx \\ &\geq \sum_{m=1}^{\infty} \Phi(c) \text{mes } B(x^m, r) = \sum_{m=1}^{\infty} \pi r^n \Phi(c) = \infty, \end{aligned}$$

где $B(x^m, r)$ есть шар радиуса r с центром в точке x^m , что невозможно. Лемма 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В случае, когда $\Phi(t) = t^p$, $1 \leq p < \infty$, лемма 4 доказана М. Планшерелем и Г. Пойя (см., например, [2]) другим методом. Лемма 4 неверна, если существует такая точка $t_0 > 0$, что $\Phi(t_0) = 0$, ибо в этом случае $\mathfrak{M}_{K\Phi}$ содержит все постоянные функции.

Центральным результатом данного параграфа является решение следующей проблемы. Пусть $f \in L_\Phi(\mathbb{R}^n)$ и $\text{sp}(f)$ ограничен. Тогда ясно, что $D^\alpha f(x) \in L_\Phi(\mathbb{R}^n)$ для всех $\alpha \geq 0$. Ставится вопрос о характере поведения последовательности $\|D^\alpha f\|_{(\Phi)}$, $\alpha \geq 0$. Оказывается, что это поведение полностью характеризуется спектром функции f . А именно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Phi(t)$ – произвольная функция Юнга, $f(x) \in L_\Phi(\mathbb{R}^n)$ и $\text{sp}(f)$ ограничен. Тогда

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \left(\|D^\alpha f\|_{(\Phi)} / \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\alpha| \right)^{1/|\alpha|} = 1. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что $f(x) \neq 0$. Докажем сначала, что

$$\varliminf_{|\alpha| \rightarrow \infty} (\|D^\alpha f\|_{(\Phi)} / |\xi^\alpha|)^{1/|\alpha|} \geq 1 \quad (11)$$

для любой точки $\xi \in \text{sp}(f)$.

Действительно, пусть $\xi^0 \in \text{sp}(f)$, $\xi_j^0 \neq 0$, $j = 1, \dots, n$. (В силу теоремы 1 такие точки существуют, если $\Phi(t) > 0$ для $t > 0$.) Для удобства считаем, что $\xi_j^0 > 0$, $j = 1, \dots, n$. Далее, зафиксируем произвольное число $\epsilon > 0$ такое, что $2\epsilon < \xi_j^0$, $j = 1, \dots, n$, и область $G(\xi^0 \in G)$, содержащуюся в кубе $K = \{\xi : \xi_j^0 - \epsilon \leq \xi_j \leq \xi_j^0 + \epsilon, j = 1, \dots, n\}$, и выберем функции $\hat{v}(\xi), \hat{w}(\xi) \in C_0^\infty(G)$, для которых $\xi^0 \in \text{supp}(\hat{v}\hat{f})$ и $\langle \hat{v}\hat{f}, \hat{w} \rangle \neq 0$.

Пусть $\psi \in C_0^\infty(G)$ и $\psi = 1$ в некоторой окрестности $\text{supp } \widehat{w}$. Тогда для любого $\alpha \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \langle \widehat{v} \widehat{f}, \widehat{w} \rangle &= \langle \psi(\xi) \xi^{-\alpha} \xi^\alpha \widehat{v}(\xi) \widehat{f}(\xi), \widehat{w}(\xi) \rangle = \langle \xi^\alpha \widehat{v}(\xi) \widehat{f}(\xi), \psi(\xi) \xi^{-\alpha} \widehat{w}(\xi) \rangle \\ &= \langle F^{-1}(\xi^\alpha \widehat{v}(\xi) \widehat{f}(\xi)), F(\psi(\xi) \xi^{-\alpha} \widehat{w}(\xi)) \rangle \\ &= \langle F^{-1}(\xi^\alpha \widehat{v}(\xi) \widehat{f}(\xi)), F(\xi^{-\alpha} \widehat{w}(\xi)) \rangle. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу лемм 1, 2 имеем

$$0 < |\langle \widehat{v} \widehat{f}, \widehat{w} \rangle| = |\langle D^\alpha(v * f), F \widehat{w}_\alpha \rangle| \leq 2 \|v\|_1 \|D^\alpha f\|_{(\Phi)} \|F \widehat{w}_\alpha\|_{(\overline{\Phi})}, \quad (12)$$

где $\widehat{w}_\alpha(\xi) = \xi^{-\alpha} \widehat{w}(\xi)$, $\alpha \geq 0$. Докажем теперь, что

$$\|F \widehat{w}_\alpha\|_{(\overline{\Phi})} \leq C(\xi^0 - 2\epsilon)^{-\alpha}, \quad \alpha \geq 0, \quad (13)$$

где C – некоторая константа, не зависящая от α , и $\xi^0 - 2\epsilon = (\xi_1^0 - 2\epsilon, \dots, \xi_n^0 - 2\epsilon)$.

В самом деле, имеем для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ и $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} (-i)^{|\beta|} x^\beta F \widehat{w}_\alpha(x) &= (-i)^{|\beta|} \int_G x^\beta e^{-ix\xi} \xi^{-\alpha} \widehat{w}(\xi) d\xi = \int_G (D_\xi^\beta e^{-ix\xi})(\xi^{-\alpha} \widehat{w}(\xi)) d\xi \\ &= (-1)^{|\beta|} \int_G e^{-ix\xi} D^\beta(\xi^{-\alpha} \widehat{w}(\xi)) d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая формулу Лейбница и определение области G , получим для $|\beta| \leq 2n$

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta F \widehat{w}_\alpha(x)| &\leq \sum_{\gamma \leq \beta} \left\{ \frac{\beta!}{\gamma! (\beta - \gamma)!} \prod_{k=1}^n \alpha_k \dots (\alpha_k + \gamma_k - 1) \int_G |\xi^{-(\alpha + \gamma)} D^{\beta - \gamma} \widehat{w}(\xi)| d\xi \right\} \\ &\leq C_1 (\xi^0 - \epsilon)^{-\alpha} \sum_{\gamma \leq \beta} \frac{\beta!}{\gamma! (\beta - \gamma)!} \prod_{k=1}^n \alpha_k \dots (\alpha_k + \gamma_k - 1), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$C_1 = \max \left\{ \int_G |\xi^{-\gamma} D^{\nu - \gamma} \widehat{w}(\xi)| d\xi : \gamma \leq \nu, \quad |\nu| \leq 2n \right\} < \infty.$$

Из (14) вытекает, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \widehat{w}_\alpha(x)| \leq C_2 (\xi^0 - 2\epsilon)^{-\alpha}$$

для всех $|\beta| \leq 2n$ и $\alpha \geq 0$. Отсюда получим константу C_3 такую, что для всех $\alpha \geq 0$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + x_1^2) \dots (1 + x_n^2) |F \widehat{w}_\alpha(x)| \leq C_3 (\xi^0 - 2\epsilon)^{-\alpha}. \quad (15)$$

Далее, пусть число $0 < \lambda_0 < \infty$ такое, что $\bar{\Phi}(C_3/\lambda_0) \leq \pi^{-n}$. Тогда из (15), монотонности $\bar{\Phi}(t)$ и $\bar{\Phi}(\lambda t) \leq \lambda \bar{\Phi}(t)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, вытекает

$$\begin{aligned} \int \bar{\Phi} \left(\frac{|F\hat{\omega}_\alpha|}{\lambda_0(\xi^0 - 2\epsilon)^{-\alpha}} \right) dx &\leq \int \bar{\Phi} \left(\frac{C_3}{\lambda_0(1+x_1^2)\dots(1+x_n^2)} \right) dx \\ &\leq \bar{\Phi} \left(\frac{C_3}{\lambda_0} \right) \int \frac{dx}{(1+x_1^2)\dots(1+x_n^2)} \leq 1. \end{aligned}$$

Тогда по определению

$$\|F\hat{\omega}_\alpha\|_{(\bar{\Phi})} \leq \lambda_0(\xi^0 - 2\epsilon)^{-\alpha}$$

для всех $\alpha \geq 0$. Тем самым мы доказали (13).

Комбинируя (12) и (13), выводим

$$1 \leq \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} ((\xi^0 - 2\epsilon)^{-\alpha} \|D^\alpha f\|_{(\Phi)})^{1/|\alpha|}.$$

Отсюда, учитывая произвольность $\epsilon > 0$ и

$$\left(\frac{(\xi^0 - 2\epsilon)^{-\alpha}}{(\xi^0)^{-\alpha}} \right)^{1/|\alpha|} \leq \max_{1 \leq j \leq n} \frac{\xi_j^0}{\xi_j^0 - 2\epsilon},$$

немедленно получим (11).

Покажем теперь (11) для “нулевых” точек. Пусть $\xi^0 \in \text{sp}(f)$, $\xi^0 \neq 0$ и $\xi_1^0 \dots \xi_n^0 = 0$. Для удобства считаем, что $\xi_j^0 > 0$, $j = 1, \dots, k$, и $\xi_{k+1}^0 = \dots = \xi_n^0 = 0$ ($1 \leq k < n$). Заметим, что нам достаточно доказать (11) только для таких α , что $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$. И тогда доказательство проводится совершенно аналогично тому, как это было сделано выше после единственной модификации выбора ϵ . Зафиксируем произвольное число $\epsilon > 0$ такое, что $2\epsilon < \min_{1 \leq j \leq k} \xi_j^0$, и область G ($\xi^0 \in G$), содержащуюся в кубе

$$K = \{\xi : \xi_j^0 - \epsilon \leq \xi_j \leq \xi_j^0 + \epsilon, \quad j = 1, \dots, n\}.$$

Докажем теперь (10) для случая, когда $\Phi(t) > 0$, $t > 0$. Докажем сначала методом от противного, что

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \left(\|D^\alpha f\|_{(\Phi)} / \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\alpha| \right)^{1/|\alpha|} \geq 1. \quad (16)$$

Допустим, что существует подпоследовательность I_1 такая, что

$$(I_1) \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \left(\|D^\alpha f\|_{(\Phi)} / \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\alpha| \right)^{1/|\alpha|} < 1, \quad (17)$$

где символ (I_1) означает, что мы берем предел только для мультииндексов $\alpha \in I_1$. Тогда существуют подпоследовательность $I_2 \subset I_1$ и числа $0 \leq \beta_j \leq 1$, $j = 1, \dots, n$, такие, что $|\beta| = 1$ и

$$(I_2) \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \frac{\alpha_j}{|\alpha|} = \beta_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (18)$$

Покажем теперь

$$\lim_{\gamma \rightarrow \beta} \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\gamma| = \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\beta|, \quad (19)$$

если $\gamma \in \mathbb{R}_+^n$ и $\gamma \rightarrow \beta$.

Зафиксируем $h > 1$. Тогда существует такое число $\epsilon > 0$, что $h\gamma \geq \beta$ для $\gamma \in \mathbb{R}_+^n$ и $|\gamma - \beta| \leq \epsilon$. Далее, пусть $|\xi| \leq M$ для всех $\xi \in \text{sp}(f)$. Тогда для $\xi \in \text{sp}(f)$ и $\gamma \in \mathbb{R}_+^n$, $|\gamma - \beta| \leq \epsilon$, имеем

$$|\xi^\gamma| = |\xi^{\gamma-\beta/h}| |\xi^\beta|^{1/h} \leq M^{|\gamma-\beta/h|} \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\beta|^{1/h}.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim}_{\gamma \rightarrow \beta} \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\gamma| \leq M^{|\beta|(1-1/h)} \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\beta|^{1/h}.$$

Устремляя h к 1, выводим

$$\overline{\lim}_{\gamma \rightarrow \beta} \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\gamma| \leq \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\beta|.$$

Для получения (19) нам осталось показать

$$\underline{\lim}_{\gamma \rightarrow \beta} \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\gamma| \geq \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\beta|. \quad (20)$$

Пусть точка $\xi^* \in \text{sp}(f)$ такая, что $|\xi^{*\beta}| = \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\beta|$. Тогда в силу теоремы 1 распределение $\hat{f}(\xi)$ не сосредоточено на гиперплоскостях $\xi_j = 0$, $j = 1, \dots, n$. Следовательно, $|\xi^{*\beta}| > 0$. Далее, ограничение распределения $\hat{f}(\xi)$ на любую окрестность точки ξ^* также не может быть сосредоточенным на гиперплоскостях $\xi_j = 0$, $j = 1, \dots, n$. Следовательно, существует последовательность точек $m\xi \in \text{sp}(f)$, $m \geq 1$, таких, что $m\xi_j \neq 0$, $j = 1, \dots, n$, для любого $m \geq 1$ и $m\xi \rightarrow \xi^*$, $m \rightarrow \infty$. Тогда

$$\sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\gamma| \geq |m\xi^\gamma|$$

для любого $m \geq 1$. Отсюда

$$\underline{\lim}_{\gamma \rightarrow \beta} \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\gamma| \geq \underline{\lim}_{\gamma \rightarrow \beta} |m\xi^\gamma| = |m\xi^\beta|.$$

Устремляя m к ∞ , выводим (20), а следовательно, и (19).

