Общероссийский математический портал

В. А. Абрашкин, Явные формулы для символа Гильберта формальной группы над векторами Витта, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 3, 3–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/im122>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 12:57:13

УДК 512.7

В. А. Абрашкин

Явные формулы для символа Гильберта формальной группы над векторами Витта

В работе получена явная формула для обобщения символа Гильберта, связанного с произвольной формальной группой конечной высоты, определенной над кольцом векторов Витта с коэффициентами в совершенном поле характеристики $p > 0$. Полученная формула переходит в формулу Брюкнера–Востокова в случае мультипликативной формальной группы. Доказательство основано на применении теории Фонтена p -адических периодов формальных групп, функтора поле норм Фонтена–Винтенберге и явного закона взаимности Витта в характеристике p .

Библиография: 23 наименования.

§0. Введение

0.1. Пусть $W(k_0)$ – кольцо векторов Витта с коэффициентами в совершенном поле k_0 характеристики $p > 2$. Пусть G – гладкий функтор формальных коммутативных групп над $W(k_0)$ конечной размерности $n = n(G)$. Это означает существование коммутативного формального группового закона на $W(k_0)$ -алгебре формальных степенных рядов $\mathcal{B} = W(k_0)[[X_1, \dots, X_n]]$ вместе с изоморфизмом групповых функторов $G \simeq \mathrm{Spf} \mathcal{B}$.

Предположим, что формальная группа G имеет конечную высоту $h = h(G)$, т.е. изогения $p \mathrm{id}_G$ индуцирует инъективный морфизм $p^*: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ степени p^h . Тогда для любого $M \in \mathbb{N}$ схема $G[M] = \mathrm{Ker}(p^M \mathrm{id}_G)$ является конечной плоской коммутативной групповой схемой над $W(k_0)$ порядка p^{Mh} .

Фиксируем алгебраическое замыкание $\bar{K}$ поля частных K_0 кольца $W(k_0)$. Если C – пополнение поля $\bar{K}$ в p -адической топологии и m_C – максимальный идеал его кольца нормирования, то гомоморфизм групп $p^M \mathrm{id}_G: G(m_C) \rightarrow G(m_C)$ является сюръективным и его ядро $G[M](m_C) \simeq (\mathbb{Z}/p^M \mathbb{Z})^h$.

Пусть K – конечное расширение поля K_0 в $\bar{K}$. Обозначим его поле вычетов через k , а максимальный идеал через m_K . Предположим, что все точки порядка p^M группы $G(m_C)$ определены над K , т.е. $G[M](m_C) = G[M](m_K)$. Тогда для $f \in G(m_K)$ и $\tau \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ значение $(f, \tau)_G \in G[M](m_K)$ символа формальной группы G определяется следующим образом:

$$(f, \tau)_G = \tau f_1 -_G f_1,$$

где $f_1 \in G(m_C)$ такой, что $(p^M \mathrm{id}_G)(f_1) = f$. Легко видеть, что это определение корректно и при данном $f \in G(m_K)$ значение $(f, \tau)_G$ зависит лишь от образа τ

в группе Галуа Γ_K^{ab} максимального абелевого расширения поля K . Мы получаем билинейное спаривание

$$(\cdot, \cdot]_G: G(m_K) \times \Gamma_K^{\text{ab}} \rightarrow G[M](m_K).$$

Если поле вычетов k поля K конечно и $\psi_K: K^* \rightarrow \Gamma_K^{\text{ab}}$ – отображение взаимности теории полей классов, то мы получаем символ Гильберта формальной группы G с помощью равенства $(f, g]_G = (f, \tau]_G$, где $g \in K^*$ и $\psi_K(g)$ является образом τ в Γ_K^{ab} . Этот символ совпадает с классическим символом Гильберта, если $G = \widehat{\mathbb{G}}_m$ – формальная мультипликативная группа.

0.2. Пусть $o_M^1, \dots, o_M^h$ – некоторый $\mathbb{Z}/p^M$ -базис в $G[M](m_K)$. Тогда

$$(f, g]_G = A_1 o_M^1 + \dots + A_h o_M^h,$$

где $A(f, g) = {}^t(A_1, \dots, A_h) \in (\mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z})^h$ – вектор-столбец с координатами из $\mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z}$ (для любого модуля B мы резервируем обозначение B^n для модуля вектор-столбцов порядка n с координатами из B). Проблема явного описания символа $(\cdot, \cdot]_G$ – это проблема отыскания некоторого аналитического выражения для $A(f, g)$, которое, очевидно, должно включать информацию о структуре формальной группы G и об элементах $f \in G(m_K)$ и $g \in K^*$.

В нашем изложении это выражение будет содержать элементы некоторой $W_{\mathbb{Q}_p}(k)$ -алгебры $\mathcal{L}_{k, \tilde{t}}$ рядов Лорана от переменной $\tilde{t}$ с коэффициентами из $W_{\mathbb{Q}_p}(k)$.

Чтобы определить алгебру $\mathcal{L}_{k, \tilde{t}}$, для всякого $a \in \mathbb{Q}$, где $a > p - 1$, рассмотрим $W(k)$ -алгебру $\mathcal{L}_{k, \tilde{t}}^0(a)$ формальных рядов Лорана $\sum_{u \in \mathbb{Z}} w_u \tilde{t}^u$, где $w_u \in W_{\mathbb{Q}_p}(k)$ и $v(w_u) \geq -u/(ae)$ для $u \geq 0$, $v(w_u) \geq -u/((p-1)e)$ для $u \leq 0$ (здесь v – p -адический показатель такой, что $v(p) = 1$, и e – абсолютный индекс ветвления поля K). Пусть $\mathcal{L}_{k, \tilde{t}}^0$ – p -адическое замыкание алгебры $\bigcup_{a > p-1} \mathcal{L}_{k, \tilde{t}}^0(a)$. Тогда $\mathcal{L}_{k, \tilde{t}} = \mathcal{L}_{k, \tilde{t}}^0 \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$.

Если $f = \sum_{u \in \mathbb{Z}} w_u \tilde{t}^u \in \mathcal{L}_{k, \tilde{t}}$, то положим $\sigma(f) = \sum_{u \in \mathbb{Z}} \sigma(w_u) \tilde{t}^{up}$, если это выражение имеет смысл в $\mathcal{L}_{k, \tilde{t}}$, т.е. если $\sigma(f) \in \mathcal{L}_{k, \tilde{t}}$ (здесь σ действует на $W_{\mathbb{Q}_p}(k)$ как обычный морфизм Фробениуса векторов Витта). Заметим, что σ заведомо определен на $W_{\mathbb{Q}_p}(k)$ -подалгебре $\mathcal{L}_{k, \tilde{t}}^+$ алгебры $\mathcal{L}_{k, \tilde{t}}$, состоящей из $\tilde{t}$ -целых рядов $\sum_{u \geq 0} w_u \tilde{t}^u$.

0.3. Чтобы зафиксировать структуру формальной группы G , введем в рассмотрение фильтрованный $W(k_0)$ -модуль ее p -адических периодов

$$\mathcal{M}(G) = (M^0(G), M^1(G)).$$

Если $T(G)$ – модуль Тейта формальной группы G и $\Gamma_0 = \text{Gal}(\overline{K}/K_0)$, то $M^0(G) = \text{Hom}^{\Gamma_0}(T(G), A_{\text{cris}})$, где A_{cris} – кристаллическое кольцо Фонтена (см. п. 1.1). Фильтрация $M^1(G) \subset M^0(G)$ и морфизм Фробениуса σ на $M^0(G)$ индуцированы фильтрацией $A_{\text{cris}}^1 \subset A_{\text{cris}}$ и морфизмом Фробениуса $\sigma = \phi_0$ на A_{cris} соответственно. Структура $\mathcal{M}(G)$ может быть задана в терминах фиксированного $W(k_0)$ -базиса $l_1, \dots, l_n$ модуля $M^1(G)$ и его дополнения $m_1, \dots, m_{h-n} \in M^0(G)$ до $W(k_0)$ -базиса модуля $M^0(G)$ следующим образом. Если $\bar{l} = {}^t(l_1, \dots, l_n)$, $\bar{m} =$

${}^t(m_1, \dots, m_{h-n})$ – вектор-столбцы, то для некоторой обратимой матрицы $\mathcal{E} \in \mathrm{GL}_h(W(k_0))$ имеем матричное соотношение

$$\begin{pmatrix} (\sigma/p)\bar{l} \\ \sigma\bar{m} \end{pmatrix} = \mathcal{E} \begin{pmatrix} \bar{l} \\ \bar{m} \end{pmatrix}.$$

Мы используем эту матрицу $\mathcal{E}$ (см. п. 1.3), чтобы определить для всех $u \in \mathbb{N}$ вспомогательные матрицы F_u и F'_u (порядков $n \times n$ и $n \times (h-n)$ соответственно) такие, что:

а) если $G_{\mathcal{A}}$ – n -мерная формальная группа над $W(k_0)$, заданная с помощью функционального уравнения

$$\bar{l}_{\mathcal{A}}(\bar{X}) = \bar{X} + \frac{1}{p} \sum_{u \geq 1} F_u(\sigma_*^u \bar{l}_{\mathcal{A}})(\bar{X}^{p^u})$$

для ее векторного степенного ряда логарифмов $\bar{l}_{\mathcal{A}}(\bar{X}) = {}^t(l_{\mathcal{A},1}(\bar{X}), \dots, l_{\mathcal{A},n}(\bar{X}))$, то $G \simeq G_{\mathcal{A}}$;

б) если π – фиксированный униформизирующий элемент поля K и

$$\delta_M^1, \dots, \delta_M^h \in m_{k,\tilde{t}} := \tilde{t}W(k)[[\tilde{t}]] \subset \mathcal{L}_{k,\tilde{t}}$$

таковы, что $\delta_M^i \mapsto o_M^i$ при подстановке $\tilde{t} \mapsto \pi$, то для $1 \leq i \leq h$ положим

$$\bar{m}_{\mathcal{A}}(\delta_M^i) = \frac{1}{p} \sum_{u \geq 1} F'_u \sigma^u(\bar{l}_{\mathcal{A}}(\delta_M^i)).$$

Тогда матрица

$$\psi_{\tilde{t}} = \begin{pmatrix} p^M \bar{l}_{\mathcal{A}}(\delta_M^1) & \dots & p^M \bar{l}_{\mathcal{A}}(\delta_M^h) \\ p^M \bar{m}_{\mathcal{A}}(\delta_M^1) & \dots & p^M \bar{m}_{\mathcal{A}}(\delta_M^h) \end{pmatrix}$$

является аппроксимацией по модулю p^M для матрицы значений спаривания p -адических периодов $T(G_{\mathcal{A}}) \times M^0(G_{\mathcal{A}}) \rightarrow A_{\mathrm{cris}}$.

0.4. Первая явная формула для $(f, g]_{G_{\mathcal{A}}}$. Пусть $f \in G_{\mathcal{A}}(m_K)$ и $\beta = \beta(\tilde{t}) \in m_{k,\tilde{t}}^n$ таково, что $\beta(\pi) = f$. Рассмотрим $g \in K^*$, для которого существует $\delta = \delta(\tilde{t}) \in W(k)[[\tilde{t}]] [\tilde{t}^{-1}]$ такое, что

$$\frac{\sigma\delta}{\delta p} \in 1 + pm_{k,\tilde{t}}, \quad \frac{1}{p} \log \frac{\sigma\delta}{\delta p} = \sum_{(c,p)=1} \alpha_c \tilde{t}^c,$$

где все $\alpha_c \in W(k)$ и $\delta(\pi) = g$. Другими словами, мы имеем

$$\delta = [\alpha_0] \tilde{t}^{a_0} \prod_{(c,p)=1} E(\alpha_c, \tilde{t}^c),$$

где $\alpha_0 \in k^*$, $a_0 \in \mathbb{Z}$, все $\alpha_c \in W(k)$,

$$E(\alpha, X) = \exp(\alpha X + \dots + (\sigma^s \alpha) X^{p^s} / p^s + \dots) \in W(k)[[X]]$$

для $\alpha \in W(k)$, и $\delta \mapsto g$ при подстановке $\tilde{t} \mapsto \pi$.

Такие элементы $g \in K^*$ образуют подгруппу индекса p^{l_0} в K^* , где l_0 – наибольшее целое число такое, что K содержит примитивный корень из единицы степени p^{l_0} .

При сделанных предположениях мы получаем (см. п. 4.2) следующую формулу для значений символа Гильберта:

$$A(f, g) = (\text{Res}_{\tilde{t}=0} \circ \text{Tr}) \left\{ \psi_{\tilde{t}}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta) - (\mathcal{A}^*/p) \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta) \\ 0 \end{pmatrix} d_{\log} \delta \right\} \pmod{p^M}. \quad (1)$$

Здесь $\text{Tr}: W(k) \rightarrow \mathbb{Z}_p$ – отображение, индуцированное следом расширения $k/\mathbb{F}_p$, $\text{Res}_{\tilde{t}=0}$ – вычет и $\mathcal{A}^* = \sum_{u \geq 1} F_u \sigma^u$.

Формула (1) получена в результате интерпретации символа формальной группы с помощью символа Витта в характеристике p . Связь между этими двумя символами осуществляется посредством вспомогательной конструкции “кристаллического” символа. В действительности используемый метод является непосредственным обобщением метода работы [3], где был рассмотрен случай $G = \widehat{\mathbb{G}}_m$.

0.5. Вторая явная формула для $(f, g)_{G_{\mathcal{A}}}$. Приведенная выше формула (1) имеет недостатки, связанные с тем, что g не является произвольным элементом из группы K^* , а также с необходимостью сопоставления элементу g специального ряда $\delta = \delta(\tilde{t})$. В случае $G = \widehat{\mathbb{G}}_m$ явные формулы Брюкнера–Востокова (см. [8], [21]) свободны от этих ограничений. С помощью формальных аргументов мы преобразуем в п. 4.5 формулу (1) к виду, аналогичному формуле Брюкнера–Востокова. Окончательный результат может быть сформулирован следующим образом.

Рассмотрим введенные ранее элементы $f \in G_{\mathcal{A}}(m_K)$, $\beta = \beta(\tilde{t}) \in m_{k, \tilde{t}}^n$, оператор $\mathcal{A}^* = \sum_{u \geq 1} F_u \sigma^u$ и матрицу $\mathcal{V}_{\tilde{t}}$. Для $g \in K^*$ пусть $\delta = \delta(\tilde{t}) \in W(k)[[\tilde{t}]] [\tilde{t}^{-1}]$ таково, что $\delta(\pi) = g$ и $\delta = [\alpha_0] \tilde{t}^{a_0} (1 + \delta_1)$, где $\alpha_0 \in k^*$, $a_0 \in \mathbb{Z}$, $\delta_1 \in m_{k, \tilde{t}}$. Пусть

$$\overline{m}_{\mathcal{A}}(\beta) = \frac{1}{p} \sum_{u \geq 1} F'_u (\sigma^u \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta)),$$

и предположим, что поле K содержит примитивный корень из единицы ζ_M степени p^M . Тогда

$$A(f, g) = (\text{Res} \circ \text{Tr}) \left\{ \psi_{\tilde{t}}^{-1} \left[\begin{pmatrix} \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta) - \frac{\mathcal{A}^*}{p} \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta) \\ 0 \end{pmatrix} d_{\log} \delta + \frac{1}{p} \log \frac{\sigma \delta}{\delta^p} d \left(\frac{\frac{\mathcal{A}^*}{p} \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta)}{\overline{m}_{\mathcal{A}}(\beta)} \right) \right] \right\} \pmod{p^M}. \quad (2)$$

Эта формула получается из формулы (1) с помощью:

- а) введения в рассмотрение p^M -примарных элементов группы K^* , чтобы избавиться от ограничения на значения $g \in K^*$;
- б) доказательства независимости значений формулы (2) от выбора $\delta(\tilde{t})$;
- с) проверки того, что формулы (1) и (2) принимают одно и то же значение при специальном выборе степенного ряда $\delta(\tilde{t})$ из п. 0.4.

Заметим, что формула (2) не содержит информации о корне из единицы $\zeta_M \in K$. Было бы интересно выяснить, справедлива ли формула (2) без предположения $\zeta_M \in K$.

Формула (2) значительно обобщает основной результат работы [6], где был рассмотрен случай символа, связанного с 1-мерной формальной группой по модулю p (т.е. $n(G) = 1$, $M = 1$).

0.6. Как мы уже отмечали, наши рассуждения основаны на построенной Ж.-М. Фонтеном теории p -адических периодов p -делимых групп (также очень важную роль в доказательстве играют функтор поле норм Фонтена–Винтенберге [23] и принадлежащая Фонтену интерпретация закона взаимности Витта [14]).

Наши аргументы непосредственно переносятся на случай формальных A -модулей, определенных над A_{cris} (здесь A – кольцо нормирования некоторого полного дискретно нормированного поля L характеристики 0 с совершенным полем вычетов, A_{cris} — кольцо нормирования максимального неразветвленного расширения поля L). Для этого достаточно использовать параллельную теорию π -адических периодов (здесь π – униформизирующий элемент поля L); см. [10], [15]. В частности, это дает явную формулу в случае формальных групп Любина–Тейта из [22]. Наш метод приспособлен также для исследования символа, связанного с p -адическими мотивами, возникающими в теории Фонтена–Лаффе (необходимо лишь прояснить понятие p -адических точек этих мотивов). Было бы также интересно связать наш подход с подходом К. Като [17], где получена наиболее общая и естественная интерпретация явных формул для символа Гильберта в случае мультипликативной группы $\mathbb{G}_m$.

Заметим, наконец, что существует другой путь получения явных формул для символа Гильберта, который представлен формулами Коутса–Уайлса в случаях мультипликативной формальной группы и групп Любина–Тейта, а также идеями Кольвагина [18] в случае 1-мерных формальных групп. Недавно Д. Бенуа [5] применил метод Ш. Сена для описания нормализованных соотношений Кольвагина и получил формулы типа Артина–Хассе для символа Гильберта в случае формальных групп над произвольным локальным полем. Эти формулы также используют информацию о матрице p -адических периодов.

Предлагаемая работа написана автором во время пребывания в исследовательской группе “Arbeitsgruppe Algebraische Geometrie und Zahlentheorie” (Max-Planck-Gesellschaft, Berlin). Хочется выразить благодарность этой организации, а также ее руководителю профессору Х. Коху за прекрасные условия для работы.

§1. p -адические периоды формальных групп

Пусть K_0 – поле частных кольца векторов Витта $W(k_0)$, где k_0 – совершенное поле характеристики $p > 2$. Фиксируем алгебраическое замыкание $\bar{K}$ поля K_0 и обозначим через C его p -адическое пополнение. Пусть m_C – максимальный идеал кольца нормирования O_C поля C и $\Gamma_0 = \text{Gal}(\bar{K}/K_0)$.

1.1. Кольцо Фонтена A_{cris} [13]. Пусть $R = \{(x^{(n)})_{n \geq 0} \mid x^{(n)} \in O_C, x^{(n+1)p} = x^{(n)}\}$ – кольцо с операциями $(x^{(n)}) + (y^{(n)}) = (z^{(n)})$, $(x^{(n)})(y^{(n)}) = (w^{(n)})$, где $z^{(n)} = \lim_{m \rightarrow \infty} (x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{p^m}$, $w^{(n)} = x^{(n)}y^{(n)}$. Кольцо R

является полным по отношению к нормированию, заданному показателем v_R таким, что $v_R((x^{(n)})) = v(x^{(0)})$, где v – p -адический показатель поля C такой, что $v(p) = 1$. Поля вычетов колец O_C и R канонически отождествляются; в частности, существует каноническое вложение колец векторов Витта $W(k_0) \subset W(R)$. Мы используем обозначение m_R для максимального идеала в R .

Если $w = \sum_{n \geq 0} p^n [r_n] \in W(R)$, то $w \mapsto \sum_{n \geq 0} p^n r_n^{(0)}$ задает эпиморфизм $W(k_0)$ -алгебр $\gamma: W(R) \rightarrow O_C$ и $W^1(R) := \text{Ker } \gamma$ является главным идеалом в $W(R)$. В качестве его образующей может быть взят любой элемент $\xi \in W^1(R)$ такой, что $v_R(r_0) = 1$, где $r_0 = \xi \bmod pW(R) \in R$. Заметим, что $\text{Ker}(\gamma: W(m_R) \rightarrow m_C) := W^1(m_R)$ равен $\xi W(m_R)$. Алгебра A_{cris} является p -адическим пополнением оболочки разделенных степеней кольца $W(R)$ по отношению к идеалу $\text{Ker } \gamma$. На A_{cris} имеется индуцированное непрерывное действие группы Галуа Γ_0 и $A_{\text{cris}}^{\Gamma_0} = W(k_0)$. Абсолютный морфизм Фробениуса σ кольца $W(k_0)$ имеет естественное продолжение ϕ_0 на A_{cris} .

Обозначим через $\text{Fil}^i A_{\text{cris}}$, $i \geq 0$, убывающую фильтрацию разделенных степеней идеала $\text{Ker } \gamma$. Если $\gamma_{\text{cris}}: A_{\text{cris}} \rightarrow O_C$ – естественное продолжение γ , то $\text{Fil}^1 A_{\text{cris}} = \text{Ker } \gamma_{\text{cris}}$. Так как $\phi_0 \text{Fil}^1 A_{\text{cris}} \subset pA_{\text{cris}}$, то $\phi_1 = \phi_0/p$ является корректно определенным σ -линейным морфизмом из $\text{Fil}^1 A_{\text{cris}}$ в A_{cris} . Мы часто будем обозначать ϕ_0 и ϕ_1 через σ и σ/p соответственно.

Если $M \in \mathbb{N}$, то обозначим через $A_{\text{cris}, M}$ фактор $A_{\text{cris}}/p^M A_{\text{cris}}$ с индуцированными действием Γ_0 , фильтрацией, а также отображениями $\phi_0: A_{\text{cris}, M} \rightarrow A_{\text{cris}, M}$ и $\phi_1: \text{Fil}^1 A_{\text{cris}, M} \rightarrow A_{\text{cris}, M}$.

1.2. Спаривание p -адических периодов [11], [15]. Обозначим через $\text{MF}_{W(k_0)}$ абелеву категорию допустимых фильтрованных модулей с фильтрацией длины 1. Ее объектами являются наборы $\mathcal{M} = (M^0, M^1, \phi_0, \phi_1)$, где M^0 является $W(k_0)$ -модулем, M^1 – его подмодуль, $\phi_0: M^0 \rightarrow M^0$ и $\phi_1: M^1 \rightarrow M^0$ являются σ -линейными морфизмами такими, что для любого $m \in M^1$ выполнено $\phi_0(m) = p\phi_1(m)$ и $M^0 = \phi_0(M^0) + \phi_1(M^1)$. Морфизмами этой категории являются морфизмы фильтрованных модулей, коммутирующие с ϕ_0 и ϕ_1 .

Пусть $\tilde{G}$ – p -делимая группа над $W(k_0)$ конечной высоты $h(\tilde{G})$. Если $T(\tilde{G})$ – модуль Тейта для $\tilde{G}$, то положим

$$\begin{aligned} M^0(\tilde{G}) &= \text{Hom}_{\Gamma_0}(T(\tilde{G}), A_{\text{cris}}), \\ M^1(\tilde{G}) &= \text{Hom}_{\Gamma_0}(T(\tilde{G}), \text{Fil}^1 A_{\text{cris}}). \end{aligned}$$

Тогда $\phi_0|_{A_{\text{cris}}}$ и $\phi_1|_{\text{Fil}^1 A_{\text{cris}}}$ индуцируют σ -линейные морфизмы $\phi_0: M^0(\tilde{G}) \rightarrow M^0(\tilde{G})$ и $\phi_1: M^1(\tilde{G}) \rightarrow M^0(\tilde{G})$, а

$$\mathcal{M}(\tilde{G}) = (M^0(\tilde{G}), M^1(\tilde{G}), \phi_0, \phi_1)$$

является объектом категории $\text{MF}_{W(k_0)}$. Соответствие $\tilde{G} \mapsto \mathcal{M}(\tilde{G})$ определяет вполне строгий функтор из категории p -делимых групп конечной высоты, определенных над $W(k_0)$, в категорию $\text{MF}_{W(k_0)}$. Существенный образ этого функтора состоит из объектов $\mathcal{M}(\tilde{G})$ таких, что $M^0(\tilde{G})$ является свободным $W(k_0)$ -модулем конечного ранга. Имеем $\text{rk}_{W(k_0)} M^0(\tilde{G}) = h(\tilde{G})$, и если $n(\tilde{G})$ – размерность группы $\tilde{G}$, то $\text{rk}_{W(k_0)} M^1(\tilde{G}) = n(\tilde{G})$.

Если G – формальная гладкая группа над $W(k_0)$ конечной высоты и $G[m] = \text{Ker } p^m \text{id}_G$, то $\tilde{G} = \{G[m]\}_{m \geq 0}$ является p -делимой группой над $W(k_0)$. Соответствие $G \mapsto \tilde{G}$ дает вполне строгий функтор из категории формальных гладких групп конечной высоты в категорию p -делимых групп над $W(k_0)$. Соответствующие объекты $\mathcal{M}(G) = \mathcal{M}(\tilde{G})$ могут быть полностью охарактеризованы следующим дополнительным свойством: ϕ_0 топологически нильпотентен на $M^0(\tilde{G})$.

Приведенное выше описание p -делимых групп $\tilde{G}$ может быть интерпретировано как спаривание p -адических периодов

$$T(\tilde{G}) \times M^0(\tilde{G}) \rightarrow A_{\text{cris}}.$$

Это спаривание является $\mathbb{Z}_p$ -билинейным, невырожденным и совместимым со всеми дополнительными структурами, т.е. со структурами Γ_0 -модулей на $T(\tilde{G})$ и на A_{cris} , а также с фильтрациями и действием морфизмов Фробениуса на $M^0(\tilde{G})$ и на A_{cris} . Заметим, что если G – формальная группа, то это спаривание принимает значения в

$$A_{\text{cris}}^{\text{loc}} := \{a \in A_{\text{cris}} \mid \phi_0^n(a) \rightarrow 0, \text{ если } n \rightarrow \infty\}.$$

Аналог приведенного выше описания p -делимых групп существует также и на уровне конечных групповых схем. Мы используем его для получения невырожденных спариваний

$$\tilde{G}[M](O_C) \times (M^0(\tilde{G}) \bmod p^M) \rightarrow A_{\text{cris}, M},$$

где $M \in \mathbb{N}$ и $\tilde{G}[M] = \text{Ker}(p^M \text{id}_{\tilde{G}})$. Как и ранее, эти спаривания также совместимы со всеми дополнительными структурами. В частности, Γ_0 -модуль $\tilde{G}[M](O_C)$ может быть отождествлен с

$$\left\{ \eta \in \text{Hom}_{W(k_0)}(M^0(\tilde{G}), A_{\text{cris}, M}) \mid \eta(M^1(\tilde{G})) \subset \text{Fil}^1 A_{\text{cris}, M} \right. \\ \left. \text{и } \eta\phi_0 = \phi_0\eta, \quad \eta\phi_1 = \phi_1\eta \right\}.$$

1.3. Структура фильтрованного модуля $\mathcal{M}(\tilde{G})$. Пусть $\tilde{G}$ – p -делимая группа над $W(k_0)$ конечной высоты h и размерности n . Если $\mathcal{M}(\tilde{G}) = (M^0, M^1, \phi_0, \phi_1)$, то $W(k_0)$ -модуль M^1 является прямым слагаемым в M^0 . Следовательно, можно взять $W(k_0)$ -базис $\{l_1, \dots, l_n\}$ в M^1 и выбрать элементы $m_1, \dots, m_{h-n} \in M^0$ так, чтобы набор

$$\{l_1, \dots, l_n, m_1, \dots, m_{h-n}\}$$

являлся $W(k_0)$ -базисом в M^0 .

Рассмотрим вектор-столбцы $\bar{l} = {}^t(l_1, \dots, l_n)$ и $\bar{m} = {}^t(m_1, \dots, m_{h-n})$. Тогда задание структуры объекта категории $\text{MF}_{W(k_0)}$ на $\mathcal{M}(\tilde{G})$ эквивалентно заданию матричного соотношения

$$\begin{pmatrix} \phi_1(\bar{l}) \\ \phi_0(\bar{m}) \end{pmatrix} = \mathcal{E} \begin{pmatrix} \bar{l} \\ \bar{m} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $\mathcal{E} \in \text{GL}_h(W(k_0))$.

