Общероссийский математический портал

Е. Н. Доманский, Письмо в редакцию, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 2, 199–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/im121>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 09:25:10

Е. Н. Доманский

Письмо в редакцию

Библиография: 1 наименование.

В доказательстве теоремы 3 из [1] имеется пробел. В статье дано полное доказательство этой теоремы в случае, когда пространство Y сепарабельно. В доказательстве леммы 2 имеется несущественная ошибка, хотя формулировка ее верна и доказывается она очевидным образом. Заменяв лемму 2 другой леммой, мы дадим доказательство первой части формулировки теоремы 3:

пусть $f: D(f) \subset X \rightarrow Y$ – произвольное отображение, действующее из метрического пространства X в линейное нормированное пространство Y , $Y \neq 0$, с областью определения типа $F_{\sigma\delta}$ в X . Тогда если f T -регуляризуемо, то f M -регуляризуемо непрерывными отображениями, восполняя, тем самым, упомянутый пробел.

Вместо леммы 2 статьи предлагается следующая лемма.

ЛЕММА 2. Пусть X – метрическое пространство, Y – линейное нормированное пространство. Если отображение $f: D(f) \subset X \rightarrow Y$ T -регуляризуемо, то для него существует ТРА $\{R_\delta\}$, $\delta \in T$, со свойством

$$\forall x \in X \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(R_\delta, \delta, x) = 0. \quad (*)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [7, с. 186], [9] по произвольному ТРА $\{R_\delta\}$, $\delta \in T$, для f построен непрерывный ТРА для f следующего вида:

$$R'_{\frac{\delta}{2}}(x) = \sum_{U \in S} \frac{\rho(x, X \setminus U)}{\sum_{U \in S} \rho(x, X \setminus U)} l(U), \quad \delta \in T,$$

где S – некоторое локально конечное открытое покрытие пространства X , l – соответствующее отображение, сопоставляющее каждому $U \in S$ некоторый элемент $y \in Y$. Ввиду локальной конечности покрытия S для каждой точки $x \in X$ найдутся открытое множество G_x и элементы $y_1^\delta, y_2^\delta, \dots, y_{k(\delta)}^\delta$ из Y , определяемые множеством G_x , такие, что отображения $R'_{\frac{\delta}{2}}: X \rightarrow Y$, $\delta \in T$, принимают вид

$$R'_{\frac{\delta}{2}}(x) = \sum_{i=1}^{k(\delta)} \frac{\rho(x, X \setminus U_i)}{\sum_{i=1}^{k(\delta)} \rho(x, X \setminus U_i)} y_i^\delta$$

при всех $x \in G_x$. Пусть $f_n = R'_{\frac{\delta_n}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$, для некоторой $\{\delta_n\} \subset T$, $\delta_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. В силу локальной липшицевости первого порядка отображений f_n при каждом n и для всех $x \in X$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \omega(f_n, \sigma, x) = 0.$$

Следуя доказательству теоремы 1, строятся последовательность $\{\sigma'_n(x)\}$, $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < \sigma'_{n+1}(x) \leq \frac{\sigma'_n(x)}{2} \leq 1$ для всех $x \in X$ и $n \in \mathbb{N}$, и функция

$$n(\sigma, x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma'_1(x) < \sigma \leq 1, \\ i, & \text{если } \sigma'_{i+1}(x) < \sigma \leq \sigma'_i(x), \end{cases}$$

$i = 1, 2, \dots$, такие, что семейство $R_\sigma(x) = f_{n(\sigma, x)}(x)$, $\sigma \in]0; 1]$, является ТРА со свойством (*), но необязательно непрерывным. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3 полностью сохраняется до слов “использования леммы 2”. Далее оно имеет следующий вид:

... Далее, так как f T -регуляризуемо, то по лемме 2 для f существует ТРА со свойством (*). По лемме 1 существует МРА $\{R_\sigma\}$, $\sigma \in]0; \delta_0]$, для f со свойством (*). Следуя [9], [7, с. 183] по МРА $\{R_\delta\}$, $\delta \in]0; \delta_0]$, построим непрерывный ТРА $\{R'_{\frac{\delta}{2}}\}$, $\delta \in]0; \delta_0]$, вида

$$R'_{\frac{\delta}{2}}(x) = \sum_{i=1}^{n(x_0)} \frac{\rho(x, X \setminus U_i)}{\sum_{i=1}^{n(x_0)} \rho(x, X \setminus U_i)} y_i^\delta \quad \text{для всех } x \in O_{\epsilon(\delta)}(x_0),$$

$\delta \in]0; \delta_0]$, где y_i^δ , $1 \leq i \leq n(x_0)$, – некоторые элементы из Y , $\epsilon(\delta)$, $\delta \in]0; \delta_0]$, – некоторая непрерывная функция, определяемая элементом x_0 , $\epsilon(\delta) \leq \delta$, $\delta \in]0; \delta_0]$. Пусть x_δ и x_0 из X таковы, что $\rho(x_\delta, x_0) \leq \delta$ и $R'_{\frac{\delta}{2}}(x_\delta) \rightarrow y$, $\delta \rightarrow 0$. Тогда для семейства $x_{\epsilon(\delta)} \rho(x_{\epsilon(\delta)}, x_0) \leq \epsilon(\delta)$ и $R'_{\frac{\epsilon(\delta)}{2}}(x_{\epsilon(\delta)}) \rightarrow y$, $\delta \rightarrow 0$.

Так как $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(R_{\epsilon(\delta)}, \epsilon(\delta), x_0) = 0$, то

$$y_i^{\epsilon(\delta)} = R_{\epsilon(\delta)}(x_{\epsilon(\delta)}^i) \rightarrow R_{\epsilon(\delta)}(x_0) \quad \text{при } \delta \rightarrow 0$$

и по построению $R'_{\frac{\epsilon(\delta)}{2}} \rho(x_{\epsilon(\delta)}^i, x_0) \leq \epsilon(\delta)$. Поэтому

$$R'_{\frac{\epsilon(\delta)}{2}}(x_{\epsilon(\delta)}) \rightarrow R_{\epsilon(\delta)}(x_0), \quad \delta \rightarrow 0.$$

Отсюда

$$R_{\epsilon(\delta)}(x_0) \rightarrow y, \quad \delta \rightarrow 0,$$

а так как $M(R_{\epsilon(\delta)}) = M(R_\delta) = D(f)$, то $x_0 \in D(f)$.

Таким образом, $\{R'_{\frac{\delta}{2}}\}$, $\delta \in]0; \delta_0]$, – непрерывный МРА для f . Первая часть теоремы доказана...

В формулировках следствий 1 и 2 теорем 8–10 требуется условие сепарабельности Y .

Список литературы

1. Доманский Е. Н. О регуляризуемости по Маслову разрывных отображений // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 1. С. 33–58.

Поступило в редакцию
7.XII.1994