Далее, пусть $\lambda > 1$. Тогда существует число $k \geq 1$ такое, что $\lambda|_k \xi^\beta| \geq |\xi^{*\beta}|$. Следовательно, из (18), (19) и (11) вытекает

$$\begin{aligned} (I_2) \quad \underline{\lim}_{|\alpha| \rightarrow \infty} \left(\|D^\alpha f\|_{(\Phi)} / \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\alpha| \right)^{1/|\alpha|} &= (I_2) \quad \underline{\lim}_{|\alpha| \rightarrow \infty} \|D^\alpha f\|_{(\Phi)}^{1/|\alpha|} / |\xi^{*\beta}| \\ &\geq (I_2) \frac{1}{\lambda} \underline{\lim}_{|\alpha| \rightarrow \infty} \|D^\alpha f\|_{(\Phi)}^{1/|\alpha|} / |k\xi^\beta| = (I_2) \frac{1}{\lambda} \underline{\lim}_{|\alpha| \rightarrow \infty} (\|D^\alpha f\|_{(\Phi)} / |k\xi^\alpha|)^{1/|\alpha|} \geq \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Это противоречит (17) при $\lambda \rightarrow 1$. Тем самым мы доказали (16).

Наконец, покажем

$$\overline{\lim}_{|\alpha| \rightarrow \infty} \left(\|D^\alpha f\|_{(\Phi)} / \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\alpha| \right)^{1/|\alpha|} \leq 1. \quad (21)$$

Зафиксируем область $G \supset \text{sp}(f)$ и функцию $\psi \in C_0^\infty(G)$ такие, что $\psi(\xi)$ равна единице в некоторой окрестности $\text{sp}(f)$. Положим $h_\alpha(\xi) = \psi(\xi)\xi^\alpha$, $\alpha \geq 0$. Тогда из неравенства Гёльдера следует, что для любого $s > n/2$

$$\begin{aligned} \|F^{-1}h_\alpha\|_1 &= \int (|\hat{h}_\alpha(\xi)|^2)^{1/2} d\xi \\ &\leq \left(\int |\hat{h}_\alpha(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi \right)^{1/2} \left(\int (1 + |\xi|^2)^{-s} d\xi \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|F^{-1}h_\alpha\|_1 \leq C' \|h_\alpha\|_{(s)}, \quad (22)$$

где $C' = C'(s)$ не зависит от h_α .

Комбинируя (22), топологическое равенство $H_{(k)} = W_{k,2}(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|D^\alpha f\|_{(\Phi)} = \|F^{-1}(\psi(\xi)\xi^\alpha) * f\|_{(\Phi)} \leq 2 \|F^{-1}(\psi(\xi)\xi^\alpha)\|_1 \|f\|_{(\Phi)},$$

получим

$$\|D^\alpha f\|_{(\Phi)} \leq C \|\psi(\xi)\xi^\alpha\|_{k,2} \|f\|_{(\Phi)}, \quad \alpha \geq 0, \quad (23)$$

где C не зависит от f и α и $k = [\frac{n}{2}] + 1$.

Из формулы Лейбница получим константу $C_1 = C_1(\psi, k)$ такую, что

$$\|\psi(\xi)\xi^\alpha\|_{k,2} \leq C_1 |\alpha|^k \sup \left\{ \sup_G |\xi^{\alpha-\gamma}| : \gamma \leq \alpha, \quad |\gamma| \leq k \right\}, \quad \alpha \geq 0. \quad (24)$$

С другой стороны, имеем

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \left(\sup \left\{ \sup_G |\xi^{\alpha-\gamma}| : \gamma \leq \alpha, \quad |\gamma| \leq k \right\} \right)^{1/|\alpha|} / \sup_G |\xi^\alpha|^{1/|\alpha|} = 1. \quad (25)$$

Докажем (25) методом от противного. Допустим, что существуют последовательность I_1 и число $\delta > 1$ такие, что

$$\sup \left\{ \sup_G |\xi^{\alpha-\gamma}|^{1/|\alpha|} : \gamma \leq \alpha, \quad |\gamma| \leq k \right\} \geq \delta \sup_G |\xi^\alpha|^{1/|\alpha|}, \quad \alpha \in I_1. \quad (26)$$

Следовательно, существуют подпоследовательность $I_2 \subset I_1$, числа $0 \leq \beta_j \leq 1$, $j = 1, \dots, n$, и мультииндекс γ^0 , $|\gamma^0| \leq k$, такие, что $|\beta| = 1$ и

$$\begin{aligned} (I_2) \quad \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \frac{\alpha_j - \gamma_j^0}{|\alpha|} &= \beta_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ \sup \left\{ \sup_G |\xi^{\alpha-\gamma}|^{1/|\alpha|} : \gamma \leq \alpha, \quad |\gamma| \leq k \right\} &= \sup_G |\xi^{\alpha-\gamma^0}|^{1/|\alpha|} \end{aligned}$$

для всех $\alpha \in I_2$. Следовательно, рассуждениями, аналогичными проведенным в доказательстве (19), получим

$$(I_2) \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \sup_G |\xi^{\alpha - \gamma^0}|^{1/|\alpha|} = (I_2) \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \sup_G |\xi^\alpha|^{1/|\alpha|} = \sup_G |\xi^\beta| > 0,$$

что противоречит (26). Равенство (25) доказано.

Комбинируя (23)–(25), получим

$$\overline{\lim}_{|\alpha| \rightarrow \infty} \|D^\alpha f\|_{(\Phi)}^{1/|\alpha|} / \sup_G |\xi^\alpha|^{1/|\alpha|} \leq 1. \quad (27)$$

Сейчас мы допустим (от противного), что (21) не выполняется. Тогда существуют подпоследовательность J и числа $\lambda > 1$, $0 \leq \beta_j \leq 1$, $j = 1, \dots, n$, такие, что $|\beta| = 1$ и

$$(J) \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \|D^\alpha f\|_{(\Phi)}^{1/|\alpha|} / \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\alpha|^{1/|\alpha|} = \lambda,$$

$$(J) \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \frac{\alpha_j}{|\alpha|} = \beta_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Следовательно, из справедливости (19) при замене $\text{sp}(f)$ множеством G (доказательство этого проводится аналогично, так как G открыто) и (27) получим

$$\sup_G |\xi^\beta| / \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\beta| \geq \lambda$$

для любой области $G \supset \text{sp}(f)$, что невозможно, так как $\sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\beta| > 0$. Доказательство первого случая закончено.

Рассмотрим теперь оставшийся случай, т.е. когда $\Phi(t_0) = 0$ для некоторой точки $t_0 > 0$. Этот случай оказывается более трудным. Отметим, что многие факты, используемые в доказательстве предыдущего случая, здесь неверны (например, равенство (19)).

Докажем сначала, что если $\sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\alpha| = 0$, то $D^\alpha f(x) \equiv 0$ (для того же α). В самом деле, не теряя общности, можно считать, что $\alpha_j \neq 0$, $j = 1, \dots, k$, и $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$ ($1 \leq k \leq n$). Тогда распределение $\hat{f}(\xi)$ сосредоточено на $\xi_j = 0$, $j \in \{1, \dots, k\} = I$. Нам достаточно доказать случай $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 1$.

Докажем теперь, что если $\xi^\alpha \psi(\xi) \hat{f}(\xi)$ сосредоточено на плоскости $\xi_{i_1} = \dots = \xi_{i_l} = 0$ для некоторых $i_1, \dots, i_l \in I$ и $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то $D^\alpha F^{-1} \psi * f(x) \equiv 0$. Действительно, $\xi^\alpha \psi(\xi) \hat{f}(\xi)$ сосредоточено на плоскости $\xi_1 = \dots = \xi_l = 0$ (для краткости считаем, что $i_j = j$, $j = 1, \dots, l$). Следовательно, учитывая одно замечание о теореме 2.3.5, упомянутое в примере 5.1.2 из [12], получим

$$F^{-1}(\xi^\alpha \psi(\xi) \hat{f}(\xi))(x) = \sum_{|\beta| \leq N} g_\beta(x'') (-ix')^\beta, \quad (28)$$

где N – порядок распределения $\hat{f}(\xi)$ ($N < \infty$, так как $\text{supp } \hat{f}$ компактно), $x' = (x_1, \dots, x_l)$, $x = (x', x'')$, $\beta \in \mathbb{Z}_+^l$ и $\hat{g}_\beta(\xi_{l+1}, \dots, \xi_n)$, $|\beta| \leq N$, – распределения с компактным носителем.

С другой стороны, из лемм 1, 3 следует

$$\|F^{-1}(\xi^\alpha \psi(\xi) \hat{f}(\xi))\|_\infty = \|F^{-1}(\xi^\alpha \psi(\xi)) * f\|_\infty \leq \|F^{-1}(\xi^\alpha \psi(\xi))\|_1 \|f\|_\infty < \infty.$$

Следовательно, из (28) имеем

$$F^{-1}(\xi^\alpha \psi(\xi) \hat{f}(\xi))(x) = D^\alpha F^{-1} \psi * f(x) = g_0(x'').$$

Пусть $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \dots = \gamma_k = 1$, $\gamma_{k+1} = \dots = \gamma_n = 0$. Тогда

$$D_{x_1} D^\gamma F^{-1} \psi * f(x) = g_0(x'').$$

Следовательно,

$$D^\gamma F^{-1} \psi * f(x) = i x_1 g_0(x'') + t(x_2, \dots, x_n).$$

Отсюда, учитывая $D^\gamma F^{-1} \psi * f \in L_\infty$ (очевидно), получим $g_0(x'') \equiv 0$, т.е.

$$D^\alpha F^{-1} \psi * f(x) \equiv 0.$$

Покажем, далее, что $\xi^\alpha \hat{f}(\xi)$ сосредоточено на плоскости $\xi_1 = \dots = \xi_k = 0$. Действительно, для каждого $j \in I$ положим

$$G_j = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_i \neq 0, \quad i \in I \setminus \{j\}\}.$$

Тогда G_j открыто. Для каждой $\varphi \in C_0^\infty(G_j)$ выберем функцию $\psi(\xi)$ из $C_0^\infty(G_j)$ такую, что $\psi = 1$ в некоторой окрестности $\text{supp } \varphi$. Тогда $\psi(\xi) \hat{f}(\xi)$ сосредоточено на гиперплоскости $\xi_j = 0$, и из доказанного утверждения получим

$$\langle \xi^\alpha \hat{f}(\xi), \varphi(\xi) \rangle = \langle \xi^\alpha \psi(\xi) \hat{f}(\xi), \varphi(\xi) \rangle = \langle D^\alpha F^{-1} \psi * f, \hat{\varphi} \rangle = 0.$$

Тем самым мы доказали, что $\xi^\alpha \hat{f}(\xi)$ сосредоточено на плоскостях $\xi_i = \xi_j = 0$, $i, j \in I$.

Положим для $i, j \in I$

$$G_{ij} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_l \neq 0, \quad l \in I \setminus \{i, j\}\}.$$

Тогда G_{ij} открыто. Повторяя рассуждения, проведенные для случая G_j , легко доказать, что

$$\langle \xi^\alpha \hat{f}(\xi), \varphi(\xi) \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(G_{ij}).$$

Тем самым мы доказали, что $\xi^\alpha \hat{f}(\xi)$ сосредоточено на плоскостях $\xi_{i_1} = \xi_{i_2} = \xi_{i_3} = 0$, $i_1, i_2, i_3 \in I$.

Повторяя рассуждения, приведенные выше, еще $k-3$ раз, выводим, что распределение $\xi^\alpha \hat{f}(\xi)$ сосредоточено на плоскости $\xi_1 = \dots = \xi_k = 0$.

Пусть $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\psi = 1$ в некоторой окрестности $\text{sp}(f)$. Тогда для любой $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\begin{aligned} \langle D^\alpha f, \hat{\varphi} \rangle &= \langle \xi^\alpha \hat{f}(\xi), \varphi(\xi) \rangle = \langle \xi^\alpha \psi(\xi) \hat{f}(\xi), \varphi(\xi) \rangle \\ &= \langle D^\alpha F^{-1} \psi * f, \hat{\varphi} \rangle = \langle 0, \hat{\varphi} \rangle = 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, как известно, $F(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$ плотно в $L_1(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, из последних равенств и $D^\alpha f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ получим $D^\alpha f(x) \equiv 0$.