Пусть $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$ – блочная форма матрицы $\mathcal{E}$ такая, что соотношение (3) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned}\phi_1(\bar{l}) &= A_1\bar{l} + B_1\bar{m}, \\ \phi_0(\bar{m}) &= C_1\bar{l} + D_1\bar{m}.\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай p -делимых групп, возникающих из формальных групп G . Как было отмечено ранее, это означает, что ϕ_0 действует нильпотентно на $M^0(\tilde{G}) = M^0(G)$. Легко проверить, что в терминах матрицы $\mathcal{E}$ это дополнительное свойство эквивалентно тому, что

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \sigma^u(D_1) \dots D_1 = 0.$$

Пусть $\mathcal{E}^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ – блочная форма такая, что

$$\begin{aligned}\bar{l} &= A(\sigma\bar{l}/p) + B\sigma\bar{m}, \\ \bar{m} &= C(\sigma\bar{l}/p) + D\sigma\bar{m}\end{aligned}\tag{4}$$

(теперь мы используем обозначения σ и σ/p вместо ϕ_0 и ϕ_1). Используя топологическую нильпотентность $\sigma|_{M^0(G)}$, заменим соотношения (4) на им эквивалентные

$$\bar{l} = \sum_{u \geq 1} F_u \frac{\sigma^u \bar{l}}{p}, \quad \bar{m} = \sum_{u \geq 1} F'_u \frac{\sigma^u \bar{l}}{p},$$

где $F_1 = A$, $F_2 = B(\sigma C)$, $F_u = B(\sigma D) \dots (\sigma^{u-2} D)(\sigma^{u-1} C)$ для $u \geq 3$ и $F'_1 = C$, $F'_2 = D(\sigma C)$, $F'_u = D \dots (\sigma^{u-2} D)(\sigma^{u-1} C)$ для $u \geq 3$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы использовали то, что $\bar{m} = (\text{id} - D\sigma)^{-1} C(\sigma\bar{l})/p$ и

$$(\text{id} - D\sigma)^{-1} = \text{id} + D\sigma + \dots + D(\sigma D) \dots (\sigma^{u-1} D)\sigma^u + \dots$$

1.4. Формальная группа $G_{\mathcal{A}}$. Пусть $\mathcal{B} = W(k_0)[[\bar{X}]]$ – кольцо формальных степенных рядов с коэффициентами в $W(k_0)$ и переменными $X_1, \dots, X_n$, $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}_p} = \mathcal{B} \hat{\otimes} \mathbb{Q}_p$. Пусть Δ является σ -линейным оператором на $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}_p}$ таким, что

$$\Delta(wX_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}) = \sigma(w)X_1^{pi_1} \dots X_n^{pi_n},$$

где $w \in W(k_0)$, $i_1, \dots, i_n \geq 0$. Обозначим через $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}_p}^n$ векторное пространство столбцов порядка n с координатами в $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}_p}$. Ясно, что Δ действует на $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}_p}^n$.

Введем $\mathbb{Z}_p$ -линейный оператор $\mathcal{A} = \sum_{u \geq 1} F_u \Delta^u$ на $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}_p}^n$, где $F_u, u \geq 1$, являются $(n \times n)$ -матрицами из п. 1.3.

Рассмотрим векторный степенной ряд

$$\bar{l}_{\mathcal{A}}(\bar{X}) = {}^t(l_{\mathcal{A},1}(X_1, \dots, X_n), \dots, l_{\mathcal{A},n}(X_1, \dots, X_n)) \in \mathcal{B}_{\mathbb{Q}_p}^n$$

такой, что

$$\bar{l}_{\mathcal{A}}(\bar{X}) = \left(\text{id} - \frac{\mathcal{A}}{p} \right)^{-1} (\bar{X}) = \bar{X} + \sum_{m \geq 1} \frac{\mathcal{A}^m(\bar{X})}{p^m}$$

(здесь $\bar{X} = {}^t(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{B}_{\mathbb{Q}_p}^n$). Очевидно, $\bar{l}_{\mathcal{A}}(\bar{X})$ является единственным решением в $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}_p}^n$ функционального уравнения

$$\bar{l}_{\mathcal{A}}(\bar{X}) = \bar{X} + \frac{1}{p} \sum_{u \geq 1} F_u(\sigma_*^u \bar{l}_{\mathcal{A}})(\bar{X}^{p^u}), \quad \bar{l}_{\mathcal{A}}(0) = 0$$

(здесь морфизм $\sigma_*: \mathcal{B}_{\mathbb{Q}_p}^n \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{Q}_p}^n$ возникает из действия σ на коэффициенты степенных рядов).

Согласно [16] степенные ряды $\bar{l}_{\mathcal{A}}(\bar{X})$ задают логарифмическое отображение для некоторого n -мерного коммутативного формального группового закона $G_{\mathcal{A}}$ над $W(k_0)$. Более точно: $G_{\mathcal{A}} = \text{Spf } \mathcal{B}$ с косложением, заданным соотношением $\Delta_{\mathcal{A}}(\bar{X}) = \bar{l}_{\mathcal{A}}^{-1}(\bar{l}_{\mathcal{A}}(\bar{X}) \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} \bar{l}_{\mathcal{A}}(\bar{X}))$.

В действительности формальные группы G и $G_{\mathcal{A}}$ изоморфны. Это вытекает из сравнения теорий Фонтена и Хонды; см. [11, гл. 5]. В п. 1.5 мы будем использовать более точный вариант этого утверждения.

1.5. Конструкция спаривания p -адических периодов.

1.5.1. ЛЕММА. $\bar{l}_{\mathcal{A}}$ индуцирует инъективный непрерывный гомоморфизм Γ_0 -модулей

$$\bar{l}_{\mathcal{A}}: G_{\mathcal{A}}(W(m_R)) \rightarrow A_{\text{cris}}^n \otimes \mathbb{Q}_p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $w \in G_{\mathcal{A}}(W^1(m_R) + pW(m_R))$; тогда $\bar{l}_{\mathcal{A}}(w) \in A_{\text{cris}}^n$. Разделенные степени идеала $W^1(m_R) + pW(m_R)$ образуют базис топологии в A_{cris} . Следовательно, $\bar{l}_{\mathcal{A}}$ инъективно на $G_{\mathcal{A}}(W^1(m_R) + pW(m_R))$. Если $w \in G_{\mathcal{A}}(W(m_R))$, то $w_1 = (p^N \text{id}_{G_{\mathcal{A}}})(w) \in G_{\mathcal{A}}(W^1(m_R) + pW(m_R))$ для некоторого $N \geq 0$, так как морфизм $p \text{id}_{G_{\mathcal{A}}}$ топологически нильпотентен на $G_{\mathcal{A}}(m_R)$.

Ввиду равенства $\bar{l}_{\mathcal{A}}(w) = (1/p^N) \bar{l}_{\mathcal{A}}(w_1)$ инъективность $\bar{l}_{\mathcal{A}}$ на $G_{\mathcal{A}}(W(m_R))$ является формальным следствием доказанной выше инъективности ограничения $\bar{l}_{\mathcal{A}}$ на $G_{\mathcal{A}}(W^1(m_R) + pW(m_R))$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Для любого $M \in \mathbb{N}$ отображение

$$\bar{l}_{\mathcal{A}}: G_{\mathcal{A}}(W_M(m_R)) \rightarrow A_{\text{cris}}^n \otimes \mathbb{Q}_p \quad \text{mod } p^M W(m_R)$$

является инъективным непрерывным гомоморфизмом Γ_0 -модулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любой $w \in G_{\mathcal{A}}(W(m_R))$ может быть представлен в виде

$$w = w_1 +_{G_{\mathcal{A}}} (p^M w_2),$$

где $w_1, w_2 \in W(m_R)^n$ и $w_1 \text{ mod } p^M W(m_R)$ однозначно определен. Отсюда вытекает наше утверждение, так как для любого $m \in \mathbb{N}$ имеется включение

$$\bar{l}_{\mathcal{A}}(G_{\mathcal{A}}(p^m W(m_R))) \subset p^m W(m_R)^n,$$

$\bar{l}_{\mathcal{A}}$ является тождественным на $p^m W(m_R)^n \bmod p^{m+1} W(m_R)$ и, следовательно, $\bar{l}_{\mathcal{A}}$ индуцирует биекцию

$$\bar{l}_{\mathcal{A}} : G_{\mathcal{A}}(p^m W(m_R)) \rightarrow p^m W(m_R)^n.$$

1.5.2. Пусть $o = (o_s)_{s \geq 0} \in T(G_{\mathcal{A}})$. Здесь все $o_s \in G_{\mathcal{A}}(m_C)$, $(\text{pid}_{G_{\mathcal{A}}})(o_{s+1}) = o_s$ и $o_0 = 0$. Для каждого s выберем $\hat{o}_s \in W(m_R)^n$ так, чтобы $\gamma(\hat{o}_s) \equiv o_s \bmod pm_C$.

В этих обозначениях имеется следующее сравнение:

$$p^{s+1} \bar{l}_{\mathcal{A}}(\hat{o}_{s+1}) \equiv p^s \bar{l}_{\mathcal{A}}(\hat{o}_s) \bmod p^s \text{Fil}^1 A_{\text{cris}} + p^{s+1} W(m_R).$$

Действительно, $\gamma((\text{pid}_{G_{\mathcal{A}}})(\hat{o}_{s+1})) \equiv (\text{pid}_{G_{\mathcal{A}}})(o_{s+1}) = o_s \equiv \gamma(\hat{o}_s) \bmod pm_C$, следовательно, $(\text{pid}_{G_{\mathcal{A}}})(\hat{o}_{s+1}) \equiv \hat{o}_s \bmod W^1(m_R) + pW(m_R)$ и

$$p \bar{l}_{\mathcal{A}}(\hat{o}_{s+1}) = \bar{l}_{\mathcal{A}}((\text{pid}_{G_{\mathcal{A}}})(\hat{o}_{s+1})) \equiv \bar{l}_{\mathcal{A}}(\hat{o}_s) \bmod \text{Fil}^1 A_{\text{cris}} + pW(m_R).$$

Пусть $\hat{o}'_s \in G_{\mathcal{A}}(W(m_R))$, где $\gamma(\hat{o}'_s) \equiv o_s \bmod pm_C$, $s \geq 1$, — другая система подъемов. Тогда

$$p^s \bar{l}_{\mathcal{A}}(\hat{o}'_s) \equiv p^s \bar{l}_{\mathcal{A}}(\hat{o}_s) \bmod p^s \text{Fil}^1 A_{\text{cris}} + p^{s+1} W(m_R).$$

Это сравнение вытекает из того, что $\hat{o}_s \equiv \hat{o}'_s \bmod W^1(m_R) + pW(m_R)$.

Если мы выберем $\hat{o}_s \in W(m_R)^n$ так, чтобы $\gamma(\hat{o}_s) = o_s$, то $p^s \bar{l}_{\mathcal{A}}(\hat{o}_s) \in (\text{Fil}^1 A_{\text{cris}})^n$, потому что $\gamma((p^s \text{id}_{G_{\mathcal{A}}})(\hat{o}_s)) = (p^s \text{id}_{G_{\mathcal{A}}})(o_s) = o_0 = 0$.

Приведенные выше аргументы дают следующую лемму; см. также [9].

ЛЕММА. Соответствие $o = (o_s)_{s \geq 0} \mapsto \lim_{s \rightarrow \infty} p^s \bar{l}_{\mathcal{A}}(\hat{o}_s)$ дает корректно определенный элемент $\hat{l} \in \text{Hom}^{\Gamma_0}(T(G_{\mathcal{A}}), (\text{Fil}^1 A_{\text{cris}})^n)$.

Заметим, что если $\hat{l} = {}^t(\hat{l}_1, \dots, \hat{l}_n)$, то все $\hat{l}_i \in \text{Hom}^{\Gamma_0}(T(G_{\mathcal{A}}), \text{Fil}^1 A_{\text{cris}}) = M^1(G_{\mathcal{A}})$.

Пусть $\widehat{m} = \sum_{u \geq 1} F'_u \sigma^u \hat{l}/p$, где F'_u — матрицы из п. 1.3. Тогда

$$\widehat{m} = {}^t(\widehat{m}_1, \dots, \widehat{m}_{h-n}),$$

где все $\widehat{m}_i \in \text{Hom}^{\Gamma_0}(T(G_{\mathcal{A}}), A_{\text{cris}})$, и

$$\widehat{m}(o) = \lim_{s \rightarrow \infty} p^s \bar{m}_{\mathcal{A}}(\hat{o}_s),$$

где

$$\bar{m}_{\mathcal{A}}(\hat{o}_s) = \frac{1}{p} \sum_{u \geq 1} F'_u \sigma^u (\bar{l}_{\mathcal{A}}(\hat{o}_s)).$$

Функциональное уравнение для логарифма $\bar{l}_{\mathcal{A}}$ из п. 1.4 дает соотношение

$$\hat{l} = \frac{\mathcal{A}^*}{p} \hat{l},$$

где $\mathcal{A}^* = \sum_{u \geq 1} F_u \sigma^u$ является $\mathbb{Z}_p$ -линейным оператором на $M^0(G_{\mathcal{A}})$. Это равенство может быть переписано в следующем виде (см. п. 1.3):

$$\begin{pmatrix} \phi_1(\hat{l}) \\ \phi_0(\widehat{m}) \end{pmatrix} = \mathcal{E} \begin{pmatrix} \hat{l} \\ \widehat{m} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, соответствие $\bar{l} \mapsto \hat{l}$, $\bar{m} \mapsto \widehat{m}$ определяет морфизм

$$\pi_{\mathcal{A}} : \mathcal{M}(G) \rightarrow \mathcal{M}(G_{\mathcal{A}})$$

в категории $\text{MF}_{W(k_0)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $\pi_{\mathcal{A}}$ является изоморфизмом в категории $\mathrm{MF}_{W(k_0)}$ и, следовательно, определяет изоморфизм формальных групп $\eta_{\mathcal{A}}: G \simeq G_{\mathcal{A}}$.

Это предложение дает уточненный вариант упоминавшегося в п. 1.4 существования изоморфизма между G и $G_{\mathcal{A}}$. Доказательство предложения получается из описания точек формальной группы в терминах ее системы Хонды (см. [11]) и из соотношения между формальной группой ковекторов Витта и кольцом A_{cris} (см. [15]).

1.5.3. Мы будем использовать изоморфизм $\eta_{\mathcal{A}}$ для отождествления функтора G с формальной группой $G_{\mathcal{A}}$. В частности, точки G могут быть теперь заданы с помощью координат. Можно использовать лемму из п. 1.5.2 для вычисления значений $\langle, \rangle$ спаривания p -адических периодов:

$$\langle, \rangle: T(G_{\mathcal{A}}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} M^0(G_{\mathcal{A}}) \rightarrow A_{\mathrm{cris}},$$

следующим образом.

Если $o = (o_s)_{s \geq 0} \in T(G_{\mathcal{A}})$ и $l_1, \dots, l_n, m_1, \dots, m_{h-n}$ является $W(k_0)$ -базисом в $M^0(G_{\mathcal{A}})$ из п. 1.3, то:

а) $\langle o, \bar{l} \rangle = {}^t(\langle o, l_1 \rangle, \dots, \langle o, l_n \rangle) = \lim_{s \rightarrow \infty} p^s \bar{l}_{\mathcal{A}}(\hat{o}_s)$, где $\hat{o}_s \in G(W(m_R))$ таково, что $\gamma(\hat{o}_s) = o_s \bmod pm_C$;

б) $\langle o, \bar{m} \rangle = {}^t(\langle o, m_1 \rangle, \dots, \langle o, m_{h-n} \rangle) = \lim_{s \rightarrow \infty} p^s \bar{m}_{\mathcal{A}}(\hat{o}_s) = \sum_{u \geq 1} F'_u \sigma^u(\langle o, \bar{l} \rangle)/p$, где F'_u – матрицы из п. 1.3.

Значения спаривания p -адических периодов по модулю p^M

$$G_{\mathcal{A}}[M](m_C) \otimes_{\mathbb{Z}_p} M^0(G_{\mathcal{A}}) \bmod p^M \rightarrow A_{\mathrm{cris}, M}$$

задаются следующим образом.

Если $o \in G_{\mathcal{A}}[M](m_C)$, то:

а) $\langle o, \bar{l} \bmod p^M \rangle = p^M \bar{l}_{\mathcal{A}}(\hat{o})$, где $\hat{o} \in G(W(m_R))$ таково, что $\gamma(\hat{o}) \equiv o \bmod pm_C$;

б) $\langle o, \bar{m} \bmod p^M \rangle = \sum_{u \geq 1} F'_u \sigma^{u-1} \phi_1(\langle o, \bar{l} \bmod p^M \rangle)$.

1.5.4. Рассмотрим $\mathbb{Z}_p$ -линейный оператор $\mathcal{A}^* = \sum_{u \geq 1} F_u \sigma^u$ на A_{cris}^n . Предложение п. 1.5.2 дает инъективность морфизма $\hat{l}: T(G_{\mathcal{A}}) \rightarrow (\mathrm{Fil}^1 A_{\mathrm{cris}})^n$ и равенство

$$\mathrm{Im} \hat{l} = \left\{ \bar{x} \in (\mathrm{Fil}^1 A_{\mathrm{cris}})^n \mid \bar{x} = \frac{\mathcal{A}^*}{p} \bar{x} \right\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В ситуации спаривания по модулю p^M мы имеем индуцированное отождествление $G_{\mathcal{A}}[M](m_C)$ с $\{ \bar{x} \in (\mathrm{Fil}^1 A_{\mathrm{cris}, M})^n \mid \bar{x} = (\mathcal{A}^*/p) \bar{x} \}$.

Пусть $o = (o_s)_{s \geq 0} \in T(G_{\mathcal{A}})$ и $\hat{o}_s \in G_{\mathcal{A}}(W(m_R))$ таковы, что $\gamma(\hat{o}_s) = o_s$. Тогда $\lim_{s \rightarrow \infty} (p^s \mathrm{id}_{G_{\mathcal{A}}})(\hat{o}_s)$ существует, не зависит от сделанного выше выбора подъемов $\hat{o}_s$ и определяет элемент группы $G_{\mathcal{A}}(W^1(m_R))$. Соответствие

$$o \mapsto \lim_{s \rightarrow \infty} (p^s \mathrm{id}_{G_{\mathcal{A}}})(\hat{o}_s)$$

определяет инъективный гомоморфизм Γ_0 -модулей

$$j: T(G_{\mathcal{A}}) \rightarrow G_{\mathcal{A}}(W^1(m_R))$$

такой, что $j \circ \bar{l}_{\mathcal{A}} = \hat{l}$.

Таким образом, мы получаем следующую характеристику образа j :

$$\mathrm{Im} j = \left\{ w \in G_{\mathcal{A}}(W^1(m_R)) \mid \bar{l}_{\mathcal{A}}(w) = \frac{\mathcal{A}^*}{p} \bar{l}_{\mathcal{A}}(w) \right\}.$$

1.6. Некоторые леммы.

1.6.1. ЛЕММА. Оператор $\mathcal{A}^* = \sum_{u \geq 1} F_u \sigma^u$ является обратимым на $W(m_R)^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{E}^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, то $\mathcal{A}^* = A\sigma + B\sigma(E - D\sigma)^{-1}C\sigma$.

Пусть $w \in W(m_R)^n$. Легко видеть, что если $(x, w_1) \in W(m_R)^h$ является решением системы

$$\begin{pmatrix} w \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma x \\ \sigma w_1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $x \in W(m_R)^n$ и $w_1 \in W(m_R)^{h-n}$, то $\mathcal{A}^*(x) = w$.

Чтобы доказать разрешимость системы (5), умножим обе ее части на матрицу $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$. В результате мы получаем эквивалентную систему

$$\begin{aligned} \sigma x &= A_1 w + B_1 w_1, \\ \sigma w_1 &= C_1 w + D_1 w_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть

$$\begin{aligned} w_1^0 &= \sigma^{-1}(C_1 w) + (\sigma^{-1}D_1)\sigma^{-2}(C_1 w) + \dots \\ &\quad \dots + (\sigma^{-1}D_1) \dots (\sigma^{-u}D_1)\sigma^{-(u+1)}(C_1 w) + \dots \end{aligned}$$

Это выражение имеет смысл, так как

$$\lim_{u \rightarrow \infty} (\sigma^{-1}D_1) \dots (\sigma^{-u}D_1) = \lim_{u \rightarrow \infty} \sigma^{-u}((\sigma^{u-1}D_1) \dots D_1) = 0$$

(см. п. 1.3). Очевидно, $\sigma w_1^0 = C_1 w + D_1 w_1^0$. Следовательно, (x^0, w_1^0) , где $x^0 = \sigma^{-1}(A_1 w) + \sigma^{-1}(B_1 w_1^0)$, дает решение системы (6).

Докажем, что $\text{Ker } \mathcal{A}^* = 0$. Пусть $x \in W(m_R)^n$ таков, что $\mathcal{A}^*(x) = 0$. Как и ранее, это эквивалентно существованию $w_1 \in W(m_R)^{h-n}$ такого, что (x, w_1) является решением системы (5) с $w = 0$. Теперь соотношения (6) дают

$$\sigma w_1 = D_1 w_1,$$

и, следовательно, $w_1 = (\sigma^{-1}D_1)(\sigma^{-2}D_1) \dots (\sigma^{-u}D_1)w_1$ для любого $u \in \mathbb{N}$. Но правая часть этого равенства стремится к нулю при $u \rightarrow \infty$. Таким образом, $w_1 = 0$ и, следовательно, $x = 0$.

1.6.2. ЛЕММА. Группа $G_{\mathcal{A}}(m_R)$ является однозначно p -делимой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r = {}^t(r_1, \dots, r_n) \in G_{\mathcal{A}}(m_R)$ такой, что $(p \operatorname{id}_{G_{\mathcal{A}}})r = 0$. Тогда для $[r] = {}^t([r_1], \dots, [r_n]) \in G_{\mathcal{A}}(W(m_R))$ имеем

$$p\bar{l}_{\mathcal{A}}([r]) = \bar{l}_{\mathcal{A}}(p \operatorname{id}_{G_{\mathcal{A}}}([r])) \in pW(m_R)^n,$$

и функциональное уравнение для логарифма $\bar{l}_{\mathcal{A}}$ дает

$$\mathcal{A}^* \bar{l}_{\mathcal{A}}([r]) = p\bar{l}_{\mathcal{A}}([r]) - p[r] \in pW(m_R)^n.$$

Теперь из леммы п. 1.6.1 следует, что $\bar{l}_{\mathcal{A}}([r]) \in pW(m_R)^n$. Но

$$\bar{l}_{\mathcal{A}}: G_{\mathcal{A}}(m_R) \rightarrow A_{\text{cris}}^n \otimes \mathbb{Q}_p \mod pW(m_R)$$

является инъективным морфизмом (см. п. 1.5.1). Следовательно, $r = 0$, и морфизм $p \operatorname{id}_{G_{\mathcal{A}}} |_{G_{\mathcal{A}}(m_R)}$ тоже инъективен.

Пусть $r_0 \in G_{\mathcal{A}}(m_R)$. По лемме п. 1.6.1 существует $r \in m_R^n$ такой, что $\mathcal{A}^*(r) = r_0$. Тогда

$$\mathcal{A}^*([r]) = [r_0] + p[r_1] + \dots + p^n[r_n] + \dots$$

для некоторых $r_1, \dots, r_n, \dots \in R$. Из функционального уравнения для логарифма $\bar{l}_{\mathcal{A}}$ получаем

$$\begin{aligned} p\bar{l}_{\mathcal{A}}([r]) &= p[r] + (\mathcal{A}^* + \dots + \mathcal{A}^{*u+1}/p^u + \dots)([r]) \\ &= p[r] + \bar{l}_{\mathcal{A}}([r_0]) + p\bar{l}_{\mathcal{A}}([r_1]) + \dots + p^n\bar{l}_{\mathcal{A}}([r_n]) + \dots \end{aligned}$$

Следовательно, $\bar{l}_{\mathcal{A}}([r_0]) \equiv p\bar{l}_{\mathcal{A}}([h]) \mod pW(m_R)$, где

$$h = r -_{G_{\mathcal{A}}} (r_1 +_{G_{\mathcal{A}}} (p \operatorname{id}_{G_{\mathcal{A}}})(r_2) + \dots +_{G_{\mathcal{A}}} (p^n \operatorname{id}_{G_{\mathcal{A}}})(r_{n+1}) + \dots).$$

Согласно п. 1.5.1 заключаем, что $r_0 = (p \operatorname{id}_{G_{\mathcal{A}}})h$. Лемма доказана.

1.6.3. ЛЕММА. Для любого $g \in G_{\mathcal{A}}(W(m_R))$ существует единственный $h \in G_{\mathcal{A}}(W(m_R))$ такой, что $\mathcal{A}^*\bar{l}_{\mathcal{A}}(h) = \bar{l}_{\mathcal{A}}(g)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. СУЩЕСТВОВАНИЕ. Можно допустить, что $g = g_1 +_{G_{\mathcal{A}}} w$, где $g_1 = [r]$, $r \in m_R^n$, и $w \in G_{\mathcal{A}}(pW(m_R))$. Пусть $h'_1 \in W(m_R)^n$ таков, что $\mathcal{A}^*(h'_1) = g_1$ (см. лемму 1.6.1). Если $h'_1 = \sum_{s \geq 0} p^s[r_s]$, возьмем $h_1 = \sum_{G_{\mathcal{A}}} (p^s \operatorname{id}_{G_{\mathcal{A}}})[r_s] \in G_{\mathcal{A}}(W(m_R))$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^*\bar{l}_{\mathcal{A}}(h_1) &= \sum_{s \geq 0} p^s \mathcal{A}^*\bar{l}_{\mathcal{A}}([r_s]) = \sum_{s \geq 0} p^s (\operatorname{id} + \mathcal{A}^*/p + \dots + \mathcal{A}^{*m}/p^m + \dots)(\mathcal{A}^*[r_s]) \\ &= (\operatorname{id} - \mathcal{A}^*/p)^{-1} \mathcal{A}^* \left(\sum_{s \geq 0} p^s[r_s] \right) = (\operatorname{id} - \mathcal{A}^*/p)^{-1} \mathcal{A}^*(h'_1) \\ &= (\operatorname{id} - \mathcal{A}^*/p)^{-1}([r]) = \bar{l}_{\mathcal{A}}(g_1). \end{aligned}$$

Так как $\mathcal{A}^*$ и $\bar{l}_{\mathcal{A}}$ обратимы на $pW(m_R)^n$, то существует $w_1 \in G_{\mathcal{A}}(pW(m_R))$ такой, что $\mathcal{A}^*\bar{l}_{\mathcal{A}}(w_1) = \bar{l}_{\mathcal{A}}(w)$. Следовательно, $\mathcal{A}^*\bar{l}_{\mathcal{A}}(h_1 +_{G_{\mathcal{A}}} w_1) = \bar{l}_{\mathcal{A}}(g)$.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ. Достаточно доказать, что для $h \in G_{\mathcal{A}}(W(m_R))$ равенство

$$\mathcal{A}^* \bar{l}_{\mathcal{A}}(h) = 0$$

влечет $h = 0$. Пусть $h = [r] +_{G_{\mathcal{A}}} (pw)$, где $r \in m_R^n$, $w \in W(m_R)^n$. Тогда $\mathcal{A}^* \bar{l}_{\mathcal{A}}([r]) \in pW(m_R)^n$ и функциональное уравнение для логарифма $\bar{l}_{\mathcal{A}}$ дает $p \bar{l}_{\mathcal{A}}([r]) \in pW(m_R)^n$. Следовательно, $(\text{id}_{G_{\mathcal{A}}})(r) = 0$ в $G_{\mathcal{A}}(m_R)$ (см. п. 1.5.1) и $r = 0$ (см. п. 1.6.2). Таким образом, $\mathcal{A}^* \bar{l}_{\mathcal{A}}(pw) = 0$, но, как было уже отмечено, $\mathcal{A}^*$ и $\bar{l}_{\mathcal{A}}$ обратимы на $pW(m_R)^n$. Лемма доказана.