Из доказанного следует, что нам достаточно доказать (10) только для таких мультииндексов $\alpha \geq 0$, что $\sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\alpha| > 0$. Обозначим через P множество таких мультииндексов.

Докажем теперь

$$(P) \quad \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \left(\|D^\alpha f\|_{(\Phi)} / \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\alpha| \right)^{1/|\alpha|} \geq 1 \quad (29)$$

методом от противного. Допустим, что существуют подпоследовательность $I \subset P$, число $\lambda < 1$ и вектор $\beta \geq 0$, $|\beta| = 1$, такие, что

$$(I) \quad \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \left(\|D^\alpha f\|_{(\Phi)} / \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\alpha| \right)^{1/|\alpha|} < \lambda, \quad (30)$$

$$(I) \quad \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{|\alpha|} = \beta. \quad (31)$$

Отметим, что

$$(I) \quad \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\alpha|^{1/|\alpha|} > 0. \quad (32)$$

Действительно, в противном случае существует такая подпоследовательность $J \subset I$, что

$$(J) \quad \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\alpha|^{1/|\alpha|} = 0. \quad (33)$$

Для любых $1 \leq k \leq n$ и $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ положим

$$T_{i_1 \dots i_k} = \{\alpha \geq 0 : \alpha_{i_1} \neq 0, \dots, \alpha_{i_k} \neq 0 \text{ и } \alpha_j = 0, \text{ если } j \notin \{i_1, \dots, i_k\}\}.$$

Тогда существуют $1 \leq k \leq n$ и $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ такие, что $J_{i_1 \dots i_k} = J \cap T_{i_1 \dots i_k}$ не ограничено. Следовательно ясно, что

$$(J_{i_1 \dots i_k}) \quad \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\alpha|^{1/|\alpha|} \geq (J_{i_1 \dots i_k}) \quad \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} |\eta^\alpha|^{1/|\alpha|} > 0,$$

где η есть такая произвольная точка $\text{sp}(f)$, что $\eta_{i_1} \neq 0, \dots, \eta_{i_k} \neq 0$. А это противоречит (33). Неравенство (32) доказано.

Далее, пусть $\alpha \xi \in \text{sp}(f) : |\alpha \xi^\alpha| = \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\alpha|$. Тогда $\alpha \xi_{i_1} \neq 0, \dots, \alpha \xi_{i_k} \neq 0$ для любого $\alpha \in J_{i_1 \dots i_k}$, и путем выбора подпоследовательности, не теряя общности, можно считать, что для некоторой точки $\xi^* \in \text{sp}(f)$

$$(J_{i_1 \dots i_k}) \quad \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \alpha \xi = \xi^*. \quad (34)$$

Рассмотрим теперь два случая для точки ξ^* .

Если $\xi_{i_j}^* \neq 0$, $j = 1, \dots, k$, то, очевидно,

$$(J_{i_1 \dots i_k}) \quad \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} |\alpha \xi^\alpha|^{1/|\alpha|} = |\xi^{*\beta}| = (J_{i_1 \dots i_k}) \quad \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} |\xi^{*\alpha}|^{1/|\alpha|},$$

что вместе с $\xi^* \in \text{sp}(f)$, (11) и (30) дает нам

$$\begin{aligned} 1 &\leq (J_{i_1 \dots i_k}) \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} (\|D^\alpha f\|_{(\Phi)} / |\xi^* \alpha|)^{1/|\alpha|} \\ &= (J_{i_1 \dots i_k}) \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \left(\|D^\alpha f\|_{(\Phi)} / \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\alpha| \right)^{1/|\alpha|} < \lambda < 1, \end{aligned}$$

что невозможно.

В другом случае, не теряя общности, можно считать, что $\xi_{i_1}^* = \dots = \xi_{i_m}^* = 0$ и $\xi_{i_{m+1}}^* \neq 0, \dots, \xi_{i_k}^* \neq 0$ для некоторого $1 \leq m \leq k$.

Из (32) и (34) следует, что $\xi^* \neq 0$. Следовательно, $m < k$. Далее, учитывая (31), (32), (34), определение $_\alpha \xi$ и $\xi_{i_1}^* = \dots = \xi_{i_m}^* = 0$, получим $\beta_{i_1} = \dots = \beta_{i_m} = 0$. Из равенств

$$\begin{aligned} (J_{i_1 \dots i_k}) \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \left| \alpha \xi_{i_{m+1}}^{\alpha_{i_{m+1}}} \dots \alpha \xi_{i_k}^{\alpha_{i_k}} \right|^{1/|\alpha|} &= \left| \xi_{i_{m+1}}^{\beta_{i_{m+1}}} \dots \xi_{i_k}^{\beta_{i_k}} \right| \\ &= (J_{i_1 \dots i_k}) \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \left| \xi_{i_{m+1}}^{*\alpha_{i_{m+1}}} \dots \xi_{i_k}^{*\alpha_{i_k}} \right|^{1/|\alpha|}, \end{aligned}$$

которые очевидны, вытекает что существуют $\nu \in J_{i_1 \dots i_k}$ и $N > 0$ такие, что

$$|_\alpha \xi_{i_l}| \leq \lambda^{-1} |\nu \xi_{i_l}|, \quad l = m+1, \dots, k, \quad (35)$$

для всех $|\alpha| \geq N$, $\alpha \in J_{i_1 \dots i_k}$.

С другой стороны, из $\nu \xi_{i_1} \neq 0, \dots, \nu \xi_{i_k} \neq 0$ и

$$(J_{i_1 \dots i_k}) \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \alpha \xi_{i_j} = \xi_{i_j}^* = 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

следует, что существует $M > 0$ такое, что

$$|_\alpha \xi_{i_j}| \leq |\nu \xi_{i_j}|, \quad j = 1, \dots, m,$$

для всех $|\alpha| \geq M$, $\alpha \in J_{i_1 \dots i_k}$. Это вместе с (35) дает

$$|_\alpha \xi_{i_j}| \leq \lambda^{-1} |\nu \xi_{i_j}|, \quad j = 1, \dots, k,$$

для всех $|\alpha| \geq \max\{M, N\}$, $\alpha \in J_{i_1 \dots i_k}$. Следовательно,

$$\sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\alpha|^{1/|\alpha|} = |_\alpha \xi^\alpha|^{1/|\alpha|} \leq \lambda^{-1} |\nu \xi^\alpha|^{1/|\alpha|},$$

что вместе с (11) и (30) дает

$$\begin{aligned} 1 &\leq (J_{i_1 \dots i_k}) \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} (\|D^\alpha f\|_{(\Phi)} / |\nu \xi^\alpha|)^{1/|\alpha|} \\ &\leq (J_{i_1 \dots i_k}) \lambda^{-1} \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \left(\|D^\alpha f\|_{(\Phi)} / \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\alpha| \right)^{1/|\alpha|} < 1. \end{aligned}$$

Тем самым мы получили противоречие. Неравенство (29) доказано.

Наконец, для завершения доказательства теоремы нам осталось показать

$$(P) \quad \overline{\lim}_{|\alpha| \rightarrow \infty} \left(\|D^\alpha f\|_{(\Phi)} / \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\alpha| \right)^{1/|\alpha|} \leq 1. \quad (36)$$

Докажем (36) методом от противного, допустим, что существуют подпоследовательность $I \subset P$, число $h > 1$ и вектор $\beta \geq 0$, $|\beta| = 1$, такие, что

$$(I) \quad \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \left(\|D^\alpha f\|_{(\Phi)} / \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\alpha| \right)^{1/|\alpha|} > h, \quad (37)$$

$$(I) \quad \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{|\alpha|} = \beta. \quad (38)$$

Используя обозначения, введенные выше, имеем такие $1 \leq k \leq n$ и $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$, что $I_{i_1 \dots i_k} = I \cap T_{i_1 \dots i_k}$ не ограничено.

Теперь нужно убрать “плохие” точки из $\text{sp}(f)$. Положим

$$\begin{aligned} Q &= \left\{ \eta \in \mathbb{R}^n : \exists \{m\xi\} \subset \text{sp}(f), \quad m\xi_j \neq 0, \right. \\ &\quad \left. j \in \{i_1, \dots, i_k\}, \quad m \geq 1, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} m\xi = \eta \right\}, \\ Q_\delta &= \{x + y : x \in Q, \quad |y| < \delta\}, \quad \delta > 0, \end{aligned}$$

и $H = \mathbb{R}^n \setminus Q$. Тогда Q замкнуто и H и Q_δ открыты.

Следовательно, из $\text{sp}(f) \subset Q_\delta \cup H (= \mathbb{R}^n)$ получим

$$\hat{f}(\xi) = \varphi_\delta(\xi) \hat{f}(\xi) + \psi(\xi) \hat{f}(\xi), \quad \varphi_\delta \in C_0^\infty(Q_\delta), \quad \psi \in C_0^\infty(H).$$

Рассуждая, как выше, мы можем доказать, что $D^\alpha F^{-1}(\psi \hat{f})(x) \equiv 0$ для всех $\alpha \in I_{i_1 \dots i_k}$. Отсюда и из (37) следует, что

$$(I_{i_1 \dots i_k}) \quad \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \left(\|D^\alpha F^{-1}(\varphi_\delta \hat{f})\|_{(\Phi)} / \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\alpha| \right)^{1/|\alpha|} > h \quad (39)$$

для любого $\delta > 0$.

С другой стороны, повторяя рассуждения, проведенные в доказательстве равенства (19), получим

$$(I_{i_1 \dots i_k}) \quad \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \sup_{Q_\delta} |\xi^\alpha|^{1/|\alpha|} = \sup_{Q_\delta} |\xi^\beta|. \quad (40)$$

Далее, пусть $m\theta \in Q_{1/m}$, т.е. $|m\theta^\beta| = \sup_{Q_{1/m}} |\xi^\beta|$, $m \geq 1$. Тогда существуют подпоследовательность $\{m_k\}$ (для простоты обозначения будем считать, что $m_k = k$, $k \geq 1$) и точка $\theta^* \in Q$ такие, что $m\theta \rightarrow \theta^*$, $m \rightarrow \infty$. Тогда

$$0 < \sup_Q |\xi^\beta| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} |m\theta^\beta| = |\theta^{*\beta}|.$$

Рассуждениями, аналогичными приведенным в доказательстве (20), с учетом $\theta^* \in Q$ и (38) получим

$$|\theta^{*\beta}| \leq (I_{i_1 \dots i_k}) \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \sup_Q |\xi^\alpha|^{1/|\alpha|}. \quad (41)$$

Далее, замечая, что неравенство (27) доказано для произвольной функции Юнга, мы имеем

$$(I_{i_1 \dots i_k}) \overline{\lim}_{|\alpha| \rightarrow \infty} \left(\|D^\alpha F^{-1}(\varphi_{1/m} \hat{f})\|_{(\Phi)} / \sup_{Q_{1/m}} |\xi^\alpha| \right)^{1/|\alpha|} \leq 1 \quad (42)$$

для любого $m \geq 1$.

Зафиксируем теперь номер $m \geq 1$ такой, что $|_m \theta^\beta| \leq h |\theta^{*\beta}|$. Тогда, комбинируя (39)–(42), получим

$$\begin{aligned} 1 &\geq (I_{i_1 \dots i_k}) \overline{\lim}_{|\alpha| \rightarrow \infty} \left(\|D^\alpha F^{-1}(\varphi_{1/m} \hat{f})\|_{(\Phi)} / \sup_{Q_{1/m}} |\xi^\alpha| \right)^{1/|\alpha|} \\ &= (I_{i_1 \dots i_k}) \overline{\lim}_{|\alpha| \rightarrow \infty} \|D^\alpha F^{-1}(\varphi_{1/m} \hat{f})\|_{(\Phi)}^{1/|\alpha|} / |_m \theta^\beta| \\ &\geq (I_{i_1 \dots i_k}) \overline{\lim}_{|\alpha| \rightarrow \infty} h^{-1} \|D^\alpha F^{-1}(\varphi_{1/m} \hat{f})\|_{(\Phi)}^{1/|\alpha|} / |\theta^{*\beta}| \\ &\geq (I_{i_1 \dots i_k}) \overline{\lim}_{|\alpha| \rightarrow \infty} h^{-1} \left(\|D^\alpha F^{-1}(\varphi_{1/m} \hat{f})\|_{(\Phi)} / \sup_Q |\xi^\alpha| \right)^{1/|\alpha|} \\ &= (I_{i_1 \dots i_k}) \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} h^{-1} \left(\|D^\alpha F^{-1}(\varphi_{1/m} \hat{f})\|_{(\Phi)} / \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\alpha| \right)^{1/|\alpha|} > 1, \end{aligned}$$

что невозможно. Теорема 2 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Равенство (10) показывает, что, зная “дальние” от начала координат точки спектра, мы можем охарактеризовать поведение последовательности $\|D^\alpha f\|_{(\Phi)}$, $\alpha \geq 0$, не вычисляя никаких производных. Следует отметить, что здесь никакого ограничения на геометрию спектра не предполагается. Тонкость полученных результатов заключается в том, что здесь мы изучим поведение последовательности норм $\|D^\alpha f\|_{(\Phi)}$, $|\alpha| \geq 0$, в зависимости от носителя преобразования Фурье самой функций $f(x)$, который имеет, вообще говоря, произвольную геометрию.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Теорема 2 верна и для случаев дробных производных. Равенство (10) неверно в случае, когда $\text{sp}(f)$ не ограничен. В то же время справедлива

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\Phi(t)$ – произвольная функция Юнга, $f(x) \in L_\Phi(\mathbb{R}^n)$ и $\text{sp}(f)$ ограничен по переменным $\xi_1, \dots, \xi_k$ ($1 \leq k \leq n$). Тогда $D^\nu f(x) \in L_\Phi(\mathbb{R}^n)$ для всех $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}_+^n$ и

$$\lim_{|\nu| \rightarrow \infty} \left(\|D^\nu f\|_{(\Phi)} / \sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\nu| \right)^{1/|\nu|} = 1.$$

Для одномерного случая имеется более сильный результат (см. [15]), метод доказательства которого существенно отличается от [16].

ТЕОРЕМА 4. Пусть $0 = n_0 < n_1 < \dots$ – некоторая последовательность целых чисел, $\Phi(t)$ – произвольная функция Юнга и $D^{n_k} f(x) \in L_\Phi(\mathbb{R})$, $k = 0, 1, \dots$. Тогда всегда существует предел

$$d_f = \lim_{k \rightarrow \infty} \|D^{n_k} f\|_{(\Phi)}^{1/n_k},$$

причем $d_f = \sigma_f = \sup\{|\xi| : \xi \in \text{sp}(f)\}$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть K – произвольное компактное множество в $\mathbb{R}^n$ и $\Phi(t)$ – произвольная функция Юнга. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует такая постоянная C_ϵ , что

$$\|D^\alpha f\|_{(\Phi)} \leq C_\epsilon (1 + \epsilon)^{|\alpha|} \left(\sup_K |\xi^\alpha| \right) \|f\|_{(\Phi)}$$

для всех $\alpha \geq 0$ и $f \in \mathfrak{M}_{K\Phi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Образует семейство линейных непрерывных в $\mathfrak{M}_{K\Phi}$ операторов

$$T_\alpha(f) = D^\alpha f(x) / (1 + \epsilon)^{|\alpha|} \sup_K |\xi^\alpha|, \quad \alpha \geq 0.$$

Тогда в силу теоремы 2 множество $\{T_\alpha(f) : \alpha \geq 0\}$ ограничено в $\mathfrak{M}_{K\Phi}$ для любой функции $f \in \mathfrak{M}_{K\Phi}$. Следовательно, оно равномерно непрерывно в силу теоремы Банаха–Штейнгауза. Теорема 5 доказана.

Рассмотрим теперь соответствующие результаты для периодических функций.

Пусть $\mathbb{T}^n$ – n -мерный тор. Обозначим через $L_\Phi(\mathbb{T}^n)$ пространство периодических функций периода 2π по каждой переменной таких, что

$$\|u\|_{(\Phi)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{T}^n} \Phi(|u(x)|/\lambda) dx \leq 1 \right\} < \infty.$$

Методом разложения в ряд Фурье можем доказать следующие результаты.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $g \in L_\Phi(\mathbb{T}^n)$, $g(x) \not\equiv 0$ и $\text{sp}(g)$ ограничен. Тогда

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \left(\|D^\alpha g\|_{(\Phi)} / \sup_{k \in \text{sp}(g)} |k^\alpha| \right)^{1/|\alpha|} = 1,$$

где $k \in \mathbb{Z}^n$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть I – некоторое неограниченное семейство мультииндексов, $\Phi(t)$ – произвольная функция Юнга, $f \in L_\Phi(\mathbb{T}^n)$ – такая функция, что ее обобщенные производные $D^\alpha f(x)$ принадлежат $L_\Phi(\mathbb{T}^n)$ для всех $\alpha \in I$. Тогда

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} (\|D^\alpha f\|_{(\Phi)} / |k^\alpha|)^{1/|\alpha|} \geq 1$$

для произвольной точки $k \in \text{sp}(f)$. Это неравенство точно.

§ 3. Неравенство Никольского в норме Люксембурга

Важный цикл работ С. М. Никольского и его школы по изучению классов функций многих переменных связан, в частности, с неравенством Никольского для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа. Это неравенство дает возможность разработать методы теории приближения функций многих переменных, с помощью которых и устанавливается связь между дифференциальными свойствами функции в одной лебеговой метрике с подобными свойствами этой функции в другой лебеговой метрике.

Напомним теперь неравенство Никольского. Пусть $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Тогда

$$\|t_m\|_{q,2\pi} \leq 2^n \left(\prod_{j=1}^n m_j \right)^{1/p-1/q} \|t_m\|_{p,2\pi}$$

для тригонометрических полиномов вида

$$t_m(x) = \sum_{j_1=-m_1}^{m_1} \cdots \sum_{j_n=-m_n}^{m_n} c_{(j_1, \dots, j_n)} \exp(i(j_1 x_1 + \cdots + j_n x_n))$$

и

$$\|f\|_q \leq 2^n \left(\prod_{j=1}^n \nu_j \right)^{1/p-1/q} \|f\|_p$$

для целых функций экспоненциального типа ν .

Неравенства Никольского привлекали внимание многих математиков таких, как А. Зигмунд [17], И. И. Ибрагимов [3]–[5], Р. Нессель и Дж. Вилмс [18], [19], Г. Трибель [20], [21], В. И. Буренков [6] и др.

Неравенства Никольского симметричных пространств рассматривались в работах [22]–[24].

В этом параграфе мы попытаемся установить неравенство Никольского для норм Орлича. Сложность этой задачи связана хотя бы с тем, что нам трудно сравнивать (в явном виде) функции Юнга. Отметим, что пространства Орлича, по нашему определению, не всегда являются симметричными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $A(t): [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$ называется *квазивыпуклой*, если

$$A(\lambda t) \leq \lambda A(t), \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad t \geq 0. \quad (43)$$

Ясно, что все функции Юнга являются квазивыпуклыми.

Квазивыпуклая функция $A(t)$ называется *тривиальной*, если $A(t) = +\infty$ для всех $t > 0$. Очевидно, что $\lim_{t \rightarrow 0} A(t) = 0$, если $A(t)$ – нетривиальная квазивыпуклая функция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\Phi(t), \Psi(t)$ – функции Юнга. Будем говорить, что $\Psi(t)$ *мажорирует* $\Phi(t)$, если существует нетривиальная квазивыпуклая функция $A(t)$ такая, что

$$\Phi(t) \leq \Psi(A(t)), \quad t \geq 0. \quad (44)$$

ПРИМЕР 1. Пусть $1 \leq p \leq q < \infty$ и $\Phi(t) = t^q$, $\Psi(t) = t^p$, $t \geq 0$. Тогда

$$\Phi(t) = (t^{q/p})^p = \Psi(t^{q/p}), \quad t \geq 0.$$

Следовательно, $\Psi(t)$ мажорирует $\Phi(t)$ (здесь $A(t) = t^{q/p}$).

Пусть $C_{K\Phi}$ – точная константа в неравенстве

$$\|f\|_\infty \leq C_{K\Phi} \|f\|_{(\Phi)} \quad \forall f \in \mathfrak{M}_{K\Phi}.$$

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\Psi(t)$ мажорирует $\Phi(t)$. Тогда

$$\|f\|_{(\Phi)} \leq \frac{A(C_{K\Phi})}{C_{K\Phi}} \|f\|_{(\Psi)} \quad (45)$$

для всех $f \in \mathfrak{M}_{K\Psi}$, где $A(t)$ удовлетворяет (44).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \mathfrak{M}_{K\Psi}$. Докажем сначала, что

$$\int \Psi\left(A\left(\frac{|f(x)|}{M}\right)\right) dx \leq 1 \quad (46)$$

для некоторого числа $M > 0$.

Действительно, выберем достаточно большое число $M > 0$ такое, что

$$C_{K\Psi}^{-1} A(C_{K\Psi}(\|f\|_{(\Psi)} + 1)/M) \leq 1.$$

Тогда из (43) и $|f(x)| \leq C_{K\Psi} \|f\|_{(\Psi)}$ следует, что

$$\begin{aligned} \Psi\left(A\left(\frac{|f(x)|}{M}\right)\right) &= \Psi\left(A\left(\frac{|f(x)|}{C_{K\Psi}(\|f\|_{(\Psi)} + 1)} \frac{C_{K\Psi}(\|f\|_{(\Psi)} + 1)}{M}\right)\right) \\ &\leq \Psi\left(\frac{|f(x)|}{C_{K\Psi}(\|f\|_{(\Psi)} + 1)} A\left(\frac{C_{K\Psi}(\|f\|_{(\Psi)} + 1)}{M}\right)\right) \\ &\leq \Psi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{(\Psi)} + 1}\right). \end{aligned}$$

Отсюда получим $f \in \mathfrak{M}_{K\Phi}$ и (46), так как

$$\int \Psi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{(\Psi)} + 1}\right) dx \leq 1.$$

Зафиксируем произвольное число $\lambda > 0$ такое, что

$$\int \Psi\left(A\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\right) dx \leq 1.$$

Тогда $\lambda \geq \|f\|_{(\Phi)}$. Отсюда, учитывая

$$|f(x)| \leq C_{K\Phi} \|f\|_{(\Phi)} \leq \lambda C_{K\Phi},$$

получим

$$\Psi\left(A\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\right) = \Psi\left(A\left(\frac{|f(x)|}{\lambda C_{K\Phi}} C_{K\Phi}\right)\right) \leq \Psi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda C_{K\Phi}} A(C_{K\Phi})\right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|f\|_{(\Phi)} &\leq \inf \left\{ \lambda > 0 : \int \Psi\left(A\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\right) dx \leq 1 \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \lambda > 0 : \int \Psi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda C_{K\Phi}} A(C_{K\Phi})\right) dx \leq 1 \right\} = \frac{A(C_{K\Phi})}{C_{K\Phi}} \|f\|_{(\Psi)}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Если мы знаем только, что

$$\|f\|_\infty \leq C\|f\|_{(\Phi)} \quad \forall f \in \mathfrak{M}_{K\Phi},$$

то из доказательства теоремы 8 следует

$$\|f\|_{(\Phi)} \leq \frac{A(C)}{C} \|f\|_{(\Psi)} \quad (47)$$

для всех $f \in \mathfrak{M}_{K\Psi}$. Тогда из свойства (43) следует

$$\frac{A(C_{K\Phi})}{C_{K\Phi}} \leq \frac{A(C)}{C}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Рассмотрим случай $\Phi(t) = t^q$, $\Psi(t) = t^p$, $1 \leq p < q < \infty$. Тогда по результатам С.М. Никольского [1], [2] и И.И. Ибрагимова [3]–[5] имеем для всех $f \in \mathfrak{M}_{\nu p}$

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &\leq 2^n (\nu_1 \dots \nu_n)^{1/q} \|f\|_q, \\ \|f\|_\infty &\leq \left(\left(\frac{s}{\pi} \right)^n \nu_1 \dots \nu_n \right)^{1/q} \|f\|_q, \end{aligned}$$

где s – наименьшее целое число, большее либо равное $q/2$. Отсюда из (47) получим

$$\|f\|_q \leq (2^n (\nu_1 \dots \nu_n)^{1/q})^{q/p-1} \|f\|_p, \quad (48)$$

$$\|f\|_q \leq \left(\left(\left(\frac{s}{\pi} \right)^n \nu_1 \dots \nu_n \right)^{1/q} \right)^{q/p-1} \|f\|_p. \quad (49)$$

Оказывается, что константа, стоящая в неравенстве (48), будет меньшей, чем соответствующая константа в неравенстве Никольского, если $q < 2p$, а константа, стоящая в неравенстве (49), совпадает с константой Ибрагимова [3]–[5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ – функции Юнга и $C > 0$. Говорим, что $\Psi(t)$ C -мажорирует $\Phi(t)$, если существуют нетривиальная квазивыпуклая функция $A(t)$ и число $C^* > C$ такие, что

$$\Phi(t) \leq \Psi(A(t)), \quad 0 \leq t < C^*.$$

Имеем следующий более сильный результат.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $\Psi(t)$ $C_{K\Phi}$ -мажорирует $\Phi(t)$. Тогда верно неравенство (45).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \mathfrak{M}_{K\Phi}$. Тогда, повторяя первую часть доказательства теоремы 8, получим $f \in \mathfrak{M}_{K\Phi}$.