1.7. Некоторые свойства алгебры A_{cris} .

1.7.1. Пусть $\mathbb{G}_1$ – одномерная формальная группа над $W(k_0)$ с логарифмом

$$l_{\mathbb{G}_1}(X) = X + \frac{X^p}{p} + \dots + \frac{X^{p^s}}{p^s} + \dots.$$

Формальная группа $\mathbb{G}_1$ изоморфна мультипликативной формальной группе $\widehat{\mathbb{G}}_m$. Следовательно, модуль Тейта $T(\mathbb{G}_1)$ имеет $\mathbb{Z}_p$ -ранг 1 и Γ_0 действует на $T(\mathbb{G}_1)$ посредством циклотомического характера $\chi: \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{Z}_p^*$. Фильтрованный модуль $\mathcal{M}(\mathbb{G}_1) = (M^0(\mathbb{G}_1), M^1(\mathbb{G}_1))$, где

$$M^0(\mathbb{G}_1) = M^1(\mathbb{G}_1) = \text{Hom}^{\Gamma_0}(T(\mathbb{G}_1), \text{Fil}^1 A_{\text{cris}}),$$

имеет $W(k_0)$ -ранг 1, и существует $W(k_0)$ -образующая y в $M^0(\mathbb{G}_1)$ такая, что $\phi_1(y) = y$.

В модуле Тейта $T(\mathbb{G}_1)$ фиксируем некоторую $\mathbb{Z}_p$ -образующую $o = (o_s)_{s \geq 0}$. Здесь все $o_s \in \mathbb{G}_1(m_C)$, $(\text{id}_{\mathbb{G}_1})(o_{s+1}) = o_s$, $o_0 = 0$, $o_1 \neq 0$. Теперь можно фиксировать $W(k_0)$ -образующую y в $M^0(\mathbb{G}_1)$ с помощью соотношения

$$\langle o, y \rangle = y(o) = \lim_{s \rightarrow \infty} p^s l_{\mathbb{G}_1}(\hat{o}_s),$$

где $\hat{o}_s \in W(R)$ таковы, что $\gamma(\hat{o}_s) \equiv o_s \pmod{pm_C}$. Для значения $y(o)$ имеем следующие свойства: $y(o) \in \text{Fil}^1 A_{\text{cris}} \setminus p \text{Fil}^1 A_{\text{cris}}$, $\phi_1 y(o) = y(o)$ и для любого $\tau \in \Gamma_0$ выполнено $\tau y(o) = \chi(\tau) y(o)$, где χ – циклотомический характер группы Γ_0 . Таким образом, $y(o)$ порождает аддитивный подмодуль Тейта $\mathbb{Z}_p(1) = \{a \in \text{Fil}^1 A_{\text{cris}} \mid \phi_1(a) = a\}$ в A_{cris} , и можно использовать стандартное обозначение $t^+ = y(o)$ из работы [13].

1.7.2. Пусть $\psi = \lim_{s \rightarrow \infty} (p^s \text{id}_{\mathbb{G}_1})(\hat{o}_s)$, где $o = (o_s) \in T(\mathbb{G}_1)$ и элементы $\hat{o}_s$ были определены в п. 1.7.1. Тогда $\psi \in W^1(m_R)$ и $t^+ = l_{\mathbb{G}_1}(\psi)$. Пусть $\psi_1 = \sigma^{-1} \psi \in W(m_R)$. Тогда

$$(p \text{id}_{\mathbb{G}_1})(\psi_1) = \lim_{s \rightarrow \infty} (p^{s+1} \text{id}_{\mathbb{G}_1})(\sigma^{-1} \hat{o}_s) = \lim_{s \rightarrow \infty} (p^s \text{id}_{\mathbb{G}_1})(p \text{id}_{\mathbb{G}_1})(\sigma^{-1} \hat{o}_s) = \psi,$$

так как $(p \text{id}_{\mathbb{G}_1})(\sigma^{-1} \hat{o}_s) \equiv (\sigma^{-1} \hat{o}_s)^p \equiv \hat{o}_s \pmod{W^1(m_R) + pW(m_R)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы использовали, что если $r \in m_R$, то $(\text{pid}_{\mathbb{G}_1})(r) = r^p$ в $\mathbb{G}_1(m_R)$. Действительно,

$$l_{\mathbb{G}_1}(\text{pid}_{\mathbb{G}_1}([r]) = pl_{\mathbb{G}_1}([r]) = p[r] + l_{\mathbb{G}_1}([r^p])$$

и, таким образом, $\text{pid}_{\mathbb{G}_1}([r]) \equiv [r]^p \pmod{pW(m_R)}$ согласно п. 1.5.1.

Сравнивая степени в равенстве $pl_{\mathbb{G}_1}(X) = l_{\mathbb{G}_1}(\text{pid}_{\mathbb{G}_1}(X))$, получаем, что

$$\text{pid}_{\mathbb{G}_1}(X) \equiv pX + X^p \pmod{\deg(p+1)}$$

и, следовательно,

$$\psi = p\psi_1 + \psi_1^p + \sum_{i \geq 1} c_i \psi_1^{i+p}, \quad (7)$$

где все $c_i \in pW(\mathbb{F}_p)$. Отсюда $t = \psi/\psi_1 \in W^1(R) = \text{Ker } \gamma$. Теперь легко видеть, что t порождает идеал $W^1(R)$ в $W(R)$. В частности, $W^1(m_R) = tW(m_R)$.

1.7.3. Заметим, что A_{cris} является p -адическим пополнением кольца

$$W(R)[t_1, \dots, t_s, \dots],$$

где $t_1 = t^p/p, \dots, t_{s+1} = t_s^p/p, \dots$. Следовательно, кольцо степенных рядов $W(R)[[t^p/p]]$ может быть отождествлено с p -адическим замыканием кольца $W(R)[t_1, \dots, p^{p^{s-2}+\dots+1}t_s, \dots]$ в A_{cris} .

ЛЕММА. $W(R)[[t^p/p]] = W(R)[[\psi^{p-1}/p]]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (7) дает $\psi = p\psi_1 + \varepsilon\psi_1^p$, где

$$\varepsilon = 1 + \sum_{i \geq 1} c_i \psi_1^i \in W(m_R)^*.$$

Следовательно, $t^p/p = \psi_1^{p(p-1)}/p + w$, где $w \in pW(R)$. Отсюда следует, что $\psi_1^{p(p-1)}/p$ является топологически нильпотентным элементом в A_{cris} и

$$W(R)[[t^p/p]] = W(R)[[\psi_1^{p(p-1)}/p]].$$

С другой стороны, $\psi^{p-1}/p = \varepsilon^{p-1}\psi_1^{p(p-1)}/p + w_1$, где $w_1 \in W(m_R)$. Следовательно, ψ^{p-1}/p топологически нильпотентен в A_{cris} и

$$W(R)[[\psi_1^{p(p-1)}/p]] = W(R)[[\psi^{p-1}/p]].$$

1.7.4. Из топологической нильпотентности ψ^{p-1}/p вытекает, что

$$\eta = t^+/ \psi = 1 + \psi^{p-1}/p + \dots + \psi^{p^s-1}/p^s + \dots$$

является обратимым элементом кольца $W(R)[[\psi^{p-1}/p]]$. Следовательно, t^+ и ψ ассоциированы в $W(R)[[\psi^{p-1}/p]]$.

ЛЕММА. σ/p действует нильпотентно на идеале $(\psi^{p-1}/p)W(R)[[\psi^{p-1}/p]]$ кольца $W(R)[[\psi^{p-1}/p]]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полученное выше свойство $t^+ = \psi\eta$, где $\eta \in W(R)[[\psi^{p-1}/p]]^*$, дает

$$(\psi^{p-1}/p)W(R)[[\psi^{p-1}/p]] = ((t^+)^{p-1}/p)W(R)[[(t^+)^{p-1}/p]].$$

Но $(\sigma/p)((t^+)^{p-1}/p) = p^{p-2}((t^+)^{p-1}/p)$, что и требовалось доказать.

1.7.5. Пусть $\tilde{G}$ — p -делимая группа над $W(k_0)$, и пусть $\mathcal{M}(\tilde{G}) \in \text{MF}_{W(k_0)}$ задан в обозначениях п. 1.3. Тогда имеется отождествление Γ_0 -модулей

$$T(\tilde{G}) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in A_{\text{cris}}^h \mid a \in (\text{Fil}^1 A_{\text{cris}})^n, \begin{pmatrix} \phi_1 a \\ \phi_0 b \end{pmatrix} = \mathcal{E} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\}.$$

Пусть $T_1(\tilde{G})$ является Γ_0 -модулем, состоящим из всех

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \in (W(R)[[\psi^{p-1}/p]])^h$$

таких, что $a_1 \in (W^1(R) + (\psi^{p-1}/p)W(R)[[\psi^{p-1}/p]])^n$ и $\begin{pmatrix} \phi_1 a_1 \\ \phi_0 b_1 \end{pmatrix} = \mathcal{E} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$.

Очевидно, естественное вложение $W(R)[[\psi^{p-1}/p]] \rightarrow A_{\text{cris}}$ дает Γ_0 -морфизм $\iota_1: T_1(\tilde{G}) \rightarrow T(\tilde{G})$.

Соотношение (7) может быть переписано в виде $\sigma t = p + \psi^{p-1}\varepsilon$, где $\varepsilon = 1 + \sum_{i \geq 1} c_i \psi^i$. Если $w \in W^1(R)$, пусть $\bar{\phi}_1(w) = (\sigma w / \sigma t) \in W(R)$. Тогда

$$\phi_1(w) = \frac{\sigma w}{p} = \bar{\phi}_1(w) \left(1 + \frac{\psi^{p-1}}{p} \varepsilon \right) \equiv \bar{\phi}_1(w) \pmod{\frac{\psi^{p-1}}{p} W(R) \left[\left[\frac{\psi^{p-1}}{p} \right] \right]}. \quad (8)$$

Пусть $T_2(\tilde{G})$ является Γ_0 -модулем, состоящим из всех $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \in W(R)^h$ таких, что $a_2 \in W^1(R)^n$ и

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_1 a_2 \\ \sigma b_2 \end{pmatrix} = \mathcal{E} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Пусть $T_3(\tilde{G})$ — Γ_0 -модуль всех $\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} \in (W(R) \pmod{\psi^{p-1}W(R)})^h$ таких, что $a_3 \in (W^1(R) \pmod{\psi^{p-1}W(R)})^n$ и

$$\begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1 a_3 \\ \sigma b_3 \end{pmatrix} = \mathcal{E} \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

(здесь $\tilde{\phi}_1 = \bar{\phi}_1 \pmod{\psi^{p-1}}: W^1(R) \pmod{\psi^{p-1}W(R)} \rightarrow W(R) \pmod{\psi^{p-1}W(R)}$).

Очевидно, проекции $W(R)[[\psi^{p-1}/p]] \rightarrow W(R) \pmod{\psi^{p-1}W(R)} \leftarrow W(R)$ индуцируют Γ_0 -морфизмы

$$T_1(\tilde{G}) \xrightarrow{\iota_3} T_3(\tilde{G}) \xleftarrow{\iota_2} T_2(\tilde{G}).$$

В работе [1] лемма из п. 1.7.4 и соотношение (8) между ϕ_1 и $\bar{\phi}_1$ были использованы для доказательства следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Введенные выше отображения ι_1 , ι_2 и ι_3 являются изоморфизмами Γ_0 -модулей.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из предложения вытекает, что значения спаривания p -адических периодов принадлежат подкольцу $W(R)[[\psi^{p-1}/p]]$.

1.7.6. Леммы из пп. 1.7.3 и 1.7.4 дают следующую лемму.

ЛЕММА. Пусть $\bar{l}_{\mathcal{A}}$ – векторный степенной ряд логарифмов из п. 1.3. Если $w \in W^1(m_R)^n$, то

$$\bar{l}_{\mathcal{A}}(w) \in \left(W^1(m_R) + \frac{\psi^{p-1}}{p} W(R) \left[\left[\frac{\psi^{p-1}}{p} \right] \right] \right)^n.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из этой леммы следует, что значения спаривания p -адических периодов формальной группы $G_{\mathcal{A}}$ лежат в $W(m_R) + (\psi^{p-1}/p)W(R)[[\psi^{p-1}/p]]$.

1.8. Двойственность.

1.8.1. Пусть $\tilde{G} = \varinjlim_{s \geq 1} G_{\mathcal{A}}[s]$ является p -делимой группой, связанной с формальной группой $G_{\mathcal{A}}$. Рассмотрим двойственную p -делимую группу $\tilde{G}^D = \varinjlim_{s \geq 1} G_{\mathcal{A}}^D[s]$, где для каждого $s \in \mathbb{N}$ $G_{\mathcal{A}}^D[s]$ – групповая схема, двойственная по Картье к схеме $G_{\mathcal{A}}[s]$. Если $T(\tilde{G}^D)$ – модуль Тейта для $\tilde{G}^D$, то двойственность Картье индуцирует невырожденное спаривание Γ_0 -модулей

$$\langle, \rangle_T: T(G_{\mathcal{A}}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} T(\tilde{G}^D) \rightarrow T(\mathbb{G}_1).$$

Фиксируем $\mathbb{Z}_p$ -базис $o^1, \dots, o^h$ в $T(G_{\mathcal{A}})$ и обозначим через $o^{*1}, \dots, o^{*h}$ $\mathbb{Z}_p$ -базис в $T(\tilde{G}^D)$ такой, что $\langle o^i, o^{*j} \rangle_T = \delta_{ij} o$, где o – образующий элемент для $T(\mathbb{G}_1)$, выбранный в п. 1.7.

1.8.2. Пусть $\mathcal{M}(\tilde{G}^D) = (M^0(\tilde{G}^D), M^1(\tilde{G}^D)) \in \text{MF}_{W(k_0)}$ – фильтрованный модуль p -делимой группы $\tilde{G}^D$. Используя функториальные свойства тензорного произведения в категории допустимых фильтрованных модулей с длиной фильтрации 2 (см. [13], [15]), представим двойственность Картье как морфизм в этой категории допустимых модулей

$$\Delta_{\mathcal{M}}: \mathcal{M}(\mathbb{G}_1) \rightarrow \mathcal{M}(G_{\mathcal{A}}) \otimes \mathcal{M}(\tilde{G}^D).$$

Если $l_1, \dots, l_n, m_1, \dots, m_{h-n}$ – специальный базис для $M^0(G_{\mathcal{A}})$, выбранный в п. 1.3, и $y \in M^1(\mathbb{G}_1)$ – элемент из п. 1.7.1, то:

а) $\Delta_{\mathcal{M}}(y) = l_1 \otimes m_1^* + \dots + l_n \otimes m_n^* + m_1 \otimes l_1^* + \dots + m_{h-n} \otimes l_{h-n}^* \in M^0(G_{\mathcal{A}}) \otimes M^0(\tilde{G}^D)$, где $l_1^*, \dots, l_{h-n}^* - W(k_0)$ -базис для $M^1(\tilde{G}^D)$ и $m_1^*, \dots, m_n^*, l_1^*, \dots, l_{h-n}^* - W(k_0)$ -базис для $M^0(\tilde{G}^D)$;

б) $\Delta_{\mathcal{M}}(\phi_1 y) = \phi_1(l_1) \otimes \phi_0(m_1^*) + \dots + \phi_1(l_n) \otimes \phi_0(m_n^*) + \phi_0(m_1) \otimes \phi_1(l_1^*) + \dots + \phi_0(m_{h-n}) \otimes \phi_1(l_{h-n}^*)$.

Эти свойства коспаривания $\Delta_{\mathcal{M}}$ дают следующую структуру фильтрованного модуля $\mathcal{M}(\tilde{G}^D)$. Если $\bar{m}^D = {}^t(m_1^*, \dots, m_n^*)$, $\bar{l}^D = {}^t(l_1^*, \dots, l_{h-n}^*)$, то

$$\begin{pmatrix} \phi_0 \bar{m}^D \\ \phi_1 \bar{l}^D \end{pmatrix} = {}^t \mathcal{E}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{m}^D \\ \bar{l}^D \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где $\mathcal{E} \in \mathrm{GL}_h(W(k_0))$ задает структуру фильтрованного модуля $\mathcal{M}(G_{\mathcal{A}})$; см. п. 1.3. Действительно,

$$\phi_1(\bar{l}) = A_1\bar{l} + B_1\bar{m}, \quad \phi_0(\bar{m}) = C_1\bar{l} + D_1\bar{m},$$

где $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$ (см. п. 1.3). В очевидных обозначениях имеем

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{M}}(\phi_1 y) &= \sum_{1 \leq i \leq n} \phi_1(l_i) \otimes \phi_0(m_i^*) + \sum_{1 \leq j \leq h-n} \phi_0(m_j) \otimes \phi_1(l_j^*) \\ &= \phi_1(\bar{l}) \otimes \phi_0(\bar{m}^D) + \phi_0(\bar{m}) \otimes \phi_1(\bar{l}^D) \\ &= (A_1\bar{l} + B_1\bar{m}) \otimes \phi_0(\bar{m}^D) + (C_1\bar{l} + D_1\bar{m}) \otimes \phi_1(\bar{l}^D) \\ &= \bar{l} \otimes ({}^t A_1 \phi_0(\bar{m}^D) + {}^t C_1 \phi_1(\bar{l}^D)) + \bar{m} \otimes ({}^t B_1 \phi_0(\bar{m}^D) + {}^t D_1 \phi_1(\bar{l}^D)). \end{aligned}$$

Теперь равенство $\Delta_{\mathcal{M}}(\phi_1 y) = \Delta_{\mathcal{M}}(y) = \bar{l} \otimes \bar{m}^D + \bar{m} \otimes \bar{l}^D$ дает соотношение, эквивалентное соотношению (9):

$$\begin{pmatrix} \bar{m}^D \\ \bar{l}^D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t A_1 & {}^t C_1 \\ {}^t B_1 & {}^t D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0(\bar{m}^D) \\ \phi_1(\bar{l}^D) \end{pmatrix} = {}^t \mathcal{E} \begin{pmatrix} \phi_0(\bar{m}^D) \\ \phi_1(\bar{l}^D) \end{pmatrix}.$$

1.8.3. Пусть $l_1, \dots, l_n$, $m_1, \dots, m_{h-n}$ и $m_1^*, \dots, m_n^*$, $l_1^*, \dots, l_{h-n}^*$ – выбранные выше специальные базисы для $M^0(G_{\mathcal{A}})$ и $M^0(\tilde{G}^D)$. Пусть $o^1, \dots, o^h$ и $o^{*1}, \dots, o^{*h}$ – специальные базисы для $T(G_{\mathcal{A}})$ и $T(\tilde{G}^D)$ из п. 1.8.1.

Рассмотрим матрицы значений спаривания p -адических периодов в этих базисах

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \langle o^1, \bar{l} \rangle & \dots & \langle o^h, \bar{l} \rangle \\ \langle o^1, \bar{m} \rangle & \dots & \langle o^h, \bar{m} \rangle \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}^D = \begin{pmatrix} \langle o^{*1}, \bar{m}^D \rangle & \dots & \langle o^{*h}, \bar{m}^D \rangle \\ \langle o^{*1}, \bar{l}^D \rangle & \dots & \langle o^{*h}, \bar{l}^D \rangle \end{pmatrix}.$$

Теперь из совместимости спаривания p -адических периодов с тензорным произведением вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Имеет место равенство*

$${}^t \mathcal{V}^D \circ \mathcal{V} = t^+ E_h,$$

где E_h – единичная матрица порядка h .

ЗАМЕЧАНИЕ. В очевидных обозначениях матрицы $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}^D$ удовлетворяют следующим свойствам:

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_0 \end{pmatrix} \mathcal{V} = \mathcal{E} \mathcal{V}, \quad \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{pmatrix} \mathcal{V}^D = {}^t \mathcal{E}^{-1} \mathcal{V}^D.$$

1.8.4. В обозначениях п. 1.7.5 рассмотрим изоморфизм Γ_0 -модулей $\iota_{\tilde{G}} = \iota^{-1} \circ \iota_3 \circ \iota_2^{-1}: T(\tilde{G}) \rightarrow T_2(\tilde{G})$. Для $1 \leq i \leq h$ имеем

$$\iota_{G_{\mathcal{A}}} \begin{pmatrix} \langle o^i, \bar{l} \rangle \\ \langle o^i, \bar{m} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \in W(m_R)^h,$$

где $a_i \in W^1(m_R)^n$ и $\begin{pmatrix} \bar{\phi}_1 a_i \\ \sigma b_i \end{pmatrix} = \mathcal{E} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$.

Аналогично, для $1 \leq i \leq h$ имеем

$$\iota_{\tilde{G}^D} \begin{pmatrix} \langle o^{*i}, \bar{m}^D \rangle \\ \langle o^{*i}, \bar{l}^D \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_i^D \\ a_i^D \end{pmatrix} \in W(m_R)^h,$$

где $a_i^D \in W^1(m_R)^{h-n}$ и $\begin{pmatrix} \sigma b_i^D \\ \bar{\phi}_1 a_i^D \end{pmatrix} = {}^t\mathcal{E}^{-1} \begin{pmatrix} b_i^D \\ a_i^D \end{pmatrix}$.

Для формальной группы $\mathbb{G}_1$ из п. 1.7.1 имеем $\iota_{\mathbb{G}_1}(t^+) = \psi$.

Введем матрицы порядка h :

$$\iota_{G_{\mathcal{A}}}(\mathcal{V}) = \hat{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_h \\ b_1 & \cdots & b_h \end{pmatrix}, \quad \iota_{\tilde{G}^D}(\mathcal{V}^D) = \hat{\mathcal{V}}^D = \begin{pmatrix} b_1^D & \cdots & b_h^D \\ a_1^D & \cdots & a_h^D \end{pmatrix}.$$

Непосредственно из конструкции этих матриц вытекают следующие свойства:

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \sigma \end{pmatrix} \hat{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} \bar{\phi}_1 a_1 & \cdots & \bar{\phi}_1 a_h \\ \sigma b_1 & \cdots & \sigma b_h \end{pmatrix} = \mathcal{E} \hat{\mathcal{V}},$$

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \bar{\phi}_1 \end{pmatrix} \hat{\mathcal{V}}^D = \begin{pmatrix} \sigma b_1^D & \cdots & \sigma b_h^D \\ \bar{\phi}_1 a_1^D & \cdots & \bar{\phi}_1 a_h^D \end{pmatrix} = {}^t\mathcal{E}^{-1} \hat{\mathcal{V}}^D,$$

и предложение из п. 1.8.3 дает ${}^t\hat{\mathcal{V}}^D \circ \hat{\mathcal{V}} = \psi E_h$.

§2. Кристаллический символ и его связь с символом формальной группы

2.1. Напомним (см. п. 1.5.4), что $j: T(G_{\mathcal{A}}) \rightarrow G_{\mathcal{A}}(W^1(m_R))$ является инъективным морфизмом Γ_0 -модулей и

$$\text{Im } j = \left\{ w \in G_{\mathcal{A}}(W^1(m_R)) \mid \bar{l}_{\mathcal{A}}(w) = \frac{\mathcal{A}^*}{p} \bar{l}_{\mathcal{A}}(w) \right\}.$$

Пусть

$$\psi: G_{\mathcal{A}}(W(m_R)) \rightarrow A_{\text{cris}}^n \otimes \mathbb{Q}_p$$

— Γ_0 -морфизм, заданный с помощью соответствия $g \mapsto p\bar{l}_{\mathcal{A}}(g) - \mathcal{A}^*\bar{l}_{\mathcal{A}}(g)$, где g — произвольный элемент из $G_{\mathcal{A}}(W(m_R))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $\psi^1 = \psi|_{G_{\mathcal{A}}(W^1(m_R))}$, то $\text{Im } \psi^1 = pW(m_R)^n$ и, следовательно, имеется точная последовательность Γ_0 -модулей

$$0 \longrightarrow T(G_{\mathcal{A}}) \xrightarrow{j} G_{\mathcal{A}}(W^1(m_R)) \xrightarrow{\psi^1} pW(m_R)^n \longrightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

2.2.1. ЛЕММА. Пусть $r \in G_{\mathcal{A}}(m_R)$ и $r_s \in G_{\mathcal{A}}(m_R)$, где $s \in \mathbb{N}$, таковы, что $(p^s \text{id}_{G_{\mathcal{A}}})(r_s) = r$. Тогда:

- а) существует $\lim_{s \rightarrow \infty} (p^s \text{id}_{G_{\mathcal{A}}})([r_s]) := \delta(r) \in G_{\mathcal{A}}(W(m_R))$;
- б) $r = \delta(r) \pmod{pW(m_R)}$;
- в) $\psi(\delta(r)) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) и б) могут быть доказаны с помощью соображений из п. 1.5.2. Утверждение в) вытекает из того, что для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} p\bar{l}_{\mathcal{A}}((p^s \text{id}_{G_{\mathcal{A}}})([r_s])) - \mathcal{A}^* \bar{l}_{\mathcal{A}}((p^s \text{id}_{G_{\mathcal{A}}})([r_s])) \\ = p^s (p\bar{l}_{\mathcal{A}}([r_s]) - \mathcal{A}^* \bar{l}_{\mathcal{A}}([r_s])) = p^{s+1}[r_s] \in p^{s+1}W(m_R). \end{aligned}$$

2.2.2. $\psi(G_{\mathcal{A}}(W(m_R))) = \psi(G_{\mathcal{A}}(pW(m_R)))$.

Этот факт вытекает из приведенной выше леммы, так как если $w \in G_{\mathcal{A}}(W(m_R))$ и $r = w \pmod{pW(m_R)} \in G_{\mathcal{A}}(m_R)$, то $w = \delta(r) +_{G_{\mathcal{A}}} w_1$, где $w_1 \in G_{\mathcal{A}}(pW(m_R))$.

2.2.3. $\psi(G_{\mathcal{A}}(pW(m_R))) = pW(m_R)^n$.

Действительно, пусть $g \in G_{\mathcal{A}}(p^i W(m_R))$ для некоторого $i \geq 1$. Тогда $\bar{l}_{\mathcal{A}}(g) \equiv g \pmod{p^{i+1}W(m_R)}$ и

$$\psi(g) \equiv -p^i \mathcal{A}^*(r) \pmod{p^{i+1}W(m_R)},$$

где $r \in m_R^n$ таков, что $g \equiv p^i[r] \pmod{p^{i+1}W(m_R)}$.

Согласно п. 1.6.1 оператор $\mathcal{A}^*|_{m_R^n}$ обратим, следовательно, для любого $i \geq 1$ отображение ψ индуцирует биекцию $p^i W(m_R)^n \pmod{p^{i+1}W(m_R)}$.

2.2.4. ЛЕММА. Для произвольного $a \in G_{\mathcal{A}}(m_C)$ существует $r \in G_{\mathcal{A}}(m_R)$ такой, что $\gamma(\delta(r)) = a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем последовательность $\{a_s\}_{s \geq 0}$, $a_s \in G_{\mathcal{A}}(m_C)$, такую, что $a_0 = a$ и $(p \text{id}_{G_{\mathcal{A}}})(a_{s+1}) = a_s$ для всех $s \geq 0$. Пусть $r'_s \in G_{\mathcal{A}}(m_R)$, $s \geq 0$, таковы, что $\gamma(r'_s) = a_s$. Тогда можно применить аргументы п. 1.5.2 для проверки следующих свойств:

- а) существует $\lim_{s \rightarrow \infty} (p^s \text{id}_{G_{\mathcal{A}}})([r'_s]) := w \in G_{\mathcal{A}}(W(m_R))$;
- б) если $w \pmod{pW(m_R)} = r \in G_{\mathcal{A}}(m_R)$, то $w = \delta(r)$.

Отсюда вытекает утверждение леммы, так как

$$\gamma(w) = \lim_{s \rightarrow \infty} (p^s \text{id}_{G_{\mathcal{A}}})(a_s) = a.$$

2.2.5. $\psi^1(G_{\mathcal{A}}(W^1(m_R))) = pW(m_R)^n$.

Действительно, пусть $w \in pW(m_R)^n$ и $g \in G_{\mathcal{A}}(W(m_R))$ выбраны так, что $\psi(g) = w$. Возьмем $r \in G_{\mathcal{A}}(m_R)$ такое, что $\gamma(\delta(r)) = \gamma(g) \in G_{\mathcal{A}}(m_C)$. Тогда

$$g' = g -_{G_{\mathcal{A}}} \delta(r) \in G_{\mathcal{A}}(W^1(m_R))$$

и $\psi^1(g') = \psi(g) = w$.