Далее, выберем число $\epsilon_0 > 0$ такое, что

$$C^*(\|f\|_{(\Phi)} - \epsilon_0) = C_{K\Phi}\|f\|_{(\Phi)}.$$

Тогда из определения $C_{K\Phi}$ следует, что

$$|f(x)| < C^*(\|f\|_{(\Phi)} - \epsilon), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

для всех $0 < \epsilon < \epsilon_0$. Отсюда получим

$$\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{(\Phi)} - \epsilon}\right) \leq \Psi\left(A\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{(\Phi)} - \epsilon}\right)\right), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

для любого $0 < \epsilon < \epsilon_0$. Отсюда, учитывая

$$\int \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{(\Phi)} - \epsilon}\right) dx > 1,$$

что вытекает из определения $\|f\|_{(\Phi)}$, получим

$$\int \Psi\left(A\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{(\Phi)} - \epsilon}\right)\right) dx > 1$$

для любого $0 < \epsilon < \epsilon_0$. Следовательно,

$$\|f\|_{(\Phi)} \leq \inf \left\{ \lambda > 0 : \int \Psi\left(A\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\right) dx \leq 1 \right\}.$$

Дальнейшие рассуждения проводятся, как в доказательстве теоремы 8. Теорема доказана.

Аналогично можем доказать следующий более точный результат.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $\Psi(t)$ C_f -мажорирует $\Phi(t)$, $f \in L_\Psi(\mathbb{R}^n)$ и $\text{sp}(f)$ ограничен. Тогда

$$\|f\|_{(\Phi)} \leq \frac{A(C_f)}{C_f} \|f\|_{(\Psi)},$$

где $C_f = \|f\|_\infty / \|f\|_{(\Phi)}$.

Для получения дальнейших неравенств Никольского мы введем понятие порядка квазивыпуклой функции $A(t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $C > 0$. Назовем супремум всех чисел $p \geq 0$ таких, что

$$A(\lambda C) \leq \lambda^p A(C)$$

для всех $0 \leq \lambda \leq 1$, C -порядком квазивыпуклой функции $A(t)$ и обозначим его через $\text{ord } A$.

Из квазивыпуклости $A(t)$ следует, что $\text{ord } A \geq 1$. Ясно, что $A(\lambda C) \leq \lambda^{\text{ord } A} A(C)$ для всех $0 \leq \lambda \leq 1$.

ТЕОРЕМА 11. Пусть $\Psi(t)$ — $C_{f\Phi}$ -мажорирует $\Phi(t)$, $f \in L_\Psi(\mathbb{R}^n)$ и $\text{sp}(f)$ ограничен. Тогда

$$\|f\|_{(\Phi)} \leq \frac{A^{1/\text{ord } A}(C_{f\Phi})}{C_{f\Phi}} C_{f\Psi_1}^{\text{ord } A-1} \|f\|_{(\Psi)}, \quad (50)$$

где $C_{f\Phi} = \|f\|_\infty / \|f\|_{(\Phi)}$, $C_{f\Psi_1} = \|f\|_\infty / \|f\|_{(\Psi_1)}$, $\Psi_1(t) = \Psi(t^{\text{ord } A})$ и $\text{ord } A$ есть $C_{f\Phi}$ -порядок функции $A(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как мы показали в доказательстве теоремы 8, $f \in L_\Phi(\mathbb{R}^n)$. С другой стороны, из предположения теоремы следует, что

$$\Phi(t) \leq \Psi(A(t)), \quad 0 \leq t < C^*, \quad (51)$$

где $C_{f\Phi} < C^*$ — некоторое число.

Далее, выберем число $\epsilon_0 > 0$ такое, что

$$C^*(\|f\|_{(\Phi)} - \epsilon_0) = C_{f\Phi} \|f\|_{(\Phi)}.$$

Тогда из определения числа $C_{f\Phi}$ вытекает

$$|f(x)| < C^*(\|f\|_{(\Phi)} - \epsilon), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

для всех $0 < \epsilon < \epsilon_0$. Отсюда и из (51) получим

$$\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{(\Phi)} - \epsilon}\right) \leq \Psi\left(A\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{(\Phi)} - \epsilon}\right)\right), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

для любого $0 < \epsilon < \epsilon_0$. Следовательно, учитывая

$$\int \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{(\Phi)} - \epsilon}\right) dx > 1 \quad \forall \epsilon > 0,$$

получим

$$\int \Psi\left(A\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{(\Phi)} - \epsilon}\right)\right) dx > 1$$

для всякого $0 < \epsilon < \epsilon_0$. Отсюда получим

$$\|f\|_{(\Phi)} \leq \inf \left\{ \lambda > 0 : \int \Psi\left(A\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\right) dx \leq 1 \right\}. \quad (52)$$

Зафиксируем теперь произвольное число $\lambda > 0$ такое, что

$$\int \Psi\left(A\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\right) dx \leq 1.$$

Тогда из (52) вытекает $\lambda \geq \|f\|_{(\Phi)}$. Следовательно,

$$A\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) = A\left(\frac{|f(x)|}{\lambda C_{f\Phi}} C_{f\Phi}\right) \leq \left(\frac{|f(x)|}{\lambda C_{f\Phi}}\right)^{\text{ord } A} A(C_{f\Phi}).$$

Отсюда, учитывая (52), получим

$$\begin{aligned}
\|f\|_{(\Phi)} &\leq \inf \left\{ \lambda > 0 : \int \Psi \left(A \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) \right) dx \leq 1 \right\} \\
&\leq \inf \left\{ \lambda > 0 : \int \Psi \left(\left(\frac{|f(x)|}{\lambda C_{f\Phi}} \right)^{\text{ord } A} A(C_{f\Phi}) \right) dx \leq 1 \right\} \\
&= \inf \left\{ \lambda > 0 : \int \Psi \left(\left(\frac{|f(x)| A^{1/\text{ord } A}(C_{f\Phi})}{\lambda C_{f\Phi}} \right)^{\text{ord } A} \right) dx \leq 1 \right\} \\
&= \frac{A^{1/\text{ord } A}(C_{f\Phi})}{C_{f\Phi}} \inf \left\{ \lambda > 0 : \int \Psi_1 \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) dx \leq 1 \right\},
\end{aligned}$$

ибо $\Psi_1(t) = \Psi(t^{\text{ord } A})$ является функцией Юнга и $\|\beta f\|_{(\Psi_1)} = |\beta| \|f\|_{(\Psi_1)}$ для любого числа β .

Тем самым мы доказали, что

$$\|f\|_{(\Phi)} \leq \frac{A^{1/\text{ord } A}(C_{f\Phi})}{C_{f\Phi}} \|f\|_{(\Psi_1)}.$$

Отсюда, применяя теорему 10 для пары функций $\Psi_1(t)$ и $\Psi(t)$, получим

$$\|f\|_{(\Phi)} \leq \frac{A^{1/\text{ord } A}(C_{f\Phi})}{C_{f\Phi}} C_{f\Psi_1}^{\text{ord } A - 1} \|f\|_{(\Psi)}.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим случай $\Phi(t) = t^q$, $\Psi(t) = t^p$, $1 \leq p < q < \infty$. Тогда $A(t) = t^{q/p}$ и C -порядок функции $A(t)$ равняется q/p для всех $C > 0$. В этом случае константа в неравенстве (50) равна $C_{fq}^{q/p}$, ибо тогда $\Psi_1(t) \equiv \Phi(t)$, где $C_{fq} = \|f\|_\infty / \|f\|_q$.

Следует отметить, что в отличие от известных неравенств Никольского, константы, фигурирующие в теоремах 10, 11, зависят от самой функции (а не от класса).

Рассмотрим теперь неравенство Никольского для тригонометрических полиномов.

Пусть K – некоторое компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathcal{P}_{K\Phi}$ пространство всех функций $f \in L_\Phi(\mathbb{T}^n)$ таких, что $\text{sp}(f) \subset K$. Тогда легко доказать, что справедливо непрерывное вложение $\mathcal{P}_{K\Phi} \subset \mathcal{P}_{K\infty}$, где $\mathcal{P}_{K\infty}$ есть пространство всех ограниченных периодических функций со спектром на K .

Рассуждениями, аналогичными приведенным выше, можем доказать следующие результаты.

ТЕОРЕМА 12. Пусть $\Psi(t) \subset C_{K\Phi}^*$ -мажорирует $\Phi(t)$. Тогда

$$|||f|||_{(\Phi)} \leq \frac{A(C_{K\Phi}^*)}{C_{K\Phi}^*} |||f|||_{(\Psi)}$$

для всех $f \in \mathcal{P}_{K\Psi}$, где $C_{K\Phi}^*$ – точная константа неравенства

$$|||f|||_\infty \leq C |||f|||_{(\Phi)}.$$

ТЕОРЕМА 13. Пусть $\Psi(t)$ $C_{f\Phi}^*$ -мажорирует $\Phi(t)$, $f \in L_\Psi(\mathbb{T}^n)$ и $\text{sp}(f)$ ограничен. Тогда

$$|||f|||_{(\Phi)} \leq \frac{A(C_{f\Phi}^*)}{C_{f\Phi}^*} |||f|||_{(\Psi)},$$

где $C_{f\Phi}^* = |||f|||_\infty / |||f|||_{(\Phi)}$.

ТЕОРЕМА 14. Пусть $\Psi(t)$ $C_{f\Phi}^*$ -мажорирует $\Phi(t)$, $f \in L_\Psi(\mathbb{T}^n)$ и $\text{sp}(f)$ ограничен. Тогда

$$|||f|||_{(\Phi)} \leq \frac{A^{1/\text{ord } A}(C_{f\Phi}^*)}{C_{f\Phi}^*} C_{f\Psi_1}^{\text{ord } A-1} |||f|||_{(\Psi)},$$

где $C_{f\Phi}^* = |||f|||_\infty / |||f|||_{(\Phi)}$, $C_{f\Psi_1}^* = |||f|||_\infty / |||f|||_{(\Psi_1)}$, $\Psi_1(t) = \Psi_1(t^{\text{ord } A})$ и $\text{ord } A$ есть $C_{f\Phi}^*$ -порядок функции $A(t)$.

§ 4. Некоторые применения

Пусть $0 \leq \lambda_\alpha \leq \infty$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $G\{\lambda_\alpha\} = \bigcap_{\alpha \geq 0} \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi^\alpha| \leq \lambda_\alpha\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Назовем $G\{\lambda_\alpha\}$ множеством, порождаемым числовой последовательностью $\{\lambda_\alpha\}$.

Ясно, что $G\{\lambda_\alpha\}$ замкнуто, $(r_1\xi_1, \dots, r_n\xi_n) \in G\{\lambda_\alpha\}$, если $\xi \in G\{\lambda_\alpha\}$ и $|r_j| \leq 1$, $j = 1, \dots, n$, и

$$G\{\lambda_\alpha\} = G\left\{ \sup_{\xi \in G\{\lambda_\alpha\}} |\xi^\alpha| \right\}.$$

Множество $G\{\lambda_\alpha\}$ компактно, если, например, $\lambda_\alpha < \infty \quad \forall \alpha \geq 0$.

Заметим, что $G\{\lambda_\alpha\}$ может быть невыпуклым. Например, пусть $n = 2$ и

$$\lambda_{(i,j)} = 2^{|i-j|} \quad \forall i, j \in \mathbb{Z}_+.$$

Невыпуклым является множество, называемое *крестом гиперболы*,

$$G\{\lambda_{(i,j)}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| \leq 1, \quad |x| \leq 2, \quad |y| \leq 2\}.$$

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$. Если положить $g(K) = G\{\sup_K |\xi^\alpha|\}$, то $K \subset g(K)$. Назовем $g(K)$ *g-оболочкой* множества K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Будем говорить, что множество K обладает *g-свойством*, если $K = g(K)$.

Ясно, что любое множество, порождаемое числовой последовательностью $G\{\lambda_\alpha\}$, обладает *g-свойством* и, очевидно, наоборот.