Предложение доказано.

2.3. Кристаллический символ.

2.3.1. Фиксируем натуральное число M . Пусть K – конечное расширение поля K_0 в $\overline{K}$ такое, что все геометрические точки групповой схемы $G_{\mathcal{A}}[M] = \text{Ker}(p^M \text{id}_{G_{\mathcal{A}}})$ определены над K . Это означает, что

$$G_{\mathcal{A}}[M](m_C) = G_{\mathcal{A}}[M](m_K),$$

где m_K – максимальный идеал кольца нормирования поля K .

Используем явное описание структуры фильтрованного модуля $\mathcal{M}(G_{\mathcal{A}})$ из п. 1.3 и невырожденность спаривания p -адических периодов по модулю p^M для отождествления $G_{\mathcal{A}}[M](m_C)$ с группой $U_M(\mathcal{M}(G_{\mathcal{A}}))$ вектор-столбцов

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \pmod{p^M A_{\text{cris}}} \in A_{\text{cris}, M}^h$$

таких, что $y \in (\text{Fil}^1 A_{\text{cris}})^n$, $z \in A_{\text{cris}}^{h-n}$ и

$$\begin{pmatrix} \phi_1(y) \\ \phi_0(z) \end{pmatrix} = \mathcal{E} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}.$$

В этих терминах равенство $G_{\mathcal{A}}[M](m_C) = G_{\mathcal{A}}[M](m_K)$ означает, что для произвольного $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \pmod{p^M A_{\text{cris}}} \in U_M(\mathcal{M}(G_{\mathcal{A}}))$ и любого $\tau \in \Gamma_K = \text{Gal}(\overline{K}/K)$ мы имеем

$$\tau \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in p^M A_{\text{cris}}^h.$$

2.3.2. Пусть t^+ – образующий элемент аддитивного модуля Тейта в A_{cris} из п. 1.7.1 и $A_{\text{cris}}^{\text{loc}}$ – наибольший идеал в A_{cris} , на котором σ топологически нильпотентен. Для

$$\alpha \in (A_{\text{cris}}^n \pmod{t^+ A_{\text{cris}}^{\text{loc}}})^{\Gamma_K} = \{ \alpha \in A_{\text{cris}}^n \mid \forall \tau \in \Gamma_K \quad \tau \alpha \equiv \alpha \pmod{t^+ A_{\text{cris}}^{\text{loc}}} \}$$

и $\tau \in \Gamma_K$ определим значение кристаллического символа $(\alpha, \tau]_{\text{cris}} \in G_{\mathcal{A}}[M](m_K)$ следующим образом:

если $\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} \in A_{\text{cris}}^h$ таков, что $Y \in (\text{Fil}^1 A_{\text{cris}})^n$ и

$$\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathcal{E}^{-1} \begin{pmatrix} \phi_1(Y) \\ \phi_0(Z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

то $(\alpha, \tau]_{\text{cris}}$ является таким элементом $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \pmod{p^M A_{\text{cris}}}$ из

$$G_{\mathcal{A}}[M](m_K) = U_M(\mathcal{M}(G_{\mathcal{A}})),$$

что

$$\tau \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \pmod{t^+ A_{\text{cris}}^{\text{loc}}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Этот символ связан с фильтрованным модулем $\mathcal{M}(G_{\mathcal{A}})$ или, эквивалентно, с формальной группой $G_{\mathcal{A}}$. В тех случаях, когда эта зависимость будет для нас существенна, мы используем обозначение $(\alpha, \tau]_{G_{\mathcal{A}}, \text{cris}}$.

2.3.3. ЛЕММА. Приведенное выше определение значений $(\alpha, \tau]_{\text{cris}}$ символа

$$(\cdot, \cdot]_{\text{cris}} : (A_{\text{cris}}^n \bmod t^+ A_{\text{cris}}^{\text{loc}})^{\Gamma_K} \times \Gamma_K \rightarrow G_{\mathcal{A}}[M](m_K)$$

является корректным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разрешимость уравнения (10) вытекает из аргументов работы [15, п. 5] (где рассматривается случай более общих фильтрованных модулей). На самом деле для нас будут важны лишь значения кристаллического символа для $\alpha \in W(m_R)^n$, а в этой ситуации разрешимость уравнения (10) вытекает из предложения п. 2.1.

СУЩЕСТВОВАНИЕ $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$. Если $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$, то $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathcal{E}^{-1} \begin{pmatrix} \phi_1(a) \\ \phi_0(b) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_\tau \\ 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_\tau \in (t^+ A_{\text{cris}}^{\text{loc}})^n$. Но оператор

$$\mathcal{E}^{-1} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & pB \\ C & pD \end{pmatrix} \phi_1 : \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A\phi_1(a') + pB\phi_1(b') \\ C\phi_1(a') + pD\phi_1(b') \end{pmatrix}$$

является нильпотентным на $(t^+ A_{\text{cris}}^{\text{loc}})^h$, следовательно, мы можем ввести

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \sum_{s \geq 0} \left\{ \mathcal{E}^{-1} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_0 \end{pmatrix} \right\}^s \begin{pmatrix} \alpha_\tau \\ 0 \end{pmatrix} \in (t^+ A_{\text{cris}}^{\text{loc}})^h.$$

Очевидно, $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \mathcal{E}^{-1} \begin{pmatrix} \phi_1(\beta_1) \\ \phi_0(\beta_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_\tau \\ 0 \end{pmatrix}$, и $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_0 \end{pmatrix}$ является требуемым элементом из $G_{\mathcal{A}}[M](m_K) = U_M(\mathcal{M}(G_{\mathcal{A}}))$.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$. Если $\tau \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \bmod t^+ A_{\text{cris}}^{\text{loc}}$, то вектор-столбец $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, равный $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in (t^+ A_{\text{cris}}^{\text{loc}})^h$, удовлетворяет соотношению

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathcal{E}^{-1} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \left\{ \mathcal{E}^{-1} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_0 \end{pmatrix} \right\}^N \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, так как $\mathcal{E}^{-1} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_0 \end{pmatrix}$ является топологически нильпотентным на $(t^+ A_{\text{cris}}^{\text{loc}})^h$.

НЕЗАВИСИМОСТЬ ОТ ВЫБОРА $\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$. Если $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \in A_{\text{cris}}^h$ может быть взят вместо $\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$, то $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, где $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \bmod p^M A_{\text{cris}} \in U_M(\mathcal{M}(G_{\mathcal{A}}))$. Но $\tau \in \Gamma_K$ и, следовательно,

$$\tau \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \bmod p^M A_{\text{cris}}^h$$

(см. п. 2.3.1).

2.4. Символ $(\cdot, \cdot]_{\text{cris}}$ и оператор $\mathcal{A}^*$. Используем обозначения из определения значения $(\alpha, \tau]_{\text{cris}}$ кристаллического символа. Тогда вектор $\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$ появляется как решение системы уравнений

$$\begin{aligned} Y &= A(\sigma Y/p) + B\sigma Z + \alpha, \\ Z &= C(\sigma Y/p) + D\sigma Z. \end{aligned} \tag{11}$$

Легко видеть, что соответствие $\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} \mapsto Y$ дает взаимно однозначное соответствие между множеством решений $\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$ системы уравнений (11), где $Y \in (\text{Fil}^1 A_{\text{cris}})^n$, $Z \in A_{\text{cris}}^{h-n}$, и множеством решений $Y \in (\text{Fil}^1 A_{\text{cris}})^n$ уравнения

$$Y - \frac{\mathcal{A}^*}{p} Y = \alpha.$$

Таким образом, вычисление значения $o_M \in G[M](m_K)$ выражения $(\alpha, \tau]_{\text{cris}}$ может быть проведено следующим образом:

- а) найдем $Y \in (\text{Fil}^1 A_{\text{cris}})^n$ такой, что $Y - \mathcal{A}^* Y/p = \alpha$;
- б) найдем $y \in (\text{Fil}^1 A_{\text{cris}})^n$ такой, что $y = \mathcal{A}^* y/p$ и $\tau Y - Y \equiv y \bmod t^+ A_{\text{cris}}^{\text{loc}}$;
- с) найдем $o_M \in G[M](m_K)$ такой, что $y \equiv p^M \bar{l}_{\mathcal{A}}(\hat{o}_M) \bmod p^M A_{\text{cris}}$, где $\hat{o}_M \in W(m_R)$ и $\gamma(\hat{o}_M) \equiv o_M \bmod pm_C$.

2.5. Гомоморфизм $\Theta_{G_{\mathcal{A}}}$.

2.5.1. Фиксируем униформизирующий элемент $\pi \in K$ и обозначим поле вычетов поля K через k . Фиксируем $t_0 \in m_R$ такой, что $t_0^{(0)} = \pi$ (это эквивалентно выбору последовательности $\{\pi_s\}_{s \geq 0} \in m_C$ такой, что $\pi_0 = \pi$ и $\pi_{s+1}^p = \pi_s$ для всех $s \geq 0$).

Пусть $O_{k, \tilde{t}} = W(k)[[\tilde{t}]] \subset W(R)$, где $\tilde{t} = [t_0]$, и пусть

$$m_{k, \tilde{t}} = \tilde{t}W(k)[[\tilde{t}]] = O_{k, \tilde{t}} \cap W(m_R).$$

Заметим, что $\gamma(\tilde{t}) = \pi$ и, следовательно, $\gamma(O_{k, \tilde{t}}) = O_K$, $\gamma(m_{k, \tilde{t}}) = m_K$.

Как обычно, обозначим через $m_{k, \tilde{t}}^n$ пространство вектор-столбцов порядка n с координатами в $m_{k, \tilde{t}}$. Используем следующую сокращенную форму записи элементов из $m_{k, \tilde{t}}^n$:

$$\sum_{\tilde{i} \in \mathbb{N}^n} w_{\tilde{i}} \tilde{t}^{\tilde{i}} = t \left(\sum_{i_1 \in \mathbb{N}} w_{i_1} \tilde{t}^{i_1}, \dots, \sum_{i_n \in \mathbb{N}} w_{i_n} \tilde{t}^{i_n} \right),$$

где $w_{\bar{i}} = {}^t(w_{i_1}, \dots, w_{i_n}) \in W(k)^n$ и $\bar{i} = {}^t(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$.

2.5.2. Пусть $\sum w_{\bar{i}} \tilde{t}^{\bar{i}}$ – некоторый элемент из $m_{k, \tilde{t}}^n$. Если $w_{\bar{i}} = \sum_{s \geq 0} p^s [\alpha_{\bar{i}, s}]$, где $\alpha_{\bar{i}, s} = {}^t(\alpha_{i_1, s}, \dots, \alpha_{i_n, s}) \in k^n$ и $[\alpha_{\bar{i}, s}] = {}^t([\alpha_{i_1, s}], \dots, [\alpha_{i_n, s}])$, то положим

$$\Theta_1 \left(\sum_{\bar{i} \in \mathbb{N}^n} w_{\bar{i}} \tilde{t}^{\bar{i}} \right) = \sum_{\substack{(\mathbf{b} \ G_{\mathcal{A}}) \\ \bar{i}, s}} (p^s \text{id}_{G_{\mathcal{A}}}) ([\alpha_{\bar{i}, s}] \tilde{t}^{\bar{i}})$$

(здесь суммирование в правой части равенства производится по всем точкам группы $G_{\mathcal{A}}(m_{k, \tilde{t}})$).

Таким образом, мы получили отображение $\Theta_{G_{\mathcal{A}}, 1} = \Theta_1: m_{k, \tilde{t}}^n \rightarrow G_{\mathcal{A}}(m_{k, \tilde{t}})$.

ЛЕММА. Θ_1 является изоморфизмом групп.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно из определений пролучаем

$$\begin{aligned} (\Theta_1 \circ \bar{l}_{\mathcal{A}}) \left(\sum_{\bar{i} \in \mathbb{N}^n} w_{\bar{i}} \tilde{t}^{\bar{i}} \right) &= \bar{l}_{\mathcal{A}} \left(\sum_{\substack{(\mathbf{b} \ G_{\mathcal{A}}) \\ s, \bar{i}}} (p^s \text{id}_{G_{\mathcal{A}}}) ([\alpha_{\bar{i}, s}] \tilde{t}^{\bar{i}}) \right) \\ &= \sum_{\substack{s \geq 0 \\ \bar{i} \in \mathbb{N}^n}} p^s \bar{l}_{\mathcal{A}} ([\alpha_{\bar{i}, s}] \tilde{t}^{\bar{i}}) = \sum_{\substack{s \geq 0 \\ \bar{i} \in \mathbb{N}^n}} p^s \left(\text{id} - \frac{\mathcal{A}^*}{p} \right)^{-1} ([\alpha_{\bar{i}, s}] \tilde{t}^{\bar{i}}) \\ &= \left(\text{id} - \frac{\mathcal{A}^*}{p} \right)^{-1} \left(\sum_{\bar{i} \in \mathbb{N}^n} w_{\bar{i}} \tilde{t}^{\bar{i}} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, $\Theta_1 \circ \bar{l}_{\mathcal{A}}$ является $\mathbb{Z}_p$ -линейным отображением $m_{k, \tilde{t}}^n \rightarrow A_{\text{cris}}^n$ и, следовательно, Θ_1 – гомоморфизм групп. Эта формула также показывает, что Θ_1 является изоморфизмом и соответствие

$$g \mapsto \left(\bar{l}_{\mathcal{A}} \circ \left(\text{id} - \frac{\mathcal{A}^*}{p} \right) \right) (g) = \bar{l}_{\mathcal{A}}(g) - \frac{\mathcal{A}^*}{p} \bar{l}_{\mathcal{A}}(g)$$

дает обратный гомоморфизм $\Theta_1^{-1}: G_{\mathcal{A}}(m_{k, \tilde{t}}) \rightarrow m_{k, \tilde{t}}^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В процессе доказательства было получено следующее тождество:

$$\bar{l}_{\mathcal{A}}(\Theta_1(\alpha)) = \left(\text{id} + \frac{\mathcal{A}^*}{p} + \dots + \frac{\mathcal{A}^{*s}}{p^s} + \dots \right) (\alpha),$$

где α – любой элемент из $m_{k, \tilde{t}}^n$.

2.5.3. Определим гомоморфизм $\Theta_{G_{\mathcal{A}}} = \Theta: m_{k, \tilde{t}}^n \rightarrow G_{\mathcal{A}}(m_K)$ как композицию Θ_1 и $\gamma: G_{\mathcal{A}}(m_{k, \tilde{t}}) \rightarrow G_{\mathcal{A}}(m_K)$. Очевидно, Θ сюръективен.

Соотношение между векторными степенными рядами $f(\tilde{t}) \in m_{k, \tilde{t}}^n$ и n -векторами $\beta = \Theta(f(\tilde{t})) \in m_K^n$ может быть объяснено следующим образом. Возьмем некоторое представление β в виде $\beta = \sum_{\bar{i} \in \mathbb{N}^n} w_{\bar{i}} \pi^{\bar{i}}$ и определим векторный степенной ряд $\beta(\tilde{t}) = \sum_{\bar{i} \in \mathbb{N}^n} w_{\bar{i}} \tilde{t}^{\bar{i}}$. Тогда для

$$f(\tilde{t}) = \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta(\tilde{t})) - \frac{\mathcal{A}^*}{p} \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta(\tilde{t}))$$

имеем $f(\tilde{t}) \in m_{k, \tilde{t}}^n$ и $\Theta(f(\tilde{t})) = \beta$.

2.6. ЛЕММА. Пусть $\alpha \in m_{k,\tilde{t}}^n \subset W(m_R)^n$. Если $\tau \in \Gamma_K$, то $\tau\alpha - \alpha \in (t^+ A_{\text{cris}}^{\text{loc}})^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что $\tau\tilde{t} - \tilde{t} \in t^+ A_{\text{cris}}^{\text{loc}}$.

Можно взять образующий элемент аддитивного подмодуля Тейта в A_{cris} в виде $t^+ = \log[\varepsilon]$, где $\varepsilon = (\varepsilon^{(s)})_{s \geq 0} \in R$ таков, что $\varepsilon^{(0)} = 1$, $\varepsilon^{(1)} \neq 1$. Заметим, что $t^+ = ([\varepsilon] - 1)\eta$, где η обратим в A_{cris} .

Существует $a = a_\tau \in \mathbb{Z}_p$ такой, что $\tau\tilde{t} = \tilde{t}[\varepsilon]^a$. Следовательно, $\tau\tilde{t} - \tilde{t} = \tilde{t}([\varepsilon]^a - 1) = \eta^{-1}t^+w$, где $w = \tilde{t}([\varepsilon]^a - 1)([\varepsilon] - 1)^{-1} \in W(m_R) \subset A_{\text{cris}}^{\text{loc}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что $t^+ A_{\text{cris}}^{\text{loc}} \cap W(R) = \psi W(m_R)$, где $\psi \in W^1(m_R)$ был определен в п. 1.7.2. Следовательно, в условиях предыдущей леммы мы имеем $\tau\alpha - \alpha \in \psi W(m_R)^n$.

2.7. Пусть $f \in G_{\mathcal{A}}(m_K)$ и $\tau \in \Gamma_K$. Рассмотрим символ формальной группы как спаривание

$$G_{\mathcal{A}}(m_K) \times \Gamma_K \rightarrow G_{\mathcal{A}}[M](m_K).$$

Напомним, что $(f, \tau]_{G_{\mathcal{A}}} = \tau f_1 -_{G_{\mathcal{A}}} f_1$, где $f_1 \in G_{\mathcal{A}}(m_C)$ таков, что

$$(p^M \text{id}_{G_{\mathcal{A}}})(f_1) = f.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $\alpha \in m_{k,\tilde{t}}^n$ и $\tau \in \Gamma_K$, то

$$(\alpha, \tau]_{\text{cris}} = (-\text{id}_{G_{\mathcal{A}}})(\Theta_{G_{\mathcal{A}}}(\alpha), \tau]_{G_{\mathcal{A}}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В соответствии с п. 2.5.3 это утверждение может быть переформулировано следующим образом: если $f \in G_{\mathcal{A}}(m_K)$ и $f(\tilde{t}) \in m_{k,\tilde{t}}^n$ – векторный степенной ряд такой, что $f(\tilde{t}) \mapsto f$ при подстановке $\tilde{t} \mapsto \pi$, то для произвольного $\tau \in \Gamma_K$ имеем

$$(f, \tau]_{G_{\mathcal{A}}} = (-\text{id}_{G_{\mathcal{A}}}) \left(\bar{l}_{\mathcal{A}}(f(\tilde{t})) - \frac{\mathcal{A}^*}{p} \bar{l}_{\mathcal{A}}(f(\tilde{t})), \tau \right]_{\text{cris}}.$$

2.8. Доказательство предложения 2.7.

2.8.1. Точная последовательность из п. 2.1 дает решение $Y \in (\text{Fil}^1 A_{\text{cris}})^n$ уравнения

$$Y - \frac{\mathcal{A}^*}{p} Y = \alpha$$

в виде $Y = \bar{l}_{\mathcal{A}}(g)$ для некоторого $g \in G_{\mathcal{A}}(W^1(m_R))$.

Согласно определению кристаллического символа

$$\tau Y = Y + X + l_{\alpha, \tau},$$

где $l_{\alpha, \tau} \in (\text{Fil}^1 A_{\text{cris}})^n$, $l_{\alpha, \tau} = (\mathcal{A}^*/p)l_{\alpha, \tau}$, $l_{\alpha, \tau} \bmod p^M A_{\text{cris}} = (\alpha, \tau]_{\text{cris}}$ (относительно отождествления $U_M(\mathcal{M}(G_{\mathcal{A}})) = G_{\mathcal{A}}[M](m_K)$ из п. 2.3.1) и $X \in (t^+ A_{\text{cris}}^{\text{loc}})^n$ таков, что $X - (\mathcal{A}^*/p)X = \tau\alpha - \alpha$.

Используя нильпотентность оператора $\mathcal{A}^*/p$ на $(t^+ A_{\text{cris}}^{\text{loc}})^n$ и тождество из замечания п. 2.5.2, представим X в следующем виде:

$$X = \left(\text{id} - \frac{\mathcal{A}^*}{p} \right)^{-1} (\tau\alpha - \alpha) = \tau\bar{l}_{\mathcal{A}}(\Theta_1(\alpha)) - \bar{l}_{\mathcal{A}}(\Theta_1(\alpha))$$

(здесь $\Theta_1 = \Theta_{G_{\mathcal{A}},1}$ — изоморфизм из п. 2.5.2).

2.8.2. По лемме 1.6.3 можно взять $h, y \in G_{\mathcal{A}}(W(m_R))$ такие, что $\mathcal{A}^{*M}\bar{l}_{\mathcal{A}}(h) = \bar{l}_{\mathcal{A}}(g)$ и $\mathcal{A}^{*M}\bar{l}_{\mathcal{A}}(y) = \bar{l}_{\mathcal{A}}(\Theta_1(\alpha))$.

Теперь соотношение $\mathcal{A}^*Y = pY - p\alpha$ дает

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{*M}Y &= p\mathcal{A}^{*M-1}Y - p\mathcal{A}^{*M-1}\alpha = \dots \\ &= p^MY - (p^M \text{id} + p^{M-1}\mathcal{A}^* + \dots + p\mathcal{A}^{*M-1})\alpha \\ &= \mathcal{A}^{*M}(p^M\bar{l}_{\mathcal{A}}(h) - (p^M\mathcal{A}^{*-M} + \dots + p\mathcal{A}^{*-1})\alpha). \end{aligned}$$

Заметим, что это равенство можно сократить на $\mathcal{A}^{*M}$ в силу утверждения о единственности из леммы 1.6.3.

Применяя тождество из замечания п. 2.5.2, получаем

$$\begin{aligned} (p^M\mathcal{A}^{*-M} + \dots + p\mathcal{A}^{*-1})\alpha &= (p^M\mathcal{A}^{*-M} - \text{id}) \left(\text{id} + \frac{\mathcal{A}^*}{p} + \dots + \frac{\mathcal{A}^{*s}}{p^s} + \dots \right) \alpha \\ &= p^M\bar{l}_{\mathcal{A}}(y) - \bar{l}_{\mathcal{A}}(\Theta_1(\alpha)). \end{aligned}$$

Следовательно, для $h' = h -_{G_{\mathcal{A}}} y \in G_{\mathcal{A}}(W(m_R))$ имеется соотношение

$$\bar{l}_{\mathcal{A}}(g) = p^M\bar{l}_{\mathcal{A}}(h') + \bar{l}_{\mathcal{A}}(\Theta_1(\alpha)). \quad (12)$$

Используя эту формулу и выражение для X из п. 2.8.1, мы получаем

$$l_{\alpha,\tau} = \bar{l}_{\mathcal{A}}(\tau g) - \bar{l}_{\mathcal{A}}(g) - X = p^M\bar{l}_{\mathcal{A}}(\tau h' -_{G_{\mathcal{A}}} h'). \quad (13)$$

2.8.3. Применим морфизм $\gamma: G_{\mathcal{A}}(m_{k,\tilde{t}}) \rightarrow G_{\mathcal{A}}(m_K)$ к обеим частям соотношения (12), учитывая, что $g \in G_{\mathcal{A}}(W^1(m_R))$. Тогда

$$(p^M \text{id}_{G_{\mathcal{A}}})(\tilde{h}) = (-\text{id}_{G_{\mathcal{A}}})\Theta_{G_{\mathcal{A}}}(\alpha),$$

где $\tilde{h} = \gamma(h') \in G(m_C)$.

Пусть $o = (o_s)_{s \geq 0} \in T(G_{\mathcal{A}})$ таков, что $\bar{l}_{\alpha,\tau} = \bar{l}_{\mathcal{A}}(j(o))$ (см. п. 2.1). Из п. 1.5.3 вытекает

$$\bar{l}_{\mathcal{A}}(j(o)) \equiv p^M\bar{l}_{\mathcal{A}}(\hat{o}_M) \pmod{p^M\bar{l}_{\mathcal{A}}(W^1(m_R)) + p^{M+1}W(m_R)},$$

где $\hat{o}_M \in W(m_R)$ таков, что $\gamma(\hat{o}_M) \equiv o_M \pmod{pm_C}$.

Следовательно, соотношение (13) дает

$$\bar{l}_{\mathcal{A}}(\hat{o}_M) \equiv \bar{l}_{\mathcal{A}}(\tau h' -_{G_{\mathcal{A}}} h') \pmod{\bar{l}_{\mathcal{A}}(W^1(m_R)) + pW(m_R)}.$$

Таким образом, $\hat{o}_M = \tau h' -_{G_{\mathcal{A}}} h' + \delta$, где $\delta \in G_{\mathcal{A}}(W^1(m_R) + pW(m_R))$. Применяя морфизм γ , получаем

$$o_M \equiv \tau\tilde{h} -_{G_{\mathcal{A}}} \tilde{h} \pmod{pm_C}.$$

Так как o_M и $\tau\tilde{h} -_{G_{\mathcal{A}}} \tilde{h}$ лежат в $G[M](m_C)$ и $G[M](m_C) \cap pm_C^n = 0$, то $o_M = \tau\tilde{h} -_{G_{\mathcal{A}}} \tilde{h}$. Но $o_M = (\alpha, \tau]_{\text{cris}}$ и $(\Theta_{G_{\mathcal{A}}}(\alpha), \tau]_{G_{\mathcal{A}}} = (-\text{id}_{G_{\mathcal{A}}})(\tau(\tilde{h}) -_{G_{\mathcal{A}}} \tilde{h})$.

Предложение доказано.

§3. Связь между кристаллическим символом и символом Витта

3.1. Алгебра $\mathcal{G}_{(p-1)^+, p-1}$. Пусть R_0 – поле частных кольца R . Обозначим через $\mathcal{G}$ множество формальных сумм

$$\left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} p^n [r_n] \mid r_n \in R_0, \quad r_n \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0 \right\}.$$

Очевидно, $\mathcal{G} \supset W(R_0) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = \{ \sum_{n > -\infty} p^n [r_n] \mid r_n \in R_0 \}$ и может быть отождествлено с пополнением $W(R_0) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ в v_R -адической топологии. Таким образом, $\mathcal{G}$ имеет естественную структуру $W(R)$ -модуля и непрерывное действие группы Галуа $\Gamma_0 = \text{Gal}(\bar{K}/K_0)$, а абсолютный морфизм Фробениуса $\sigma_{\mathcal{G}} : \sum p^n [r_n] \mapsto \sum p^n [r_n^p]$ является $\mathbb{Z}_p$ -линейным Γ_0 -морфизмом. Очевидно,

$$\mathcal{G}|_{\sigma_{\mathcal{G}}=\text{id}} = W(\mathbb{F}_p) \otimes \mathbb{Q}_p = \mathbb{Q}_p.$$

Пусть

$$\mathcal{G}(m_R) = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} p^n [r_n] \mid r_n \in m_R, \quad r_n \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0 \right\}.$$

Тогда $\mathcal{G}(m_R)$ является Γ_0 -инвариантным $W(R)$ -подмодулем в $\mathcal{G}$, а $\sigma_{\mathcal{G}}|_{\mathcal{G}(m_R)}$ – топологически нильпотентный морфизм. Очевидно, $\mathcal{G}(m_R)|_{\sigma_{\mathcal{G}}=\text{id}} = 0$.

Пусть $a, b \in \mathbb{Q}$, $a > b \geq 0$. Обозначим через $\mathcal{G}_{a,b}^0$ подмножество в $\mathcal{G}$, состоящее из $\sum p^n [r_n]$ таких, что $v_R(r_n) \geq -bn$ для $n \geq 0$ и $v_R(r_n) \geq -an$ для $n \leq 0$. Легко видеть, что структура $W(R)$ -алгебры на $W_{\mathbb{Q}_p}(R_0)$ индуцирует структуру $W(R)$ -алгебры на $\mathcal{G}_{a,b}^0$. Эта структура совместима с Γ_0 -действием и $\sigma_{\mathcal{G}}$ индуцирует полулинейный изоморфизм Γ_0 -модулей $\sigma_{\mathcal{G}} : \mathcal{G}_{a,b}^0 \rightarrow \mathcal{G}_{pa,pb}^0$.

Если $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \geq b \geq 0$, пусть $\mathcal{G}_{a^+,b}^0$ – p -адическое замыкание алгебры $\bigcup_{c>a} \mathcal{G}_{c,b}^0$. Тогда $\mathcal{G}_{a^+,b}^0$ является $W(R)$ -алгеброй с непрерывным действием группы Γ_0 . Положим $\mathcal{G}_{a^+,b} = \mathcal{G}_{a^+,b}^0 \otimes \mathbb{Q}_p \subset \mathcal{G}$.

Заметим, что A_{cris} может быть естественно отождествлено с Γ_0 -подмодулем в $\mathcal{G}$. Очевидно, если $a \in A_{\text{cris}}$, то $\sigma a = \sigma_{\mathcal{G}} a$ (где $\sigma = \phi_0$ – эндоморфизм Фробениуса в A_{cris}).

3.1.1. ЛЕММА. а) $A_{\text{cris}} \subset \mathcal{G}_{(p-1)^+,0}^0$.

б) Любой ненулевой элемент из $B_{\text{cris}}^+ = A_{\text{cris}} \otimes \mathbb{Q}_p \subset \mathcal{G}_{(p-1)^+,0}$ обратим в $\mathcal{G}_{(p-1)^+,p-1}$.

в) Если $t^+ \in A_{\text{cris}}$ – образующий элемент аддитивного модуля Тейта $\mathbb{Z}_p(1) \subset A_{\text{cris}}$ (см. п. 1.7.1) и $x_0 \in R$ таков, что $x_0^{(0)} = p$, то

$$(t^+)^{-1} \in [x_0]^{-p/(p-1)} \mathcal{G}_{p,1}^0 \subset \mathcal{G}_{(p-1)^+,1}$$

(и, следовательно, $B_{\text{cris}} = B_{\text{cris}}^+[1/t^+] \subset \mathcal{G}_{(p-1)^+,1}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) A_{cris} является p -адическим замыканием кольца

$$W(R)[\{[x_0]^n/n! \mid n \geq 1\}],$$

где $x_0 \in R$ — элемент из условия леммы. Таким образом, достаточно доказать, что $[x_0]^n/n! \in \mathcal{G}_{(p-1)^+,0}^0$. Но это вытекает из неравенства

$$\frac{v_R(x_0^n)}{v(n!)} = \frac{n}{[n/p] + \dots + [n/p^s] + \dots} > p - 1.$$

б) Это утверждение следует из того, что в p -адической топологии произвольный элемент из B_{cris}^+ является пределом конечных сумм $\sum p^n[r_n] \in \mathcal{G}$.

с) $\sigma t^+ = pt^+$ влечет $t^+ = \sum_{n \in \mathbb{Z}} p^n[r^{p^{-n}}]$ для некоторого $r \in m_R$. Из определения t^+ следует, что $v_R(r) = p/(p-1)$. Следовательно,

$$[r^{-1}]t^+ = 1 + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} p^n[r_n],$$

где $v_R(r_n) \geq -n$ для $n > 0$ и $v_R(r_n) \geq -pn$ для $n < 0$. Теперь заметим, что

$$\left(1 + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} p^n[r_n]\right)^{-1} = 1 + \sum_{s \geq 1} (-1)^s \left(\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} p^n[r_n]\right)^s \in \mathcal{G}_{p,1}^0.$$

Это дает $(t^+)^{-1} \in [x_0]^{-p/(p-1)}\mathcal{G}_{p,1}^0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Необходимо быть осторожным при рассмотрении действия морфизмов Фробениуса σ на B_{cris} и $\sigma_{\mathcal{G}}$ на $\mathcal{G}$ по отношению к определенному в п. б) вложению поля частных $\text{Frac } B_{\text{cris}}$ в $\mathcal{G}_{(p-1)^+,p-1}$. Например, $\sigma(1/t^+) = 1/(pt^+)$, но $\sigma_{\mathcal{G}}(1/t^+) \notin \mathcal{G}_{(p-1)^+,p-1}$. Свойство согласования морфизмов σ и $\sigma_{\mathcal{G}}$ может быть сформулировано следующим образом:

если $b \in B_{\text{cris}}$ таков, что $\sigma_{\mathcal{G}}(b) \in \mathcal{G}_{(p-1)^+,p-1}$, то $\sigma b = \sigma_{\mathcal{G}}(b)$.

3.1.2. Предыдущая лемма дает существование естественного вложения поля частных $\text{Frac } A_{\text{cris}} = \text{Frac } B_{\text{cris}}$ в $\mathcal{G}_{(p-1)^+,p-1}$. Пусть ψ — элемент из $W(R)$, определенный в п. 1.7.2, и x_0 — элемент кольца R из п. с) леммы 3.1.1.

ЛЕММА. *Имеет место включение*

$$\frac{1}{\psi} W(R)[[\psi^{p-1}/p]] \subset [x_0]^{-p/(p-1)}\mathcal{G}_{p,1}^0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если t — образующий элемент для $W^1(R)$ из п. 1.7.2, то легко проверить, что $W(R)[[t^p/p]] = W(R)[[[x_0]^p/p]]$. Следовательно,

$$W(R)[[\psi^{p-1}/p]] = W(R)[[[x_0]^p/p]] = \mathcal{G}_{p,0}^0$$

по лемме п. 1.7.3. Таким образом, t^+ и ψ являются ассоциированными элементами кольца $\mathcal{G}_{p,0}^0$ и, следовательно,

$$\frac{1}{\psi} W(R)[[\psi^{p-1}/p]] \subset [x_0]^{-p/(p-1)}\mathcal{G}_{p,1}^0\mathcal{G}_{p,0}^0 = [x_0]^{-p/(p-1)}\mathcal{G}_{p,1}^0.$$

3.1.3. Пусть $\mathcal{G}^*(m_R) = \mathcal{G}(m_R) \cap \mathcal{G}_{(p-1)^+, p-1}$ и $\mathcal{G}^*(R_0) = W(R_0) \cap \mathcal{G}_{(p-1)^+, p-1}$.

Легко проверить следующие свойства:

- а) если $b \in \mathcal{G}^*(m_R)$, то $\sigma_{\mathcal{G}} b \in \mathcal{G}^*(m_R)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\mathcal{G}}^n(b) = 0$;
- б) если $b \in \mathcal{G}^*(m_R)$, то $c = \sum_{n \geq 0} \sigma_{\mathcal{G}}^n(b)$ – единственный элемент из $\mathcal{G}^*(m_R)$, удовлетворяющий соотношению $c - \sigma_{\mathcal{G}} c = b$;
- в) если $b \in \mathcal{G}^*(R_0)$ и $c \in W(R_0)$ таково, что $c - \sigma_{W(R_0)} c = b$, то $c, \sigma_{\mathcal{G}} c \in \mathcal{G}^*(R_0)$ и, следовательно, $c - \sigma_{\mathcal{G}} c = b$;
- г) $(\mathcal{G}^*(m_R) + \mathcal{G}^*(R_0))_{\sigma_{\mathcal{G}} = \text{id}} = \mathbb{Z}_p$;
- е) $\mathcal{G}^*(m_R) \cap \mathcal{G}^*(R_0) = W(m_R)$.

3.2. Вектор-столбцы $X, T \in (\text{Frac } A_{\text{cris}})^h$. Пусть $\alpha = {}^t(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in m_{k, \bar{t}}^n$.

Пусть $\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} \in A_{\text{cris}}^h$ таков, что $Y \in (\text{Fil}^1 A_{\text{cris}})^n$ и

$$\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathcal{E}^{-1} \begin{pmatrix} \phi_1(Y) \\ \phi_0(Z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

(мы используем обозначения из определения кристаллического символа; см. п. 2.3). Заметим (см. п. 1.7.6), что

$$\begin{aligned} Y &\in \left(W^1(m_R) + \frac{\psi^{p-1}}{p} W(R) [[\psi^{p-1}/p]] \right)^n, \\ Z &\in \left(W(m_R) + \frac{\psi^{p-1}}{p} W(R) [[\psi^{p-1}/p]] \right)^{h-n}. \end{aligned}$$

Выберем некоторый $\mathbb{Z}_p$ -базис в $T(G_{\mathcal{A}})$. Пусть

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \langle o^1, \bar{l} \rangle & \dots & \langle o^h, \bar{l} \rangle \\ \langle o^1, \bar{m} \rangle & \dots & \langle o^h, \bar{m} \rangle \end{pmatrix}$$

– матрица значений спаривания p -адических периодов по отношению к специальному $W(k_0)$ -базису $\{l_1, \dots, l_n, m_1, \dots, m_{h-n}\}$ в $M^0(G_{\mathcal{A}})$ и выбранному выше $\mathbb{Z}_p$ -базису для $T(G_{\mathcal{A}})$. Элементы матрицы $\mathcal{V}$ лежат в подкольце

$$W(R) [[\psi^{p-1}/p]] \subset A_{\text{cris}}$$

(см. п. 1.7.6).

Согласно п. 1.8 матрица $\mathcal{V}$ является невырожденной в поле частных $\text{Frac } A_{\text{cris}}$ кольца A_{cris} . Следовательно, существуют единственные вектор-столбцы $X, T \in (\text{Frac } A_{\text{cris}})^h$ такие, что

$$\mathcal{V} X = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} T = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

3.3. Редукция к уравнениям Витта–Артина–Шрейера.

3.3.1. ЛЕММА. а) $X, T \in ((1/\psi)W(R)[[\psi^{p-1}/p]])^h \subset ([x_0]^{-p/(p-1)}\mathcal{G}_{p,1}^0)^h$.

б) $\sigma_{\mathcal{G}}T \in \mathcal{G}_{(p-1)^+,1}$ и, следовательно, $\sigma_{\mathcal{G}}T = \sigma T$.

в) $T - \sigma T = X$.

д) Если $T_1 \in ([x_0]^{-p/(p-1)}\mathcal{G}_{p,1}^0)^h$ таков, что $T_1 - \sigma_{\mathcal{G}}T_1 = X$, то $\mathcal{V}T_1 = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \in A_{\text{cris}}^h$, $Y_1 \in (\text{Fil}^1 A_{\text{cris}})^n$ и $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \mathcal{E}^{-1} \begin{pmatrix} \phi_1(Y_1) \\ \phi_0(Z_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ (другими словами, $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}$ может быть взят вместо $\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$ при вычислении значения $(\alpha, \tau]_{\text{cris}}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) вытекает из того, что ${}^t\mathcal{V}^D \circ \mathcal{V} = t^+E_h$, t^+ и ψ – ассоциированные элементы кольца $W(R)[[\psi^{p-1}/p]]$ и $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} \in (W(R)[[\psi^{p-1}/p]])^h$.

б) Можно использовать нильпотентность ограничений морфизма ϕ_1 на модуль $(\psi^{p-1}/p)W(R)[[\psi^{p-1}/p]]$ и морфизма $\bar{\phi}_1 = \sigma/\sigma t$ на модуль $\psi^{p-1}W(R)$ (ср. с п. 1.7.5) для доказательства существования единственного $\begin{pmatrix} \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{pmatrix} \in W(m_R)^h$ такого, что $\hat{Y} \in W^1(m_R)^n$,

$$\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} \bmod (\psi^{p-1}/p)W(R)[[\psi^{p-1}/p]] = \begin{pmatrix} \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{pmatrix} \bmod \psi^{p-1}W(R),$$

$$\begin{pmatrix} \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{pmatrix} = \mathcal{E}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{\phi}_1(\hat{Y}) \\ \sigma(\hat{Z}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если $\hat{\mathcal{V}}$ – матрица из п. 1.8.4, то существуют единственные

$$\hat{X}, \hat{T} \in (1/\psi)W(R)^h \subset \mathcal{G}_{(p-1)^+,1}^h$$

такие, что

$$\hat{\mathcal{V}}\hat{X} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathcal{V}}\hat{T} = \begin{pmatrix} \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Легко видеть, что $T \bmod (\psi^{p-2}/p)W(R)[[\psi^{p-1}/p]] = \hat{T} \bmod \psi^{p-2}W(R)$.

Рассмотрим равенства (14) в кольце $W(R_0)$ (где R_0 – поле частных кольца R). Тогда $\sigma_{W(R_0)} = \sigma_{\mathcal{G}}|_{W(R_0)}$, и мы имеем

$$\begin{pmatrix} \sigma_{\mathcal{G}}/t \\ \sigma_{\mathcal{G}} \end{pmatrix} (\hat{\mathcal{V}}\hat{T}) = \begin{pmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \sigma_{\mathcal{G}} \end{pmatrix} (\hat{\mathcal{V}})\sigma_{\mathcal{G}}\hat{T} = \mathcal{E}\hat{\mathcal{V}}\sigma_{\mathcal{G}}\hat{T},$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \sigma_{\mathcal{G}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{pmatrix} = \mathcal{E} \begin{pmatrix} \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{pmatrix} - \mathcal{E} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{E}\hat{\mathcal{V}}\hat{T} - \mathcal{E}\hat{\mathcal{V}}\hat{X}.$$

Следовательно, $\sigma_{\mathcal{G}}\hat{T} = \hat{T} - \hat{X} \in (1/\psi)W(R)^h \subset [x_0]^{-p/(p-1)}(\mathcal{G}_{p,1}^0)^h$. Если

$$T = \hat{T} + T_1,$$

где $T_1 \in (\psi^{p-2}/p)W(R)[[\psi^{p-1}/p]]$, то

$$T_1 \in \frac{1}{p}(\mathcal{G}_{p,0}^0)^h \subset (\mathcal{G}_{p,0})^h$$

и $\sigma_{\mathcal{G}}T_1 \in (\mathcal{G}_{p,0})^h \subset (\mathcal{G}_{(p-1)+,1})^h$. Таким образом, $\sigma_{\mathcal{G}}T = \sigma_{\mathcal{G}}\widehat{T} + \sigma_{\mathcal{G}}T_1 \in (\mathcal{G}_{(p-1)+,1})^h$, и поэтому $\sigma_{\mathcal{G}}T = \sigma T$.

с) Согласно п. b) можно применить оператор $\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_0 \end{pmatrix}$ к обеим частям равенства $\mathcal{V}T = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$. Мы получаем

$$\begin{pmatrix} \langle o^1, \phi_1(\bar{l}) \rangle & \dots & \langle o^h, \phi_1(\bar{l}) \rangle \\ \langle o^1, \phi_0(\bar{m}) \rangle & \dots & \langle o^h, \phi_0(\bar{m}) \rangle \end{pmatrix} \sigma T = \begin{pmatrix} \phi_1(Y) \\ \phi_0(Z) \end{pmatrix}.$$

Это равенство может быть переписано в следующем виде:

$$\mathcal{E}\mathcal{V}\sigma T = \mathcal{E}\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{E}\mathcal{V}T - \mathcal{E}\mathcal{V}X.$$

Таким образом, $\sigma T = T - X$.

d) Если $t = T_1 - T$, то $t \in (\mathcal{G}_{(p-1)+,1})^h$ и $\sigma_{\mathcal{G}}t = \sigma_{\mathcal{G}}T_1 - \sigma_{\mathcal{G}}T = T_1 - T = t$. Это дает

$$t \in \left(\mathbb{Q}_p \cap [x_0]^{-p/(p-1)} \mathcal{G}_{p,1}^0 \right)^h = \mathbb{Z}_p^h.$$

Если $t = {}^t(a_1, \dots, a_h)$, то

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \mathcal{V}T_1 = \mathcal{V}T + \mathcal{V}t = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} + \sum_{1 \leq i \leq h} a_i \begin{pmatrix} \langle o^i, \bar{l} \rangle \\ \langle o^i, \bar{m} \rangle \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $Y_1 = Y + \sum_{1 \leq i \leq h} a_i \langle o^i, \bar{l} \rangle \in (\text{Fil}^1 A_{\text{cris}})^n$ и

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} - \mathcal{E}^{-1} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} - \mathcal{E}^{-1} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3.3.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Соответствие $T \mapsto \mathcal{V}T$ дает взаимно однозначное соответствие между множествами

$$\{T \in ([x_0]^{-p/(p-1)} \mathcal{G}_{p,1}^0)^h \mid T - \sigma_{\mathcal{G}}T = X\}$$

и

$$\left\{ \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} \in A_{\text{cris}}^h \mid Y \in (\text{Fil}^1 A_{\text{cris}})^n, \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathcal{E}^{-1} \begin{pmatrix} \phi_1(Y) \\ \phi_0(Z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

3.3.3. ЛЕММА. Для произвольного $\tau \in \Gamma_K$ координаты вектора $\tau X - X$ лежат в $W(m_R)[[\psi^{p-1}/p]] + (p^M/\psi)W(m_R)[[\psi^{p-1}/p]]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $\mathcal{V}X = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ вытекает, что $t^+X = {}^t\mathcal{V}^D \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$. Коэффициенты матрицы ${}^t\mathcal{V}^D$ являются элементами кольца $W(R)[[\psi^{p-1}/p]]$, $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \in W(m_R)^h$, следовательно,

$$X \in \left(\frac{1}{\psi} W(m_R)[[\psi^{p-1}/p]] \right)^h.$$

Перепишем соотношение $\tau(\mathcal{V}X) - \mathcal{V}X = \begin{pmatrix} \tau\alpha - \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ в следующем виде:

$${}^t\mathcal{V}^D(\tau\mathcal{V} - \mathcal{V})\tau X + t^+(\tau X - X) = {}^t\mathcal{V}^D \begin{pmatrix} \tau\alpha - \alpha \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

а) Все коэффициенты матрицы ${}^t\mathcal{V}^D(\tau\mathcal{V} - \mathcal{V})$ лежат в $p^M\mathbb{Z}_p t^+ \subset A_{\text{cris}}$. Действительно, для $1 \leq i \leq h$ имеем

$$\tau o^i - o^i = \sum_{1 \leq j \leq h} p^M a_{ij} o^j,$$

где все $a_{ij} \in \mathbb{Z}_p$. Следовательно,

$$\tau\mathcal{V} - \mathcal{V} = \begin{pmatrix} \langle \tau o^1 - o^1, \bar{l} \rangle & \dots & \langle \tau o^h - o^h, \bar{l} \rangle \\ \langle \tau o^1 - o^1, \bar{m} \rangle & \dots & \langle \tau o^h - o^h, \bar{m} \rangle \end{pmatrix} = \mathcal{V} p^M ((a_{ji}))_{1 \leq i, j \leq h}$$

и

$${}^t\mathcal{V}^D(\tau\mathcal{V} - \mathcal{V}) = p^M t^+ ((a_{ji}))_{1 \leq i, j \leq h}.$$

б) $\tau\alpha - \alpha \in (\psi W(m_R))^h$ (см. п. 2.6), следовательно,

$${}^t\mathcal{V}^D \begin{pmatrix} \tau\alpha - \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \in W(R)[[\psi^{p-1}/p]] \psi W(m_R) = \psi W(m_R)[[\psi^{p-1}/p]].$$

Легко видеть, что лемма вытекает из полученных выше соотношения (15) и свойств а) и б).

3.3.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $T \in ([x_0]^{-p/(p-1)} \mathcal{G}_{p,1}^0)^h$ таково, что $T - \sigma_{\mathcal{G}} T = X$; тогда для любого $\tau \in \Gamma_K$ имеем:

а) $\tau T - T \equiv A \pmod{\mathcal{G}^*(m_R) + p^M \mathcal{G}^*(R_0)}$, где $A = {}^t(A_1, \dots, A_h) \in \mathbb{Z}_p^h$;

б) $(\alpha, \tau]_{\text{cris}} = A_1 o_M^1 + \dots + A_h o_M^h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $t = \tau T - T$, то

$$t \in [x_0]^{-p/(p-1)}(\mathcal{G}_{p,1}^0)^h \subset (\mathcal{G}^*(m_R) + \mathcal{G}^*(R_0))^h.$$

и согласно лемме 3.3.3 координаты вектора $t - \sigma_{\mathcal{G}} t = X - \tau X$ принадлежат

$$W(m_R)[[\psi^{p-1}/p]] + (p^M/\psi)W(m_R)[[\psi^{p-1}/p]] \subset \mathcal{G}^*(m_R) + p^M \mathcal{G}^*(R_0).$$

Пусть $X - \tau X = X_1 + p^M X_2$, где $X_1 \in \mathcal{G}^*(m_R)^h$ и $X_2 \in \mathcal{G}^*(R_0)^h$. Пусть $t_1 \in \mathcal{G}^*(m_R)^h$ таков, что $t_1 - \sigma_{\mathcal{G}} t_1 = X_1$ (см. п. 3.1.3, б)). Возьмем $t_2 \in W(R_0)^h$ такой, что $t_2 - \sigma_{\mathcal{G}} t_2 = X_2$ (см. п. 3.1.3, с)). Тогда

$$A = t - (t_1 + p^M t_2) \in (\mathcal{G}^*(m_R) + \mathcal{G}^*(R_0))_{\sigma_{\mathcal{G}} = \text{id}}^h = \mathbb{Z}_p^h.$$

Часть а) предложения доказана.

Пусть $\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = {}^{\mathcal{V}}T$; тогда (см. п. 3.3) $\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} \in A_{\text{cris}}^h$, $Y \in (\text{Fil}^1 A_{\text{cris}})^n$ и

$$\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathcal{E}^{-1} \begin{pmatrix} \phi_1(Y) \\ \phi_0(Z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно определению кристаллического символа существуют $a_1, \dots, a_h \in \mathbb{Z}_p$ и $b \in (A_{\text{cris}}^{\text{loc}})^h$ такие, что

$$\tau \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} + \sum_{1 \leq i \leq h} \begin{pmatrix} \langle o^i, \bar{l} \rangle \\ \langle o^i, \bar{m} \rangle \end{pmatrix} a_i + t^+ b.$$

В этих обозначениях $(\alpha, \tau]_{\text{cris}} = a_1 o_M^1 + \dots + a_h o_M^h$.

Если $a = {}^t(a_1, \dots, a_h) \in \mathbb{Z}_p^h$, то мы можем переписать это уравнение в следующем виде:

$$\tau \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} + {}^{\mathcal{V}}a + t^+ b.$$

Умножая обе части на матрицу ${}^t\psi^D$, получаем в обозначениях из доказательства приведенной выше леммы, что

$$p^M t^+ ((a_{ji}))_{1 \leq i, j \leq h} \tau T + t^+ (\tau T - T) = t^+ a + t^+ ({}^t\psi^D b).$$

Следовательно,

$$\tau T - T = a + {}^t\psi^D b + p^M c,$$

где $c \in ([x_0]^{-p/(p-1)}\mathcal{G}_{p,1}^0)^h \subset (\mathcal{G}^*(m_R) + \mathcal{G}^*(R_0))^h$. Теперь осталось заметить, что $b_1 = {}^t\psi^D b \in (A_{\text{cris}}^{\text{loc}})^h \subset \mathcal{G}^*(m_R)^h$. Следовательно, $a \equiv A \pmod{p^M \mathbb{Z}_p}$, что и требовалось доказать.

3.3.5. ЗАМЕЧАНИЕ. Предыдущее предложение сводит вычисление значения кристаллического символа $(\alpha, \tau]_{\text{cris}}$, где $\alpha \in m_{k, \tilde{t}}^n$, $\tau \in \Gamma_K$, к вычислению символа Витта, связанного с уравнением Витта–Артина–Шрейера

$$T - \sigma_{\mathcal{G}} T = X. \quad (16)$$

Ниже мы покажем, что уравнение (16) можно заменить на эквивалентное

$$\widehat{T}_{\tilde{t}} - \sigma_{\mathcal{G}} \widehat{T}_{\tilde{t}} = \widehat{X}_{\tilde{t}},$$

где $\widehat{X}_{\tilde{t}}$ является рядом Лорана от переменной $\tilde{t}$ с коэффициентами из кольца $W(k)$. В §4 это позволит нам выразить значение кристаллического символа в терминах явного закона взаимности для расширений Витта–Артина–Шрейера.

3.4. Матрица $\mathcal{V}_{\tilde{t}}$.

3.4.1. Напомним, K – конечное расширение поля K_0 в $\overline{K}$ такое, что

$$G_{\mathcal{A}}[M](m_C) = G_{\mathcal{A}}[M](m_K),$$

где m_K – максимальный идеал кольца нормирования O_K поля K .

В п. 2.5.1 был зафиксирован униформизирующий элемент $\pi \in K$ и выбран $t_0 \in m_R$ такой, что $t_0^{(0)} = \pi$. Если k – поле вычетов поля K , то $O_{k, \tilde{t}} = W(k)[[\tilde{t}]] \subset W(R)$, где $\tilde{t} = [t_0]$. Структурный морфизм $\gamma: W(R) \rightarrow O_C$ индуцирует эпиморфизм колец $\gamma: O_{k, \tilde{t}} \rightarrow O_K$. Если $m_{k, \tilde{t}} = \tilde{t}W(k)[[\tilde{t}]]$, то $\gamma(m_{k, \tilde{t}}) = m_K$. Очевидно, $\text{Ker } \gamma|_{O_{k, \tilde{t}}} = g(\tilde{t})O_{k, \tilde{t}}$ и $\text{Ker } \gamma|_{m_{k, \tilde{t}}} = g(\tilde{t})m_{k, \tilde{t}}$, где $g \in W(k)[X]$ – неприводимый многочлен такой, что $g(\pi) = 0$.

Обозначим через $O_{k, \tilde{t}}^{\text{DP}}$ p -адическое замыкание оболочки разделенных степеней $O_{k, \tilde{t}}$ по отношению к идеалу $(g(\tilde{t}))$. Очевидно, $O_{k, \tilde{t}}^{\text{DP}} \subset A_{\text{cris}}$ и может быть отождествлено с p -адическим замыканием $O_{k, \tilde{t}}[\{\tilde{t}^{en}/n! \mid n \geq 1\}]$, где e – абсолютный индекс ветвления поля K (используем то, что $g(\tilde{t}) = \tilde{t}^e + a_1\tilde{t}^{e-1} + \dots + a_e$, где $a_1, \dots, a_e \in pW(k)$, $v_p(a_e) = 1$, и имеется равенство идеалов $(g(\tilde{t}), p) = (\tilde{t}^e, p)$ кольца $O_{k, \tilde{t}}$).

3.4.2. Пусть $o^1 = (o_s^1)_{s \geq 0}, \dots, o^h = (o_s^h)_{s \geq 0} - \mathbb{Z}_p$ -базис в $T(G_{\mathcal{A}})$. Тогда набор $o_M^1, \dots, o_M^h$ дает $\mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z}$ -базис для $G_{\mathcal{A}}[M](m_K)$. Пусть $\bar{l}_{\mathcal{A}}$ – векторный степенной ряд логарифмов из п. 1.3. Для $1 \leq i \leq h$ фиксируем $\hat{o}_M^i \in m_{k, \tilde{t}}$ такие, что $\gamma(\hat{o}_M^i) = o_M^i$. Тогда

$$p^M \bar{l}_{\mathcal{A}}(\hat{o}_M^i) \in (\text{Fil}^1 O_{k, \tilde{t}}^{\text{DP}})^h.$$

Используем матрицу F'_u из п. 1.3 для введения

$$\overline{m}_{\mathcal{A}}(\hat{o}_M^i) = \sum_{u \geq 1} F'_u(\sigma^u/p) \bar{l}_{\mathcal{A}}(\hat{o}_M^i).$$

Тогда

$$p^M \overline{m}_{\mathcal{A}}(\hat{o}_M^i) \in (O_{k, \tilde{t}}^{\text{DP}})^{h-n}.$$

В действительности (ср. с п. 1.7.6)

$$\begin{aligned} p^M \bar{l}_{\mathcal{A}}(\hat{o}_M^i) &\in \left(m_{k, \tilde{t}}^1 + \frac{\tilde{t}^{ep}}{p} O_{k, \tilde{t}}[[\tilde{t}^{ep}/p]] \right)^n, \\ p^M \overline{m}_{\mathcal{A}}(\hat{o}_M^i) &\in \left(m_{k, \tilde{t}} + \frac{\tilde{t}^{ep}}{p} O_{k, \tilde{t}}[[\tilde{t}^{ep}/p]] \right)^{h-n}. \end{aligned}$$

Из п. 1.5 вытекает следующая лемма.