ЛЕММА 5. Пусть I – некоторое семейство индексов и $K_i = g(K_i)$, $i \in I$. Тогда $\bigcap_{i \in I} K_i$ также обладает *g-свойством*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in g\left(\bigcap_{i \in I} K_i\right)$ и $j \in I$. Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ имеем

$$|x^\alpha| \leq \sup \left\{ |\xi^\alpha| : \xi \in \bigcap_{i \in I} K_i \right\} \leq \sup \{ |\xi^\alpha| : \xi \in K_j \}.$$

Следовательно, $x \in g(K_j) = K_j$. Поэтому $x \in \bigcap_{i \in I} K_i$.

Возникает вопрос: каждое ли компактное множество K со свойством

$$x \in K, \quad -1 \leq \lambda_j \leq 1, \quad j = 1, \dots, n \implies (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n) \in K \quad (53)$$

обладает g -свойством? Оказывается, что ответ отрицателен. Действительно, пусть K – такое произвольное подмножество креста параболы $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| \leq 1, |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$, что K обладает свойством (53), $K \neq G$, и K содержит в себе точки $(\frac{1}{2}, 2)$ и $(2, \frac{1}{2})$. Такие множества K , очевидно, существуют, например $K = \{|x| \leq 2, |y| \leq \frac{1}{2}\} \cup \{|x| \leq \frac{1}{2}, |y| \leq 2\}$. Тогда

$$\sup_K |x^i y^j| = 2^{|i-j|} = \sup_G |x^i y^j|$$

для всех целых чисел $i, j \geq 0$. Следовательно, K не обладает g -свойством.

ЛЕММА 6. Каждое симметричное выпуклое компактное множество обладает g -свойством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K – некоторый симметричный выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$. Тогда легко видеть, что K удовлетворяет (53). Далее, пусть $y \notin K$. Тогда существует вектор $a \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$ay > \sup_{x \in K} ax, \quad (54)$$

что следует из выпуклости K , где $a\xi = a_1\xi_1 + \dots + a_n\xi_n$. Из (53) имеем

$$\sup_{x \in K} ax = \sup_{x \in K} (|a_1 x_1| + \dots + |a_n x_n|). \quad (55)$$

И также из (53) следует, что $y \notin K$ тогда и только тогда, когда $(|y_1|, \dots, |y_n|) \notin K$. Следовательно, нам достаточно рассмотреть только случай $y \geq 0$. Тогда в силу (54), (55) можем выбрать такой вектор a , что $a_j \geq 0$ и $a_j = 0$, если $y_j = 0$, $j = 1, \dots, n$.

Считаем теперь для удобства, что $y_j > 0$, $j = 1, \dots, n$.

Пусть $x \in K_+ = \{x \in K : x \geq 0\}$. Тогда из одного известного классического неравенства следует

$$\begin{aligned} \left(\frac{ax}{ay}\right)^{ay} &= \left(\frac{a_1 y_1 x_1 / y_1 + \dots + a_n y_n x_n / y_n}{a_1 y_1 + \dots + a_n y_n}\right)^{a_1 y_1 + \dots + a_n y_n} \\ &\geq \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{a_1 y_1} \dots \left(\frac{x_n}{y_n}\right)^{a_n y_n}. \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая (54), получим

$$1 > \sup_{x \in K_+} \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{a_1 y_1} \dots \left(\frac{x_n}{y_n}\right)^{a_n y_n}.$$

Аппроксимируя $a_j y_j$ рациональными числами, имеем

$$1 > \sup_{x \in K_+} \left(\frac{x_1}{y_1} \right)^{p_1/q_1} \dots \left(\frac{x_n}{y_n} \right)^{p_n/q_n},$$

где $p_j \geq 0$, $q_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, – некоторые целые числа. Следовательно, из (53) имеем

$$y^\alpha > \sup_{x \in K_+} x^\alpha = \sup_{x \in K} |x^\alpha|,$$

где $\alpha_j = q_1 \dots q_n p_j / q_j$, $j = 1, \dots, n$. Это означает, что $y \notin g(K)$ для любого $y \notin K$. Доказательство закончено.

Докажем теперь невыпуклый случай теоремы Пэли–Винера–Шварца, характеризующий связь между поведением последовательности норм производных функции и носителем ее преобразования Фурье.

Для множества, порождаемого числовой последовательностью $G\{\lambda_\alpha\}$, ясно, что если существуют $m \geq 1$ и $\beta \geq 0$ такие, что $\lambda_\beta^m < \lambda_{m\beta}$, то множество $G\{\lambda_\alpha\}$ не изменяется при замене $\lambda_{m\beta} \rightarrow \lambda_\beta^m$. Следовательно, для определения $G\{\lambda_\alpha\}$ всегда можно предполагать, что

$$\lambda_\alpha^m \geq \lambda_{m\alpha} \quad \forall m \geq 1, \quad \alpha \geq 0. \quad (56)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Будем говорить, что последовательность $\{\lambda_\alpha\}$ *правильна*, если $\{\lambda_\alpha\}$ удовлетворяет условию (56).

ТЕОРЕМА 15. Пусть $\Phi(t)$ – произвольная функция Юнга, $f \in L_\Phi(\mathbb{R}^n)$, $G\{\lambda_\alpha\}$ ограничено и последовательность $\{\lambda_\alpha\}$ правильна. Тогда для того, чтобы $\text{sp}(f) \subset G\{\lambda_\alpha\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\overline{\lim}_{|\alpha| \rightarrow \infty} \left(\|D^\alpha f\|_{(\Phi)} / \lambda_\alpha \right)^{1/|\alpha|} \leq 1. \quad (57)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{sp}(f) \subset G\{\lambda_\alpha\}$. Тогда имеем

$$\sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\alpha| \leq \lambda_\alpha, \quad \alpha \geq 0.$$

Следовательно, из теоремы 2 получим (57).

Обратно, пусть (57) выполнено. Заметим, что неравенство (11) справедливо и для случая, когда $\text{sp}(f)$ не ограничен. Следовательно, из (11), (57) и правильности последовательности $\{\lambda_\alpha\}$ легко вытекает, что $\text{sp}(f)$ ограничен. Отсюда, учитывая теорему 2, получим

$$\overline{\lim}_{|\alpha| \rightarrow \infty} \left(\sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\alpha| / \lambda_\alpha \right)^{1/|\alpha|} \leq 1.$$

Следовательно, для любого $\epsilon > 0$ существует номер $N < \infty$ такой, что

$$\sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\alpha| \leq (1 + \epsilon)^{|\alpha|} \lambda_\alpha, \quad |\alpha| \geq N.$$

С другой стороны, последовательность $\{\lambda_\alpha\}$ правильна. Следовательно,

$$\sup_{\text{sp}(f)} |\xi^\alpha| \leq (1 + \epsilon)^{|\alpha|} \lambda_\alpha$$

для всех $\alpha \geq 0$. Отсюда получаем

$$\text{sp}(f) \subset (1 + \epsilon)G\{\lambda_\alpha\}.$$

Устремляя ϵ к 0, получим $\text{sp}(f) \subset G\{\lambda_\alpha\}$. Теорема доказана.

Применим теперь полученные результаты для изучения некоторых вопросов теории пространств Соболева–Орлича бесконечного порядка, возникающих при изучении нелинейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка с коэффициентами произвольного роста. Теория пространства бесконечного порядка была введена Ю. А. Дубинским и изучена им, а также Г. С. Балашовой, Чан Дык Ваном, Л. И. Клеиной, Ю. А. Коняевым, А. Я. Кобиловым, С. Р. Умаровым, А. Н. Агаджановым, Л. Н. Грошевым, автором и другими, кто рассматривал следующие вопросы: нетривиальность, теория следов, связь с краевыми задачами, теоремы вложения, геометрические свойства и т.п. (см., например, [25]–[27] и библиографию в них). Следует отметить, что теория функциональных пространств бесконечного порядка отличается от теории пространств конечного порядка хотя бы тем, что совершенно нетривиален вопрос о существовании ненулевого элемента функциональных пространств бесконечного порядка (т.е. вопрос о нетривиальности). Положительный ответ на него играет решающую роль в теории краевых задач для дифференциальных уравнений бесконечного порядка. Задача о нахождении решений краевых задач для уравнений бесконечного порядка содержательна, если соответствующие энергетические пространства нетривиальны (см., например, [28]–[31]).

Пусть I – некоторый неограниченный набор целочисленных индексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, $\Phi_\alpha(t)$, $\alpha \in I$, – произвольные функции Юнга. Тогда

$$W^\infty L\{\Phi_\alpha, \mathbb{R}^n\} = \left\{ f(x) \in S' : \sum_{\alpha \in I} \|D^\alpha f\|_{(\Phi_\alpha)} < \infty \right\}$$

называется *пространством Соболева–Орлича бесконечного порядка*.

Найдем условие нетривиальности $W^\infty L\{\Phi_\alpha, \mathbb{R}^n\}$. Предположим, что $0 \in I$ и $\Phi_0(t) > 0$, $t > 0$, ибо в противном случае $W^\infty L\{\Phi_\alpha, \mathbb{R}^n\}$ нетривиально. Применяя теорему 2, можно доказать следующую теорему [31].

ТЕОРЕМА 16. *Для того чтобы $W^\infty L\{\Phi_\alpha, \mathbb{R}^n\}$ было нетривиальным, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа $C, q > 0$, что*

$$\sum_{\alpha \in I} \Phi_\alpha(Cq^{|\alpha|}) < \infty. \quad (58)$$

Опишем теперь свойства функций из $W^\infty L\{\Phi_\alpha, \mathbb{R}^n\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть выполнено условие (58). Обозначим через C_Φ объединение всех точек $\xi \in \mathbb{R}^n$ таких, что

$$\sum_{\alpha \in I} \Phi_\alpha \left(C_\xi \sup_{x \in G_\xi} |x^\alpha| \right) < \infty \quad (59)$$

для некоторых области $G_\xi \ni \xi$ и числа $C_\xi > 0$. Ясно, что G_Φ открыто, непусто и симметрично относительно всех осей координат.

ТЕОРЕМА 17. Пусть выполнено условие (58). Тогда

$$F^{-1}[C_0^\infty(G_\Phi)] \subset W^\infty L\{\Phi_\alpha, \mathbb{R}^n\}$$

и $W^\infty L\{\Phi_\alpha, \mathbb{R}^n\}$ не содержит ни одной функции $F^{-1}g(x)$, если $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\text{supp } g \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{G_\Phi}) \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(\xi) \in C_0^\infty(G_\Phi)$. Тогда для любой точки $\xi \in \text{supp } \varphi$ существует ограниченная область $G_\xi \ni \xi$, удовлетворяющая условию (59). Отсюда в силу компактности $\text{supp } \varphi$ существуют номер $M < \infty$, число $C > 0$ и ограниченные области G_j такие, что

$$\text{supp } \varphi \subset \bigcup_{j=1}^M G_j$$

и

$$\sum_{\alpha \in I} \Phi_\alpha \left(C \sup_{G_j} |\xi^\alpha| \right) < \infty, \quad j = 1, \dots, M. \quad (60)$$

Далее, для каждой области G определим

$$G^* = \{(t_1 \xi_1, \dots, t_n \xi_n) : \xi \in G, \quad -1 \leq t_j \leq 1, \quad j = 1, \dots, n\}.$$

Тогда G^* также является областью и для всех $\alpha \geq 0$

$$\sup_G |\xi^\alpha| = \sup_{G^*} |\xi^\alpha|. \quad (61)$$

В силу компактности $\text{supp } \varphi$ имеем для некоторого числа $0 < \lambda < 1$

$$\text{supp } \varphi \subset \lambda \bigcup_{j=1}^M G_j^*. \quad (62)$$

Пусть $\psi(x) = (F^{-1}\varphi)(x)$. Тогда $\psi \in \mathfrak{M}_{K1}$, где для кратности обозначим $K = \text{supp } \varphi$. Будем считать для удобства, что $C = 1$.