ЛЕММА. Для $1 \leq i \leq h$ имеем

$$\begin{aligned}\langle o^i, \bar{l} \rangle &\equiv p^M \bar{l}_{\mathcal{A}}(\delta_M^i) \pmod{p^M} \left(W^1(m_R) + \frac{\psi^{p-1}}{p} W(R) [[\psi^{p-1}/p]] \right), \\ \langle o^i, \bar{m} \rangle &\equiv p^M \bar{m}_{\mathcal{A}}(\delta_M^i) \pmod{p^M} \left(W(m_R) + \frac{\psi^{p-1}}{p} W(R) [[\psi^{p-1}/p]] \right).\end{aligned}$$

3.4.3. Рассмотрим матрицу порядка h

$$\mathcal{V}_{\bar{t}} = \begin{pmatrix} p^M \bar{l}_{\mathcal{A}}(\delta_M^1) & \dots & p^M \bar{l}_{\mathcal{A}}(\delta_M^h) \\ p^M \bar{m}_{\mathcal{A}}(\delta_M^1) & \dots & p^M \bar{m}_{\mathcal{A}}(\delta_M^h) \end{pmatrix}.$$

Эта матрица имеет коэффициенты в кольце $O_{k, \bar{t}}^{\text{DP}}$ (см. п. 3.4.2) и может быть рассмотрена как приближение матрицы $\mathcal{V}$ значений спаривания p -адических периодов из п. 1.8.3.

Лемма п. 3.4.2 дает сравнение

$${}^t\mathcal{V}^D \circ \mathcal{V}_{\bar{t}} \equiv t^+ E_h \pmod{p^M} \left(W^1(m_R) + \frac{\psi^{p-1}}{p} W(R) [[\psi^{p-1}/p]] \right).$$

Следовательно, мы можем записать

$${}^t\mathcal{V}^D \circ \mathcal{V}_{\bar{t}} = t^+(E_h - p^M \Delta),$$

где Δ – некоторая матрица порядка h с коэффициентами из

$$\frac{1}{\psi} W^1(m_R) + \frac{\psi^{p-2}}{p} W(R) [[\psi^{p-1}/p]].$$

3.4.4. Пусть t – образующий элемент идеала $W^1(R)$ из п. 1.7.2.

ЛЕММА. $W(R)$ -модуль

$$\mathcal{R} = \frac{pt}{\psi} W(R) [[pt/\psi]] + \psi^{p-2} W(R) [[\psi^{p-1}/p]]$$

является $W(R)$ -подалгеброй в $\mathcal{G}_{(p-1)+, 1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как топологический $W(R)$ -модуль $\mathcal{R}$ порожден элементами $(pt/\psi)^{m+1}$, где $m \geq 0$, и $\psi^{p-2}(\psi^{p-1}/p)^l$, где $l \geq 0$. Достаточно проверить, что для любых $m, l \geq 0$ выполнено

$$\left(\frac{pt}{\psi} \right)^{m+1} \psi^{p-2} \left(\frac{\psi^{p-1}}{p} \right)^l = p^{m+1-l} t^{m+1} \psi^{p-2+(p-1)l-(m+1)} \in \mathcal{R},$$

т.е. произведение любых двух образующих лежит в $\mathcal{R}$.

Если $m+1-l = s > 0$, то это произведение представимо в виде

$$\left(\frac{pt}{\psi} \right)^s t^l \psi^{(p-2)(l+1)}.$$

Если $m+1-l = -s \leq 0$, то это произведение может быть записано как

$$\psi^{p-2} \left(\frac{\psi^{p-1}}{p} \right)^s t^{m+1} \psi^{(p-2)(m+1)}.$$

В обоих случаях, очевидно, мы получили элемент из $\mathcal{R}$. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. В обозначениях п. 3.4.3 имеем

$$(E_h - p^M \Delta)^{-1} = E_h + p^M \Delta_1,$$

где Δ_1 – матрица порядка h с коэффициентами из

$$\frac{1}{p} \mathcal{R} = \frac{t}{\psi} W(R) [[pt/\psi]] + \frac{\psi^{p-2}}{p} W(R) [[\psi^{p-1}/p]].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что матрица

$$\Delta_1 = \sum_{s \geq 0} p^{Ms} \Delta^{s+1} = \frac{1}{p} \sum_{s \geq 0} p^{s(M-1)} (p\Delta)^{s+1}$$

имеет коэффициенты в $(1/p)\mathcal{R}$, так как коэффициенты матрицы $p\Delta$ лежат (см. п. 3.4.3) в $(pt/\psi)W(m_R) + \psi^{p-2}W(R) [[\psi^{p-1}/p]] \subset \mathcal{R}$ и $\mathcal{R}$ является кольцом.

СЛЕДСТВИЕ. Матрица $\mathcal{V}_{\bar{t}}$ обратима в поле частных $\text{Frac } O_{k,t}^{\text{DP}} \subset \mathcal{G}_{(p-1)^+, p-1}$.

3.4.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Имеет место следующее сравнение:

$$\mathcal{V}_{\bar{t}}^{-1} \equiv \mathcal{V}^{-1} \pmod{p^M \left(\frac{1}{p\psi} \mathcal{R} \right)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\mathcal{V}_{\bar{t}}^{-1} = (E_h + p^M \Delta_1) \frac{1}{t^+} t \mathcal{V}^D = \mathcal{V}^{-1} + p^M \Delta_1 \left(\frac{1}{t^+} t \mathcal{V}^D \right).$$

Коэффициенты матрицы $(1/t^+) t \mathcal{V}^D$ лежат в

$$\frac{1}{\psi} W(R) [[\psi^{p-1}/p]] = \frac{1}{\psi} W(R) + \frac{\psi^{p-2}}{p} W(R) [[\psi^{p-1}/p]].$$

С помощью предложения п. 3.4.4 доказательство сводится к проверке того, что

$$\left(\frac{t}{\psi} W(R) [[pt/\psi]] \right) \left(\frac{\psi^{p-2}}{p} W(R) [[\psi^{p-1}/p]] \right) \subset \frac{1}{p\psi} \mathcal{R}.$$

Для $m, l \geq 0$ рассмотрим произведение соответствующих образующих

$$\frac{t}{\psi} \left(\frac{pt}{\psi} \right)^m \frac{\psi^{p-2}}{p} \left(\frac{\psi^{p-1}}{p} \right)^l = p^{m-l-1} t^{1+m} \psi^{p-3+(p-1)l-m}.$$

Если $m - l - 1 = s \geq 0$, то это выражение можно представить в виде

$$\frac{t}{\psi} \left(\frac{pt}{\psi} \right)^s t^{l+1} \psi^{p-3+(p-2)l} \in \frac{t}{\psi} W(R) [[pt/\psi]].$$

Если же $m - l - 1 = -s \leq -1$, то $s + m = l + 1$, и оно представимо как

$$\frac{\psi^{p-3}}{p} \left(\frac{\psi^{p-1}}{p} \right)^{s-1} t^{1+m} \psi^{(p-2)m} \in \frac{\psi^{p-3}}{p} W(R) [[\psi^{p-1}/p]].$$

Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ. Коэффициенты матрицы $\mathcal{V}_{\tilde{t}}^{-1}$ лежат в

$$\frac{1}{\psi} W(R) [[\psi^{p-1}/p]] + p^M \left(\frac{1}{p\psi} \mathcal{R} \right).$$

3.5. Алгебра $\mathcal{L}_{k,\tilde{t}}$. В $W(R_0)$ -модуле $\mathcal{G}$ любое выражение вида $\sum_{s \in \mathbb{Z}} w_s p^s$, где $w_s \in W(R_0)$ и $w_s \xrightarrow{s \rightarrow -\infty} 0$ в v_R -адической топологии, имеет смысл, т.е. дает некоторый элемент из $\mathcal{G}$.

Пусть

$$\mathcal{G}_{k,\tilde{t}} = \left\{ \sum_{s \in \mathbb{Z}, u \geq u_s} [\alpha_{s,u}] \tilde{t}^u p^s \mid u_s \xrightarrow{s \rightarrow -\infty} +\infty, \text{ все } \alpha_{s,u} \in k \right\} \subset \mathcal{G}.$$

Тогда $O_{k,\tilde{t}} \subset \mathcal{G}_{k,\tilde{t}}$ и $\mathcal{G}_{k,\tilde{t}}$ является замкнутым $O_{k,\tilde{t}}$ -подмодулем в $\mathcal{G}$.

Легко проверить, что $O_{k,\tilde{t}}^{\text{DP}} \subset \mathcal{G}_{k,\tilde{t}} \cap \mathcal{G}_{(p-1)^+,0}^0$ и любой ненулевой элемент из $O_{k,\tilde{t}}^{\text{DP}}$ является обратимым в $\mathcal{G}_{k,\tilde{t}} \cap \mathcal{G}_{(p-1)^+,p-1}$.

Пусть $\mathcal{L}_{k,\tilde{t}} = \mathcal{G}_{k,\tilde{t}} \cap \mathcal{G}_{(p-1)^+,p-1}$. Легко проверить, что $\mathcal{L}_{k,\tilde{t}}$ является $W_{\mathbb{Q}_p}(k)$ -алгеброй, каждый элемент которой может быть однозначно записан в виде $\sum_{u \in \mathbb{Z}} w_u \tilde{t}^u$, где все $w_u \in W_{\mathbb{Q}_p}(k)$, и она совпадает с обозначенной тем же символом $W_{\mathbb{Q}_p}(k)$ -алгеброй из введения.

3.6. Главные части элементов матрицы $\mathcal{V}_{\tilde{t}}^{-1}$. Рассмотрим матрицу $\mathcal{V}_{\tilde{t}}^{-1}$ из п. 3.4. Очевидно, все элементы $\mathcal{V}_{\tilde{t}}^{-1}$ лежат в $\mathcal{L}_{k,\tilde{t}}$. Таким образом, они являются рядами Лорана от переменной $\tilde{t}$ с коэффициентами из $W_{\mathbb{Q}_p}(k)$, т.е. могут быть записаны как $\sum_{u \in \mathbb{Z}} w_u \tilde{t}^u$, где все $w_u \in W_{\mathbb{Q}_p}(k)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\mathcal{V}_{\tilde{t}}^{-1} = ((v_{ij}))_{1 \leq i,j \leq h}$ и $v_{ij} = \sum_{u \in \mathbb{Z}} w_{u,ij} \tilde{t}^u$, где все $w_{u,ij} \in W_{\mathbb{Q}_p}(k)$. Если $u < 0$, то $w_{u,ij} \in W(k)$ (т.е. все коэффициенты матрицы $\mathcal{V}_{\tilde{t}}^{-1}$ имеют p -целые главные части).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию п. 3.4.5 для любых $1 \leq i, j \leq h$ мы имеем

$$v_{ij} \in \mathcal{G}_{k,\tilde{t}} \cap \left(\frac{1}{\psi} W(R) [[\psi^{p-1}/p]] + p^M \left(\frac{1}{p\psi} \mathcal{R} \right) \right).$$

По лемме п. 3.1.2

$$\frac{1}{\psi} W(R) [[\psi^{p-1}/p]] \subset [x_0]^{-p/(p-1)} \mathcal{G}_{p,1}^0.$$

3.6.1. ЛЕММА. Имеет место включение

$$\frac{1}{p\psi} \mathcal{R} \subset [x_0]^{-2p/(p-1)} \mathcal{G}_{p,1}^0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$t \in [x_0]W(R) + pW(R) \subset [x_0]\mathcal{G}_{p,1}^0$$

и $\psi^{-1} \in [x_0]^{-p/(p-1)}\mathcal{G}_{p,1}^0$ (см. п. 3.1.2). Следовательно,

$$pt/\psi \in p[x_0]^{-1/(p-1)}\mathcal{G}_{p,1}^0 \subset \mathcal{G}_{p,1}^0$$

(так как $p[x_0]^{-1/(p-1)} \in \mathcal{G}_{p,1}^0$) и

$$(t/\psi^2)W(R)[[pt/\psi]] \subset [x_0]^{-2p/(p-1)}\mathcal{G}_{p,1}^0.$$

Как было показано ранее (см. п. 3.1.2), $W(R)[[\psi^{p-1}/p]] \subset \mathcal{G}_{p,1}^0$. Далее, $\psi^{p-3} \in [x_0]^{p(p-3)/(p-1)}\mathcal{G}_{p,1}^0$, так как $\psi \in [x_0]^{p/(p-1)}\mathcal{G}_{p,1}^0$. Следовательно,

$$\frac{\psi^{p-3}}{p}W(R)[[\psi^{p-1}/p]] \subset \frac{1}{p}[x_0]^{p-\frac{2p}{p-1}}\mathcal{G}_{p,1}^0 \subset [x_0]^{-2p/(p-1)}\mathcal{G}_{p,1}^0,$$

потому что $[x_0]^p/p \in \mathcal{G}_{p,1}^0$. Таким образом,

$$\frac{1}{p\psi}\mathcal{R} = \frac{t}{\psi^2}W(R)[[pt/\psi]] + \frac{\psi^{p-3}}{p}W(R)[[\psi^{p-1}/p]] \subset [x_0]^{-2p/(p-1)}\mathcal{G}_{p,1}^0.$$

Лемма доказана.

Так как

$$[x_0]^{-p/(p-1)}\mathcal{G}_{p,1}^0 + p^M[x_0]^{-2p/(p-1)}\mathcal{G}_{p,1}^0 \subset [x_0]^{-p}\mathcal{G}_{p,p-1}^0,$$

наше предложение вытекает из следующей леммы.

3.6.2. ЛЕММА. *Любой ряд Лорана из $[x_0]^{-p}\mathcal{G}_{p,p-1}^0 \cap \mathcal{G}_{k,\tilde{t}}$ имеет p -целую главную часть.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $v \in [x_0]^{-p}\mathcal{G}_{p,p-1}^0 \cap \mathcal{G}_{k,\tilde{t}}$, то

$$v = \sum_{\substack{s \leq -1 \\ u \geq -ep(s+1)}} p^s[\alpha_{s,u}]\tilde{t}^u + \sum_{\substack{s \geq 0 \\ u \geq -e(p+s(p-1))}} p^s[\alpha_{s,u}]\tilde{t}^u,$$

где все $\alpha_{s,u} \in k$ и e – абсолютный индекс ветвления поля K . Пусть $\alpha_{s_0,u_0} \neq 0$ для некоторого $s_0 \leq -1$. Тогда $u_0 \geq -ep(s_0+1) \geq 0$. Лемма доказана.

3.7. Пусть $X_{\tilde{t}} = \mathcal{V}_{\tilde{t}}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{u \in \mathbb{Z}} w_u \tilde{t}^u \in \mathcal{L}_{k,\tilde{t}}$, где все $w_u \in W_{\mathbb{Q}_p}(k)^h$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. а) $X_{\tilde{t}} \equiv X \pmod{p^M(1/p\psi)\mathcal{R}W(m_R)}$.

б) Если $u \leq 0$, то $w_u \in W(k)^h$, т.е. “неположительная” часть $\hat{X}_{\tilde{t}} = \sum_{u \leq 0} w_u \tilde{t}^u$ векторного ряда Лорана $X_{\tilde{t}}$ имеет p -целые коэффициенты.

в) Если $\mathcal{V}_{\tilde{t}}^{(-1)}$ – матрица главных частей элементов матрицы $\mathcal{V}_{\tilde{t}}^{-1}$, то “неположительная” часть вектора $\mathcal{V}_{\tilde{t}}^{(-1)} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ равна $\hat{X}_{\tilde{t}}$.

д) $\psi \hat{X}_{\tilde{t}} \in W(m_R) + p^M W(R_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) $\alpha \in m_{k,\bar{t}}^n \subset W(m_R)^n$ и, следовательно, согласно предложению 3.4.5

$$X_{\bar{t}} = \mathcal{V}_{\bar{t}}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \mathcal{V}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = X \pmod{p^M \left(\frac{1}{p\psi} \mathcal{R} \right) W(m_R)}.$$

б) и с) следуют из предложения п. 3.6.

д) С помощью следствия п. 3.4.5 получаем, что координаты вектор-столбца $X_{\bar{t}}$ лежат в

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\psi} W(m_R) [[\psi^{p-1}/p]] + p^M \left(\frac{1}{p\psi} \mathcal{R} W(m_R) \right) \\ &= \frac{1}{\psi} W(m_R) + (\psi^{p-2}/p) W(m_R) [[\psi^{p-1}/p]] \\ &+ p^M \left(\frac{t}{\psi^2} W(m_R) [[pt/\psi]] + (\psi^{p-3}/p) W(m_R) [[\psi^{p-1}/p]] \right). \end{aligned}$$

Так как

$$(1/\psi) W(m_R), (t/\psi^2) W(m_R) [[pt/\psi]] \subset \mathcal{G}^*(R_0)$$

и

$$(\psi^{p-3}/p) W(m_R) [[\psi^{p-1}/p]] \subset \mathcal{G}^*(m_R),$$

мы имеем разложение

$$X_{\bar{t}} = Y_1 + Y_2 + p^M Y_3 + p^M Y_4,$$

где $Y_1, Y_3 \in \mathcal{G}^*(R_0)^h$, $Y_2, Y_4 \in \mathcal{G}^*(m_R)^h$, $\psi Y_1 \in \mathcal{G}^*(m_R)^h$.

Следовательно, $\psi X_{\bar{t}} = Y' + p^M Y''$, где $Y' \in \mathcal{G}^*(m_R)^h$, $Y'' \in \mathcal{G}^*(R_0)^h$.

С другой стороны, пусть $X_{\bar{t}} = \hat{X}_{\bar{t}} + X_1$. Тогда из б) вытекает, что $\hat{X}_{\bar{t}} \in \mathcal{G}^*(R_0)^h$, $X_1 \in \mathcal{G}^*(m_R)^h$. Теперь

$$Z = Y' - \psi X_1 = \psi \hat{X}_{\bar{t}} - p^M Y''$$

имеет координаты в $\mathcal{G}^*(m_R) \cap \mathcal{G}^*(R_0) = W(m_R)$ (см. 3.1.3, е)). Таким образом,

$$\psi \hat{X}_{\bar{t}} = Z + p^M Y'',$$

где $Z \in W(m_R)^h$, $Y'' \in \mathcal{G}^*(R_0)^h \subset W(R_0)^h$. Предложение полностью доказано.

3.8. Теперь мы можем установить основной результат этого параграфа.

Пусть $\alpha \in m_{k,\bar{t}}^n$, $X_{\bar{t}} = \mathcal{V}_{\bar{t}}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, $\hat{X}_{\bar{t}} \in W(R_0)^h$ – “неположительная” часть вектор-столбца $X_{\bar{t}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\hat{T}_{\bar{t}} \in W(R_0)^h$ таково, что $\hat{T}_{\bar{t}} - \sigma \hat{T}_{\bar{t}} = \hat{X}_{\bar{t}}$. Если $\tau \in \Gamma_K$, то

$$\tau \hat{T}_{\bar{t}} - \hat{T}_{\bar{t}} \equiv a \pmod{W(m_R) + p^M W(R_0)},$$

где $a = {}^t(a_1, \dots, a_h) \in \mathbb{Z}_p^h$ и $(\alpha, \tau]_{\text{cris}} = a_1 o_M^1 + \dots + a_h o_M^h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X_{\tilde{t}} = X + p^M w$. Согласно пп. 3.7, а) и 3.6.1 X имеет координаты в $[x_0]^{-p/(p-1)}\mathcal{G}_{p,1}^0$, а w имеет координаты в $[x_0]^{-2p/(p-1)}\mathcal{G}_{p,1}^0 W(m_R)$.

Согласно предложению п. 3.3.4 если $T \in [x_0]^{-p/(p-1)}(\mathcal{G}_{p,1}^0)^h$ таково, что

$$T - \sigma_{\mathcal{G}} T = X,$$

то

$$\tau T - T \equiv A \pmod{\mathcal{G}^*(m_R) + p^M \mathcal{G}^*(R_0)},$$

где $A = {}^t(A_1, \dots, A_h) \in \mathbb{Z}_p^h$ и $(\alpha, \tau]_{\text{cris}} = A_1 o_M^1 + \dots + A_h o_M^h$.

Легко видеть, что $[x_0]^{-2p/(p-1)}\mathcal{G}_{p,1}^0 W(m_R) \subset \mathcal{G}^*(m_R) + \mathcal{G}^*(R_0)$. Следовательно, существует $w_1 \in \mathcal{G}^*(m_R) + \mathcal{G}^*(R_0)$ такой, что $w_1 - \sigma_{\mathcal{G}} w_1 = w$.

Тогда для $T_{\tilde{t}} = T + p^M w_1$ имеем $T_{\tilde{t}} \in (\mathcal{G}^*(m_R) + \mathcal{G}^*(R_0))^h$, $T_{\tilde{t}} - \sigma_{\mathcal{G}} T_{\tilde{t}} = X_{\tilde{t}}$ и $\tau T_{\tilde{t}} - T_{\tilde{t}} \equiv A \pmod{\mathcal{G}^*(m_R) + p^M \mathcal{G}^*(R_0)}$.

Пусть $X_{\tilde{t}} = \hat{X}_{\tilde{t}} + X_1$, где $\hat{X}_{\tilde{t}} = \sum_{u \leq 0} w_u \tilde{t}^u$ — “неположительная” часть ряда $X_{\tilde{t}}$. Тогда $X_1 \in \mathcal{G}^*(m_R)$ и для $T'_{\tilde{t}} = T_{\tilde{t}} - \sum_{s \geq 0} \sigma^s X_1$ имеем $T'_{\tilde{t}} \in (\mathcal{G}^*(m_R) + \mathcal{G}^*(R_0))^h$, $T'_{\tilde{t}} - \sigma_{\mathcal{G}} T'_{\tilde{t}} = \hat{X}_{\tilde{t}}$ и $\tau T'_{\tilde{t}} - T'_{\tilde{t}} \equiv A \pmod{(\mathcal{G}^*(m_R) + p^M \mathcal{G}^*(R_0))}$.

Следовательно, $\hat{T}_{\tilde{t}} - T'_{\tilde{t}}$ имеет координаты в $(\mathcal{G}^*(m_R) + \mathcal{G}^*(R_0))_{\sigma_{\mathcal{G}} = \text{id}} = \mathbb{Z}_p$, $\tau \hat{T}_{\tilde{t}} - \hat{T}_{\tilde{t}} = \tau T'_{\tilde{t}} - T'_{\tilde{t}}$ имеет координаты в

$$(\mathbb{Z}_p + \mathcal{G}^*(m_R) + p^M \mathcal{G}^*(R_0)) \cap \mathcal{G}^*(R_0) \subset \mathbb{Z}_p + W(m_R) + p^M W(R_0)$$

и $a \equiv A \pmod{p^M}$. Предложение доказано.

§4. Явные формулы для символа формальной группы

Мы используем предыдущие обозначения. При вовлечении в рассмотрение отображения взаимности теории полей классов $\psi_K: K^* \rightarrow \Gamma^{\text{ab}}$ мы предполагаем, что поле вычетов k поля K является конечным.

4.1. Вспомогательные сведения.

4.1.1. **Функтор поле норм** [23]. Пусть $\{\pi_s\}_{s \geq 0}$ — последовательность элементов поля $\bar{K}$, выбранная в п. 2.5.1. Это означает, что $\pi_0 = \pi$ — фиксированный униформизирующий элемент поля K и $\pi_{s+1}^p = \pi_s$ для всех $s \in \mathbb{Z}$, $s \geq 0$. Пусть $\tilde{K} = \bigcup_{s \geq 0} K(s)$, где $K(0) = K$ и $K(s) = K(\pi_s)$. Поле $\tilde{K}$ является бесконечным APF-расширением, и функтор поле норм $\mathcal{X}$ дает эквивалентность категории алгебраических расширений поля $\tilde{K}$ и категории сепарабельных расширений дискретно нормированного поля $\mathcal{K} = \mathcal{X}(\tilde{K})$ характеристики p . Поле вычетов поля $\mathcal{K}$ может быть канонически отождествлено с полем вычетов k поля K . По определению $\mathcal{K}^* = \varprojlim_s K(s)^*$ относительно норменных отображений. Итак, мы имеем фиксированный униформизирующий элемент $t_0 = \varprojlim \pi_s$ в $\mathcal{K}$, и, следовательно, $\mathcal{K} = \text{Frac } k[[t_0]] = k((t_0))$. Фиксируем сепарабельное замыкание $\mathcal{K}_{\text{sep}}$ поля $\mathcal{K}$ с помощью равенства $\mathcal{K}_{\text{sep}} = \mathcal{X}(\bar{K})$. Тогда функтор $\mathcal{X}$ дает отождествление

$$\iota: \Gamma_{\mathcal{K}} = \text{Gal}(\mathcal{K}_{\text{sep}}/\mathcal{K}) = \text{Gal}(\bar{K}/\tilde{K}) \subset \Gamma_K = \text{Gal}(\bar{K}/K).$$

4.1.2. Гомоморфизм $\mathcal{N}: \mathcal{K}^* \rightarrow K^*$. Пусть $\mathcal{N}$ – проекция $\mathcal{K}^* = \varprojlim K(s)^* \rightarrow K(0)^* = K^*$. Очевидно, $\mathcal{N}(t_0) = \pi$. Если $\alpha \in k \subset \mathcal{K}$, то $\mathcal{N}(\alpha) = [\alpha] \in K^*$, где $[\alpha]$ – представитель Тейхмюллера для α , рассмотренного как элемент поля вычетов поля K .

Пусть $U_{\mathcal{K}}$ и U_K – $\mathbb{Z}_p$ -модули главных единиц в полях $\mathcal{K}$ и K соответственно. Тогда $\mathcal{N}(U_{\mathcal{K}}) \subset U_K$ и морфизм $\mathcal{N}|_{U_{\mathcal{K}}}$ может быть явно описан следующим образом.

Пусть $\alpha \in W(k)$ и

$$E(\alpha, X) = \exp(\alpha X + \dots + (\sigma^s \alpha) X^{p^s} / p^s + \dots) \in W(k)[[X]]$$

– степенной ряд из работы [20]. Любой элемент $u \in U_{\mathcal{K}}$ однозначно представим в виде

$$u = \prod_{(a,p)=1} E(\alpha_a, t_0^a),$$

где все $\alpha_a \in W(k)$. По отношению к этому разложению гомоморфизм $\mathcal{N}$ однозначно определен следующим свойством (см. [3]):

$$\mathcal{N}(E(\alpha, t_0^a)) = E(\alpha, \pi^a),$$

где $a \in \mathbb{N}$, $(a, p) = 1$, $\alpha \in W(k)$.

Легко показать, что $K^* / \mathcal{N}(\mathcal{K}^*)$ – циклическая группа порядка p^{l_0} , где l_0 – наибольшее целое число такое, что K содержит примитивный корень из 1 степени p^{l_0} (этот факт хорошо известен по модулю $K^* p^{l_0}$ (см. [20]), затем можно использовать, что p -пополнение группы $K^* p^{l_0}$ порождено πp^{l_0} и всеми $E(p^{l_0} \alpha, \pi^a)$, где $\alpha \in W(k)$, $a \in \mathbb{N}$, $(a, p) = 1$).

Группа $K^* / \mathcal{N}(\mathcal{K}^*)$ порождена образом любого p^{l_0} -примарного элемента. По определению p^{l_0} -примарный элемент является главной единицей $E_{l_0} \in U_K$ такой, что $K(E_{l_0}^{p^{-l_0}})$ – неразветвленное расширение поля K степени p^{l_0} . Эквивалентно, если $\psi_K: K^* \rightarrow \Gamma_K^{\text{ab}}$ – отображение взаимности теории полей классов, то $\psi_K(E_{l_0})(\pi p^{-l_0}) = \zeta \pi p^{-l_0}$ для некоторого примитивного корня ζ из 1 степени p^{l_0} и $\psi_K(E_{l_0})(u p^{-l_0}) = u p^{-l_0}$ для всех $u \in U_K$. Явные конструкции примарных элементов были рассмотрены в работах [4], [20], [21]. В п. 4.3 мы приведем конструкцию этих элементов, принадлежащую С. В. Востокову.

4.1.3. *Согласование теорий полей классов* [19]. Гомоморфизм $\mathcal{N}$ согласован с теориями полей классов для полей $\mathcal{K}$ и K . Более точно, пусть $\psi_{\mathcal{K}}: \mathcal{K}^* \rightarrow \Gamma_{\mathcal{K}}^{\text{ab}}$ и $\psi_K: K^* \rightarrow \Gamma_K^{\text{ab}}$ – соответствующие отображения взаимности. Тогда для любого $\alpha \in \mathcal{K}^*$ имеем

$$\iota^{\text{ab}}(\psi_{\mathcal{K}}(\alpha)) = \psi_K(\mathcal{N}(\alpha)),$$

где гомоморфизм $\iota^{\text{ab}}: \Gamma_{\mathcal{K}}^{\text{ab}} \rightarrow \Gamma_K^{\text{ab}}$ индуцирован вложением $\iota: \Gamma_{\mathcal{K}} \rightarrow \Gamma_K$ из п. 4.1.

4.1.4. *Явный закон взаимности Витта* [14]. Униформизирующий элемент t_0 поля $\mathcal{K}$ дает p -базис для произвольного сепарабельного расширения $\mathcal{E}$ поля $\mathcal{K}$. С помощью этого p -базиса определяется система подъёмов $O_M(\mathcal{E})$ полей $\mathcal{E}$ по модулю p^M , которая функториальна по всем $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}_{\text{sep}}$ и $M \in \mathbb{N}$. По определению

$O_M(\mathcal{E})$ является плоской $\mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z}$ -алгеброй такой, что $O_M(\mathcal{E})/pO_M(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$. Эти подъемы задаются явно соотношением

$$O_M(\mathcal{E}) = W_M(\sigma^M \mathcal{E})[\tilde{t}] \subset W_M(\mathcal{E}),$$

где $\tilde{t} = [t_0]$ – представитель Тейхмюллера для t_0 в $W_M(\mathcal{E})$ (этот вариант общей конструкции из работы [7] был использован также в работе [2]).

Для любого $M \in \mathbb{N}$ отображение редукции по модулю p^M индуцирует эпиморфизм $W(k)$ -алгебр $O_{M+1}(\mathcal{E}) \rightarrow O_M(\mathcal{E})$. Если $O(\mathcal{E}) = \varprojlim_M O_M(\mathcal{E})$ по отношению к этим эпиморфизмам, то $O(\mathcal{E})$ – кольцо нормирования абсолютно неразветвленного поля характеристики 0 с полем вычетов $\mathcal{E}$. Очевидно, $O_M(\mathcal{K})$ является $W_M(k)$ -алгеброй рядов Лорана $W_M(k)((\tilde{t})) = W_M(k)[[\tilde{t}]][\tilde{t}^{-1}]$ от переменной $\tilde{t}$ с коэффициентами в $W_M(k)$, и $O(\mathcal{K})$ отождествляется с p -адическим пополнением $W(k)((\tilde{t}))$ кольца $W(k)[[\tilde{t}]][\tilde{t}^{-1}]$.

Абсолютный морфизм Фробениуса векторов Витта индуцирует согласованную систему морфизмов Фробениуса $\sigma = \sigma_{\mathcal{E}}: O(\mathcal{E}) \rightarrow O(\mathcal{E})$. Мы имеем $O(\mathcal{K}_{\text{sep}})_{\sigma=\text{id}} = W(\mathbb{F}_p)$. Действие группы $\Gamma_{\mathcal{K}}$ на $\mathcal{K}_{\text{sep}}$ индуцирует действие $\Gamma_{\mathcal{K}}$ на $O(\mathcal{K}_{\text{sep}})$. Если $\mathcal{H} \subset \Gamma_{\mathcal{K}}$ – открытая подгруппа и $\mathcal{K}_{\text{sep}}^{\mathcal{H}} = \mathcal{E}$, то $O(\mathcal{K}_{\text{sep}})^{\mathcal{H}} = O(\mathcal{E})$.

Пусть $\text{Col}: \mathcal{K}^* \rightarrow O(\mathcal{K})^*$ – мультипликативное сечение Колемана проекции $\text{pr}: O(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{K}$ (см. [14]). В нашей ситуации гомоморфизм Col может быть описан явно в терминах образующих группы $\mathcal{K}^*$ из п. 4.1.2. Именно, $\text{Col}(t_0) = \tilde{t}$ и $\text{Col}(E(\alpha, t_0^a)) = E(\alpha, \tilde{t}^a)$, где $\alpha \in W(k)$, $a \in \mathbb{N}$, $(a, p) = 1$. Отсюда получается следующее описание гомоморфизма $(\text{pr} \circ \mathcal{N})|_{\text{Col } \mathcal{K}^*}: \text{Col } \mathcal{K}^* \rightarrow K^*$:

если $g = g(\tilde{t}) \in \text{Col } \mathcal{K}^*$, то $\mathcal{N}(\text{pr}(g)) = g(\pi)$.

Легко проверяется следующая характеристика образа $\text{Col}(\mathcal{K}^*)$ в $O(\mathcal{K})^*$.

ЛЕММА. Пусть $g \in O(\mathcal{K})^*$. Тогда $g \in \text{Col}(\mathcal{K}^*)$ в том и только том случае, когда:

- a) $g \in W(k)[[\tilde{t}]][\tilde{t}^{-1}]$;
- b) $\sigma g / g^p \in 1 + p\tilde{t}W(k)[[\tilde{t}]]$;
- c) $(1/p) \log(\sigma g / g^p) = \sum_{(c,p)=1} \alpha_c \tilde{t}^c$, где все $\alpha_c \in W(k)$.

Пусть $f \in O(\mathcal{K})$, $g \in \mathcal{K}^*$, и пусть $(f, g)_W \in W(\mathbb{F}_p)$ – спаривание Витта, заданное соотношением

$$(f, g)_W = \tau T - T,$$

где $T \in O(\mathcal{K}_{\text{sep}})$ таково, что $\sigma T - T = f$ и $\tau = \psi_K(g) \in \Gamma_{\mathcal{K}}^{\text{ab}}$.

Тогда явный закон взаимности Витта может быть представлен формулой Фон-тена (см. [14])

$$(f, g)_W = (\text{Res}_{\tilde{t}=0} \circ \text{Tr}) \left(f \frac{d \text{Col } g}{\text{Col } g} \right),$$

где $\text{Tr}: W(k) \rightarrow W(\mathbb{F}_p)$ – отображение, индуцированное следом расширения $k/\mathbb{F}_p$, и $\text{Res}_{\tilde{t}=0}$ – вычет в $\tilde{t} = 0$.

Заметим, наконец, что эта конструкция может быть осуществлена в $W(R_0)$, где $R_0 = \text{Frac } R$. Имеется естественное отождествление поля $\mathcal{K}$ с некоторым подполем в R_0 , заданное соответствием $t_0 \mapsto (\pi_s)_{s \geq 0} \in R_0$ (см. п. 2.5.1), и если $\alpha \in k \subset \mathcal{K}$, то $\alpha \mapsto ([\alpha^{p^{-s}}])_{s \geq 0} \in R_0$, где $[]$ обозначает операцию взятия

представителя Тейхмюллера для элементов поля вычетов поля K . Это вложение $\mathcal{K} \subset R_0$ является частным случаем согласованной системы вложений $\mathcal{E} \subset R_0$, где $\mathcal{K} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{K}_{\text{sep}}$, построенных в работе [23]. Таким образом, имеется естественное вложение $\mathcal{K}_{\text{sep}} \subset R_0$, согласованное с действием группы Галуа (по отношению к вложению $\iota: \Gamma_{\mathcal{K}} \rightarrow \Gamma_K$ из п. 4.1). Теперь по универсальному свойству векторов Витта существует единственная система вложений $O(\mathcal{E}) \subset W(R_0)$, которая согласована с заданными выше морфизмами Фробениуса. Таким образом, значение символа Витта $(f, g]_W$ можно вычислять в кольце $W(R_0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. По отношению к определенному выше вложению

$$O_{\mathcal{K}} = W(k)((\tilde{t})) \subset W(R_0)$$

обозначения t_0 и $\tilde{t}$ из этого пункта согласуются с обозначениями t_0 и $\tilde{t}$ из п. 2.5.1.

4.2. Первая явная формула. Пусть $G = G_{\mathcal{A}}$ – формальная группа с векторным степенным рядом логарифмов $\bar{l}_{\mathcal{A}}(\bar{X})$ из §1. Если M – фиксированное натуральное число, выберем $\mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z}$ -базис $o_M^1, \dots, o_M^h$ в $G_{\mathcal{A}}[M](m_K) = G_{\mathcal{A}}[M](m_C)$, возьмем подьемы $\hat{o}_M^1, \dots, \hat{o}_M^h$ в $m_{k, \tilde{t}}^n = (\tilde{t}W(k)[[\tilde{t}]])^n \subset (O_{k, \tilde{t}})^n$ элементов этого базиса по отношению к эпиморфизму $\gamma: m_{k, \tilde{t}} \rightarrow m_K$, заданному соответствием $\tilde{t} \mapsto \pi$, и построим матрицу, являющуюся приближением по модулю p^M матрицы спаривания p -адических периодов из п. 3.4:

$$\psi_{\tilde{t}} = \begin{pmatrix} p^M \bar{l}_{\mathcal{A}}(\hat{o}_M^1) & \dots & p^M \bar{l}_{\mathcal{A}}(\hat{o}_M^h) \\ p^M \bar{m}_{\mathcal{A}}(\hat{o}_M^1) & \dots & p^M \bar{m}_{\mathcal{A}}(\hat{o}_M^h) \end{pmatrix}.$$

Эта матрица обратима в $W_{\mathbb{Q}_p}(k)$ -алгебре $\mathcal{L}_{k, \tilde{t}}$. Обозначим через $\psi_{\tilde{t}}^{(-1)}$ матрицу, полученную из матрицы $\psi_{\tilde{t}}^{-1}$ взятием главных частей ее элементов.

Если $f \in G_{\mathcal{A}}(m_K)$, $g \in K^*$, то значение $(f, g]_{G_{\mathcal{A}}}$ символа формальной группы по модулю p^M может быть представлено в виде

$$(f, g]_{G_{\mathcal{A}}} = A_1(f, g)o_M^1 + \dots + A_h(f, g)o_M^h,$$

где $A(f, g) = {}^t(A_1(f, g), \dots, A_h(f, g)) \in (\mathbb{Z}/p^M\mathbb{Z})^h$.

Теперь предложения пп. 2.7, 3.8 и явный закон взаимности Витта из п. 4.1.4 дают следующую теорему.

ТЕОРЕМА А. Пусть $\beta(\tilde{t}) \in G_{\mathcal{A}}(m_{k, \tilde{t}}) = m_{k, \tilde{t}}^n$, $\Theta_{G_{\mathcal{A}}, 1}: m_{k, \tilde{t}}^n \rightarrow G_{\mathcal{A}}(m_{k, \tilde{t}})$ – изоморфизм из п. 2.5 и $\delta_1 \in \mathcal{K}^*$. Тогда

$$A(\beta(\pi), \mathcal{N}(\delta_1)) = (\text{Res}_{\tilde{t}=0} \circ \text{Tr}) \left\{ \psi_{\tilde{t}}^{(-1)} \left(\Theta_{G_{\mathcal{A}}, 1}^{-1}(\beta(\tilde{t})) \right) d_{\log} \text{Col } \delta_1 \right\} \mod p^M.$$

Используя описание морфизма $\Theta_{G_{\mathcal{A}}, 1}^{-1}$ из п. 2.5.2, получаем эквивалентную форму этой теоремы.

ТЕОРЕМА А1. Пусть $f \in G_{\mathcal{A}}(m_K) = m_K^n$, $g \in K^*$. Допустим, что $\beta(\tilde{t}) \in m_{k, \tilde{t}}^n$ таково, что $\beta(\pi) = f$, и существует $\delta = \delta(\tilde{t}) \in \text{Col } \mathcal{K}^* \subset O(\mathcal{K}) = W(k)((\tilde{t}))$ такое, что $\delta(\pi) = g$ (см. лемму из п. 4.1.4). Тогда

$$A(f, g) = (\text{Res}_{\tilde{t}=0} \circ \text{Tr}) \left\{ \psi_{\tilde{t}}^{(-1)} \left(\bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta(\tilde{t})) - \frac{\mathcal{A}^*}{p} \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta(\tilde{t})) \right) d_{\log} \delta \right\} \mod p^M.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. а) В сформулированных выше утверждениях можно заменить матрицу $\mathcal{V}_{\tilde{t}}^{(-1)}$ на $\mathcal{V}_{\tilde{t}}^{-1}$, потому что вычет может быть также вычислен в алгебре $\mathcal{L}_{k,\tilde{t}}$, а замена матриц не меняет его значения.

б) Теоремы А и А1 дают почти полную информацию о значениях символа формальной группы. Единственным ограничением является то, что второй аргумент может быть взят лишь из подгруппы $\mathcal{N}(\mathcal{K}^*) \subset K^*$. Если поле K не содержит корней степени p из 1, то $\mathcal{N}(\mathcal{K}^*) = K^*$, и наша формула дает полное описание символа. Если K содержит примитивный корень из 1 степени p^M , то для получения полной информации о значениях символа необходимо включить в рассмотрение p^M -примарные элементы группы K^* (см. п. 4.3).

в) Другим неудобством полученной выше формулы является специальный выбор степенных рядов $\text{Col } \delta_1 = \delta(\tilde{t})$, дающих элемент $g \in K^*$ в результате подстановки $\tilde{t} \mapsto \pi$. В случае $G = \widehat{\mathbb{G}}_m$ формула Брюкнера–Востокова свободна от этого ограничения. В п. 4.4 (см. ниже) мы получим аналогичную (и столь же общую) формулу для символа формальной группы.

4.3. p^M -примарные элементы. Предположим, что поле K содержит примитивный корень ζ из 1 степени p^M .

4.3.1. Пусть $\mathbb{G}_1$ – формальная группа из п. 1.7.1. Если $\widehat{\mathbb{G}}_m$ – формальная мультипликативная группа, то $\eta: X \mapsto E(1, X) = \exp(l_{\mathbb{G}_1}(X))$ дает изоморфизм формальных групп $\eta: \mathbb{G}_1 \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}_m$. В частности, $\mathbb{G}_1(m_K) \simeq \widehat{\mathbb{G}}_m(m_K) = U_K$ и $o_M = \eta^{-1}(\zeta)$ является образующим элементом в $\mathbb{G}_1[M](m_C) = \mathbb{G}_1[M](m_K)$.

В обозначениях п. 1.7.2 матрица значений спаривания p -адических периодов $\mathcal{V}_{\mathbb{G}_1}$ для формальной группы $\mathbb{G}_1$ равняется $((t^+))$, где $t^+ = l_{\mathbb{G}_1}(\psi)$. Если $\hat{o}_M \in m_{k,\tilde{t}}$ таково, что $\gamma(\hat{o}_M) = o_M$ (т.е. $\hat{o}_M \mapsto o_M$ при подстановке $\tilde{t} \mapsto \pi$), рассмотрим элемент $s_M(\tilde{t}) = (p^M \text{id}_{\mathbb{G}_1})(\hat{o}_M)$ группы $\mathbb{G}_1(m_{k,\tilde{t}})$. Тогда $\mathcal{V}_{\mathbb{G}_1,\tilde{t}} = ((l_{\mathbb{G}_1}(s_M(\tilde{t}))))$, и легко видеть, что $\mathcal{V}_{\mathbb{G}_1,\tilde{t}}^{(-1)} = ((s_M(\tilde{t})^{-1}))$.

Пусть $\delta_0 \in W(k)$ таково, что $\text{Tr } \delta_0 \in \mathbb{Z}_p^* \subset \mathbb{Z}_p$, где $\text{Tr}: W(k) \rightarrow \mathbb{Z}_p$ – морфизм следа. Возьмем $\widehat{T}_{\tilde{t}} \in W(\bar{k}) \subset W(R_0)$ такое, что

$$\widehat{T}_{\tilde{t}} - \sigma \widehat{T}_{\tilde{t}} = \delta_0.$$

Если $\tau \in \Gamma_K$, пусть $A_\tau = \tau \widehat{T}_{\tilde{t}} - \widehat{T}_{\tilde{t}} \in \mathbb{Z}_p \subset W(\bar{k})$. Очевидно, соответствие $\tau \mapsto A_\tau$ дает эпиморфизм $j: \Gamma_K \rightarrow \mathbb{Z}_p$, $\text{Ker } j$ содержит подгруппу инерции группы Γ_K и j индуцирует изоморфизм $\text{Gal}(K_{\text{ur}}^{(p)}/K) \simeq \mathbb{Z}_p$, где $K_{\text{ur}}^{(p)}$ – максимальное неразветвленное p -расширение поля K .

Если $\Theta = \Theta_{\mathbb{G}_1}$ (см. п. 2.5.2), то, применяя предложения шп. 2.7, 3.8 к формальной группе $\mathbb{G}_1$, получаем для любого $\tau \in \Gamma_K$ равенство

$$(\Theta(\delta_0 s_M(\tilde{t})), \tau]_{\mathbb{G}_1} = A_\tau o_M. \quad (17)$$

Если $f_1 \in \mathbb{G}_1(m_C)$ таков, что $(p^M \text{id}_{\mathbb{G}_1})(f_1) = \Theta_{\mathbb{G}_1}(\delta_0 s_M(\tilde{t}))$, то формула (17) дает $K(f_1) \subset K_{\text{ur}}^{(p)}$ и $[K(f_1) : K] = p^M$. Следовательно, применяя изоморфизм $\eta: \mathbb{G}_1 \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}_m$, мы получаем p^M -примарный элемент

$$E_M = \eta(\Theta_{\mathbb{G}_1}(\delta_0 s_M(\tilde{t}))) \in U_K.$$

4.3.2. Приведенные выше рассуждения дают следующую явную конструкцию p^M -примарных элементов из работы [21].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $s_M(\tilde{t}) = \sum_{u>0} w_u \tilde{t}^u$, где все $w_u \in W(k)$, u

$$E_M(\tilde{t}) = \prod_{u>0} E(\delta_0 w_u, \tilde{t}^u) \in 1 + m_{k,\tilde{t}},$$

то $\gamma(E_M(\tilde{t})) = E_M(\pi) = E_M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\delta_0 w_u = \sum_{s \geq 0} [\alpha_{s,u}] p^s$, где все $\alpha_{s,u} \in k$, то

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathbb{G}_1,1}(\delta_0 s_M(\tilde{t})) &= \sum_{\substack{(v \ \mathbb{G}_1) \\ s,u}} (p^s \text{id}_{\mathbb{G}_1})([\alpha_{s,u}] \tilde{t}^u), \\ E_M &= \eta(\Theta_{\mathbb{G}_1}(\delta_0 s_M(\tilde{t}))) = \gamma(\eta(\Theta_{\mathbb{G}_1,1}(\delta_0 s_M(\tilde{t})))) \\ &= \gamma\left(\prod_{s \geq 0, u > 0} E(p^s [\alpha_{s,u}], \tilde{t}^u)\right) = \gamma\left(\prod_{u > 0} E(\delta_0 w_u, \tilde{t}^u)\right) = \gamma(E_M(\tilde{t})). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Следующее следствие также хорошо известно.

СЛЕДСТВИЕ. Если $E_M \in K^*$ является p^M -примарным элементом, то существует степенной ряд $E_M(\tilde{t}) \in 1 + m_{k,\tilde{t}}$ такой, что $E_M(\pi) = E_M$ и

$$\text{d}_{\log} E_M(\tilde{t}) \in p^M \Omega_{O_{k,\tilde{t}}}^1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, возьмем ряд $E_M(\tilde{t})$ из предыдущего предложения. Тогда

$$\text{d}_{\log} E_M(\tilde{t}) = \text{d}\left(\sum_{s \geq 0, u > 0} \sigma^s(\delta_0 w_u) \frac{\tilde{t}^{up^s}}{p^s}\right) = \sum_{s \geq 0} \sigma^s(\tilde{t} s'_M(\tilde{t})) \frac{d\tilde{t}}{\tilde{t}}.$$

Но $s'_M(\tilde{t}) \in p^M O_{k,\tilde{t}}$, потому что $l_{\mathbb{G}_1}(s_M(\tilde{t})) = p^M l_{\mathbb{G}_1}(\hat{o}_M)$ и, следовательно,

$$(1 + s_M(\tilde{t})^{p-1} + \dots + s_M(\tilde{t})^{p^s-1} + \dots) ds_M(\tilde{t}) = p^M \text{d}l_{\mathbb{G}_1}(\hat{o}_M) \in p^M \Omega_{O_{k,\tilde{t}}}^1.$$

4.3.3. Пусть $E_M \in K^* - p^M$ -примарный элемент и $G_{\mathcal{A}}$ — формальная группа из §1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для любого $f \in G_{\mathcal{A}}(m_K)$ имеем

$$(f, E_M]_{G_{\mathcal{A}}} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем некоторый $\tau_M \in \Gamma_K$ такой, что $\psi_K(E_M)$ является образом τ_M в Γ_K^{ab} , где $\psi_K: K^* \rightarrow \Gamma_K^{\text{ab}}$ – отображение взаимности теории полей классов. Мы должны доказать, что $(f, \tau_M]_{G_{\mathcal{A}}} = 0$.

Утверждение нашего предложения выполнено для формальной группы $\widehat{\mathbb{G}}_m$ (см. п. 4.1.2) и, следовательно, оно выполнено для формальной группы $\mathbb{G}_1$.

Возьмем $s_M(\tilde{t}) \in m_{k,\tilde{t}}$ из п. 4.3.1. Если $\alpha_0 \in m_{k,\tilde{t}}$ и $T \in W(R_0)$ таково, что

$$T - \sigma T = \alpha_0 / s_M(\tilde{t}),$$

то согласно предложениям пп. 2.7 и 3.8, примененным к формальной группе $\mathbb{G}_1$, равенство $(\Theta_{\mathbb{G}_1}(\alpha_0), \tau_M]_{\mathbb{G}_1} = 0$ эквивалентно соотношению

$$\tau_M T - T \in W(m_R) + p^M W(R_0). \quad (18)$$

Пусть $\mathcal{V}_{\tilde{t}}$ – приближение матрицы значений спаривания p -адических периодов для формальной группы $G_{\mathcal{A}}$ из п. 3.4, и пусть $\widehat{X}_{\tilde{t}}$ – “неположительная” часть матрицы $\mathcal{V}_{\tilde{t}}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ (см. п. 3.7). Согласно п. d) предложения 3.7 вектор-столбец $\psi \widehat{X}_{\tilde{t}}$ имеет координаты в $W(m_R) + p^M W(R_0)$. Далее,

$$s_M(\tilde{t}) = \psi + w_1,$$

где $w_1 \in (p^M \text{id}_{\mathbb{G}_1})(W^1(m_R) + pW(m_R))$. Индукция по M дает

$$w_1 \in \sum_{0 \leq s \leq M} [x_0]^{p^s} p^{M-s} W(m_R) \subset p^M \mathcal{G}_{p,1}^0,$$

и, следовательно, $w_1 \widehat{X}_{\tilde{t}}$ имеет координаты в

$$p^M [x_0]^{-p/(p-1)} \mathcal{G}_{p,1}^0 \cap W(R_0) \subset W(m_R) + p^M W(R_0).$$

Таким образом,

$$\widehat{X}_{\tilde{t}} \in \frac{1}{s_M(\tilde{t})} m_{k,\tilde{t}}^n \pmod{p^M W(R_0)}.$$

Теперь соотношение (18) дает следующее свойство: если $\widehat{T}_{\tilde{t}} \in W(R_0)$ таково, что $\widehat{T}_{\tilde{t}} - \sigma \widehat{T}_{\tilde{t}} = \widehat{X}_{\tilde{t}}$, то $\tau_M \widehat{T}_{\tilde{t}} - \widehat{T}_{\tilde{t}}$ имеет координаты в $W(m_R) + p^M W(R_0)$.

Согласно предложениям из пп. 2.7 и 3.8 (примененным к формальной группе $G_{\mathcal{A}}$) этот факт эквивалентен утверждению нашего предложения.

4.4. Вторая явная формула.

4.4.1. *Соглашения.* Как и ранее, $G \simeq G_{\mathcal{A}}$ – формальная группа над $W(k_0)$ из § 1. В частности, используем описание структуры фильтрованного модуля $\mathcal{M}(G)$, заданной соотношениями

$$\begin{pmatrix} \phi_1(\bar{l}) \\ \phi_0(\bar{m}) \end{pmatrix} = \mathcal{E} \begin{pmatrix} \bar{l} \\ \bar{m} \end{pmatrix},$$

а также $\mathbb{Z}/p^M$ -базис $o_M^1, \dots, o_M^h$ для $G_{\mathcal{A}}[M](m_K)$ и матрицу $\mathcal{V}_{\tilde{t}}$ из п. 4.2. Все возникающие ряды Лорана $\sum_{u \in \mathbb{Z}} w_u \tilde{t}^u$, $w_u \in W_{\mathbb{Q}_p}(k)$, являются элементами

$W_{\mathbb{Q}_p}(k)$ -алгебры $\mathcal{L}_{k,\tilde{t}} = \mathcal{G}_{k,\tilde{t}} \cap \mathcal{G}_{(p-1)^+, p-1}$, σ обозначает абсолютный морфизм Фробениуса на $\mathcal{G}_{k,\tilde{t}}$, заданный ограничением $\sigma_{\mathcal{G}}$, т.е. $\sigma\tilde{t} = \tilde{t}^p$ и $\sigma|_{W(k)}$ – обычный морфизм Фробениуса кольца векторов Витта.

Если $\beta \in G_{\mathcal{A}}(m_{k,\tilde{t}})$ и $\bar{l}_{\mathcal{A}}(\bar{X})$ – векторный степенной ряд логарифмов формальной группы $G_{\mathcal{A}}$, то $\bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta)$ имеет координаты в $\mathcal{L}_{k,\tilde{t}} \cap \mathcal{G}_{p,0}$. Таким образом, для любого $u \in \mathbb{N}$ выражение $\sigma^u \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta)$ имеет смысл в $\mathcal{L}_{k,\tilde{t}}$. Используем матрицы F_u и F'_u из п. 1.3 для введения $\mathbb{Z}_p$ -линейного оператора $\mathcal{A}^* = \sum_{u \geq 1} F_u \sigma^u$, и для любого $\beta \in G_{\mathcal{A}}(m_{k,\tilde{t}})$ определим векторные ряды Лорана

$$\bar{m}_{\mathcal{A}}(\beta) = \frac{1}{p} \sum_{u \geq 1} F'_u \sigma^u (\bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta)) \in \mathcal{G}_{k,\tilde{t}} \cap \mathcal{G}_{p,0} \subset \mathcal{L}_{k,\tilde{t}}.$$

Из определения матриц F_u и F'_u легко вытекает следующее формальное тождество: для любого $\beta \in m_{k,\tilde{t}}$ имеем

$$\mathcal{E}^{-1} \begin{pmatrix} (\sigma/p) \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta) \\ \sigma \bar{m}_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathcal{A}^*/p) \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta) \\ \bar{m}_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\mathcal{H}_K$ мультипликативную подгруппу в $O_{k,\tilde{t}}[\tilde{t}^{-1}] \subset \mathcal{L}_{k,\tilde{t}}$, порожденную элементами $1 + m_{k,\tilde{t}}$, элементом $\tilde{t}$ и элементами вида $[\alpha]$, где $\alpha \in k^*$. Эта подгруппа характеризуется следующим условием:

$$\delta(\tilde{t}) \in \mathcal{H}_K \iff \frac{\sigma\delta(\tilde{t})}{\delta(\tilde{t})^p} \in 1 + pm_{k,\tilde{t}}.$$

Отметим, что $\text{Col}(\mathcal{H}^*) \subset \mathcal{H}_K$, и согласно лемме из п. 4.1.4 мы имеем следующую импликацию:

$$\delta(\tilde{t}) \in \text{Col}(\mathcal{H}^*) \iff \delta(\tilde{t}) \in \mathcal{H}_K \quad \text{и} \quad \frac{1}{p} \log \frac{\sigma\delta}{\delta^p} = \sum_{(c,p)=1} w_c \tilde{t}^c, \quad \text{где все } w_c \in W(k).$$

Как и ранее, $\gamma: G(m_{k,\tilde{t}}) \rightarrow G(m_K)$ и $\gamma: \mathcal{H}_K \rightarrow K^*$ являются морфизмами подстановки $\tilde{t} \mapsto \pi$.