Докажем теперь, что $\psi \in W^\infty L\{\Phi_\alpha, \mathbb{R}^n\}$. Действительно, для любых $\alpha, \beta \geq 0$

$$\begin{aligned} |x^\beta D^\alpha \psi(x)| &\leq \int_K |D^\beta (\xi^\alpha \varphi(\xi))| d\xi \\ &\leq \sum_{\gamma \leq \beta, \alpha} \frac{\beta!}{\gamma! (\beta - \alpha)!} \prod_{k=1}^n \alpha_k \dots (\alpha_k - \gamma_k + 1) \int_K |\xi^{\alpha - \gamma} D^{\beta - \gamma} \varphi(\xi)| d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая

$$\prod_{k=1}^n \alpha_k \dots (\alpha_k - \gamma_k + 1) \leq |\alpha|^{|\gamma|}, \quad \sum_{\gamma \leq \beta} \frac{\beta!}{\gamma! (\beta - \gamma)!} = 2^{|\beta|},$$

получим для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \geq 0$ и $|\beta| \leq 2n$

$$|x^\beta D^\alpha \psi(x)| \leq 2^{2n} |\alpha|^{2n} C_{2n} \max \left\{ \sup_K |\xi^{\alpha-\gamma}| : \gamma \leq \alpha, \quad |\gamma| \leq 2n \right\},$$

где

$$C_{2n} = \max \left\{ \int_K |D^{\beta-\gamma} \varphi(\xi)| d\xi : \gamma \leq \beta, \quad |\beta| \leq 2n \right\}.$$

С другой стороны, из (25) имеем

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \left(\max \left\{ \sup_K |\xi^{\alpha-\gamma}| : \gamma \leq \alpha, \quad |\gamma| \leq 2n \right\} \right)^{1/|\alpha|} / \sup_K |\xi^\alpha|^{1/|\alpha|} = 1.$$

Следовательно, для любого $\epsilon > 0$ существует число C_ϵ такое, что

$$(1 + x_1^2) \dots (1 + x_n^2) |D^\alpha \psi(x)| \leq 2^{2n} C_{2n} C_\epsilon |\alpha|^{2n} (1 + \epsilon)^{|\alpha|} \sup_K |\xi^\alpha| \quad (63)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \geq 0$.

Из (62) и (63) получаем для $G^* = \bigcup_{j=1}^M G_j^*$

$$(1 + x_1^2) \dots (1 + x_n^2) |D^\alpha \psi(x)| \leq 2^{2n} C_{2n} C_\epsilon |\alpha|^{2n} (1 + \epsilon)^{|\alpha|} \lambda^{|\alpha|} \sup_{G^*} |\xi^\alpha|.$$

Выберем теперь число $\epsilon > 0$ такое, что $(1 + \epsilon)\lambda < 1$, и пусть $(1 + \epsilon)\lambda = \lambda_1 q$, где $0 < \lambda_1$, $q < 1$. Тогда из

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} |\alpha|^{2n} (1 + \epsilon)^{|\alpha|} \lambda_1^{|\alpha|} = 0$$

следует, что

$$|D^\alpha \psi(x)| \leq (1 + x_1^2)^{-1} \dots (1 + x_n^2)^{-1} q^{|\alpha|} \sup_{G^*} |\xi^\alpha|$$

для всех $|\alpha| \geq N_1$ и $x \in \mathbb{R}^n$. Отсюда получим для $|\alpha| \geq N_1$

$$\begin{aligned} \|D^\alpha \psi\|_{(\Phi_\alpha)} &= \inf \left\{ \gamma > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\alpha \left(\frac{|D^\alpha \psi(x)|}{\gamma} \right) dx \leq 1 \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \gamma > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\alpha \left(q^{|\alpha|} \sup_{G^*} |\xi^\alpha| / \gamma (1 + x_1^2) \dots (1 + x_n^2) \right) dx \leq 1 \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \gamma > 0 : \Phi_\alpha \left(q^{|\alpha|} \sup_{G^*} |\xi^\alpha| / \gamma \right) \int_{\mathbb{R}^n} (1 + x_1^2)^{-1} \dots (1 + x_n^2)^{-1} dx \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \gamma > 0 : \pi^n \Phi_\alpha \left(q^{|\alpha|} \sup_{G^*} |\xi^\alpha| / \gamma \right) \leq 1 \right\}. \end{aligned} \quad (64)$$

С другой стороны, из (60) и (61) имеем

$$\sum_{\alpha \in I} \Phi_{\alpha} \left(\sup_{G^*} |\xi^{\alpha}| \right) \leq \sum_{\alpha \in I} \max_{1 \leq j \leq M} \Phi_{\alpha} \left(\sup_{G_j} |\xi^{\alpha}| \right) \leq \sum_{j=1}^M \sum_{\alpha \in I} \Phi_{\alpha} \left(\sup_{G_j} |\xi^{\alpha}| \right) < \infty.$$

Следовательно, существует номер $N_2 < \infty$ такой, что

$$\Phi_{\alpha} \left(\sup_{G^*} |\xi^{\alpha}| \right) \leq \pi^{-n}, \quad |\alpha| \geq N_2.$$

Значит,

$$\pi^n \Phi_{\alpha} \left(q^{|\alpha|} \sup_{G^*} |\xi^{\alpha}| / q^{|\alpha|} \right) \leq 1, \quad |\alpha| \geq N_2.$$

Последние неравенства и (64) означают, что

$$\|D^{\alpha} \psi\|_{(\Phi_{\alpha})} \leq q^{|\alpha|} \quad (65)$$

для всех $|\alpha| \geq N_0 = \max\{N_1, N_2\}$.

С другой стороны, ясно из (63), что $D^{\alpha} \psi(x) \in L_{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ для любой функции Юнга $\Phi(t)$ и для всех $\alpha \geq 0$. Следовательно, учитывая (65), получим $\psi(x) \in W^{\infty} L\{\Phi_{\alpha}, \mathbb{R}^n\}$. Первая часть теоремы 17 доказана.

Докажем теперь вторую часть. Пусть $g(\xi) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ есть такая функция, что $\text{supp } g \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{G_{\Phi}}) = \emptyset$. Тогда из открытости $\mathbb{R}^n \setminus \overline{G_{\Phi}}$ следует, что существуют точка $\xi \in \text{supp } g$, $\xi_j \neq 0$, $j = 1, \dots, n$, и окрестность $U_{\xi} \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{G_{\Phi}}$, $\xi \in U_{\xi}$.

С другой стороны, из $\xi \notin \overline{G_{\Phi}}$ следует, что существует число $r < 1$ такое, что для любого $C < \infty$ и для любой области $G_{\xi} \ni \xi$

$$\sum_{\alpha \in I} \Phi_{\alpha} \left(C r^{|\alpha|} \sup_{G_{\xi}} |x^{\alpha}| \right) = \infty, \quad (66)$$

ибо в противном случае имеем $\forall r < 1 \exists C_r, \exists G_{\xi} \ni \xi$:

$$\sum_{\alpha \in I} \Phi_{\alpha} \left(C_r r^{|\alpha|} \sup_{G_{\xi}} |x^{\alpha}| \right) < \infty,$$

т.е.

$$\sum_{\alpha \in I} \Phi_{\alpha} \left(C_r \sup_{rG_{\xi}} |x^{\alpha}| \right) < \infty.$$

Заметим, что $\xi \in rG_{\xi}$ для некоторого $r < 1$. Зафиксируем такое число r и положим $Q = rG_{\xi}$. Тогда имеем

$$\sum_{\alpha \in I} \Phi_{\alpha} \left(C_r \sup_Q |x^{\alpha}| \right) < \infty,$$

значит, $\xi \in G_{\Phi}$, что невозможно. Равенство (66) доказано.

Докажем теперь $f = F^{-1}g \notin W^\infty L\{\Phi_\alpha, \mathbb{R}^n\}$ методом от противного. Пусть $f \in W^\infty L\{\Phi_\alpha, \mathbb{R}^n\}$. Не теряя общности, считаем, что $\sum_{\alpha \in I} \|D^\alpha f\|_{(\Phi_\alpha)} \leq 1$. Положим

$$f_h(x) = \frac{1}{\text{mes } B(0, h)} \int_{B(0, h)} f(x+t) dt, \quad h > 0.$$

Тогда из неравенства Йенсена следует, что

$$\Phi_\alpha(|D^\alpha f_h(x)|) \leq \frac{1}{\text{mes } B(0, h)} \int_{B(0, h)} \Phi_\alpha(|D^\alpha f(x+t)|) dt.$$

С другой стороны, можем считать, что все функции $\Phi_\alpha(t)$, $\alpha \in I$, непрерывны слева. Действительно, если $\Phi(t)$ не является непрерывной слева, то существует точка $t_0 > 0$ такая, что

$$\lim_{t \rightarrow t_0-} \Phi(t) < \Phi(t_0) \leq \infty, \quad \Phi(t) = \infty \text{ для } t > t_0.$$

Положим

$$\Psi(t) = \begin{cases} \Phi(t), & t \neq t_0, \\ \lim_{t \rightarrow t_0-} \Phi(t), & t = t_0. \end{cases}$$

Тогда $\Psi(t)$ является непрерывной слева функцией Юнга и

$$\|\cdot\|_{(\Psi)} = \|\cdot\|_{(\Phi)}.$$

Следовательно, можем заменить $\Phi(t)$ на $\Psi(t)$.

Тогда из

$$\int \Phi_\alpha(|D^\alpha f(x)|) dx \leq \|D^\alpha f\|_{(\Phi_\alpha)},$$

так как $\|D^\alpha f\|_{(\Phi_\alpha)} \leq 1$ (см. [7]–[9]), следует

$$\sum_{\alpha \in I} \Phi_\alpha(\|D^\alpha f_h\|_\infty) \leq \frac{1}{\text{mes } B(0, h)}. \quad (67)$$

Из определения $f_h(x)$ ясно, что $f_h \rightarrow f$ слабо в S' при $h \rightarrow 0$. Следовательно, $\hat{g}_h \rightarrow \hat{f}$ слабо в S' . Отсюда следует, что точка ξ , определенная выше, принадлежит к $\text{supp } \hat{f}_h$ для достаточно малого $h > 0$, ибо $\xi \in \text{supp } \hat{f} = \text{supp } g$.

Зафиксируем такое достаточно малое число $h > 0$, что $\xi \in \text{supp } \hat{f}_h$. Тогда из (11) следует

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} (\|D^\alpha f_h\|_\infty / |\xi^\alpha|)^{1/|\alpha|} \geq 1.$$

Следовательно, для любого $\epsilon > 0$ существует число $C_\epsilon > 0$ такое, что

$$\|D^\alpha f_h\|_\infty \geq C_\epsilon (1 - \epsilon)^{|\alpha|} |\xi^\alpha|, \quad \alpha \in I. \quad (68)$$

С другой стороны, из $\xi_j \neq 0$, $j = 1, \dots, n$, вытекает, что для любого $\lambda > 1$ существует такая окрестность G точки ξ , что

$$\sup_{x \in G} |x^\alpha| \leq \lambda^{|\alpha|} |\xi^\alpha| \quad (69)$$

для всех $\alpha \geq 0$.

Выберем теперь $\lambda > 1$ и $\epsilon > 0$ такие, что $\lambda^{-1}(1 - \epsilon) \geq r$. Тогда из (67)–(69) вытекает

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in I} \Phi_{\alpha} \left(C_{\epsilon} r^{|\alpha|} \sup_G |\xi^{\alpha}| \right) &\leq \sum_{\alpha \in I} \Phi_{\alpha} \left(C_{\epsilon} \lambda^{-|\alpha|} (1 - \epsilon)^{|\alpha|} \sup_G |\xi^{\alpha}| \right) \\ &\leq \sum_{\alpha \in I} \Phi_{\alpha} (C_{\epsilon} (1 - \epsilon)^{|\alpha|} |\xi^{\alpha}|) \leq \sum_{\alpha \in I} \Phi_{\alpha} (\|D^{\alpha} f_h\|_{\infty}) \leq \frac{1}{\text{mes } B(0, h)}, \end{aligned}$$

что невозможно в силу (66). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 18. Пусть выполнено условие (58). Пространство $W^{\infty} L\{\Phi_{\alpha}, \mathbb{R}^n\}$ содержит все функции $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ с $\text{sp}(f) \subset G_{\Phi}$, но не содержит ни одной функции $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ с $\text{sp}(g) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{C}_{\Phi}) \neq \emptyset$. Более того, если $\Phi_{\alpha}(t) > 0$, $t > 0$, при некотором $\alpha \in I$, то $\text{sp}(g) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{C}_{\Phi}) = \emptyset$ для любой $g \in W^{\infty} L\{\Phi_{\alpha}, \mathbb{R}^n\}$. Последний факт неверен в противном случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ и $\text{sp}(f) \subset G_{\Phi}$. Выберем функцию $\hat{\varphi}(\xi) \in C_0^{\infty}(G_{\Phi})$ такую, что $\hat{\varphi}(\xi)$ равна единице в некоторой окрестности $\text{sp}(f)$. Тогда из неравенств

$$\|D^{\alpha} f\|_{(\Phi_{\alpha})} = \|f * D^{\alpha} \varphi\|_{(\Phi_{\alpha})} \leq 2 \|f\|_1 \|D^{\alpha} \varphi\|_{(\Phi_{\alpha})}, \quad \alpha \in I,$$

и теоремы 17 немедленно получим $f \in W^{\infty} L\{\Phi_{\alpha}, \mathbb{R}^n\}$, ибо $\varphi \in W^{\infty} L\{\Phi_{\alpha}, \mathbb{R}^n\}$.