4.4.2. Основная теорема. Допустим, что поле K содержит примитивный корень из 1 степени p^M .

Если $\beta = \beta(\tilde{t}) \in G_{\mathcal{A}}(m_{k,\tilde{t}})$, пусть

$$\begin{aligned} \Phi_1(\beta) &= \gamma_{\tilde{t}}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta) - (\mathcal{A}^*/p) \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta) \\ 0 \end{pmatrix} \in (\mathcal{L}_{k,\tilde{t}})^h, \\ \Phi_2(\beta) &= \gamma_{\tilde{t}}^{-1} \mathcal{E}^{-1} \text{d} \begin{pmatrix} (\sigma/p) \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta) \\ \sigma \bar{m}_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} \in (\Omega_{\mathcal{L}_{k,\tilde{t}}}^1)^h. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА В. Пусть $\beta \in G_{\mathcal{A}}(m_{k,\tilde{t}})$, $\delta \in \mathcal{H}_K$ и

$$B(\beta, \delta) = {}^t(B_1, \dots, B_h) = (\text{Res}_{\tilde{t}=0} \circ \text{Tr}) \left(\Phi_1(\beta) d_{\log} \delta + \frac{1}{p} \log \left(\frac{\sigma \delta}{\delta^p} \right) \Phi_2(\beta) \right) \in \mathbb{Q}_p^h,$$

где $\text{Tr}: W_{\mathbb{Q}_p}(k) \rightarrow \mathbb{Q}_p$ – отображение следа и $\text{Res}_{\tilde{t}=0}$ – вычет. Тогда

$$B(\beta, \delta) \in \mathbb{Z}_p^h$$

и

$$(\gamma(\beta), \gamma(\delta))_{G_{\mathcal{A}}} = B_1 o_M^1 + \dots + B_h o_M^h.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно использовать формальное тождество из п. 4.4.1, чтобы представить правую часть выражения для $B(\beta, \delta)$ (см. выше) в форме, аналогичной формуле Брюкнера–Востокова:

$$\begin{aligned} B(\beta, \delta) &= {}^t(B_1, \dots, B_h) \\ &= (\text{Res}_{\tilde{t}=0} \circ \text{Tr}) \left\{ \gamma_{\tilde{t}}^{(-1)} \left[\left(\text{id} - \begin{pmatrix} \mathcal{A}^*/p \\ \text{id} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta) \\ \bar{m}_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} d_{\log} \delta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{p} \log \frac{\sigma \delta}{\delta^p} \begin{pmatrix} \mathcal{A}^*/p \\ \text{id} \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta) \\ \bar{m}_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} \right] \right\}. \end{aligned}$$

4.5. Доказательство теоремы В. Рассмотрим спаривание

$$(\cdot, \cdot]_{k,\tilde{t}}: G_{\mathcal{A}}(m_{k,\tilde{t}}) \times \mathcal{H}_K \longrightarrow \mathbb{Q}_p^h,$$

заданное для $\beta \in G_{\mathcal{A}}(m_{k,\tilde{t}})$ и $\delta \in \mathcal{H}_K$ с помощью выражения

$$(\beta, \delta]_{k,\tilde{t}} = (\text{Res}_{\tilde{t}=0} \circ \text{Tr}) \left(\Phi_1(\beta) d_{\log} \delta + \frac{1}{p} \log \frac{\sigma \delta}{\delta^p} \Phi_2(\beta) \right).$$

Это спаривание имеет следующие свойства.

4.5.1. Для любых $\beta \in G_{\mathcal{A}}(m_{k,\tilde{t}})$ и $\delta \in \mathcal{H}_K$ выполнено $(\beta, \delta]_{k,\tilde{t}} \in \mathbb{Z}_p^h$.

Действительно, достаточно заметить, что все элементы матрицы $\mathcal{V}_{\tilde{t}}^{-1}$ имеют главные части с коэффициентами в $W(k)$,

$$\begin{aligned} \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta) - (\mathcal{A}^*/p) \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta) &= \Theta_{G_{\mathcal{A}},1}^{-1}(\beta) \in m_{k,\tilde{t}}^n = (\tilde{t}W(k)[[\tilde{t}]])^n, \\ d \begin{pmatrix} (\sigma/p) \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta) \\ \sigma \bar{m}_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} &\in (\Omega_{W(k)[[\tilde{t}]]}^1)^h, \\ d_{\log} \delta &\in \tilde{t}^{-1}W(k)[[\tilde{t}]] d\tilde{t}, \quad (1/p) \log(\sigma \delta / \delta^p) \in m_{k,\tilde{t}}. \end{aligned}$$

4.5.2. Спаривание $(\cdot, \cdot]_{k,\tilde{t}}$ является $\mathbb{Z}_p$ -линейным по обоим аргументам.

Это свойство очевидно из определения спаривания. Таким образом, наше спаривание может быть рассмотрено как гомоморфизм $(\cdot, \cdot]_{k,\tilde{t}}: G_{\mathcal{A}}(m_{k,\tilde{t}}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{H}_K \rightarrow \mathbb{Z}_p^h$.

4.5.3. Доказательство следующего предложения будет дано в п. 4.6 (см. ниже).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $\gamma(\delta) = 1$, то для любого $\beta \in G_{\mathcal{A}}(m_{k,\tilde{t}})$ имеем

$$(\beta, \delta]_{k,\tilde{t}} \equiv 0 \pmod{p^M}.$$

4.5.4. Теорема В выполнена для любых $\beta \in G_{\mathcal{A}}(m_{k,\tilde{t}})$ и $\delta \in \text{Col } \mathcal{K}^* \subset \mathcal{H}_K$.

Согласно теореме А1 из п. 4.2 достаточно показать, что в этом случае

$$\text{Res} \left(\frac{1}{p} \log \frac{\sigma\delta}{\delta^p} \Phi_2(\beta) \right) \in p^M \mathbb{Z}_p^h.$$

ЛЕММА. $d(\mathcal{V}_{\tilde{t}}^{-1}) = p^M \mathcal{W}_{\tilde{t}} d\tilde{t}$, где матрица $\mathcal{W}_{\tilde{t}}$ имеет коэффициенты в

$$[x_0]^{-2p/(p-1)} \mathcal{G}_{p,p/(p-1)}^0 \cap \mathcal{L}_{k,\tilde{t}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения $\mathcal{V}_{\tilde{t}}$ ясно, что все коэффициенты матрицы $d(\mathcal{V}_{\tilde{t}})$ принадлежат $p^M \Omega_{W(k)[[\tilde{t}]]}^1$. Согласно пп. 3.4.5, 3.1.2 и 3.6.1 матрица $\mathcal{V}_{\tilde{t}}^{-1}$ имеет коэффициенты в

$$\frac{1}{\psi} W(R)[[\psi^{p-1}/p]] + p^M \left(\frac{1}{p\psi} \mathcal{R} \right) \subset [x_0]^{-p/(p-1)} \mathcal{G}_{p,1}^0 + p^M [x_0]^{-2p/(p-1)} \mathcal{G}_{p,1}^0.$$

Теперь из равенства

$$d(\mathcal{V}_{\tilde{t}}^{-1}) = -\mathcal{V}_{\tilde{t}}^{-1} d(\mathcal{V}_{\tilde{t}}) \mathcal{V}_{\tilde{t}}^{-1}$$

вытекает, что $d(\mathcal{V}_{\tilde{t}}^{-1}) = p^M \mathcal{W}_{\tilde{t}} d\tilde{t}$, где $\mathcal{W}_{\tilde{t}}$ имеет коэффициенты в

$$[x_0]^{-2p/(p-1)} \mathcal{G}_{p,1}^0 [p[x_0]^{-p/(p-1)}] \subset [x_0]^{-2p/(p-1)} \mathcal{G}_{p,p/(p-1)}^0.$$

Лемма доказана.

Из леммы п. 3.6.2 следует, что главные части элементов матрицы $\mathcal{W}_{\tilde{t}}$ имеют p -целые коэффициенты. Следовательно, если $\mathcal{V}_{\tilde{t}}^{-1} = ((v_{ij}(\tilde{t})))_{1 \leq i,j \leq h}$ и $v_{ij}(\tilde{t}) = \sum_{u \in \mathbb{Z}} w_{uij} \tilde{t}^u$, где все $w_{uij} \in W_{\mathbb{Q}_p}(k)$, то $uw_{uij} \in p^M W(k)$, если $u < 0$. В частности, если $u < 0$, $(u, p) = 1$, то $w_{uij} \in p^M W(k)$.

Теперь заметим, что существует векторный степенной ряд $F(\tilde{t}) \in (W(k)[[\tilde{t}]])^h$ такой, что

$$d \left(\begin{pmatrix} (\sigma/p) \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta) \\ \sigma \bar{m}_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} \right) = F(\tilde{t}^p) \frac{d\tilde{t}}{\tilde{t}},$$

и $\delta \in \text{Col } \mathcal{K}^* \subset \mathcal{H}_K$ влечет

$$\frac{1}{p} \log \frac{\sigma\delta}{\delta^p} = \sum_{(c,p)=1} \alpha_c \tilde{t}^c,$$

где все $\alpha_c \in W(k)$ (см. п. 4.1.4).

Следовательно, выражения для координат вычета

$$\frac{1}{p} \log \left(\frac{\sigma\delta}{\delta^p} \right) \mathcal{V}_{\tilde{t}}^{-1} F(\tilde{t}^p) \frac{d\tilde{t}}{\tilde{t}}$$

являются линейными комбинациями с коэффициентами из $W(k)$ элементов $w_{uij} \in W_{\mathbb{Q}_p}(k)$, где $(u, p) = 1$, $u < 0$. Но все такие w_{uij} лежат в $p^M W(k)$.

4.5.5. Теорема В выполнена для $\delta = E_M(\tilde{t}) \in 1 + m_{k,\tilde{t}}$ из предложения 4.3.2 и для любого $\beta \in G_{\mathcal{A}}(m_{k,\tilde{t}})$.

Согласно предложению 4.3.3 достаточно проверить, что в этом случае $B(\beta, \delta) \in p^M \mathbb{Z}_p^h$. Согласно следствию п. 4.3.2 $d_{\log} \delta \in p^M \Omega_{W(k)[[\tilde{t}]]}^1$, а главные части координат вектора $\Phi_1(\beta)$ имеют p -целые коэффициенты. Таким образом,

$$\text{Res}(\Phi_1(\beta) d_{\log} \delta) \in p^M \mathbb{Z}_p^h.$$

Из конструкции p^M -примарного элемента $E_M(\tilde{t})$ вытекает, что

$$(1/p) \log(\sigma \delta / \delta^p) = -\delta_0 s_M(\tilde{t})$$

(см. п. 4.3.2).

Как было отмечено в п. 4.3.3, $s_M(\tilde{t}) = \psi + p^M w$, где $w \in \mathcal{G}_{p,1}^0$.

Применяя следствие п. 3.4.5, получаем, что матрица $s_M(\tilde{t}) \psi_{\tilde{t}}^{-1}$ имеет коэффициенты в

$$\begin{aligned} & (\psi + p^M w) \left(\frac{1}{\psi} W(R) [[\psi^{p-1}/p]] + p^M \left(\frac{1}{p\psi} \mathcal{R} \right) \right) \\ & \subset \mathcal{G}_{p,0}^0 + p^M [x_0]^{-p/(p-1)} \mathcal{G}_{p,p/(p-1)}^0. \end{aligned}$$

Действительно, $W(R) [[\psi^{p-1}/p]] \subset \mathcal{G}_{p,0}^0$ (см. п. 3.1.2),

$$\psi \left(\frac{1}{p\psi} \mathcal{R} \right) \subset [x_0]^{p/(p-1)} \mathcal{G}_{p,1}^0 [x_0]^{-2p/(p-1)} \mathcal{G}_{p,1}^0 = [x_0]^{-p/(p-1)} \mathcal{G}_{p,1}^0$$

(см. пп. 3.1.2, 3.6.1); так как $w \in \mathcal{G}_{p,1}^0$, имеем

$$\frac{w}{\psi} W(R) [[\psi^{p-1}/p]] \subset [x_0]^{-p/(p-1)} \mathcal{G}_{p,1}^0;$$

а из того, что $p[x_0]^{-p/(p-1)} \in \mathcal{G}_{p,p/(p-1)}^0$, вытекает

$$p^M w \left(\frac{1}{p\psi} \mathcal{R} \right) \subset p[x_0]^{-2p/(p-1)} \mathcal{G}_{p,1}^0 \subset [x_0]^{-p/(p-1)} \mathcal{G}_{p,p/(p-1)}^0.$$

Следовательно, главные части матрицы $s_M(\tilde{t}) \psi_{\tilde{t}}^{-1}$ имеют коэффициенты в $p^M W(k)$. Отсюда вытекает, что

$$\text{Res}(\delta_0 s_M(\tilde{t}) \Phi_2(\beta)) \equiv 0 \pmod{p^M}.$$

Очевидно, приведенные выше свойства 4.5.1–4.5.5 дают утверждение теоремы В.

4.6. Доказательство предложения 4.5.3. Мы можем проводить вычисления в $\mathcal{G}_{(p-1)^+, p-1} \otimes_{\mathcal{L}_{k, \tilde{t}}} \Omega_{\mathcal{L}_{k, \tilde{t}}}^1 \supset \Omega_{\mathcal{L}_{k, \tilde{t}}}^1$.

4.6.1. Равенство $\gamma(\delta) = 1$ влечет существование $\log \delta \in \mathcal{G}_{p,0}^0 \cap \mathcal{L}_{k, \tilde{t}}$. Следовательно,

$$\text{Res}(\Phi_1(\beta) d_{\log} \delta) = -\text{Res}(\log \delta d\Phi_1(\beta)).$$

Лемма из п. 4.5.4 дает

$$d\Phi_1(\beta) \equiv \mathcal{V}_{\tilde{t}}^{-1} d \left(\frac{\bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta) - (\mathcal{A}^*/p)\bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta)}{0} \right) \pmod{p^M [x_0]^{-2p/(p-1)} \mathcal{G}_{p,p/(p-1)}^0 d\tilde{t}}.$$

Теперь мы можем применить лемму из п. 3.6.2 и формальное тождество из начала п. 4.4, чтобы получить следующее сравнение:

$$\begin{aligned} \text{Res}(\Phi_1(\beta) d_{\log} \delta) &\equiv -\text{Res} \left(\log \delta \mathcal{V}_{\tilde{t}}^{-1} d \left(\frac{\bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta)}{\bar{m}_{\mathcal{A}}(\beta)} \right) \right) \\ &\quad + \text{Res} \left(\log \delta \mathcal{V}_{\tilde{t}}^{-1} \mathcal{E}^{-1} d \left(\frac{(\sigma/p)\bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta)}{\sigma\bar{m}_{\mathcal{A}}(\beta)} \right) \right) \pmod{p^M}. \end{aligned}$$

4.6.2. Тот факт, что $\delta \in 1 + m_{k, \tilde{t}}$, влечет $(1/p) \log(\sigma\delta/\delta^p) = (\sigma/p) \log \delta - \log \delta$. С помощью последнего сравнения из п. 4.6.1 мы можем теперь записать

$$\begin{aligned} \text{Res} \left(\Phi_1(\beta) d_{\log} \delta + \frac{1}{p} \log \frac{\sigma\delta}{\delta^p} \Phi_2(\beta) \right) \\ \equiv -\text{Res} \left(\log \delta \mathcal{V}_{\tilde{t}}^{-1} d \left(\frac{\bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta)}{\bar{m}_{\mathcal{A}}(\beta)} \right) \right) + \text{Res} \left(\frac{\sigma}{p} \log \delta \Phi_2(\beta) \right) \pmod{p^M}. \end{aligned}$$

4.6.3. Пусть $\omega(\beta) = \mathcal{V}_{\tilde{t}}^{-1} d \left(\frac{\bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta)}{\bar{m}_{\mathcal{A}}(\beta)} \right)$.

ЛЕММА. а) $\sigma_{\mathcal{G}}(\log \delta \omega(\beta)) \in \Omega_{\mathcal{L}_{k, \tilde{t}}}^1 u$, следовательно,

$$\sigma_{\mathcal{G}}(\log \delta \omega(\beta)) = \sigma(\log \delta \omega(\beta)).$$

б) $(\sigma/p)(\log \delta \omega(\beta)) - (\sigma/p)(\log \delta) \Phi_2(\beta) = p^M Y d\tilde{t}$, где Y имеет координаты в $\mathcal{L}_{k, \tilde{t}} \cap [x_0]^{-2p/(p-1)} \mathcal{G}_{p,p/(p-1)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вообще говоря, $\sigma_{\mathcal{G}} \omega(\beta)$ не определен на $\Omega_{\mathcal{L}_{k, \tilde{t}}}^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Можно записать (см. пп. 3.4.4 и 3.4.5)

$$\log \delta \omega(\beta) = \frac{\log \delta}{t^+} (E_h + p^M \Delta_1)^t \mathcal{V}^D d \left(\frac{\bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta)}{\bar{m}_{\mathcal{A}}(\beta)} \right).$$

Матрица Δ_1 имеет коэффициенты в

$$(t/\psi)W(R)[[pt/\psi]] + (\psi^{p-2}/p)W(R)[[\psi^{p-1}/p]]$$

(см. п. 3.4.4.). По построению элемента t (см. п. 1.7.2) имеется равенство $t/\psi = 1/(\sigma^{-1}\psi)$ и, следовательно, $\sigma_{\mathcal{G}}(t/\psi) = 1/\psi \in [x_0]^{-p/(p-1)}\mathcal{G}_{p,1}^0$. Отсюда

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathcal{G}}((t/\psi)W(R)[[pt/\psi]]) \\ \subset [x_0]^{-p/(p-1)}\mathcal{G}_{p,1}^0[p[x_0]^{-p/(p-1)}] \subset [x_0]^{-p/(p-1)}\mathcal{G}_{p,p/(p-1)}^0. \end{aligned}$$

Очевидно,

$$\sigma((\psi^{p-2}/p)W(R)[[\psi^{p-1}/p]]) \subset (\psi^{p-2}/p)W(R)[[\psi^{p-1}/p]] \subset [x_0]^{-p/(p-1)}\mathcal{G}_{p,1}^0.$$

Таким образом, $\sigma_{\mathcal{G}}\Delta_1$ имеет коэффициенты в $[x_0]^{-p/(p-1)}\mathcal{G}_{p,p/(p-1)}^0$ и, следовательно, $\sigma_{\mathcal{G}}(\Delta_1) = \sigma\Delta_1$.

Из того, что $\delta \in 1 + m_{k,\tilde{t}}^1$, вытекает

$$\frac{\log \delta}{t^+} \in \frac{t}{\psi}W(R) + \frac{\psi^{p-2}}{p}W(R)[[\psi^{p-1}/p]].$$

Согласно изложенному выше

$$\sigma_{\mathcal{G}}\left(\frac{\log \delta}{t^+}\right) \in \frac{1}{\psi}W(R) + \frac{\psi^{p-2}}{p}W(R)[[\psi^{p-1}/p]] \subset [x_0]^{-p/(p-1)}\mathcal{G}_{p,1}^0.$$

Следовательно,

$$\sigma_{\mathcal{G}}\left(\frac{\log \delta}{t^+}\right) = \sigma\left(\frac{\log \delta}{t^+}\right) = \frac{\sigma}{p}(\log \delta)\frac{1}{t^+},$$

потому что $\sigma(\log \delta) = \sigma\left(\frac{\log \delta}{t^+}\right)\sigma t^+$ и $\sigma t^+ = pt^+$.

Очевидно, $\sigma_{\mathcal{G}}(t\mathcal{V}^D)$, $\sigma_{\mathcal{G}}(\bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta))$, $\sigma_{\mathcal{G}}(\bar{m}_{\mathcal{A}}(\beta))$ имеют координаты в $\mathcal{G}_{p,0}^0$. Таким образом, $\sigma_{\mathcal{G}}(\log \delta \omega(\beta))$ имеет координаты в

$$([x_0]^{-2p/(p-1)}\mathcal{G}_{p,p/(p-1)}^0 \cap \mathcal{G}_{k,\tilde{t}})\mathrm{d}\tilde{t} \subset \Omega_{k,\tilde{t}}^1.$$

б) Вычисления из п. а) дают

$$\sigma(\log \delta \omega(\beta)) = \left(\frac{\sigma}{p} \log \delta\right)(E_h + p^M \sigma \Delta_1) \frac{1}{t^+} t(\sigma \mathcal{V}^D) \mathrm{d} \begin{pmatrix} \sigma \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta) \\ \sigma \bar{m}_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим векторную дифференциальную форму

$$\omega_1 = \left(\frac{\sigma}{p} \log \delta\right)(\sigma \Delta_1) \frac{1}{t^+} t(\sigma \mathcal{V}^D) \mathrm{d} \begin{pmatrix} \sigma \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta) \\ \sigma \bar{m}_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix}.$$

Теперь оценки из п. а) дают $\omega_1 = pY_1 \mathrm{d}\tilde{t}$, где $Y_1 \in [x_0]^{-2p/(p-1)}(\mathcal{G}_{p,p/(p-1)}^0)^h$, так как $\mathrm{d} \begin{pmatrix} \sigma \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta) \\ \sigma \bar{m}_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} \in (p\Omega_{W(k)[[\tilde{t}]]}^1)^n$.

Если Δ – матрица из п. 3.4.3, то по аналогичным соображениям

$$\omega_2 = \left(\frac{\sigma}{p} \log \delta\right) \Delta \frac{1}{t^+} t(\sigma \mathcal{V}^D) \mathrm{d} \begin{pmatrix} \sigma \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta) \\ \sigma \bar{m}_{\mathcal{A}}(\beta) \end{pmatrix} = pY_2 \mathrm{d}\tilde{t},$$

где Y_2 имеет координаты в $[x_0]^{-2p/(p-1)}\mathcal{G}_{p,1}^0$. Следовательно,

$$\sigma(\log \delta \omega(\beta)) = \left(\frac{\sigma}{p} \log \delta \right) (E_h - p^M \Delta) \frac{1}{t^+} {}^t(\sigma \psi^D) d \left(\frac{\sigma \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta)}{\sigma \bar{m}_{\mathcal{A}}(\beta)} \right) + p^{M+1} (Y_1 - Y_2) d\tilde{t}.$$

Теперь мы можем использовать свойства матрицы ψ^D из п. 1.8:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} {}^t(\sigma \psi^D) d \left(\frac{\sigma \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta)}{\sigma \bar{m}_{\mathcal{A}}(\beta)} \right) &= {}^t \left\{ \begin{pmatrix} \sigma \\ \sigma/p \end{pmatrix} \psi^D \right\} d \left(\frac{(\sigma/p) \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta)}{\sigma \bar{m}_{\mathcal{A}}(\beta)} \right) \\ &= {}^t \psi^D \mathcal{E}^{-1} d \left(\frac{(\sigma/p) \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta)}{\sigma \bar{m}_{\mathcal{A}}(\beta)} \right) \\ &= t^{+\psi-1} \mathcal{E}^{-1} d \left(\frac{(\sigma/p) \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta)}{\sigma \bar{m}_{\mathcal{A}}(\beta)} \right). \end{aligned}$$

Из определения матрицы Δ вытекает, что $(E_h - p^M \Delta) \psi^{-1} = \psi_{\tilde{t}}^{-1}$, таким образом,

$$\sigma(\log \delta \omega(\beta)) = \sigma(\log \delta) \psi_{\tilde{t}}^{-1} \mathcal{E}^{-1} d \left(\frac{(\sigma/p) \bar{l}_{\mathcal{A}}(\beta)}{\sigma \bar{m}_{\mathcal{A}}(\beta)} \right) + p^{M+1} Y d\tilde{t},$$

где $Y \in [x_0]^{-2p/(p-1)}\mathcal{G}_{p,p/(p-1)}^0 \cap \mathcal{L}_{k,\tilde{t}}$. Лемма доказана.

4.6.4. Вектор Y из предыдущей леммы имеет p -целую главную часть, следовательно,

$$\text{Res} \left(\frac{\sigma}{p} \log \delta \Phi_2(\beta) \right) \equiv \text{Res} \left(\frac{\sigma}{p} (\log \delta \omega(\beta)) \right) = \sigma \text{Res}(\log \delta \omega(\beta)) \pmod{p^M}.$$

Таким образом, сравнение из п. 4.6.2 дает

$$(\beta, \delta]_{k,\tilde{t}} \equiv -\text{Tr}(\text{Res}(\log \delta \omega(\beta))) + \text{Tr}(\sigma \text{Res}(\log \delta \omega(\beta))) = 0 \pmod{p^M}.$$

Предложение доказано.

Список литературы

1. *Abrashkin V. A.* Ramification in etale cohomology // Invent. Math. 1990. V. 101. P. 631–640.
2. *Абрашкин В. А.* Фильтрация ветвления группы Галуа локального поля. II // Тр. МИРАН. 1995. Т. 208. С. 18–69.
3. *Abrashkin V. A.* A remark about Brückner–Vostokov explicit reciprocity law. Preprint MPI/94-61. Bonn.
4. *Artin E., Hasse H.* Die beiden Ergänzungssätze zum Reziprozitätsgesetz der l^n -ten Einheitswurzeln // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1928. V. 6. P. 46–162.
5. *Benois D.* Periodes p -adiques et lois de reciprocite explicites. Preprint Universite Bordeaux, 1995.

6. Бенуа Д. Г., Востоков С. В. Норменное спаривание в формальных группах и представлениях Галуа // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. №6. С. 1169–1197.
7. Berthelot P., Messing W. Theorie de Deudonne Cristalline III: Theoremes d'Equivalence et de Pleine Fidelite // The Grotendieck Festschrift. A Collection of Articles Written in Honor of 60th Birthday of Alexander Grothendieck. 1990. V. 1. P. 173–247.
8. Brückner H. Eine explizite Formel zum Reziprozitätsgesetz für Primzahlexponenten p // Hasse H., Roquette P. Algebraische Zahlentheorie. Bericht einer Tagung des Math. Inst. Obervollfach, 1964. Bibliographisches Institut. Mannheim, 1966.
9. Colmez P. Periodes p -adiques des varietes abeliennes // Math. Ann. 1992. V. 292. P. 629–644.
10. Decauwert J.-M. Classification des A -modules formels // C.R. Acad. Sci. Paris. Serie A. 1976. V. 283. P. 1413–1416.
11. Fontaine J.-M. Groupes p -divisibles sur les corps locaux // Asterisque. 1977. V. 47–48.
12. Fontaine J.-M. Modules galoisiens, modules filtres et anneaux de Barsotti-Tate // Asterisque. 1979. V. 65. P. 3–80.
13. Fontaine J.-M. Sur certains types de representations p -adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti-Tate // Ann. Math. 1982. V. 115. P. 529–577.
14. Fontaine J.-M. Representations p -adiques des corps locaux (1-ere partie) // The Grothendieck Festschrift. A Collection of Articles Written in Honor of 60th Birthday of Alexander Grothendieck. 1990. V. 2. P. 249–309.
15. Fontaine J.-M., Laffaille G. Construction de representations p -adiques // Ann. Sci. E.N.S. 4 serie. 1982. V. 15. P. 547–608.
16. Hazewinkel M. Formal groups and applications. New York: Academic Press, 1978.
17. Kato K. The explicit reciprocity law and cohomology of Fontaine–Messing // Bull. Soc. Math. France. 1991. V. 119. P. 397–441.
18. Колывагин В. А. Формальные группы и вычет норменного символа // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. №5. С. 1054–1120.
19. Laubie F. Extensions de Lie et groupes d'automorphismes de corps locaux // Compos. Math. 1988. V. 67. P. 165–189.
20. Шафаревич И. Р. Общий закон взаимности // Матем. сб. 1950. Т. 26(68). С. 113–146.
21. Востоков С. В. Явная форма закона взаимности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. №6. С. 1288–1321.
22. Востоков С. В. Норменное спаривание в формальных модулях // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 42. №4. С. 765–794.
23. Wintenberger J.-P. Le corps des normes de certaines extensions infinies des corps locaux; application // Ann. Sci. Ec. Norm. Super. Ser. IV. 1983. V. 16. P. 59–89.

117966 Москва, Вавилова 42, МИ РАН
 E-mail address: victor@abrvc.mian.su

Поступило в редакцию
 9.I.1996