То, что $W^{\infty} L\{\Phi_{\alpha}, \mathbb{R}^n\}$ не содержит ни одной функции $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ с $\text{sp}(g) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{C}_{\Phi}) \neq \emptyset$, доказывается рассуждениями, совершенно аналогичными проведенными в доказательстве второй части теоремы 17, с учетом того, что на основании следствия 1 каждая точка $\xi \in \text{sp}(g)$ обладает последовательностью точек $\text{sp}(g)$ с ненулевыми компонентами, сходящихся к ξ .

Далее, пусть $\Phi_{\beta}(t) > 0$, $t > 0$, при некотором $\beta \in I$ и $g(x) \in W^{\infty} L\{\Phi_{\alpha}, \mathbb{R}^n\}$. Нам достаточно рассмотреть только случай $g(x) \not\equiv 0$. Тогда из $\|D^{\beta} g\|_{(\Phi_{\beta})} < \infty$, $\|g\|_{(\Phi_0)} < \infty$ и теоремы 1 следует, что:

если $D^{\beta} g(x) \equiv 0$, то $\text{sp}(g) \subset \{0\}$; отсюда $\text{sp}(g) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{C}_{\Phi}) = \emptyset$;

если $D^{\beta} g(x) \not\equiv 0$, то ограничение $\hat{g}(\xi)$ на любой окрестности любой точки $\text{sp}(g)$ не сосредоточено на гиперплоскостях $\xi_j = 0$, $j = 1, \dots, n$.

Следовательно, можем доказать наше утверждение рассуждениями, аналогичными проведенными в доказательстве второй части теоремы 17.

Для завершения построим один контрпример. Пусть $n \geq 2$,

$$I_j = \left\{ \left(\underbrace{m, \dots, m}_{j-1}, m^2, m, \dots, m \right) : m \geq 0 \right\}, \quad I = \bigcup_{j=1}^n I_j,$$

$\Phi_{\alpha}(t) = 0$ для $0 \leq t \leq 1$ и $\Phi_{\alpha}(t) = \infty$ для $t > 1$ при всех $\alpha \in I$ (т.е. при $\|\cdot\|_{(\Phi_{\alpha})} = \|\cdot\|_{\infty}$). Тогда легко видеть, что $G_{\Phi} = M$, где $M = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi_j| < 1, j = 1, \dots, n\}$. Действительно, если $x \notin \overline{M}$, то существует индекс $1 \leq j \leq n$ такой, что

$|x_j| > 1$. Тогда для любой окрестности U_x и для любого числа $0 < C < \infty$ имеем некоторое $\theta > 0$ такое, что для всех $\alpha \in I_j$

$$\sup_{\xi \in U_x} |\xi^\alpha| \geq \theta^{(n-1)m} |x_j|^{m^2}, \quad \alpha = \left(\underbrace{m, \dots, m}_{j-1}, m^2, m, \dots, m \right).$$

Отсюда, учитывая $\theta^{n-1} |x_j|^m \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$, получим $\Phi_\alpha (C \sup_{\xi \in U_x} |\xi^\alpha|) = \infty$ при достаточно большом $|\alpha|$, $\alpha \in I_j$. Это означает, что $x \notin G_\Phi$.

Более того, из $|x_j| > 1$ следует, что существует такая окрестность V точки x , что $|y_j| > 1$ для любой точки $y \in V$. Следовательно, $V \cap G_\Phi = \emptyset$. Значит, $x \notin \overline{G}_\Phi$. Тем самым мы доказали, что

$$\overline{G}_\Phi \subset \overline{M} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi_j| \leq 1, \quad j = 1, \dots, n\}.$$

С другой стороны, из выбора наших функций $\Phi_\alpha(t)$ очевидно, что $M \subset G_\Phi$. Следовательно, $G_\Phi = M$, ибо множество G_Φ всегда открыто.

Наконец, заметим, что любая функция

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) = F^{-1} \widehat{\varphi}(\xi), \quad \widehat{\varphi}(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1}),$$

принадлежит $W^\infty L\{\Phi_\alpha, \mathbb{R}^n\}$, ибо $D^\alpha \varphi(x) \equiv 0$ для всех $\alpha \in I$, $|\alpha| > 0$. Это означает, что свойство $\text{sp}(g) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{G}_\Phi) = \emptyset$ неверно. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Мы показали, что при $n \geq 2$ утверждение $\text{sp}(g) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{G}_\Phi) = \emptyset$ может быть неверным, если для любого $\alpha \in I$ существует число $t_\alpha > 0$ такое, что $\Phi_\alpha(t_\alpha) = 0$. При $n = 1$ имеем более сильный результат.

ТЕОРЕМА 19. Пусть выполнено соответствующее условие (58). Тогда имеем $\text{sp}(g) \cap (\mathbb{R}^1 \setminus \overline{G}_\Phi) = \emptyset$ для любой $g \in W^\infty L\{\Phi_m, \mathbb{R}^1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем методом от противного. Пусть существуют функции $g(x) \in W^\infty L\{\Phi_m, \mathbb{R}^1\}$ и точка $\xi \in \text{sp}(g)$ такие, что $\xi \in \mathbb{R}^1 \setminus \overline{G}_\Phi$. Тогда $G_\Phi = (-b, b)$, $0 < b < \infty$ и $|\xi| > b$.

Определим

$$g_h(x) = \frac{1}{h} \int_0^h g(x+t) dt, \quad h > 0.$$

Тогда, как показано в доказательстве теоремы 17, имеем

$$\sum_{m \in I} \Phi_m(\|D^m g_h\|_\infty) \leq \frac{1}{h} < \infty,$$

ибо можем считать, что $\sum_{m \in I} \|D^m g\|_{(\Phi_m)} \leq 1$. Далее, из слабой сходимости $\hat{g}_h \rightarrow \hat{g}$ в S' следует, что $\xi \in \text{supp } \hat{g}_h$ при достаточно малом $h > 0$. Зафиксируем такое $h > 0$, что $\xi \in \text{supp } \hat{g}_h$. Тогда из (11) вытекает

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|D^m g_h\|_\infty^{1/m} \geq |\xi|.$$

Для определенности считаем, что $\xi > 0$. Тогда существуют числа $0 < \epsilon$, $C < \infty$ такие, что $\xi - \epsilon > b$ и

$$\|D^m g_h\|_\infty \geq C(\xi - \epsilon)^m, \quad m \geq 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{m \in I} \Phi_m(C(\xi - \epsilon)^m) < \infty,$$

что невозможно, так как $\xi - \epsilon > b$ и $G_\Phi = (-b, b)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 20. Пусть выполнено условие (58). Тогда

$$\overline{G}_\Phi \subset \cup \{ \text{sp}(g) : g \in W^\infty L\{\Phi_\alpha, \mathbb{R}^n\} \}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 17 имеем

$$G_\Phi \subset \cup \{ \text{sp}(g) : g \in W^\infty L\{\Phi_\alpha, \mathbb{R}^n\} \}.$$

Далее, пусть $\xi^0 \in \overline{G}_\Phi \setminus G_\Phi$. Тогда существует последовательность точек $\{\xi^k\} \subset G_\Phi$ такая, что $\xi^k \rightarrow \xi^0$, $k \rightarrow \infty$, и $\xi^k \neq \xi^l$, $k \neq l$. Пусть числа $\epsilon_k > 0$, $k \geq 1$, такие, что $B(\xi^k, \epsilon_k) \cap B(\xi^l, \epsilon_l) = \emptyset$ и $B(\xi^k, \epsilon_k) \subset G_\Phi$, $k \geq 1$. Выберем функции $\hat{\varphi}_k(\xi) \in C_0^\infty(B(\xi^k, \epsilon_k))$ и числа $\gamma_k > 0$ такие, что $\hat{\varphi}_k(\xi^k) \neq 0$, $k \geq 1$, и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k |||\varphi_k||| < \infty.$$

Тогда $\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \varphi_k(x) \in W^\infty L\{\Phi_\alpha, \mathbb{R}^n\}$ и $\xi^0 \in \text{sp}(\psi)$. Теорема доказана.

Список литературы

1. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. МИАН СССР. 1951. Т. 38. С. 244–278.
2. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
3. *Ибрагимов И. И.* Экстремальные свойства целых функций конечной степени. Баку: Элм, 1962.
4. *Ибрагимов И. И.* Экстремальные задачи в одном классе целых функций конечной степени // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1959. Т. 23. С. 243–256.
5. *Ибрагимов И. И.* Некоторые экстремальные задачи в одном классе целых функций конечной степени // Изучения современных проблем конструктивной теории функций. Баку: Изд-во АН АзербССР, 1965. С. 212–219.
6. *Буренков В. И.* Теоремы вложения и продолжения для классов дифференцируемых функций многих переменных, заданных во всем пространстве // Итоги науки. Матем. анализ. М.: Изд-во ВИНТИ АН СССР, 1966. С. 71–155.
7. *Красносельский М. А., Рутецкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлица. М.: Физматгиз, 1958.
8. *Adams R.* Sobolev spaces. New York: Academic Press, 1975.
9. *Luxemburg W.* Banach function spaces: Thesis. The Netherlands: Technische Hogeschool te Delft, 1955.
10. *O'Neil R.* Fractional integration in Orlicz space. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 115. P. 300–328.
11. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Изд-во Сиб. отд. АН СССР, 1962.
12. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. М.: Мир, 1986.
13. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.
14. *Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е.* Обобщенные функции. Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций. М.: Физматгиз., 1958.
15. *Ha Huy Bang, Marimoto M.* The sequence of Luxemburg norms of derivatives // Tokyo J. of Math. 1994. V. 17. № 1. P. 141–147.
16. *Ha Huy Bang.* A property of infinitely differentiable functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. V. 108. № 1. P. 73–76.

17. Szegő G., Zygmund A. On certain mean values of polynomials // J. Analyse Math. 1953. V. 3. P. 225–244.
18. Nessel R. J., Wilmes G. Nikolskii-type inequalities in connection with regular spectral measures // Acta Math. 1979. V. 33. P. 169–182.
19. Nessel R. J., Wilmes G. Nikolskii-type inequalities for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type // J. Austral. Math. Soc. 1978. V. 25. P. 7–18.
20. Triebel H. General function spaces. II: Inequalities of Plancherel–Polya–Nikolskii-type, L_p -space of analytic functions: $0 < p \leq \infty$ // J. Approximation Theory. 1977. V. 19. P. 154–175.
21. Triebel H. Theory of function spaces. Basel, Boston, Stuttgart: Birkhäuser, 1983.
22. Родин В. А. Неравенства Джексона и Никольского для тригонометрических полиномов в симметричном пространстве // Труды 7-й зимней школы. Дрогобыч, 1974. М., 1976. С. 133–139.
23. Овчинников В. И. Интерполяционные теоремы, вытекающие из неравенства Гротендика // Функцион. анализ и его прилож. 1976. Т. 10. № 4. С. 45–54.
24. Берколайко М. З., Овчинников В. И. Неравенства для целых функций экспоненциального типа в симметричных пространствах // Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 161. С. 3–17.
25. Дубинский Ю. А. Пространства Соболева бесконечного порядка // УМН. 1991. Т. 43. № 6. С. 97–131.
26. Dubinskij Ju. A. Sobolev spaces of infinite order and differential equations. Dordrecht–Boston–Lankaster–Tokyo: Riedel, 1986.
27. Tran Duc Van, Dinh Nho Hao. Differential operators of infinite order with real arguments and their applications. Singapore: World Scientific, 1994.
28. Дубинский Ю. А. Пространства Соболева бесконечного порядка и поведение задач при неограниченном возрастании порядка уравнений // Матем. сб. 1975. Т. 98 (140). № 2. С. 163–184.
29. Дубинский Ю. А. Нетривиальность пространств Соболева бесконечного порядка в случае полного евклидова пространства и тора // Матем. сб. 1976. Т. 100(142). № 3. С. 436–446.
30. Чан Дык Ван. Нелинейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства бесконечного порядка. Минск: Изд-во БГУ, 1983.
31. Ха Зуи Банг. Критерии нетривиальности классов, пространств Соболева–Орлича бесконечного порядка в полном евклидовом пространстве // Сиб. матем. журн. 1990. Т. 31. № 1. С. 208–213.